UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

DAS SEQUÊNCIAS À PROPORCIONALIDADE DIRETA:

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO NO 6.º ANO DE ESCOLARIDADE

Isilda de Jesus Correia Rodrigues Pedro

Relatório

Mestrado em Educação

Didática da Matemática

2013

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

DAS SEQUÊNCIAS À PROPORCIONALIDADE DIRETA:

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO NO 6.º ANO DE ESCOLARIDADE

Isilda de Jesus Correia Rodrigues Pedro

Relatório orientado pela Professora Doutora Hélia Margarida Pintão de Oliveira

Mestrado em Educação

2013

Resumo

A experiência de ensino que integra este relatório decorreu no tópico Sequências e Regularidades e o início do estudo da Proporcionalidade Direta e foi desenvolvida numa turma do 6.º ano do ensino básico, de que a autora é a professora de Matemática. Foram planeadas sete tarefas envolvendo sequências pictóricas e regularidades numéricas, algumas das quais com o recurso à folha de cálculo, com o objetivo de promover a capacidade de generalização e a introdução progressiva da linguagem simbólica, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. O estudo realizado pretende identificar as estratégias de generalização que os alunos utilizam, assim como as representações a que recorrem para exprimir essa generalização, e compreender como estes evoluem, quanto a esses aspetos, ao longo da experiência de ensino.

Para a realização do estudo, foi feita uma recolha documental das resoluções escritas de quatro alunos da totalidade das tarefas da experiência de ensino. A análise das estratégias de generalização e das representações foi realizada de acordo com um quadro de categorias proveniente de outros estudos e que foi ajustado tendo em conta uma análise preliminar dos dados.

Os alunos começam por recorrer a estratégias do tipo Múltiplo da Diferença que, ainda assim, se revelaram adequadas para obterem uma regra geral e vão gradualmente recorrendo a estratégias de tipo Funcional que lhes permitem resolver as várias situações com que se confrontam. Três dos alunos vão progredindo no uso de uma linguagem mais formal, no entanto, em algumas tarefas voltam a usar linguagem natural, o que poderá decorrer do grau de dificuldade da estrutura envolvida ou da sua familiaridade e confiança com a estratégia adotada.

Os contextos das figuras mostraram-se fundamentais para apoiar os alunos a usar linguagem pré-simbólica e, gradualmente, a simbólica, ajudando a dar sentido às duas variáveis presentes em cada situação. Ao transitarem das tarefas em que a relação funcional surgia sob a forma de sequência pictórica para as duas tarefas que apresentavam situações de proporcionalidade direta em tabelas, os alunos são capazes de usar raciocínios funcionais, apoiados nas relações numéricas presentes, e usam linguagem simbólica próxima da que desenvolveram nas tarefas anteriores.

Palavras-chave: Generalização, representações, sequências, proporcionalidade direta, 6.º ano.

Abstract

The teaching experience that integrates this report concerns the topic of Sequences and Regularities and the beginning of the topic Direct Proportionality, and was developed in a class of 6th grade from basic education, in which the author is the mathematics teacher. Seven tasks involving pictorial sequences and numerical regularities were developed, some of them using the spreadsheet, aiming to promote the generalization ability and the progressive introduction of symbolic language, contributing to the development of students´ algebraic thinking. The study conducted aims to identify generalization strategies used by students, as well as the representations they use to express that generalization, and understand how they evolve regarding these aspects, along the teaching experience.

To develop this study, a collection of the written resolutions of four students was conducted, regarding all tasks of the teaching experience. The analysis of generalization strategies and representations was made according a framework of categories from previous studies and was adjusted according a preliminary data analyses.

Students begin by resorting to strategies of Multiple of the Difference, which nevertheless reveals to be adequate to obtain a general rule, and gradually they resort to Functional strategies types, which allow them to solve several situations they face. Three students succeed in the use of a more formal language, although they return to use a natural language in some tasks, which might result from the difficulty level of the structure involved or from their familiarity or confidence with the adopted strategy.

The context of the figures seems to be fundamental to support students to use pre-symbolic language, and gradually symbolic language, which helps them to attribute meaning to the two variables involved in each situation. While moving from tasks in which the functional relation appeared in the form of pictorial sequence to the two tasks representing direct proportionality in tables, students are able to use functional reasoning, supported by the numeric relations, and use symbolic language that is close to the one they developed in previous tasks.

Keywords: Generalization, representations, sequences, direct proportionality, 6th grade.

Agradecimentos

O desenvolvimento deste trabalho só foi possível por ter a meu lado um conjunto de pessoas admiráveis que direta ou indiretamente contribuíram para a sua concretização.

O meu mais profundo e sincero agradecimento a uma pessoa excelente a nível profissional e pessoal, a minha orientadora. Obrigada pelos ensinamentos, pelo interesse, ajuda e disponibilidade que sempre demonstrou ao longo deste projeto. Obrigada também por ter acreditado em mim, pela compreensão nas situações adversas, pelo incentivo em todas as ocasiões e por me fazer crer que tudo é possível mesmo quando o trajeto não é fácil. Foi uma lição de vida trabalhar com a Professora e também um privilégio por me ter acompanhado neste percurso.

À minha filha Inês e aos meus pais, pelo apoio e dedicação incondicional que sempre me deram, pela confiança que depositam em mim e por permanecerem sempre ao meu lado.

À Paula e ao Pedro pelo apoio, pelas palavras de encorajamento e por serem modelos para a minha vida.

Ao Jorge, companheiro de uma vida, que apesar de já não estar entre nós, sempre me apoiou em todas as minhas decisões, acreditou em mim e sempre me incentivou a investir na minha formação. Foi graças a ele que iniciei este projeto que agora termino.

A todos, muito obrigada.

Índice geral

Índice de figuras

Índice de quadros

Capítulo 1

Introdução

Neste primeiro capítulo identificam-se as razões subjacentes à realização deste estudo, apresentam-se os seus objetivos e questões de investigação e descreve-se, sucintamente, a estrutura deste relatório.

1.1. Motivação para a realização do estudo

O presente estudo teve por base a indiscutível pertinência da Álgebra no contexto da matemática escolar e, consequentemente, a necessidade em promover nos alunos do 2.º ciclo, a ampliação do seu raciocínio abstrato e o desenvolvimento da generalização, antes da formalização da Álgebra nos anos subsequentes.

O desenvolvimento do pensamento algébrico envolve um processo longo de interiorização e maturação que emerge, primeiramente, de uma forma simples e que conduz a processos sofisticados do pensamento matemático. Deste modo, considera-se fundamental proporcionar desde cedo, e em contextos matemáticos apropriados, um enquadramento que promova e desenvolva essas capacidades.

A análise de situações que ocorrem em sala de aula demonstra as dificuldades inerentes à capacidade de abstração dos alunos, fundamental no pensamento algébrico, e a necessidade de criar situações de aprendizagem que contrariem essa condição.

Este estudo tem presente a relevância inequívoca da Álgebra no currículo e pretende proporcionar situações de aprendizagem significativas aos alunos através de tarefas delineadas para o efeito. O surgimento do Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) deu um contributo muito importante para o meu processo de tomada de consciência do importante papel da Álgebra no percurso escolar dos alunos e sobre a necessidade de uma reconceptualização de abordagem deste tema. O Programa é assertivo ao referir "A investigação de regularidades, tanto em sequências numéricas finitas ou infinitas, como em representações geométricas deve ser tomada como base para o desenvolvimento do pensamento algébrico" (p. 40). No entanto, nem sempre é fácil ao professor compreender o verdadeiro alcance de tais recomendações nem de como podem ser colocadas em prática.

É estimulante poder desenvolver, com alunos mais novos, experiências de aprendizagem que estavam reservadas a níveis de escolaridade mais avançados mas de uma forma mais simples, como é óbvio. Por exemplo, iniciar o processo de generalização através de diferentes formas de representação para além da tradicional linguagem simbólica como linguagem natural, tabelas ou representações gráficas.

A componente tecnológica é outra vertente inovadora no currículo como suporte ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Esta substitui, com muita rapidez, os cálculos rotineiros e permite que a atenção do aluno seja direcionada para a análise das relações numéricas.

Relativamente às capacidades transversais, o Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) salienta a importância da comunicação oral e escrita como forma de expressar, interpretar e compreender ideias. A relevância dada à comunicação é outro aspeto inovador do programa que promove a reflexão e conduz à sistematização de ideias. Assim, assumi a realização deste trabalho como a possibilidade de colocar em prática tais recomendações e proporcionar, aos meus alunos, experiências de aprendizagem mais ricas.

1.2. Objetivo e questões de investigação

O presente estudo incide sobre uma experiência de ensino no tópico Sequências e Regularidades e na parte inicial do tópico da Proporcionalidade Direta, numa turma do 6.º ano do ensino básico, de que sou professora pelo segundo ano consecutivo. Pretende-se promover uma articulação entre os tópicos Sequências e Regularidades e Proporcionalidade Direta, favorecendo o desenvolvimento do pensamento algébrico de uma forma coerente. Foram desenvolvidas sete tarefas envolvendo sequências pictóricas e regularidades numéricas, algumas das quais com o recurso à folha de cálculo, com o objetivo de promover a capacidade de generalização dos alunos e a introdução progressiva da linguagem simbólica, tendo em conta as orientações curriculares do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) relativamente à transversalidade da Álgebra no currículo do 2.º ciclo.

A experiência de ensino contempla tarefas de natureza exploratória centradas no desenvolvimento do pensamento algébrico e fomenta a exploração de regularidades nas sequências apresentadas, a criação de relações matemáticas e o uso de diversos tipos de representações. As tarefas permitem a utilização da folha de cálculo *Excel* como meio complementar de aprendizagem. Este recurso tecnológico, além de estimular o envolvimento dos alunos, é importante neste contexto de aprendizagem pois possibilita o cálculo rápido e evidencia as relações existentes entre os números.

Este estudo pretende compreender o modo como os alunos do 6.º ano realizam generalizações no contexto da exploração de sequências pictóricas e regularidades numéricas e como a sua capacidade de generalização evolui ao longo de uma experiência de ensino.

De acordo com o atrás exposto, delinearam-se as seguintes questões orientadoras do estudo:

- Que estratégias de generalização utilizam os alunos?

- Que representações utilizam os alunos para exprimir essa generalização?

- Que dificuldades evidenciam os alunos quanto às estratégias de generalização e ao uso de representações?

A experiência de ensino envolve todos os alunos de uma turma, no entanto, a análise de dados irá incidir apenas sobre quatro alunos.

1.3. Estrutura do relatório

Este relatório está estruturado em seis capítulos, sendo que no presente capítulo são apresentadas as motivações para o estudo, os objetivos e as questões de investigação. O capítulo dois faz referência ao papel da Álgebra e do pensamento algébrico no currículo tendo por base documentos curriculares e estudos efetuados. Quanto ao terceiro capítulo procede à descrição da planificação da experiência de ensino, onde se efetua uma descrição da escola onde o estudo foi realizado e da turma interveniente no mesmo. Procede-se também à contextualização e caracterização das tarefas e à descrição dos objetivos e, ainda, à dinâmica da aula. O capítulo quatro apresenta os métodos de recolha e análise de dados, onde se descreve a forma de recolha de dados e seleção dos participantes e também as categorias de análise de dados. Finalmente, o quinto capítulo apresenta as conclusões do estudo realizado e uma reflexão pessoal do trabalho desenvolvido.

Capítulo 2

Álgebra e pensamento algébrico: orientações curriculares

Neste capítulo aborda-se o papel da Álgebra e do pensamento algébrico no currículo, tendo por base documentos curriculares e estudos efetuados. Numa primeira secção foca-se os conceitos de pensamento algébrico e de raciocínio proporcional e, na segunda, apresenta-se as orientações curriculares relativamente ao pensamento algébrico e à proporcionalidade direta.

2.1. Álgebra e pensamento algébrico

Tradicionalmente, o ensino da Álgebra associa-se a um conjunto de regras de transformação de expressões algébricas e processos de resolução de equações e sistemas de equações, numa perspetiva de cálculo algébrico (Ponte, Branco & Matos, 2009). A utilização de simbolismo algébrico inerente a esta perspeciva tem causado muitas dificuldades aos alunos, comprometendo as suas aprendizagens futuras.

Em muitas investigações realizadas, a partir dos anos 80, começou a emergir uma perspetiva diferente sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra, que se baseia na ideia de que a Matemática envolve a produção de representações para exprimir generalizações e a transformação de representações (Kaput, 2008). Como tal, segundo este autor, a Álgebra é vista como uma forma de pensamento, levando a considerar fundamental os modos de fazer, pensar e falar sobre a Matemática. Surge assim a ideia de que o que será importante promover, na aprendizagem deste tema, é uma capacidade abrangente: o pensamento algébrico. Para este autor o pensamento algébrico “é algo que se manifesta quando, através de conjeturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais” (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 9).

Para o NCTM (2007) o pensamento algébrico permite ter uma visão unificadora do currículo de matemática e inclui:

- a compreensão de padrões, relações e funções,

- a representação e análise de situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos,

- a utilização de modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas,

- a análise da variação, em diversas situações.

A ideia de pensamento algébrico é central no programa de matemática do ensino básico (ME, 2007), constituindo um aspeto claramente distintivo de programas anteriores. Segundo Oliveira (2009), este nova forma de olhar para a Álgebra pode sintetizar-se nos seguintes pontos: i) os alunos podem começar a pensar algebricamente mais cedo no seu percurso escolar; ii) a capacidade de generalização é um aspeto central na Álgebra e na Matemática, em geral, que ganha em ser promovida desde as etapas iniciais do ensino básico; iii) a utilização de simbolismo algébrico deve ser progressiva, sendo que as múltiplas representações têm um papel importante nesse contexto; iv) deve existir uma forte articulação e continuidade entre os vários tópicos da Álgebra (p. 84).

Kaput (2008) apresenta dois aspetos centrais da Álgebra, numa perspetiva de pensamento algébrico:

(A) Generalização e a expressão da generalização de regularidades e condições, progressivamente, em sistemas de símbolos convencionais;

(B) Pensamento sintaticamente guiado e ações sobre generalizações expressas em sistemas de símbolos.

Diversos estudos nacionais têm também mostrado que o pensamento algébrico pode ser explorado numa fase precoce do percurso escolar dos alunos e que pode promover o desenvolvimento do raciocínio matemático em temas subsequentes (Barbosa, 2009, Branco, 2008; Mestre & Oliveira, 2011; Santos, 2008). Um aspeto comum a estes estudos é o foco no estudo de regularidades numéricas e, muito em particular, de sequência pictóricas, considerando-se estas como um contexto adequado para apoiar os alunos a desenvolverem a capacidade de generalização e o uso progressivo da linguagem simbólica, como vimos, aspetos centrais do pensamento algébrico, segundo Kaput (2008). Também segundo o NCTM (2007), "os padrões constituem uma forma pela qual os alunos mais novos reconhecem a ordem e organizam o seu mundo" (p. 105), constituindo, consequentemente, um contexto apropriado para introduzir ideias algébricas no percurso de aprendizagem dos alunos.

Canavarro (2009) sustenta que "uma abordagem algebrizada da Aritmética poderá contribuir para ancorar de forma mais sustentada a aprendizagem da Álgebra em anos posteriores" (p. 84). A autora relata vários episódios de sala de aula, no 2.º e 3.º anos de escolaridade, que confirmam que o pensamento algébrico pode ser desenvolvido desde cedo. Os alunos envolvidos identificaram estruturas comuns em cada uma das tarefas apresentadas, trabalharam e formalizaram relações e estabeleceram generalizações através de raciocínio por recorrência e através do termo geral. Neste processo foram utilizados, para além da notação aritmética e algébrica, diversos tipos de representação como tabelas, gráficos, esquemas e linguagem natural. Estas formas de representação fomentadoras do raciocínio algébrico auxiliaram também no momento de discussão coletiva ao servirem como modo de transmissão.

Oliveira (2009) sustenta que o simbolismo algébrico pode, nesta fase, construir-se e utilizar-se de uma forma progressiva iniciando-se de um modo informal e conduzindo à respetiva compreensão do seu significado. Esta autora refere ainda que esta situação fomenta, consequentemente, o desenvolvimento da capacidade de generalização sendo esta outra competência essencial do raciocínio matemático.

Mestre e Oliveira (2011) realizaram um estudo num tema de 4.º ano em que se propunha verificar se os alunos manifestam evidências da utilização de pensamento relacional ao resolverem duas tarefas – com e sem contexto de modelação, respetivamente – onde se exploraram igualdades numéricas com duas variáveis. As autoras definiram indicadores para aferir a utilização do pensamento relacional por parte dos alunos nomeadamente a descrição inequívoca das relações existentes nas igualdades numéricas, a identificação da variação expressando o valor e direção da compensação numérica e a construção de generalizações a partir de casos particulares. Do trabalho desenvolvido verifica-se que os alunos evidenciam utilizar o pensamento relacional ao expressarem as relações numéricas existentes e as noções de compensação e variação através de diferentes tipos de representação.

Neste estudo é de salientar o aspeto evolutivo das formas diferenciadas de representação utilizadas pelos alunos para expressar as relações envolvidas nas igualdades numéricas, manifestando a apropriação do conceito de variável num percurso que se traduz na apropriação da linguagem simbólica. Este estudo corrobora a ideia de que, desde muito cedo, é possível ao aluno desenvolver o seu pensamento funcional, adquirir a noção de variável e expressar a generalização através de diferentes formas de representação, nomeadamente a utilização da linguagem natural, a representação em tabelas e representação simbólica.

Cunha (2010) realizou uma investigação sobre a influência da utilização de ferramentas tecnológicas nos processos de aprendizagem dos alunos, centrada na exploração de sequências pictóricas e numéricas. Para isso, recorre ao uso de *applets* no estudo das sequências no 2º ciclo numa turma enquanto noutra utiliza o método convencional (papel e lápis).

A autora refere que em ambas as turmas existiu uma evolução positiva na escolha de estratégias que conduziram à descoberta dos termos distantes das sequências embora conclua que recorrendo às TIC a realização das atividades foi mais célere e autónoma. Além de permitir realizar discussões mais aprofundadas, verificou-se que os alunos utilizaram uma linguagem mais formal na designação da expressão do termo geral da sequência. No entanto, o método convencional possibilitou uma análise mais eficiente das figuras das sequências o que originou o recurso menos frequente a estratégias aditivas na procura dos referidos termos. Contrariamente, os alunos que recorreram às TIC revelaram frequentemente uma análise superficial dos padrões pois demonstraram dificuldade em justificar as suas respostas e em descrever o raciocínio utilizado para encontrar soluções. Este condicionamento da análise aprofundada das figuras é justificado pela investigadora por os alunos terem imediatamente verificado as suas respostas nas *applets* e não terem refletido convenientemente sobre as sequências em questão nem obtido conclusões por si próprios. Para que a utilização das tecnologias seja acompanhada de existência de aprendizagem, a autora conclui ser necessário um suporte escrito muito específico que implique a análise aprofundada das sequências. A desvantagem inerente a este processo observada neste estudo, pela maioria dos alunos, foi que a exigência da escrita conduziu a uma dispersão na exploração da *applet*.

Diversos autores têm procurado caracterizar as estratégias de generalização que os alunos usam na exploração de sequência pictóricas ou numéricas, assumindo a centralidade de tal capacidade no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos (Barbosa, 2009; Santos, 2008). Esse assunto será abordado no capítulo 4 do presente relatório.

O trabalho com as sequências pictóricas pode ser encarado também como envolvendo um raciocínio de tipo funcional. Smith (2008) (citado em Barbosa, 2013, p. 52) os padrões e as relações podem ser analisados de três formas. Podem ser vistos como:

(1) o *pensamento recursivo*, que envolve a descoberta da variação numa sequência de valores;

(2) o *pensamento covariacional*, baseado na análise da forma como duas quantidades variam simultaneamente, considerando a variação como uma parte explícita e dinâmica da descrição de uma função;

(3) a *relação de correspondência*, que consiste na identificação da correlação entre variáveis, ou seja, compreender a relação existente entre cada valor da variável independente e o da variável dependente.

Uma das relações matemáticas centrais que são trabalhados no 2.º ciclo é a de proporcionalidade direta. Esta é também uma relação importante no âmbito do pensamento algébrico (ME, 2007), constituindo a resolução de problemas um destacado objetivo de aprendizagem neste ciclo de escolaridade. Para tal os alunos precisam de desenvolver o raciocínio proporcional.

No entanto, Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988) salientam que na resolução de problemas sobre proporcionalidade nem sempre se utiliza o raciocínio proporcional. Os autores concretizam esta afirmação referindo que, muitas vezes, os alunos utilizam "técnicas" como a regra de três simples, o algoritmo do produto cruzado ou ainda operações com numerais multiplicativos (como o dobro, o triplo, …) de forma simplesmente mecanizada, sem chegar a compreender o que fazem. Estas estratégias não representam, por isso, uma verdadeira apropriação do raciocínio proporcional.

Segundo Lamon (2006), os alunos começam a preparar o seu raciocínio proporcional através do desenvolvimento da capacidade de analisar situações, distinguir as características quantificáveis, verificar como as quantidades variam numa determinada situação e determinar a direção da variação dessas quantidades relativamente umas às outras. A autora considera a verbalização do raciocínio de extrema importância assim como o uso de setas para identificar em que sentido varia cada quantidade. Normalmente, os alunos têm tendência para pensar que duas quantidades aumentam ou diminuem conjuntamente e o uso da linguagem fá-los pensar com mais rigor nas quantidades enquanto o uso das setas serve para lembrar se a quantidade aumenta ou diminui.

Lamon (2006) considera que a constante de proporcionalidade tem um papel fundamental no raciocínio proporcional e é, simultaneamente, complexa pois varia consoante o âmbito e a representação das relações proporcionais. Normalmente, não aparece explícita no contexto mas dissimulada em detalhes. Podemos observar a multiplicidade das suas características através dos seguintes exemplos: quando se trabalha com símbolos é uma constante, num gráfico é um declive, na representação em tabelas, pode ser a diferença entre qualquer número e o anterior ou pode ser a taxa quando uma quantidade muda em relação a outra, expressa como unidade unitária. Na leitura de mapas é a escala, no aumento/diminuição de figuras é o fator escalar.

Silvestre (2012) no seu estudo analisa o desenvolvimento do raciocínio proporcional enquanto parte constituinte do pensamento algébrico. A autora, referindo-se a Greenes e Findell (1998), defende que "é pertinente refletir sobre a introdução das ideias algébricas no desenvolvimento do raciocínio proporcional" (p. 7). Foi elaborada uma unidade de ensino para alunos do 6.º ano de escolaridade e analisadas as estratégias que os alunos utilizam (procedimentos de cálculo e representações) quando resolvem problemas de valor omisso e de comparação e, ainda, problemas que envolvem a verificação de existência de proporcionalidade direta. Nestas tarefas de natureza investigativa/exploratória parte-se do conhecimento informal dos alunos e são estimuladas e valorizadas as suas conceções e estratégias intuitivas.

A autora refere que este conhecimento deve ser ampliado e que é necessária a transição para estratégias proporcionais – escalar e funcional – através da compreensão da relação multiplicativa da proporcionalidade direta. Menciona ainda que as estratégias proporcionais permitem a apropriação do sentido de covariação e invariância e revelam-se fundamentais enquanto estratégias eficazes na resolução de problemas.

Os resultados deste estudo demonstram que a compreensão e utilização de relações multiplicativas permitem aos alunos melhorarem o seu desempenho em aspetos variados do raciocínio proporcional, nomeadamente na averiguação de existência de relações de proporcionalidade direta. A investigadora argumenta que a utilização de estratégias de natureza escalar e funcional deriva da capacidade de generalização dos alunos acerca das relações existentes em cada variável e entre variáveis. Da observância efetuada através das conclusões do estudo é de referir ainda que os alunos utilizam, de uma forma flexível, várias representações, como tabelas, gráficos ou linguagem natural e matemática.

2.2. Orientações curriculares

As alterações incorporadas no Programa de Matemática (ME, 2007) [1] abrangem vários campos de intervenção, nomeadamente, a: i) definição de metas para o ensino e aprendizagem da Matemática, concretizáveis através de Finalidades e Objetivos gerais precisos; ii) introdução de três capacidades transversais à aprendizagem da Matemática – a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática; iii) estreita articulação temática entre os três ciclos de escolaridade; e iv) a definição de quatro temas fundamentais em torno dos quais todo o trabalho de ensino-aprendizagem se vai desenrolar – números e operações, pensamento algébrico, pensamento geométrico e trabalho com dados.

As finalidades presentes no Programa de Matemática fomentam a complementaridade entre a promoção da compreensão e utilização da Matemática em múltiplos contextos e domínios de aplicabilidade, e o desenvolvimento de capacidades e atitudes positivas relativamente à disciplina. Estas finalidades visam o desenvolvimento, entre outros:

- da compreensão de conceitos, relações, métodos e procedimentos matemáticos e da capacidade de os utilizar na análise e resolução de situações ;
- da capacidade de abstração e generalização e de compreender e elaborar argumentações matemáticas e raciocínios lógicos;
- da capacidade de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega;

[1] No ano letivo de 2012/13 era este o programa vigente para o ensino básico, como tal, sempre que refiro o programa de matemática do ensino básico, neste relatório, reporto-me a esse documento.

- da autoconfiança nos seus conhecimentos e capacidades matemáticas, e autonomia e desembaraço na sua utilização;
- do interesse pela Matemática e em partilhar aspetos da sua experiência nesta ciência;
- da capacidade de reconhecer e valorizar o papel da Matemática nos vários setores da vida social e em particular no desenvolvimento tecnológico e científico;
- da capacidade de apreciar aspetos estéticos da Matemática.

(PMEB, 2007, p. 3)

A concretização das finalidades enunciadas no Programa foi definida através de objetivos gerais que promovem o desenvolvimento de conhecimentos, capacidades e atitudes. No que concerne diretamente à unidade de ensino que planeie e desenvolvi com esta turma evidenciam-se os objetivos do PMEB (ME, 2007) relacionados com o conhecimento dos alunos no sentido de compreenderem a Matemática numa perspetiva de lógica e coerência, nomeadamente, a capacidade de: i) reconhecer regularidades e compreender relações; ii) acompanhar e analisar um raciocínio ou estratégia matemática.

Os alunos devem, similarmente, compreender e utilizar diversos tipos de representações e selecionar a apropriada a cada situação, como também refere o PMEB (ME, 2007). Assim, definem-se como objetivos para os alunos, no que diz respeito ao uso de representações: i) ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação; ii) traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural; e iii) elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas.

A resolução de problemas é um contexto por excelência para a consolidação e aprofundamento do conhecimento matemático e salientam-se os seguintes objetivos do PMEB (ME, 2007): i) compreender problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e de os resolver utilizando estratégias apropriadas; ii) apreciar a plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação ao contexto das soluções a que chegam; e iii) monitorizar o seu trabalho e refletir sobre a adequação das suas estratégias, reconhecendo situações em que podem ser utilizadas estratégias diferentes. Defende-se nesse documento que a resolução de problemas fomenta “a aprendizagem dos diversos conceitos, representações e procedimentos matemáticos” (ME, 2007, p. 8).

O desenvolvimento da comunicação matemática é outro dos objetivos do Programa (ME, 2007) que assume uma dimensão importante na estruturação do pensamento matemático. Este permite aos alunos o desenvolvimento da capacidade de descrever o seu raciocínio e os procedimentos utilizados e, também, de interpretar o raciocínio dos outros. Esse documento curricular afirma que os alunos devem: i) usar a linguagem matemática para expressar as ideias matemáticas com precisão; ii) descrever e explicar, oralmente e por escrito, as estratégias e procedimentos matemáticos que utilizam e os resultados a que chegam; iii) argumentar e discutir as argumentações de outros. Indo ao encontro destes objetivos, no presente trabalho, nas aulas foi dada particular importância à discussão em grande grupo, fomentando a justificação pelos alunos dos raciocínios utilizados e a fundamentação das conclusões obtidas e, simultaneamente, aos registos escritos elaborados pelos alunos quando trabalharam nas díades.

A exploração de regularidades, formas e relações matemáticas permite aos alunos a construção de conhecimentos matemáticos de forma autónoma e sustentada e, simultaneamente, promove uma visão positiva da Matemática e da sua utilização. A nível de objetivos de aprendizagem salientam-se: i) explorar regularidades e formular e investigar conjeturas matemáticas; e ii) reconhecer a beleza das formas, regularidades e estruturas matemáticas.

A investigação em Educação Matemática desenvolvida, desde a década de 90, sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais (Oliveira, 2009) teve uma forte influência no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), assim como em orientações curriculares de outros países (NCTM, 2007).

Assim, verifica-se que ao nível da abordagem da Álgebra, o Programa de Matemática (ME, 2007), trouxe uma proposta inovadora de articulação do desenvolvimento do pensamento algébrico ao longo dos três ciclos de escolaridade do ensino básico. A relevância dada ao pensamento algébrico promoveu a iniciação desta competência logo nos primeiros anos do percurso escolar dos alunos e uma exploração e aprofundamento crescentes como tema programático nos anos subsequentes. Analogamente, os princípios orientadores para a educação matemática do NCTM (2007), sustentam que deve existir articulação do currículo ao longo da escolaridade e que a aprendizagem se deve realizar com compreensão, utilizando a experiência e conhecimentos prévios de forma a construir ativamente novos conhecimentos.

A iniciação à Álgebra, no primeiro ciclo do ensino básico, surge no estudo de propriedades geométricas, como a simetria, em atividades com sequências repetitivas ou crescentes, nestas estabelecendo-se relações entre números e entre números e operações (ME, 2007). Este trabalho é enriquecido, nos dois anos subsequentes, com o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas que envolvem o raciocínio proporcional.

A articulação com o trabalho desenvolvido no ciclo anterior permite, no segundo ciclo, aprofundar o estudo das relações e regularidades. Os objetivos específicos do PMEB (ME, 2007), para o 2.º ciclo, relativos às sequências e regularidades consistem em: i) identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas e não numéricas; ii) determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação; iii) determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação; iv) analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica; v) representar simbolicamente relações descritas em linguagem natural e reciprocamente; e vi) interpretar diferentes representações de uma relação e relacioná-las.

Relativamente ao outro tema da Álgebra abordado no 2.º ciclo – a proporcionalidade direta – os objetivos específicos apontados no Programa de Matemática são: i) compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade; ii) utilizar proporções para modelar situações e fazer previsões; e iii) resolver e formular problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta. Nas notas do programa propõe-se que os alunos possam: i) distinguir situações em que não existe proporcionalidade de situações em que existe, solicitando, neste caso a constante de proporcionalidade; e ii) usar situações que envolvam percentagens e escalas, e a análise de tabelas e gráficos.

Nos objetivos gerais do Programa (ME, 2007), apontam-se as tecnologias, e concretamente a folha de cálculo *Excel*, como um meio para promover a compreensão matemática dos alunos. Secundarizando os constrangimentos aritméticos de extensos cálculos, devido à morosidade do processo, os alunos ao usarem uma ferramenta como a folha de cálculo, ficam com mais tempo para as aprendizagens matemáticas significativas que as tarefas matemáticas propostas pretendem estimular. De acordo com as indicações metodológicas para o 2.º ciclo, tecnologias, como a folha de cálculo, permitem "realizar experiências com números e regularidades numéricas e o trabalho com situações reais que sem estes recursos seriam difíceis de realizar" (ME, 2007, p. 33). Como tal, nesta experiência de ensino, é feita a aposta de promover o uso da folha de cálculo com o objetivo de apoiar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Capítulo 3

Experiência de ensino

Este capítulo é dedicado à planificação da experiência de ensino que sustenta este estudo. Primeiramente efetua-se uma descrição da escola e da turma envolvida e, posteriormente, contextualizam-se as tarefas tendo em conta as orientações curriculares. De seguida, procede-se à sua caracterização e organização e são descritos os objetivos subjacentes às mesmas. Por último, apresenta-se o modo como o trabalho em sala de aula foi organizado.

3.1. A escola e turma envolvida no estudo

Este estudo foi desenvolvido numa escola do 2.º e 3.º ciclos, em Lisboa, que nos últimos anos tem sido sujeita a uma alteração progressiva da sua população escolar devido à integração de alunos vindos de bairros de realojamento social. Os problemas inerentes à inserção escolar e social destes alunos conduziram à inclusão do agrupamento no programa TEIP (Território Educativo de Intervenção Prioritária).

Apesar de ser uma escola com problemas evidentes em parte da sua população escolar, tem alunos com um nível razoável de desempenho como demonstram os resultados das provas finais de Português e Matemática dos 6.º e 9.º anos de escolaridade. Estes situam-se, normalmente, acima da média nacional contrariamente aos resultados do agrupamento nas provas de 4.º ano.

Esta progressão considerável do 1.º para os 2.º e 3.º ciclos deve-se, em grande parte, ao esforço que o corpo docente despende ao pôr em prática a política educativa da escola que se centra na melhoria da qualidade das aprendizagens e no combate ao abandono escolar precoce e ao absentismo. Tendo em conta estes objetivos, a escola participa em vários projetos nomeadamente na área da Matemática por considerá-la uma disciplina estruturante no percurso académico do aluno. Neste contexto a escola candidatou-se ao Projeto EMA – Estímulo à Melhoria das Aprendizagens, proposto pela Fundação Calouste Gulbenkian, e foi uma das instituições escolares selecionadas. Este projeto pretende estimular o recurso à utilização dos computadores na aprendizagem da Matemática, recorrendo a ambientes de desenvolvimento como a folha de cálculo, e incentivar os alunos a utilizarem os seus conhecimentos matemáticos de forma criativa. Simultaneamente, pretende fomentar o desenvolvimento de competências ao nível da resolução de problemas, formulação de conjeturas, raciocínio matemático e comunicação de ideias matemáticas.

O projeto teve início no presente ano letivo, abrangendo algumas turmas da escola, nomeadamente a turma onde foi realizada esta experiência de ensino. Como tal, considerou-se que seria uma mais valia procurar tirar partido das condições logísticas que tal projeto proporciona e planificar a realização de tarefas matemáticas que contemplem o uso da folha de cálculo, para além do trabalho com papel e lápis.

A experiência de ensino é realizada numa turma de 6.º ano da qual sou professora e diretora de turma pelo segundo ano consecutivo. A turma é composta por 17 rapazes e 13 raparigas cujas idades variam entre os 10 e os 14 anos, à data do início do ano letivo. Existem dois alunos que integraram na turma este ano visto serem repetentes, sendo que um deles já apresenta uma retenção no 1.º ciclo. Existem dois alunos com Necessidades Educativas Especiais que apresentam características diferentes. Um deles apresenta um quadro de hiperatividade com comportamentos agressivos e compulsivos e conta com duas retenções no 1.º ciclo (2.º e 4.º anos). A outra aluna sofre de Paralisia Cerebral Espástica Unilateral e não apresenta dificuldades de aprendizagem nem retenções.

Dos 30 alunos que constituem a turma, sete possuem Ação Social Escolar e a maioria vive com os pais e irmãos. As habilitações académicas dos pais variam desde o 4.º ano até à licenciatura e profissionalmente ocupam posições muito distintas, sendo a maioria na área dos serviços.

A turma apresenta um comportamento agitado em parte derivado ao elevado número de alunos e também por conter alguns discentes problemáticos. O aproveitamento global da turma é satisfatório e concretamente na disciplina de Matemática verifica-se uma discrepância acentuada entre os conhecimentos dos alunos, pois alguns destes demonstram um razoável/bom nível de desempenho e outros apresentam inúmeras dificuldades.

3.2. Contextualização das tarefas

O presente estudo, além de procurar ir ao encontro das finalidades do programa, no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos (ME, 2007), centra-se nas vertentes da representação, raciocínio e comunicação matemática, enquanto capacidades transversais da aprendizagem da Matemática, inseridas num contexto de álgebra.

Tendo em conta as orientações do programa (ME, 2007), foi organizada uma experiência de ensino centrada na realização de tarefas de exploração com recurso à folha de cálculo *Excel*. As tarefas desenhadas para este estudo visaram os objetivos específicos do tópico Sequências e Regularidades e uma fase inicial do tópico Proporcionalidade Direta.

A experiência de ensino foi realizada numa turma em que os alunos não tinham sido abrangidos pelo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), no 1.º ciclo. Como tal, não se previa que tivessem realizado atividades de carácter algébrico, em anos anteriores, concretamente, a exploração de sequências numéricas e padrões pictóricos. As tarefas selecionadas para esta unidade de ensino tentaram colmatar essa lacuna, procurando a concretização de um conjunto de objetivos gerais do Programa, com vista ao desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos. Este conhecimento é promovido através da realização de tarefas de exploração e de momentos de reflexão com todos os alunos da turma.

As tarefas apresentadas desenvolvem o pensamento algébrico ao fomentarem a exploração de regularidades nas sequências apresentadas, a criação de relações matemáticas e o relacionamento de diversos tipos de representações (pictóricas, tabelas, símbolos e gráficos).

De acordo com as orientações metodológicas do Programa de Matemática (ME, 2007) os alunos utilizam, primeiramente, representações que fazem sentido para eles próprios e gradualmente vão surgindo representações matemáticas simbólicas proporcionando uma transição bem sucedida entre a linguagem natural e a linguagem matemática. Segundo as mesmas orientações, os alunos devem ser capazes de utilizar a linguagem numérica e algébrica na resolução de problemas geométricos.

O desenvolvimento do pensamento algébrico, neste nível de ensino, passa pela análise, exploração e investigação de regularidades e a determinação de leis de formação, utilizando a linguagem matemática de uma forma cada vez mais elaborada. A observância e análise de relações num conjunto de dados com características semelhantes, como é o caso das sequências, permite encontrar e comprovar propriedades comuns levando ao estabelecimento de generalizações, indispensável ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Assumindo como linha orientadora desta experiência de ensino que o propósito principal de ensino no tema da Álgebra no 2.º ciclo é o promover o pensamento algébrico dos alunos, nomeadamente, o desenvolvimento da sua capacidade de representar simbolicamente situações matemática e não matemáticas e de resolver problemas em contextos diversos, optou-se por trabalhar agregar o início do estudo do tópico de Proporcionalidade Direta ao tópico de Sequências e Regularidades. Desta forma, pretende-se que os alunos possam mobilizar, de forma espontânea, as capacidades de generalização e simbolização que desenvolvem na exploração de sequências pictóricas e numéricas na resolução de situações de proporcionalidade direta. Esta opção pretende contribuir também para que os alunos estabeleçam conexões entre conceitos e relações matemáticas e reconheçam a matemática como um todo integrado (ME, 2007).

A consecução dos objetivos específicos apontados no Programa de Matemática anteriormente descritos pode conseguir-se através de diferentes tipos de tarefas sendo que umas são mais enriquecedoras do que outras, relativamente à construção do conhecimento matemático do aluno. Ponte (2005) refere que a escolha das tarefas matemáticas a propor requer uma seleção criteriosa de forma a promover a atividade e envolvimento do aluno. Este autor analisa diferentes tipos de tarefas como os problemas, os exercícios, as explorações e as investigações. Na figura seguinte esquematiza os diferentes tipos de tarefas enquadradas consoante as propriedades inerentes a cada uma delas:

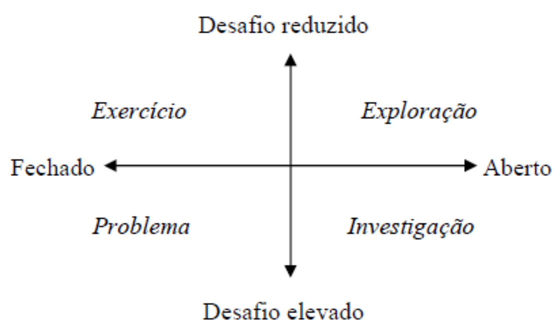


Figura 1 – Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005).

Nesta experiência de ensino optou-se pelas tarefas de exploração dado considerar-se fundamental a valorização de tarefas que maximizem nos alunos as oportunidades de aprendizagem num contexto rico e reflexivo. As tarefas envolvem a exploração de padrões e promovem nos alunos o pensamento algébrico por estimularem o reconhecimento, comparação e análise de padrões, relacionando a informação disponível e estabelecendo propriedades comuns

Neste estudo, como referi, é utilizada a folha de cálculo *Excel* de modo a fomentar o raciocínio dos alunos na exploração das situações apresentadas. O objetivo da aprendizagem centra-se na identificação e análise de relações, nas estratégias de resolução, na sistematização de conclusões e não em procedimentos como resolução de algoritmos. A folha de cálculo permite gerar rapidamente múltiplas experiências com números suscitando o desenvolvimento da capacidade de generalização. Similarmente, promove o estabelecimento de relações entre a linguagem algébrica e a respetiva representação gráfica (ME, 2007).

Neste trabalho o *Excel* é usado como suporte de aprendizagem e não substitui o recurso tradicional escrito. Neste contexto são propostas tarefas aos alunos em que a folha de cálculo não é utilizada, outras em que o seu uso é recomendado e outras ainda em que este é facultativo.

A comunicação matemática, tanto oral como escrita, adquire uma importância significativa neste trabalho indo ao encontro das orientações metodológicas do Programa que apontam para a necessidade de desenvolver esta capacidade nos alunos. A concretização escrita das estratégias e argumentos dos alunos é uma atividade que permite a análise aprofundada do raciocínio efetuado, o aperfeiçoamento do rigor da linguagem e o desenvolvimento de significados matemáticos (ME, 2007). O envolvimento do aluno na construção do seu próprio conhecimento é realizado através da comunicação oral quando estratégias diferentes são confrontadas, os raciocínios são identificados e as conclusões devidamente sustentadas (ME, 2007). A este propósito Ponte (2005) refere que a "a aprendizagem decorre … da reflexão realizada pelo aluno a propósito da atividade que realizou" (p. 15).

Por último, importa mencionar que foi também realizado um teste escrito (anexo 8) mas que não foi objeto de análise pois englobou outros conteúdos cujos objetivos de aprendizagem não faziam parte deste estudo.

3.3. Caraterização, organização e objetivos das tarefas

As tarefas propostas têm como objetivo propiciar o desenvolvimento do pensamento algébrico, assim como do raciocínio proporcional. Pretende-se que os alunos construam, intuitivamente, o seu conhecimento matemático através da análise de situações concretas e lógicas, reconhecendo nelas propriedades comuns.

A sequência de tarefas apresentadas seguidamente tem como critério o desenvolvimento progressivo do pensamento algébrico, centrando-se no estudo de padrões, no 6.º ano de escolaridade. Como referi acima, a partir do tópico Sequências e Regularidades, pretende-se efetuar a transição para o início do estudo da Proporcionalidade Direta, sendo para o efeito construídas tarefas tendo em atenção esse objetivo. Foram elaboradas sete tarefas, sendo que quatro delas foram construídas de raiz e três foram adaptadas de materiais publicados (anexos 4, 6 e 7).

Na escola onde este estudo foi realizado, a disciplina de Matemática possui para o 2.º ciclo, a carga letiva semanal de cinco tempos de 50 minutos distribuídos por três dias: dois blocos de 100 minutos cada e um tempo de 50 minutos. Para a realização desta experiência de ensino foram previstas 12 aulas de 50 minutos (Quadro 1).

No quadro seguinte são descritos os objetivos específicos para as sete tarefas desenhadas para este estudo. As tarefas um a cinco (anexos 1 a 5) incidem na exploração de regularidades pictóricas e pretendem, que através da análise de padrões, os alunos determinem termos e ordens de sequências, tendo em conta a sua lei de formação, e identifiquem o seu termo geral. Igualmente, pretende-se desenvolver a capacidade dos alunos em identificar relações e a sua representação, através de linguagem matemática. O trabalho com sequências pictóricas permite a identificação de regularidades inerentes às figuras e também o reconhecimento da sequência numérica que lhe está associada. O percurso de aprendizagem da Álgebra fica reforçado com a concretização da generalização e com a institucionalização do uso da linguagem algébrica.

As tarefas seis e sete (anexos 6 e 7) marcam a transição para a Proporcionalidade Direta e incidem sobre duas atividades exploratórias que permitem: i) analisar relações de covariância; ii) analisar relações de invariância entre as grandezas; iii) desenvolver a capacidade para distinguir situações onde existe proporcionalidade e de situações onde ela não existe; iv) trabalhar com diferentes formas de representações (tabelas e gráficos).

Considerando uma abordagem que privilegia a vertente experimental da Matemática, optou-se pelo recurso à folha de cálculo *Excel* para que a validação das hipóteses encontradas seja facilmente legitimada através da sua observação direta. Os alunos podem, desta forma, utilizar a folha de cálculo para representar numericamente a sequência dada até valores muito distantes e verificar, autonomamente, a veracidade da regra geral encontrada. Numa das tarefas utilizam também a funcionalidade gráfica da folha de cálculo a fim de estabelecer conexões entre tipos diferentes de representações.

Apesar deste recurso tecnológico ser um potenciador pedagógico incontestável não é utilizado de um modo sistemático. Assim, da primeira à terceira tarefas os alunos utilizam a folha de cálculo *Excel*, na quarta o seu uso não foi previsto, na quinta e sexta tarefas volta a ser utilizado e, na última tarefa, o seu uso é facultativo.

Quadro 1 – Planeamento da Experiência de ensino

Tarefa	Objetivos	Recursos	Duração
1. Sequência de Estrelas	- Investigar regularidades numa sequência pictórica. - Determinar os termos seguintes a um dado termo e ampliar a sequência pictórica, conhecida a sua lei de formação. - Determinar termos de ordens variadas de uma sequência linear, sendo conhecida a sua lei de formação. - Analisar as relações entre os termos de uma sequência linear e a sua ordem e indicar uma regra geral, utilizando a linguagem natural e/ou simbólica. - Utilizar o *Excel* para determinar termos distantes.	- *Excel* - Ficha de trabalho	1 aula
2. Os azulejos	- Investigar regularidades em sequências pictóricas. - Determinar os termos seguintes a um dado termo e ampliar a sequência pictórica, conhecida a sua lei de formação. - Determinar termos de ordens variadas de uma sequência linear, sendo conhecida a sua lei de	- *Excel* - Ficha de trabalho	2 aulas

	formação. - Analisar as relações entre os termos de uma sequência linear e a sua ordem e indicar uma regra geral, utilizando a linguagem natural e/ou simbólica. - Comparar diferentes sequências pictóricas. - Utilizar o *Excel* para determinar termos distantes.		
3. Os colares	- Investigar regularidades em sequências pictóricas. - Determinar o termo seguinte a um dado termo, conhecida a sua lei de formação. - Determinar termos de ordens variadas de uma sequência não linear, sendo conhecida a sua lei de formação. - Usar a relação entre o termo e a sua ordem na sequência para verificar a existência de uma ordem respeitante a um dado termo. - Analisar as relações entre os termos de uma sequência e a sua ordem e indicar uma regra geral, utilizando a linguagem natural e/ou simbólica. - Utilizar o *Excel* para determinar termos distantes.	- *Excel* - Ficha de trabalho	2 aulas
4. Os cubos	- Investigar regularidades em sequências pictóricas. - Determinar o termo seguinte a um dado termo, conhecida a sua lei de formação. - Determinar termos de ordens variadas de uma sequência não linear, sendo conhecida a sua lei de formação. - Analisar as relações entre os termos de uma sequência e a sua ordem e indicar uma regra geral, utilizando a linguagem natural e/ou simbólica.	- Ficha de trabalho	1 aula
5. Os tijolos	- Investigar regularidades em sequências pictórica. - Determinar o termo seguinte a um dado termo, conhecida a sua lei de formação. - Determinar termos de ordens variadas de uma sequência não linear, sendo conhecida a sua lei de formação. - Usar a relação entre o termo e a sua ordem na sequência para verificar a existência de uma ordem respeitante a um dado termo. - Analisar as relações entre os termos de uma sequência e a sua ordem e indicar uma regra geral, utilizando a linguagem simbólica.	- *Excel* - Ficha de trabalho	2 aulas

	- Utilizar o *Excel* para determinar termos distantes.		
6. As pilhas	- Investigar regularidades em sequências numéricas. - Utilizar as regularidades multiplicativas (covariância e invariância) para identificar uma relação de proporcionalidade direta. - Interpretar diferentes representações de uma relação de proporcionalidade direta (tabela e gráfico) e relacioná-las. - Expressar essa relação em linguagem simbólica. - Utilizar o *Excel* para construir a representação gráfica da sequência.	- *Excel* - Ficha de trabalho	2 aulas
7. As bicicletas	- Investigar regularidades em sequências numéricas. - Distinguir situações em que não existe proporcionalidade direta de situações em que existe. - Utilizar as regularidades multiplicativas (covariância e invariância) para identificar uma relação de proporcionalidade direta. - Expressar essa relação em linguagem simbólica.	- *Excel* - Ficha de trabalho	2 aulas

A Tarefa 1 (anexo 1) consiste numa *Sequência de Estrelas* e é inicialmente executada no computador e, seguidamente, explorada na ficha distribuída.

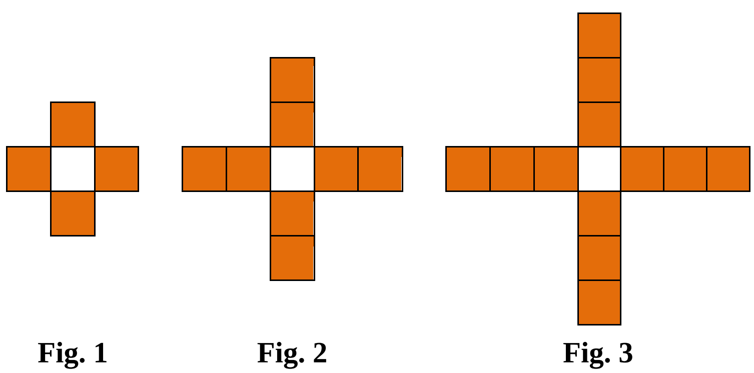


Figura 2 – Três primeiros termos da sequência da Tarefa 1

A partir da análise das relações da sequência apresentada, é solicitado aos alunos que se amplie a sequência representando graficamente os dois termos seguintes. Esta tarefa permite desenvolver nomeadamente a abstração ao solicitar o cálculo de vários termos conhecendo a sua ordem. Utiliza-se a folha de cálculo

Excel para o preenchimento desses valores e posteriormente utilizam-se as funcionalidades desta ferramenta a fim de possibilitar a visualização de termos até à 50.ª figura. Solicita-se ainda uma regra que permita determinar qualquer termo desta sequência.

A segunda tarefa (anexo 2) intitula-se *Os azulejos* e pretende-se que os alunos analisem uma sequência de três figuras e que, a partir destas, representem pictoricamente, as duas figuras subsequentes.

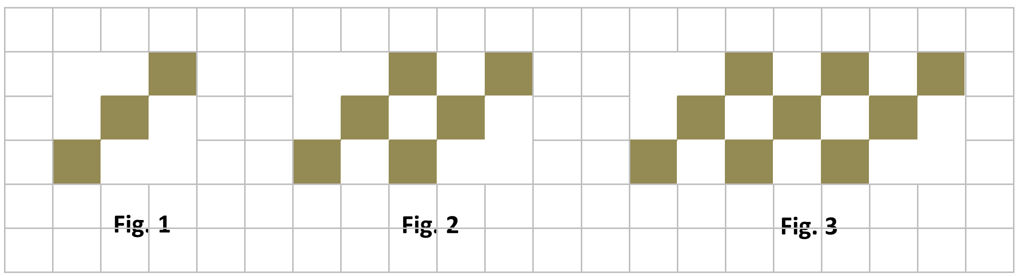


Figura 3 – Três primeiros termos da sequência da parte 1 da Tarefa 2

Depois de se compreender a sua formação, determinam-se alguns termos de diversas ordens, calculam-se ordens a partir de termos apresentados e generaliza-se a sequência através de uma lei de formação.

Insere-se outra sequência nesta tarefa e os alunos têm que estabelecer relações de semelhanças e diferenças entre ambas.

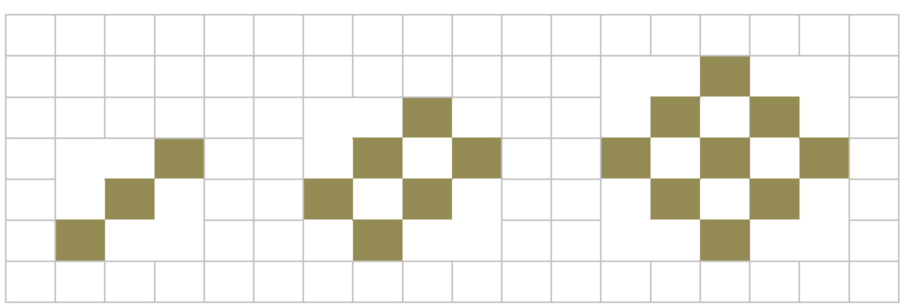


Figura 4 – Três primeiros termos da sequência da parte 2 da Tarefa 2

Igualmente é solicitado que se encontre uma lei de formação para esta última sequência. Esta regra é inserida numa tabela da folha de cálculo *Excel* e completa-se a sequência até à 100.ª figura.

A Tarefa 3 denominada *Os Colares* (anexo 3) consta de uma sequência de três colares constituídos por contas brancas e pretas. O primeiro colar é constituído por duas contas brancas, o segundo por quatro contas brancas e o terceiro colar por seis brancas. Cada colar contém uma conta preta.

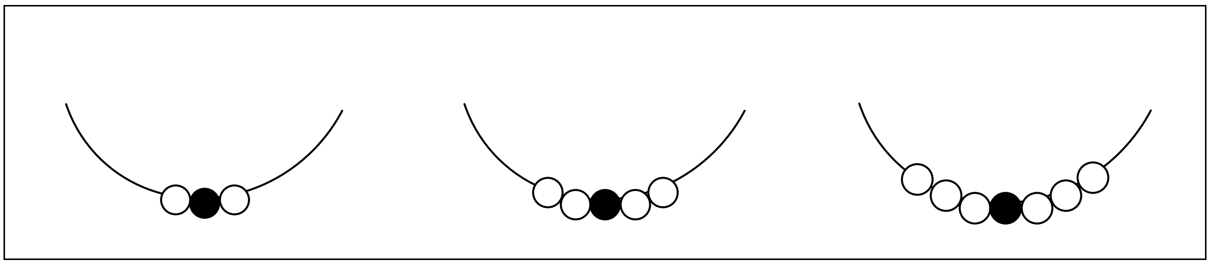


Figura 5 – Três primeiros termos da sequência da Tarefa 3

Através do conhecimento da lei de formação da sequência, esta tarefa proporciona a determinação de termos de ordens variadas, a verificação se um número é, ou não, termo de uma sequência, a análise das relações existentes na sequência a fim de indicar uma regra de formação e, ainda, desenvolver a competência da generalização matemática num ambiente tecnológico contextualizado (folha de cálculo).

A quarta tarefa (anexo 4) intitula-se *Os cubos*. Nela são apresentadas duas imagens que representam duas construções constituídas por filas de dois e três cubos, respetivamente. Após efetuada a união dos cubos foram colados autocolantes em cada uma das suas faces, inclusivamente naquelas que não estão visíveis nas figuras.

Figura 6 – Dois primeiros termos da sequência da Tarefa 4

A partir da análise desta sequência são determinados termos de diversas ordens e estabelecida uma regra para calcular o número de autocolantes inseridos numa construção com um número qualquer de cubos.

A sequência apresentada na Tarefa 5 – *Os tijolos* (anexo 5) consta de três figuras compostas por tijolos e cada tijolo tem, no seu interior, oito buracos. A primeira figura é composta por um tijolo, a segunda por três tijolos e a terceira por cinco tijolos. Pretende-se que seja analisado não só a sequência de tijolos mas também a relação que existe com o número de buracos neles existentes.

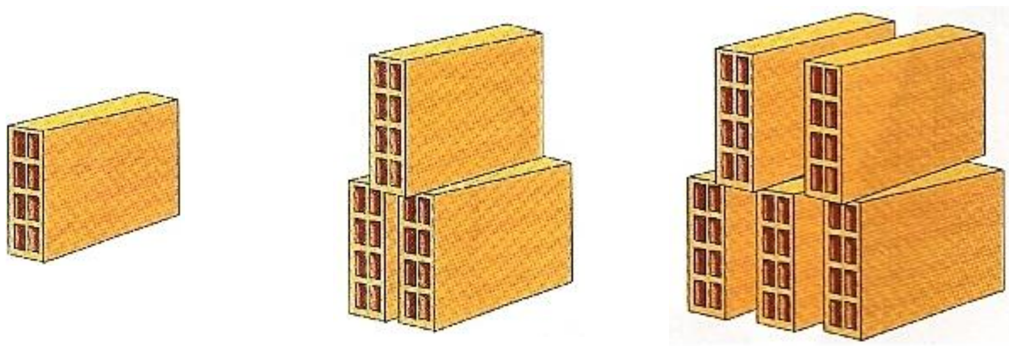


Fig. 1 **Fig. 2** **Fig. 3**

Figura 7 – Três primeiros termos da sequência da Tarefa 5

Nesta tarefa é apresentada uma tabela para os alunos preencherem, até ao 6.º termo da sequência, relativamente ao número de tijolos e número de buracos dentro dos tijolos. Assim, depois de analisada a sequência e conhecida a sua lei de formação, é solicitado que a mesma seja ampliada de modo a determinar termos de várias ordens, relativamente ao número de tijolos e buracos, verificar se um número é termo da sequência, determinar os termos gerais quanto ao número de tijolos e buracos dos mesmos e expandir as sequências, até à centésima figura, utilizando a folha de cálculo *Excel*.

A sexta tarefa, *As pilhas* (anexo 6) é a primeira onde não existe um suporte pictórico e é uma tarefa de transição para o tema Proporcionalidade Direta. É fornecida uma tabela onde estão registados os números de embalagens e de pilhas.

Número de embalagens	Número de pilhas
5	20
10	40
15	60
20	80

Figura 8 – Tabela da Tarefa 6

É solicitada a procura de regularidades a fim de se identificar relações de proporcionalidade direta e se essas regularidades se verificam para todos os casos inscritos na tabela. Utilizando as funcionalidades do *Excel* é construído um gráfico com esses valores e transcrito para a ficha de trabalho sendo, desta forma, analisado o aspeto gráfico das regularidades. Estes procedimentos permitem a exploração flexível de dois tipos diferentes de representações para os mesmos dados: tabela e gráfico.

Através da representação gráfica dos dados, é requerida a ampliação da sequência para além dos dados conhecidos. É igualmente solicitada uma expressão algébrica que relacione o número de pilhas com o número de embalagens.

Nas duas tabelas seguintes estão representados os dados relativos ao tempo de aluguer de bicicletas e o respetivo custo, em duas empresas distintas, referentes à Tarefa 7 – *As bicicletas* (anexo 7).

Ciclotour	
Tempo (minutos)	**Preço (euros)**
30	3
45	4,5
60	6
90	9

YBike	
Tempo (minutos)	**Preço (euros)**
20	1,5
40	4
60	6,5
90	10

Figura 9 – Tabelas da Tarefa 7

A análise dos dados contidos nas tabelas permite a exploração de situações relativamente à existência, ou não, de proporcionalidade direta. É requerida a análise da invariância entre as grandezas ao ser pedida a possibilidade de previsão do preço a pagar pela bicicleta num determinado período de tempo (cento e vinte minutos). Finalmente, averigua-se a hipótese de existência, para cada caso, de uma expressão algébrica que permita determinar o preço a pagar por qualquer tempo de utilização da bicicleta.

3.4. Dinâmica da aula

Neste estudo, a aprendizagem dos alunos é aferida sistematicamente através da comunicação escrita e oral a fim de se averiguar se os alunos se estão a apropriar de conhecimentos como o reconhecimento das regularidades apresentadas e a compreensão das relações existentes. Através deste procedimento é possível perceber os raciocínios e os procedimentos utilizados.

Cada tarefa foi introduzida por mim em interação com a turma, seguida de trabalho dos alunos, em pares (15 grupos) e, por fim, houve um momento de discussão e elaboração de uma síntese em grande grupo.

O trabalho em pares permitiu a troca de impressões, o esclarecimento de dúvidas e a partilha de informação entre os colegas. Alguns alunos mais tímidos e pouco participativos encontram, deste modo, condições para a realização de um trabalho mais eficaz.

Um procedimento habitual nesta turma consiste na interajuda entre colegas quando manifestam dificuldades e principalmente quando terminam o seu trabalho e se disponibilizam para ajudar quem solicita. Durante este estudo, e como é usual, os alunos que acabaram as tarefas antes do tempo previsto auxiliaram outros grupos que manifestavam alguma dificuldade ou que estavam mais atrasados na conclusão das tarefas.

Após a realização de cada tarefa procedeu-se à sua discussão, a nível de grupo-turma, centrando-se sobre os resultados obtidos e as estratégias utilizadas. Este procedimento também é comum na turma e os alunos estão habituados a demonstrar as suas estratégias, discuti-las e ver o que existe de diferente em relação a outras perspetivas. Este espaço temporal foi deste modo propício à reflexão sobre as atividades desenvolvidas, à sistematização de conhecimentos e ao estabelecimento de conceitos e representações matemáticas. Para esta discussão geral reservaram-se os últimos 20 ou 30 minutos consoante se tratava de aulas de 50 ou 100 minutos, respetivamente.

Os alunos foram informados que, durante a discussão, não deveriam alterar as suas resoluções nas fichas de trabalho mas que deveriam complementar o seu trabalho no caderno diário.

Na maioria das tarefas foram utilizados, como meios facilitadores de aprendizagem e de cálculo, computadores portáteis, tendo sido atribuído um computador a cada grupo. Os quinze computadores são levados para a sala de aula a partir de um gabinete onde estão armazenados que se situa junto à mesma. Este procedimento é realizado pelos alunos da turma durante a parte final do intervalo precedente à aula. Os computadores são colocados junto ao quadro no início da aula e um elemento de cada grupo vai buscar o respetivo portátil (que se encontra numerado). Similarmente ao procedimento inicial, no final de cada aula os computadores são levados de volta para o gabinete por um elemento de cada grupo.

Capítulo 4

Métodos de recolha e análise de dados

4.1. A recolha de dados e os participantes

O presente estudo adotou uma metodologia interpretativa e descritiva através da qual se procurou compreender as estratégias de generalização e representações que os alunos usam no seu trabalho ao longo da experiência de ensino.

Os participantes da experiência de ensino são os trinta alunos de uma turma do 6.º ano e eu própria enquanto professora. Foi pedido autorização à direção da escola e aos encarregados de educação dos alunos para a realização do estudo.

O estudo incide apenas sobre quatro alunos desta turma, pelo facto de se pretender analisar todo o percurso dos alunos na experiência de ensino, não sendo, portanto, possível realizar uma análise detalhada das resoluções de todas as tarefas por todos os elementos da turma. A fim de se proceder à seleção dos alunos participantes no estudo foram definidos os seguintes critérios: i) apresentarem níveis diferentes de desempenho escolar; ii) terem assiduidade em todas as aulas que incluíam a aplicação das tarefas da experiência de ensino; iii) possuírem heterogeneidade quanto ao sexo (dois rapazes e duas raparigas); e iv) fazerem parte de grupos de trabalho diferentes.

De acordo com os critérios anteriormente descritos, foram selecionados quatro participantes – a Andreia, o Paulo, a Luísa e o Duarte – cujos nomes são pseudónimos. À data de início do ano letivo, três destes alunos têm onze anos de idade e o Paulo tem dez.

A Andreia é uma aluna que tem habitualmente o nível cinco e o Paulo o nível quatro. A Luísa é uma aluna que oscila entre os níveis dois e três, e o Duarte entre o nível três e o nível quatro.

A Andreia e o Paulo são alunos introvertidos, têm um bom relacionamento com os colegas e só participam oralmente nas aulas quando são solicitados para tal. A Luísa e o Duarte são alunos irrequietos e conversadores, sendo que este último, por vezes, gosta de questionar a autoridade do professor.

Neste estudo o método de recolha de dados adotado foi a recolha documental. Foram recolhidos todos os documentos escritos produzidos pelos alunos nas aulas e os ficheiros em *Excel* onde desenvolveram parte das tarefas. Os alunos foram alertados para o facto de não poderem alterar as suas resoluções nas fichas de trabalho aquando da discussão em grande grupo das estratégias utilizadas. Os alunos tinham conhecimento que o trabalho produzido por eles iria ser objeto de estudo e que teria de ser mantida a resolução inicial. No entanto, foram informados que poderiam complementar o seu trabalho com registos no caderno diário.

Dado que assumi o duplo papel de professora e investigadora, não tinha oportunidade de fazer registos detalhados no decurso das aulas, pelo que procurei fazer uma síntese dos aspetos principais, por escrito, assim que tinha oportunidade.

4.2. Categorias de análise de dados

As tarefas foram analisadas relativamente às estratégias de generalização que os alunos utilizam na determinação: i) do termo distante; ii) do raciocínio inverso (quando aplicável); e iii) da regra geral. Foram também analisados os tipos de representações utilizados pelos alunos para exprimir a regra geral.

A categorização das estratégias de generalização usada neste estudo foi adaptada da do estudo de Barbosa (2013), da qual se distingue, particularmente, pelo facto de considerar estratégias que dizem respeito, por um lado, à determinação de termos próximos ou distantes de uma sequência e, por outro, à formulação explícita de uma regra geral, ou seja, à indicação do termo geral da sequência ou expressão algébrica de uma situação de proporcionalidade direta, ainda que recorrendo a representações diversas. Esta subdivisão das categorias atende à natureza diversa das estratégias, que têm níveis diferentes de complexidade em termos da capacidade de generalização, e ao tipo de questões das tarefas que os alunos resolveram.

A necessidade de ajustamento do quadro de categorização das estratégias de generalização de Barbosa (2013) surgiu a partir da análise preliminar das estratégias dos alunos deste estudo. Esse ajustamento ocorreu de forma a integrar novas categorias que atendessem às estratégias identificadas, e que não estavam contempladas no quadro da autora, e também para fazer algum tipo de diferenciação dentro da categoria de estratégia Explicita, dada a sua importância no contexto do estudo (Quadro 2).

Foram, assim, criadas duas novas categorias para a determinação de termos próximos ou distantes de uma sequência: Adição de Termos e Funcional, esta última com duas subcategorias. No caso da formulação de uma regra geral explícita, são consideradas quatro subcategorias, enquanto no estudo de Barbosa (2013) esta categoria não se subdivide.

Quadro 2 – Estratégias de generalização

Estratégia		**Descrição**
Contagem (C)		Desenhar figuras e contar os seus elementos.
Adição de termos (AT)		Obter um termo a partir da adição de outros termos.
Termo unidade	Sem ajuste (TU_1)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.
	Com ajuste numérico (TU_2)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base propriedades numéricas.
	Com ajuste contextual (TU_3)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base o contexto do problema.

Diferença	Recursiva (D_1)	Continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.
	Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem ajustar o resultado, para obter termos próximos ou distantes.
	Múltiplo da diferença com ajuste (D_3)	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, para obter termos próximos ou distantes. É feito um ajuste do resultado.
Funcional	Raciocínio Funcional (FCF)	Usar o contexto da figura para determinar um termo próximo ou distante a partir da respetiva ordem.
	Raciocínio Funcional (FCN)	Usar o contexto numérico para determinar um termo próximo ou distante a partir da respetiva ordem.
Regra geral Explícita	Diferença sem ajuste (ED_1)	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo para obter uma regra geral, sem ajustar o resultado.
	Diferença com ajuste (ED_2)	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo para obter uma regra geral, com ajuste.
	Raciocínio Funcional (EFCF)	Usar o contexto da figura para obter uma regra geral.
	Raciocínio Funcional (EFCN)	Usar o contexto numérico para obter uma regra geral.
Tentativa e erro (TE)		Adivinhar uma regra fazendo sucessivas tentativas com diferentes valores. Conhecida uma regra, experimentar sucessivos valores até que sejam verificadas as condições pretendidas.

As primeiras cinco categorias referem-se à determinação de termos próximos ou distantes de uma sequência. É de salientar que no caso da categoria Funcional referente à determinação de um termo próximo ou distante, o facto de o aluno conseguir determinar diretamente um termo a partir da sua ordem, evidencia que percecionou uma relação de tipo funcional, embora não a expresse, ainda, de forma geral. Considera-se assim que esta estratégia se baseia num raciocínio de tipo funcional por oposição a outras em que os alunos se centram na diferença entre os termos.

A categoria Regra Geral Explícita diz respeito a situações em que o aluno apresenta explicitamente uma regra geral que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente. No entanto, o aluno pode formular esta regra a partir de uma estratégia baseada na diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo ou usar um raciocínio funcional, a partir da relação que percecionou diretamente entre as duas variáveis.

Foi sentida também a necessidade de criar um quadro relativo a estratégias que os alunos utilizam na resoluções de questões de raciocínio inverso, isto é, quando lhes é apresentado um termo e se lhes pede a respetiva ordem, ou quando se lhes pede para averiguar se determinado valor é termo da sequência (Quadro 3). No seu estudo Barbosa (2013) usa o mesmo quadro para analisar esta situação, o que não se mostrou adequado à tipologia de estratégias que se observaram nos alunos desta turma. Assim, introduziram-se as novas categorias de Adição de Termos e Exclusão com duas subcategorias. No caso da categoria Explícita foram criadas três subcategorias, para descriminar a especificidade das estratégias que se apoiam numa regra geral, neste tipo de questões.

Quadro 3 – Estratégias em questões de raciocínio inverso

Estratégia		**Descrição**
Contagem (C)		Desenhar figuras e contar os seus elementos.
Adição de termos (AT)		Obter um termo a partir da adição de outros termos.
Termo unidade	Sem ajuste (TU_1)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade.
	Com ajuste numérico (TU_2)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base propriedades numéricas.
	Com ajuste contextual (TU_3)	Considerar um termo da sequência como unidade e usar múltiplos dessa unidade. É feito um ajuste do resultado tendo por base o contexto do problema.

Diferença	Recursiva (D_1)	Continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.
	Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, sem ajustar o resultado.
	Múltiplo da diferença com ajuste (D_3)	Usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo. É feito um ajuste do resultado.
Exclusão	Características da figura (ECF)	Usar as características das figuras da sequência para verificar que determinado valor não é um termo.
	Características dos números (ECN)	Usar as características dos números da sequência para verificar que determinado valor não é um termo.
Explícita	Tentativa e erro a partir de uma regra (ETE)	Usar uma regra geral que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente e, por experimentação, verificar se um valor é termo da sequência.
	Por exaustão a partir de uma regra (EE)	Usar uma regra geral que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente e, por exaustão, verificar se um valor é termo da sequência.
	Operação inversa (EOI)	Usar operações inversas para verificar se um valor é termo da sequência, a partir de uma regra geral que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente.

No caso das representações utilizadas pelos alunos foram considerados quatro tipos diferentes de acordo com o seguinte quadro:

Quadro 4 – Representações utilizadas pelos alunos na generalização

Estratégia	**Descrição**
Linguagem natural	Usa linguagem natural na forma escrita
Esquemas ou desenhos	Usa esquemas ou desenhos

Linguagem pré-simbólica	Usa símbolos próprios ou linguagem sincopada
Linguagem simbólica	Usa símbolos matemáticos convencionais

A análise dos dados incidiu sobre a totalidade das tarefas da Unidade de Ensino. No entanto, para cada tarefa, foram apenas selecionadas as questões que permitem analisar estratégias de generalização dos quatro alunos escolhidos, de acordo com os objetivos do estudo. Assim, foram escolhidas questões que envolvem termos distantes, o raciocínio inverso e a identificação da regra geral da sequência.

Para cada questão analisada apresenta-se um quadro com a identificação das estratégias que cada aluno adotou e no caso da identificação da regra geral é também apresentado um quadro com a identificação das representações a que recorreram. Para cada questão introduz-se um exemplo de cada uma das diferentes estratégias adotadas pelos alunos.

Capítulo 5

Estratégias de generalização e representações

Neste capítulo apresenta-se a análise de dados a partir das sete tarefas realizadas pelos quatro alunos e usando as categorias apresentadas no capítulo anterior.

5.1. Tarefa 1 – *Sequência de Estrelas*

A aula

A aula teve a duração de 50 minutos e, no início, informei a turma que durante algumas aulas iriam trabalhar sempre em grupo e que, na maior parte delas, iriam utilizar os computadores portáteis. Alertei os alunos para o facto dos trabalhos efetuados nos portáteis terem de ser guardados nos mesmos e que deveriam estar devidamente identificados.

Cada questão da tarefa (anexo 1) foi lida e interpretada individualmente por diferentes alunos que se voluntariaram para tal. Relativamente à questão 1, esclareci que somente esta seria resolvida no computador. Depois de lida disponibilizei algum tempo para que os alunos fizessem a ligação entre o que era solicitado e o ficheiro que entretanto já estavam a visualizar. Seguiu-se a leitura das questões 2 e 3 e, nesta última, informei que depois de descobrirem a regra poderiam comprová-la no *Excel*, se assim o entendessem, completando a tabela da questão 1 prolongando-a automaticamente (até à 50.ª figura). Alguns alunos referiram que já não se recordavam qual o procedimento necessário (que tinham explorado numa aula anterior) pelo que o exemplifiquei numa nova folha de cálculo.

Os alunos começaram de imediato a trabalhar e rapidamente finalizaram a primeira questão passando de seguida para a resolução das questões seguintes. Durante a realização da tarefa verifiquei que os alunos sabiam explicar o seu raciocínio oralmente bastante bem mas que sentiam dificuldades quando o tinham de fazer por escrito.

Uma vez que faltavam vinte minutos para o final da aula e ter-se-ia que dar início à discussão da resolução e síntese dos conhecimentos, alguns alunos não tiveram tempo de confirmar as suas conclusões no portátil.

Estratégias e representações

A questão analisada seguidamente (questão 2) diz respeito à obtenção de um termo distante da sequência, o 16.º termo, sendo que os alunos tinham determinado os dez primeiros termos, na alínea anterior. Neste caso era indicado aos alunos que não deveriam desenhar a figura, para incentivá-los a desenvolverem estratégias de generalização.

> Descobre quantas quadrículas pintadas terá a 16.ª figura, sem a desenhar.
> Explica como pensaste.

Figura 10 – Questão 2 da Tarefa 1

O quadro que se segue regista as estratégias usadas pelos quatro alunos na determinação desse termo. Verifica-se que foi utilizada, predominantemente, a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo.

Quadro 5 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 2 da Tarefa 1

Andreia	**Paulo**	**Luísa**	**Duarte**
Diferença - Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Diferença - Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Diferença - Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Termo unidade sem ajuste (TU_1)

Uma aluna, a Andreia, parte da informação obtida na questão anterior (onde conhece o número de quadrículas pintadas da 10.ª figura) e efetua o quádruplo do número da figura até à figura pretendida.

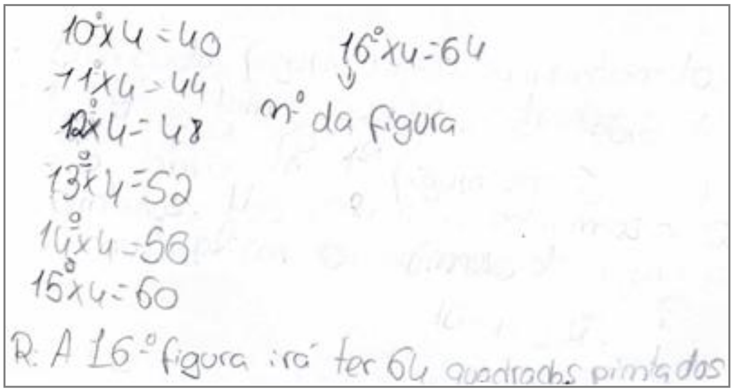


Figura 11 – Resolução apresentada pela Andreia à questão 2 da Tarefa 1

Da resolução apresentada pela Andreia depreende-se que utiliza a estratégia D_2 pela forma como descreve a regra na questão seguinte, em que é evidente que utiliza a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo.

A Luísa utiliza o mesmo tipo de estratégia mas, ao contrário da Andreia, explicita-a na resolução desta questão, exprimindo o fator multiplicativo (4) como o número de quadrados que acrescenta em cada figura:

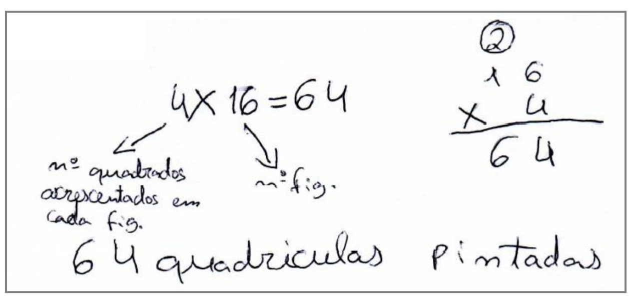
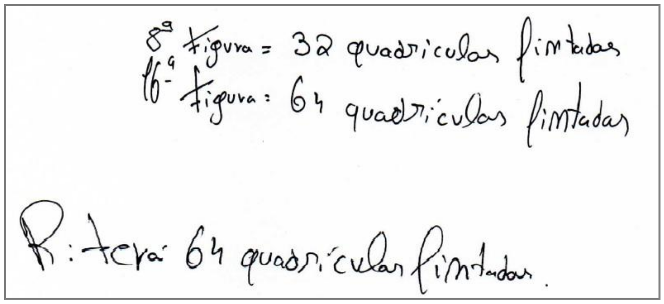


Figura 12 – Resolução apresentada pela Luísa à questão 2 da Tarefa 1

A estratégia utilizada pelo Duarte consiste na duplicação da 8.ª figura da sequência para obter a 16.ª figura, duplicando o número de quadrículas pintadas. O aluno considera, pois, um termo da sequência como unidade (o 8.º) e obtém um múltiplo dessa unidade (o 16.º termo).



8ª figura = 32 quadriculas pintadas
16ª figura = 64 quadriculas pintadas

R: terá 64 quadriculas pintadas.

Figura 13 – Resolução apresentada pelo Duarte à questão 2 da Tarefa 1

A questão seguinte, a terceira da tarefa, diz respeito à determinação do termo geral da sequência, sendo solicitada, aos alunos, a descrição de uma regra geral.

> Descreve uma regra que te permita determinar o número de quadrículas pintadas de qualquer figura da sequência.

Figura 14 – Questão 3 da Tarefa 1

Apesar de todos os alunos utilizarem, nesta questão, a estratégia da diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, o Paulo não efetua a generalização a fim de obter a regra geral.

Quadro 6 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 3 da Tarefa 1

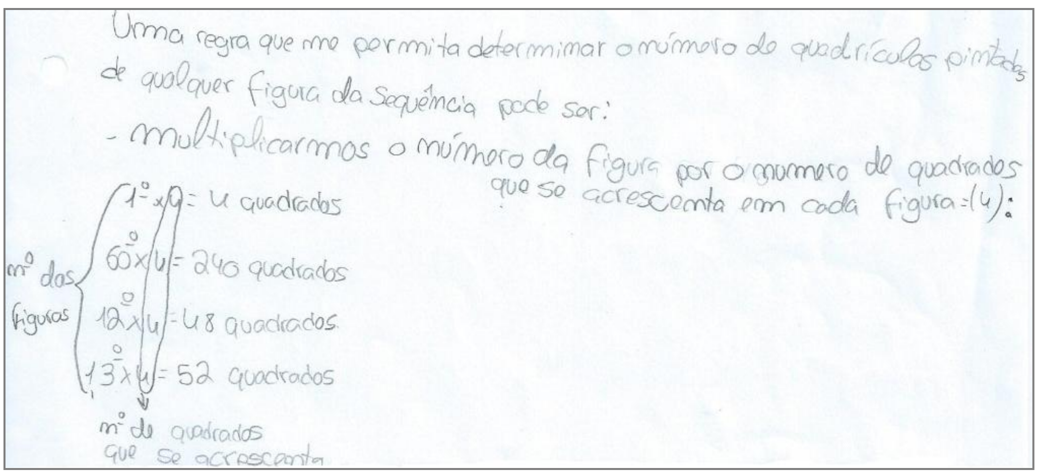
Andreia	**Paulo**	**Luísa**	**Duarte**
Regra geral Explícita - Diferença sem ajuste (ED_1)	Diferença - Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Regra geral Explícita - Diferença sem ajuste (ED_1)	Regra geral Explícita - Diferença sem ajuste (ED_1)

Relativamente às representações a que recorrem para exprimir a generalização, verifica-se que todos os alunos usam a linguagem natural mas dois deles utilizam complementarmente outro tipo de representações:

Quadro 7 – Representações utilizadas na questão 3 da Tarefa 1

Andreia	Paulo	Luísa	Duarte
Linguagem natural e Esquemas ou desenhos	Linguagem natural	Linguagem natural	Linguagem natural e Linguagem pré-simbólica (sincopada)

Conforme referido anteriormente, aquando da descrição da estratégia utilizada pela Andreia na questão 2, verifica-se que a aluna explicita uma regra geral utilizando a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo. Para tal utiliza não só a linguagem natural como elabora em esquema com que ilustra a regra com diferentes termos e onde legenda o fator multiplicativo e o número das figuras.



Uma regra que me permita determimar o número de quadrículas pintadas de qualquer figura da Sequência pode ser:

- multiplicarmos o número da figura por o número de quadrados que se acrescenta em cada figura = (4):

1.º x 4 = 4 quadrados

60.º x 4 = 240 quadrados

12.º x 4 = 48 quadrados

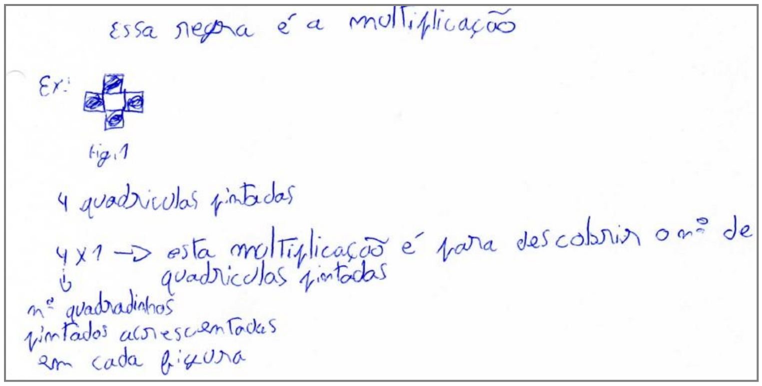
13.º x 4 = 52 quadrados

n.º das figuras

n.º de quadrados que se acrescenta

Figura 15 – Resolução apresentada pela Andreia à questão 3 da Tarefa 1

O Paulo também utiliza a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo mas apoia-se num caso particular para explicitar, em linguagem natural, o termo geral.



essa regra é a multiplicação

Ex:

fig. 1

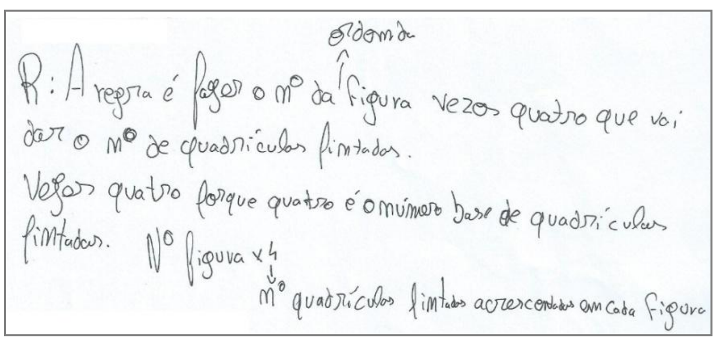
4 quadrículas pintadas

4 x 1 → esta multiplicação é para descobrir o nº de quadrículas pintadas

nº quadradinhos pintados acrescentados em cada figura

Figura 16 – Resolução apresentada pelo Paulo à questão 3 da Tarefa 1

Além da estratégia ED_1, observa-se que o Duarte esboça uma estratégia funcional apoiada no contexto da figura. O aluno justifica a multiplicação do número da figura por quatro: "… porque quatro é o número base de quadrículas pintadas", embora não sendo possível saber exatamente o que queria dizer com esta afirmação. O Duarte utiliza, nesta questão, a linguagem natural e pré-simbólica (sincopada), usando uma abreviatura para representar a variável em jogo.



R: A regra é fazer o nº da (ordem da) figura vezes quatro que vai dar o nº de quadrículas pintadas.

Vezes quatro porque quatro é o número base de quadrículas pintadas. Nº figura x 4

nº quadrículas pintadas acrescentadas em cada figura

Figura 17 – Resolução apresentada pelo Duarte à questão 3 da Tarefa 1

5.2. Tarefa 2 – *Os azulejos*

A aula

Os alunos foram informados, no início do bloco de 100 minutos, que só utilizariam os computadores quando finalizassem a ficha de trabalho, pelo que os computadores não foram imediatamente distribuídos.

A tarefa foi lida por alguns alunos que se disponibilizaram e como não existiam dúvidas a turma começou de imediato a trabalhar. Durante a resolução da ficha de trabalho alguns alunos manifestaram dificuldades em expressar o seu raciocínio por escrito, apesar de oralmente o conseguirem efetuar.

Após terminar a resolução da ficha, cada grupo iniciou o seu trabalho no computador com a criação de uma tabela em Excel e o respetivo preenchimento da sequência até à 100.ª figura. Surgiram algumas dúvidas na primeira parte deste procedimento pois era necessário criar a tabela de raiz. Sugeri à turma que consultasse, no computador, o ficheiro utilizado na Tarefa 1.

Inicialmente estava previsto que a discussão e síntese ocupassem os últimos trinta minutos de aula mas devido à extensão da tarefa foram utilizados somente quinze. Devido a este facto, foi necessário iniciar a quarta aula com a síntese desta Tarefa.

Estratégias e representações

Na questão 1.*b* da Tarefa 2, pretendia-se que os alunos indicassem um termo próximo, sem o desenhar.

> Descobre quantos quadradinhos pintados terá a 10.ª figura da sequência, sem a desenhar. Explica como pensaste.

Figura 18 – Questão 1.b da Tarefa 2

Os alunos determinam o termo próximo (10.º) utilizando a mesma estratégia que adotaram na tarefa anterior, ou seja, a Andreia, o Paulo e a Luísa utilizam a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo e o Duarte considera um termo da sequência como unidade e aplica um múltiplo a esse termo.

Quadro 8 – Estratégias de generalização utilizadas nas questões 1.b da Tarefa 2

Andreia	**Paulo**	**Luísa**	**Duarte**
Diferença - Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Diferença - Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Diferença - Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Termo unidade sem ajuste (TU_1)

A resolução da Luísa a esta questão passa por uma estratégia D_2 em que considera um produto de dois fatores: o número de quadrículas acrescentadas em cada figura (3 quadrículas) e o número da própria figura.

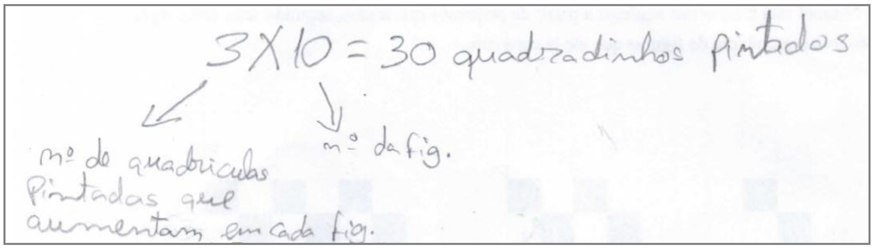


Figura 19 – Resolução apresentada pela Luísa à questão 1.b da Tarefa 2

O Duarte utiliza um termo calculado na questão anterior (5.º termo da sequência) e aplica um fator multiplicativo com o objetivo de calcular outro termo (TU_1).

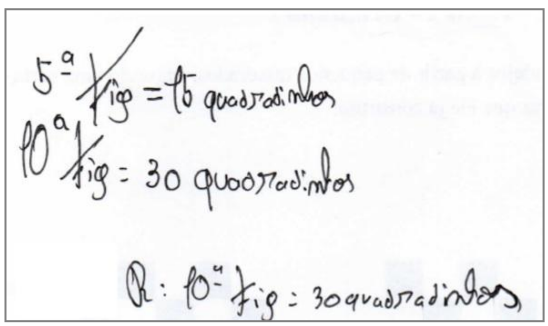


Figura 20 – Resolução apresentada pelo Duarte à questão 1.b da Tarefa 2

Nesta tarefa inclui-se uma questão envolvendo raciocínio inverso. Neste caso concreto, pretende-se que os alunos verifiquem se um valor é termo da sequência.

Qual a figura com 32 quadradinhos pintados?

Figura 21 – Questão 1.d da Tarefa 2

Os quatro alunos usaram o mesmo tipo de estratégia nesta questão. No entanto, apresentaram diferentes justificações.

Quadro 9 – Estratégias em questões de raciocínio inverso utilizadas nas questões 1.d da Tarefa 2

Andreia	Paulo	Luísa	Duarte
Exclusão - Características dos números (ECN)	Exclusão - Características dos números (ECN)	Exclusão - Características dos números (ECN)	Exclusão - Características dos números (ECN)

Nesta questão, por exemplo, a Andreia e a Luísa utilizam o conhecimento sobre múltiplos e as características dos números da sequência para verificar que 32 não é termo da sequência (fig. 22). Outros alunos identificam os termos de ordem 10 e 11 (30 e 33 quadradinhos, respetivamente) e, como tal, concluem que 32 não é termo da sequência.

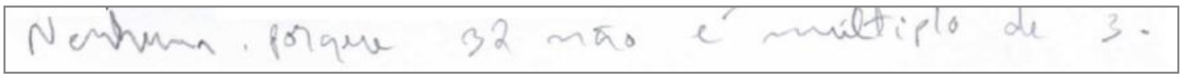

Nenhuma. porque 32 não é múltiplo de 3.

Figura 22 – Resolução apresentada pela Luísa à questão 1.d da Tarefa 2

A questão seguinte (1.*e*), é também referente a uma situação de raciocínio inverso onde se pretende verificar se um valor é termo da sequência e, em caso afirmativo, calcular a sua ordem.

Qual a figura com 45 quadradinhos pintados?

Figura 23 – Questão 1.e da Tarefa 2

Apesar de se tratar de uma questão de raciocínio inverso, à semelhança da questão anterior, verifica-se uma alteração das estratégias adotadas, sendo que três alunos utilizam agora a estratégia explícita e o quarto recorre a um outro tipo de estratégia.

Quadro 10 – Estratégias em questões de raciocínio inverso utilizadas nas questões 1.e da Tarefa 2

Andreia	Paulo	Luísa	Duarte
Explícita - Operação inversa (EOI)	Explícita - Operação inversa (EOI)	Explícita - Operação inversa (EOI)	Adição de termos (AT)

A Luísa utiliza a operação inversa para verificar se esse valor é termo da sequência, o que permite o cálculo imediato do valor da variável dependente sendo conhecida a variável independente (EOI).

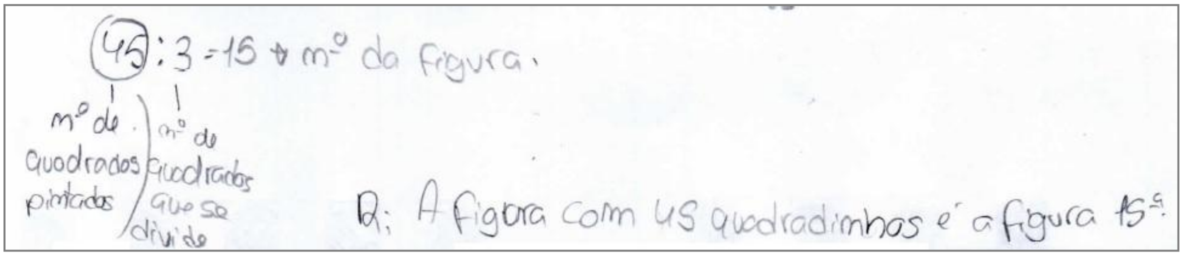


Figura 24 – Resolução apresentada pela Andreia à questão 1.e da Tarefa 2

Quanto ao Duarte, que desenvolve uma estratégia diferente da dos colegas, utiliza dois termos calculados em questões anteriores (1.*a* e 1.*b)* a fim de obter um terceiro, portanto, recorre à estratégia de adição de termos (AT).

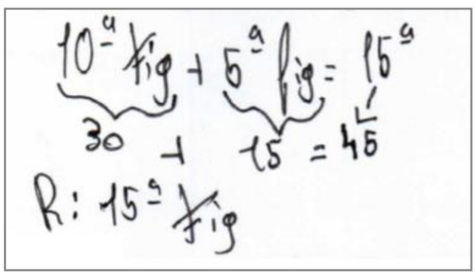


Figura 25 – Resolução apresentada pelo Duarte à questão 1.e da Tarefa 2

Após o trabalho efetuado nas questões anteriores, foi com bastante facilidade que os alunos determinaram uma regra geral.

Descreve uma regra que te permita determinar o número de quadradinhos pintados de qualquer figura da sequência.

Figura 26 – Questão 1.f da Tarefa 2

Três alunos conseguem escrever uma regra geral explícita, recorrendo à diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo.

Quadro 11 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 1.f da Tarefa 2

Andreia	**Paulo**	**Luísa**	**Duarte**
Regra geral Explícita - Diferença sem ajuste (ED_1)	Diferença - Múltiplo da diferença sem ajuste (D_2)	Regra geral Explícita - Diferença sem ajuste (ED_1)	Regra geral Explícita - Diferença sem ajuste (ED_1)

Relativamente ao tipo de representações utilizadas nesta questão, observa-se que todos os alunos adotam a linguagem natural, por vezes, complementada com outro tipo de representações e que uma aluna utiliza somente a linguagem pré-simbólica.

Quadro 12 – Representações utilizadas na questão 1.f da Tarefa 2

Andreia	**Paulo**	**Luísa**	**Duarte**
Linguagem pré-simbólica - Símbolos próprios e Linguagem natural	Linguagem natural e Esquemas ou desenhos	Linguagem natural	Linguagem natural e Esquemas ou desenhos

A Andreia utiliza a linguagem pré-simbólica (com símbolos próprios) para descrever a regra geral e utiliza a diferença entre termos consecutivos (3) como fator multiplicativo. Usa o ponto de interrogação para representar a variável independente e o X para representar a variável dependente. O termo geral aparece assim escrito como uma fórmula. A aluna exprime, ainda, a regra em linguagem natural.

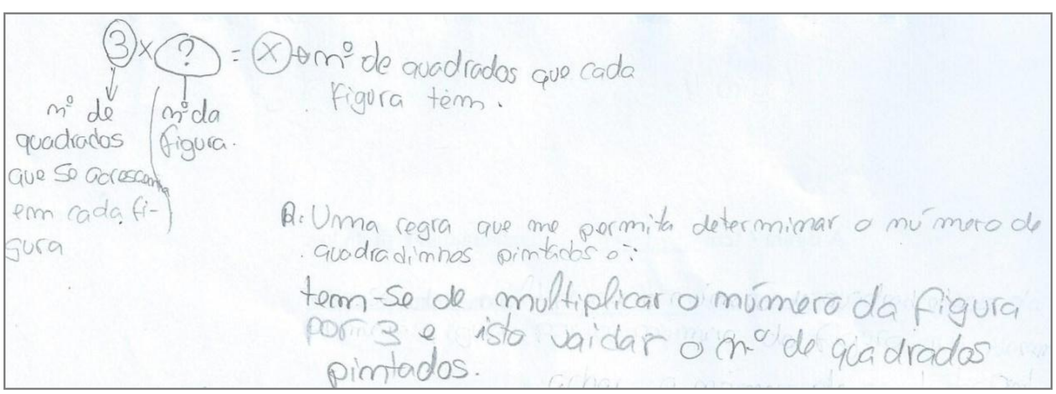


Figura 27 – Resolução apresentada pela Andreia à questão 1.f da Tarefa 2

O Paulo apoia-se num caso concreto para ilustrar a regra geral não chegando a enunciá-la, à semelhança do que apresentou na tarefa anterior.

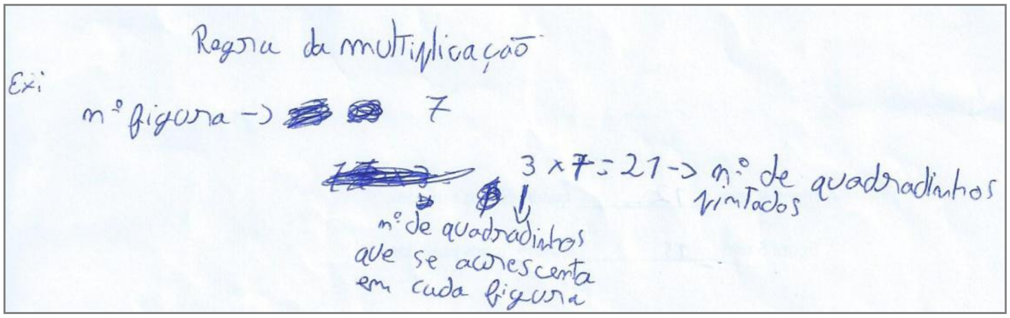


Figura 28 – Resolução apresentada pelo Paulo à questão 1.f da Tarefa 2

5.3. Tarefa 3 – *Os colares*

A aula

Como foi explicado anteriormente, o início desta aula de 100 minutos foi dedicado à síntese da Tarefa 2. Durante a exploração das respostas dos alunos e com o objetivo de introduzir progressivamente a linguagem simbólica apresentei exemplos em que foi utilizada a linguagem pré-simbólica. Sugeri à turma que simplificasse ainda mais a escrita e surgiu a letra *n* como abreviatura da palavra *número*. Solicitei aos alunos que utilizassem essa letra na escrita da regra geral da sequência. Referi que esta expressão diferia de uma expressão numérica por conter também letras e que se denominava *expressão algébrica* e salientei a simplicidade com que permite exprimir e determinar qualquer valor da sequência.

Seguidamente foi lida a Tarefa 3 – *Os colares* (anexo 3) e foram, conjuntamente, analisadas as dúvidas que os alunos apresentaram. Similarmente ao que aconteceu na tarefa anterior, os alunos utilizaram os computadores após descreverem a regra geral da sequência.

Durante a discussão das generalizações dos alunos verificou-se que alguns deles já utilizaram expressões algébricas bem construídas mas alguns descrevem também a regra em linguagem natural o que permite depreender que ainda sentem necessidade de a complementar.

Vejamos, de seguida, as estratégias de generalização que os quatro alunos selecionados apresentam, assim como a linguagem que usaram nas questões 4 a 6 desta tarefa.

Estratégias e representações

Na questão 4 (fig. 29) pretende-se que os alunos determinem um termo distante sem recorrerem ao desenho da figura.

Descobre quantas contas terá, no total, o colar correspondente à figura 19, sem o desenhares.

Figura 29 – Questão 4 da Tarefa 3

Surgem, neste caso, três tipos de estratégias diferentes, como se indica na tabela:

Quadro 13 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 4 da Tarefa 3

Andreia	**Paulo**	**Luísa**	**Duarte**
Diferença - Múltiplo da diferença com ajuste (D_3)	Diferença - Múltiplo da diferença com ajuste (D_3)	Funcional - Raciocínio Funcional (FCF)	Contagem

A estratégia utilizada pela Andreia na questão 4 é suportada pela descrição que efetua na questão 2, ou seja, usa a diferença entre termos consecutivos (2) como fator multiplicativo e ajusta o resultado adicionando uma unidade - a conta preta (D3).

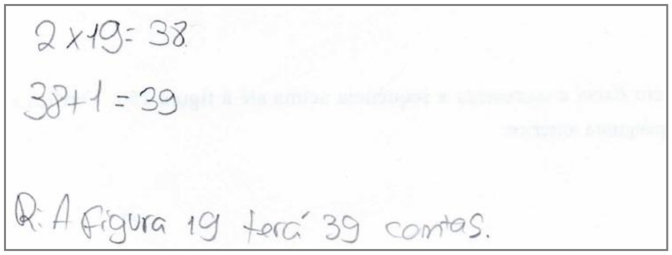


Figura 30 – Resolução apresentada pela Andreia à questão 4 da Tarefa 3

O Paulo procede de igual modo mas condensa o raciocínio numa única expressão numérica “legendada”. Ali explicita o que representa cada número tendo em conta o contexto da sequência.

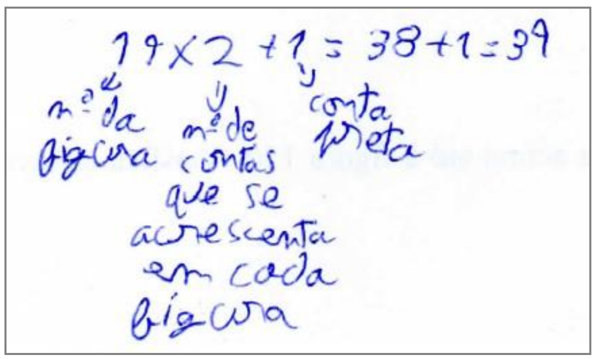


Figura 31 – Resolução apresentada pelo Paulo à questão 4 da Tarefa 3

A Luísa apresenta uma estratégia que se depreende decorrer de uma regra que percecionou através das questões anteriores e tem por base o contexto da figura. Calcula, assim, o dobro do número da figura e adiciona-lhe uma unidade (a conta preta). Embora a expressão numérica que apresenta não esteja escrita de forma correta, a aluna raciocina corretamente e obtém o resultado pretendido.

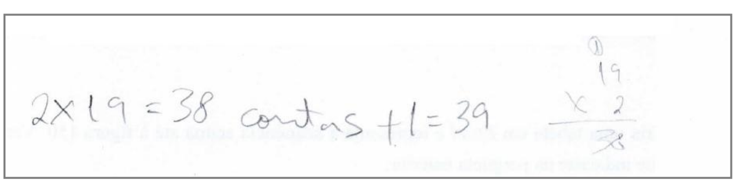


Figura 32 – Resolução apresentada pela Luísa à questão 4 da Tarefa 3

Contrariamente ao requerido no enunciado da questão, em que era explicitamente referido para não desenhar a figura, o Duarte desenha-a e divide o colar em dois, adicionando as contas brancas de cada um dos lados, a que junta depois a conta preta. O aluno parece, assim, recorrer à contagem das contas para determinar o termo pretendido.

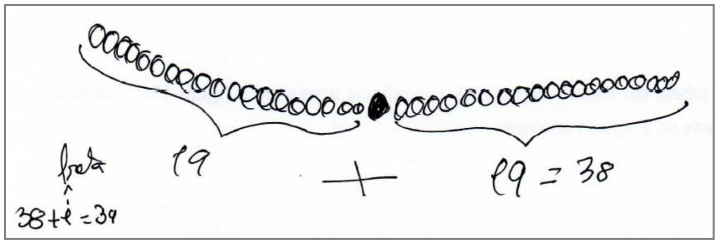


Figura 33 – Resolução apresentada pelo Duarte à questão 4 da Tarefa 3

A pergunta 5 tem como objetivo identificar as estratégias utilizadas questões de raciocínio inverso.

> Existe algum colar na sequência que tenha 52 contas? Explica, detalhadamente, o teu raciocínio.

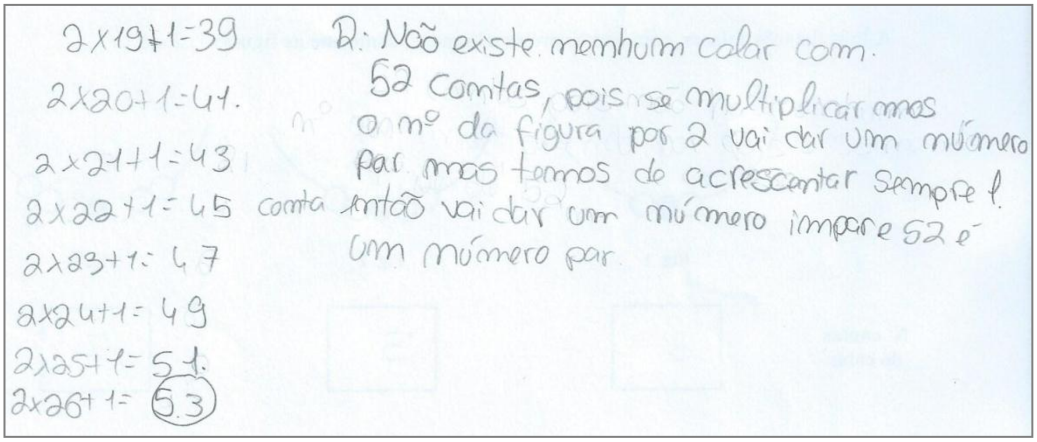
Figura 34 – Questão 5 da Tarefa 3

Foram identificadas três tipos de estratégias, conforme elencado na tabela seguinte.

Quadro 14 – Estratégias em questões de raciocínio inverso utilizadas na questão 5 da Tarefa 3

Andreia	**Paulo**	**Luísa**	**Duarte**
Exclusão - Características dos números (ECN)	Explícita - Por exaustão a partir de uma regra (EE)	Exclusão - Características dos números (ECN)	Exclusão - Características dos números (ECN)

A Andreia é uma das alunas que usa as características dos números da sequência a fim de verificar se 52 é termo da sequência. Assim calcula todos os termos a partir do 19.º, que tinha determinado na questão anterior, e justifica que não existe um colar com 52 contas uma vez que todos os termos da sequência são ímpares.

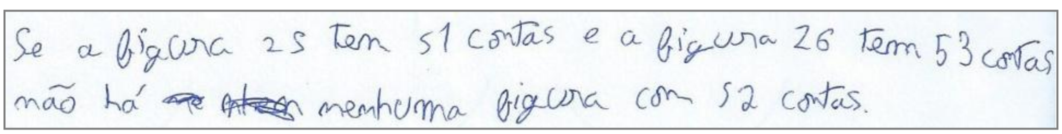


2x19+1=39
2x20+1=41.
2x21+1=43
2x22+1=45
2x23+1=47
2x24+1=49
2x25+1=51.
2x26+1=53

R: Não existe menhum colar com 52 comtas, pois se multiplicarmos o nº da figura por 2 vai dar um número par mas temos de acrescentar sempre 1 conta então vai dar um número impar e 52 é um número par.

Figura 35 – Resolução apresentada pela Andreia à questão 5 da Tarefa 3

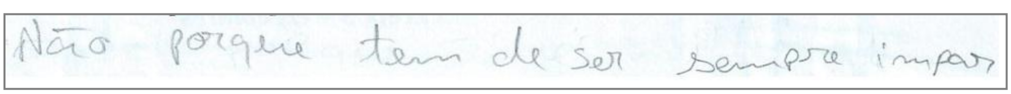
Na análise da resolução da questão anterior, verificou-se que o Paulo consegue calcular termos distantes recorrendo à estratégia de múltiplo da diferença com ajuste, o que lhe permite determinar o 25.º e o 26.º termos da sequência. Por exclusão concluiu, então, que 52 não é termo da sequência (EE).



Se a figura 25 tem 51 contas e a figura 26 tem 53 contas não há nenhuma figura com 52 contas.

Figura 36 – Resolução apresentada pelo Paulo à questão 5 da Tarefa 3

A Luísa observa os termos da sequência e conclui que são sempre ímpares, excluindo de imediato o número 52 (ECN).



Não porque tem de ser sempre impar

Figura 37 – Resolução apresentada pela Luísa à questão 5 da Tarefa 3

A questão 6 solicita a descrição da regra geral da sequência:

Descreve uma regra que te permita determinar o número total de contas de qualquer figura da sequência.

Figura 38 – Questão 6 da Tarefa 3

As estratégias utilizadas pelos quatro alunos recaem na Regra geral Explícita mas com algumas variantes:

Quadro 15 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 6 da Tarefa 3

Andreia	**Paulo**	**Luísa**	**Duarte**
Regra geral Explícita - Diferença com ajuste (ED_2)	Regra geral Explícita - Diferença com ajuste (ED_2)	Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCF)	Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCF)

Relativamente ao tipo de representações utilizadas pelos alunos na descrição da regra regista-se uma grande variedade, como se expressa no Quadro 16:

Quadro 16 - Representações utilizadas na questão 6 da Tarefa 3

Andreia	**Paulo**	**Luísa**	**Duarte**
Linguagem simbólica e Linguagem natural	Linguagem pré-simbólica (sincopada)	Linguagem natural	Linguagem simbólica e Linguagem natural

Através da linguagem pré-simbólica (sincopada) o Paulo identifica a regra geral da sequência. Usa a diferença de termos consecutivos como fator multiplicativo e efetua o ajuste de 1 unidade (ED_2).

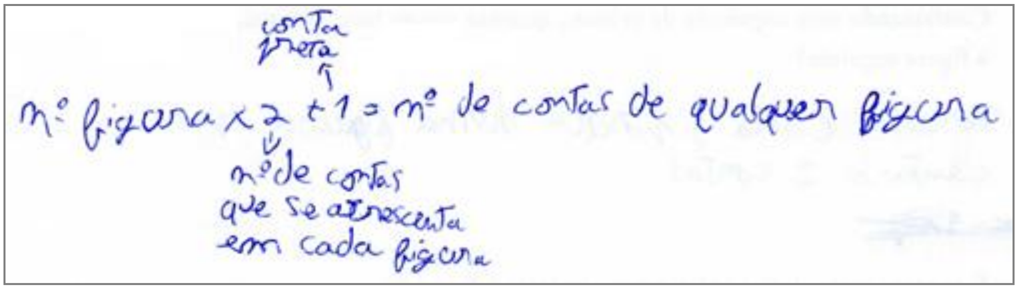


Figura 39 – Resolução apresentada pelo Paulo à questão 6 da Tarefa 3

Nesta questão o Duarte refere que “em cada colar há uma conta preta e em cada colar há contas brancas correspondentes ao número da figura”. Depreende-se que o aluno se apoia no contexto visual da tarefa quando faz a representação (desenho), que esquematiza na questão 4, onde relaciona o número da figura com o número de contas brancas que estão dispostas num dos lados da conta preta.

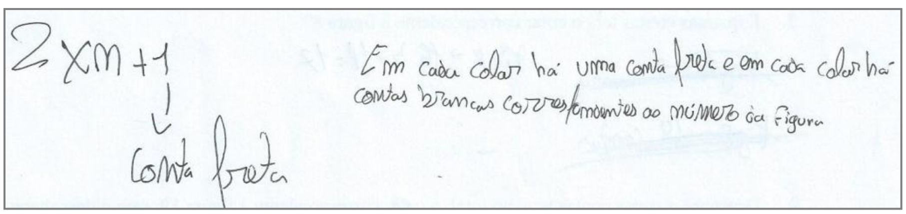


Figura 40 – Resolução apresentada pelo Duarte à questão 6 da Tarefa 3

5.4. Tarefa 4 – *Os cubos*

A aula

Para a realização da Tarefa 4 (anexo 4) foi utilizada uma aula de 50 minutos. Esta tarefa apresenta, pela primeira vez, uma sequência representada por objetos em três dimensões, exigindo um maior nível de abstração aos alunos pois existem faces dos cubos não visíveis que têm que ser considerados. Após a leitura do enunciado, alguns alunos aperceberam-se desse facto e questionaram se teriam que considerar essas faces do cubo não visíveis. Verificou-se que os alunos ficaram motivados com esta situação pois encararam-na como um desafio adicional.

Foi esclarecido que nesta aula não seria necessário o uso dos computadores o que provocou algum desapontamento aos alunos.

Os alunos iniciaram o seu trabalho e a maioria resolveu a tarefa com bastante facilidade e rapidez. Como é habitual, estes alunos disponibilizaram-se para ajudar os colegas que ainda não tinham terminado a tarefa.

Estratégias e representações

Na questão 2.c desta tarefa, era pedido aos alunos que determinassem um termo distante.

Descobre quantos autocolantes a Joana usa numa construção com: Trinta e cinco cubos.

Figura 41 – Questão 2.c da Tarefa 4

Registaram-se dois tipos de estratégias, sendo que a maioria dos alunos recorre a uma estratégia explícita, embora sem enunciar ainda uma regra geral.

Quadro 17 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 2.c da Tarefa 4

Andreia	**Paulo**	**Luísa**	**Duarte**
Diferença - Múltiplo da diferença com ajuste (D_3)	Funcional - Raciocínio Funcional (FCF)	Funcional - Raciocínio Funcional (FCF)	Funcional - Raciocínio Funcional (FCF)

A Andreia usou a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo (D_3) para obter o termo 35 fazendo, de seguida, um ajuste ao resultado de 2. A aluna tem o cuidado de etiquetar cada número da expressão numérica que obteve, explicando o seu significado no contexto da figura.

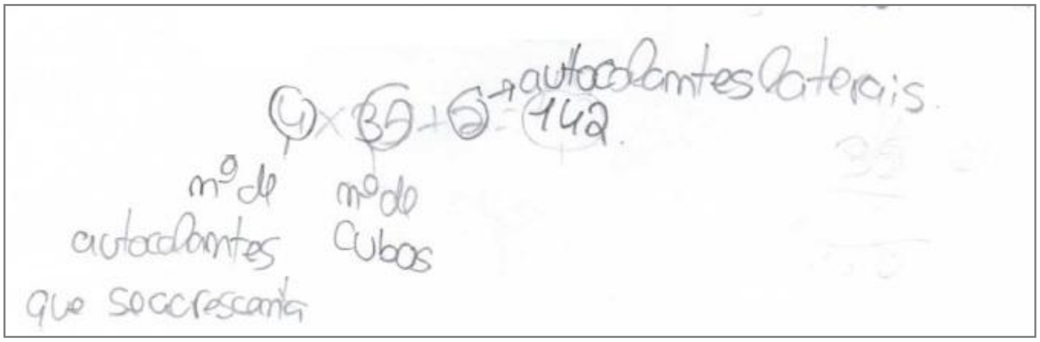


Figura 42 – Resolução apresentada pela Andreia à questão 2.c da Tarefa 4

Infere-se, a partir da resolução da questão 2.*a*, que o Paulo atribui a cada cubo quatro autocolantes. Calcula, por isso, o quádruplo do número de cubos a que adiciona os dois autocolantes das extremidades.

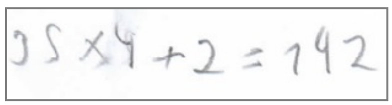


Figura 43 – Resolução apresentada pelo Paulo à questão 2.c da Tarefa 4

A Luísa apoia-se no contexto visual da figura e considera que o número de autocolantes visíveis é igual ao número de autocolantes que não se veem. A regra que utiliza consiste em calcular o dobro dos autocolantes “visíveis”. Por autocolantes “visíveis” considera o autocolante de uma das extremidades e dois autocolantes em cada cubo. Como em cada cubo são visíveis dois autocolantes, calcula o dobro do número da figura (que corresponde ao número de cubos) e acrescenta uma unidade. No entanto, parece que a aluna comete um erro de interpretação, uma vez calcula o termo de ordem 30 e não o termo que é pedido, o de ordem 35.

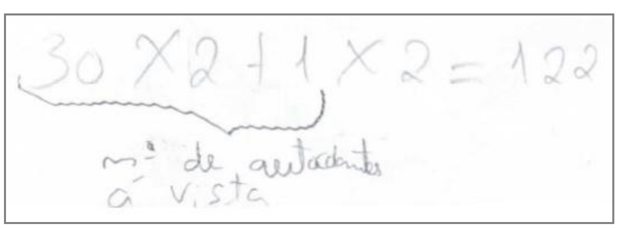


Figura 44 – Resolução apresentada pela Luísa à questão 2.c da Tarefa 4

Na determinação do termo geral as estratégias que os alunos utilizam são idênticas às que usaram para determinar um termo distante.

Descobre uma regra que te permita saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos. Explica como pensaste.

Figura 45 – Questão 3 da Tarefa 4

Quadro 18 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 3 da Tarefa 4

Andreia	Paulo	Luísa	Duarte
Regra geral Explícita – Diferença com ajuste (ED_2)	Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCF)	Funcional - Raciocínio Funcional (FCF)	Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCF)

Relativamente ao tipo de representações utilizadas pelos alunos, regista-se uma grande variedade, percorrendo três dos quatro tipos que foram considerados no quadro de análise:

Quadro 19 – Representações utilizadas na questão 3 da Tarefa 4

Andreia	Paulo	Luísa	Duarte
Linguagem natural	Linguagem simbólica e Linguagem pré-simbólica	Linguagem natural	Linguagem pré-simbólica - Símbolos próprios

A estratégia ED2 é descrita em linguagem natural pela Andreia relativamente à questão 3, apoiando-se no entanto, na descrição da sequência de acordo com o seu contexto. Assim a aluna embora referindo o fator multiplicativo como sendo o número de autocolantes que vai acrescentado em cada termo, identifica-o também com um aspeto da figura: “o nº de autocolantes da frente, de trás, de cima e de baixo”.

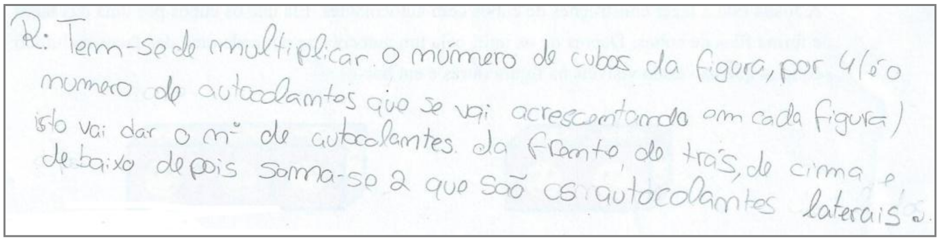
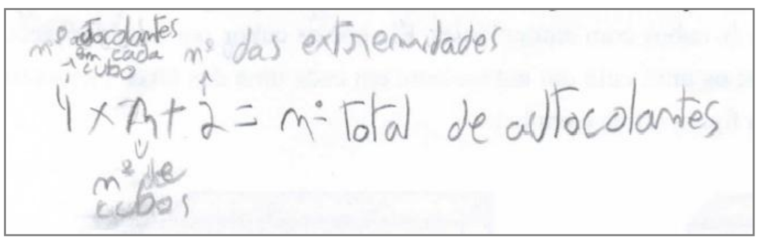

R: Tem-se de multiplicar o número de cubos da figura, por 4 (é o numero de autocolantes que se vai acrescentando em cada figura) isto vai dar o nº de autocolantes da frente, de trás, de cima e de baixo depois soma-se 2 que são os autocolantes laterais.

Figura 46 – Resolução apresentada pela Andreia à questão 3 da Tarefa 4

Nesta mesma questão o Paulo apoia-se no contexto da figura e expressa a regra geral da sequência, através de uma fórmula. Curiosamente, no lado esquerdo da fórmula usa linguagem simbólica e no lado direito linguagem abreviada. Portanto, poder-se-á considerar que coexistem na expressão da generalização, por este aluno, uma linguagem simbólica e uma linguagem pré-simbólica.


nº autocolantes em cada cubo

nº das extremidades

4 × n + 2 = nº total de autocolantes

nº de cubos

Figura 47 – Resolução apresentada pelo Paulo à questão 3 da Tarefa 4

5.5. Tarefa 5 – *Os tijolos*

A aula

Esta tarefa (anexo 5), tal como a anterior, tem como contexto uma sequência de objetos tridimensionais, os tijolos. No entanto, os alunos tiveram bastante mais dificuldade na interpretação deste padrão. Por um lado, porque a lei de formação da sequência dos tijolos não é tão facilmente percetível como nas sequências das tarefas anteriores e, por outro, porque é também considerada uma outra sequência associada a esta (o número de buracos dos tijolos). As dúvidas que surgiram quanto à interpretação da situação foram prontamente discutidas em grupo-turma. Foi feita referência à necessidade de utilização de uma expressão algébrica aquando da generalização, para além de uma descrição da regra geral correspondente.

Foi referida a utilização do *Excel* no final para tarefa com o objetivo dos alunos perceberem a obrigatoriedade, nalgumas situações, de utilização dos parênteses na expressão numérica. Por exemplo, alguns alunos referindo-se à expressão geral relativa ao número de tijolos escrevem n+n-1 em vez de n+(n-1). Experienciando informaticamente esta situação, os alunos que pretendiam adicionar o número da figura com o número da figura anterior verificaram que os resultados não coincidiam e que algo não estava correto.

Ocorreu uma situação idêntica na expressão geral relativa ao número de buracos dos tijolos. Alguns alunos descrevem a regra adicionando o número da figura com o número da figura anterior e multiplicar por oito. Da expressão anterior já sabem que devem pôr os parênteses e escrevem n+(n-1)x8 mas verificam rapidamente, através do *Excel*, que não é possível ser esta a expressão correta.

Estratégias e representações

Na primeira questão a sequência foi analisada até ao termo de ordem 6 e, na questão seguinte, é solicitado que os alunos determinem a 27.ª figura.

Quantos tijolos tem, no total, a figura que corresponde ao termo de ordem 27?

Figura 48 – Questão 1.b da Tarefa 5

Todos os alunos usam o mesmo tipo de estratégia na determinação de um termo distante, tendo-se apoiando-se nas relações numéricas identificadas:

Quadro 20 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 1.b da Tarefa 5

Andreia	**Paulo**	**Luísa**	**Duarte**
Funcional - Raciocínio Funcional (FCN)	Funcional - Raciocínio Funcional (FCN)	Funcional - Raciocínio Funcional (FCN)	Funcional - Raciocínio Funcional (FCN)

O Paulo apoia-se na tabela que completou na questão 1.*a*, onde observou que se adicionar a ordem da figura com a ordem da figura anterior obtém o termo pretendido, o que explicita na sua resposta a esta questão:

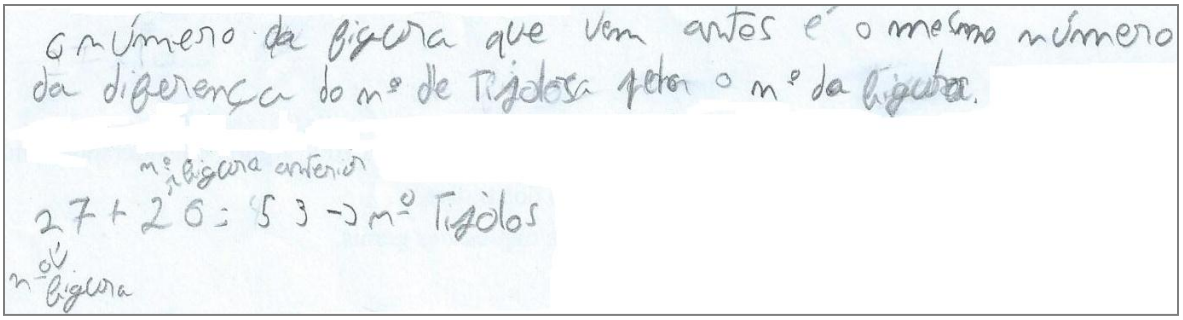


Figura 49 – Resolução apresentada pelo Paulo à questão 1.b da Tarefa 5

A Luísa também se auxilia da tabela que preencheu na questão anterior e utiliza o mesmo processo que o Paulo ao adicionar o número da figura com o número da figura anterior.

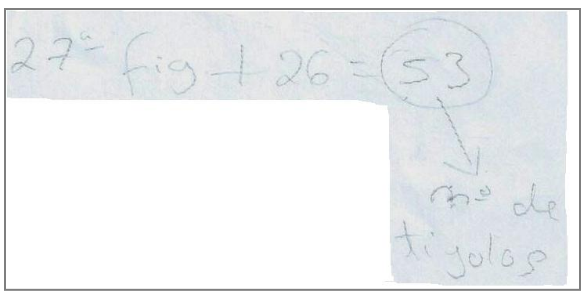


Figura 50 – Resolução apresentada pela Luísa à questão 1.b da Tarefa 5

Da análise do trabalho desenvolvido pela aluna na questão 1.*a*, verifica-se que inicia a sua estratégia de um modo diferente do Paulo quando ao número da figura adiciona zero à primeira, um à segunda, dois à terceira e assim sucessivamente, para obter o termo pretendido. Posteriormente depreende-se que observa que este procedimento pode ser generalizado através da adição do número da figura com o número da figura anterior.

Na questão 1.*c* questiona-se a existência de uma ordem para um termo que é dado.

Existe, nesta sequência, alguma figura com 88 tijolos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.

Figura 51 – Questão 1.c da Tarefa 5

Todos os alunos usaram a mesma estratégia de resolução:

Quadro 21 – Estratégias em questões de raciocínio inverso utilizadas na questão 1.c da Tarefa 5

Andreia	Paulo	Luísa	Duarte
Exclusão - Características dos números (ECN)	Exclusão - Características dos números (ECN)	Exclusão - Características dos números (ECN)	Exclusão - Características dos números (ECN)

Com base nas características dos termos da sequência o Duarte conclui, por exclusão, que nenhum termo pode ser par (ECN).

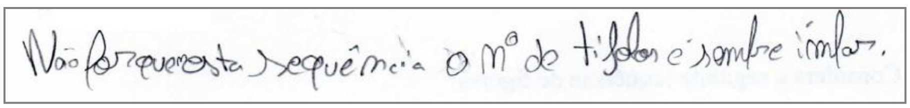

Não porque nesta sequência o nº de tijolos é sempre impar.

Figura 52 – Resolução apresentada pelo Duarte à questão 1.c da Tarefa 5

Enquanto nas tarefas anteriores, era pedida uma regra geral para representar o termo geral da sequência, nesta tarefa é solicitada aos alunos uma expressão algébrica para o número de tijolos em qualquer figura.

Escreve uma expressão algébrica que te permita determinar para qualquer figura:

a) o número de tijolos.

Figura 53 – Questão 2.a da Tarefa 5

Os alunos foram bem sucedidos na identificação da regra geral de uma forma explícita, tendo usado o mesmo tipo de estratégia, embora não a obtendo da mesma forma:

Quadro 22 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 2.a da Tarefa 5

Andreia	Paulo	Luísa	Duarte
Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCN)

Relativamente ao tipo de representações utilizadas nesta questão, verifica-se que apenas o Duarte não utiliza a linguagem simbólica como era pretendido.

Quadro 23 – Representações utilizadas na questão 2.a da Tarefa 5

Andreia	Paulo	Luísa	Duarte
Linguagem simbólica e Linguagem pré-simbólica	Linguagem simbólica e Linguagem pré-simbólica	Linguagem natural e Linguagem simbólica	Linguagem natural

Através de linguagem simbólica a Andreia explicita a regra geral da sequência, apoiando-se no contexto numérico da mesma (EFCN), como foi percetível pela forma como respondeu às questões anteriores. A aluna adiciona o número da figura com o número da figura anterior. Tal como foi referido a propósito da resolução do Paulo na tarefa anterior, a aluna usa uma fórmula, onde no lado esquerdo usa linguagem simbólica e no lado direito linguagem abreviada, pelo que se considera que utiliza linguagem simbólica e pré-simbólica.

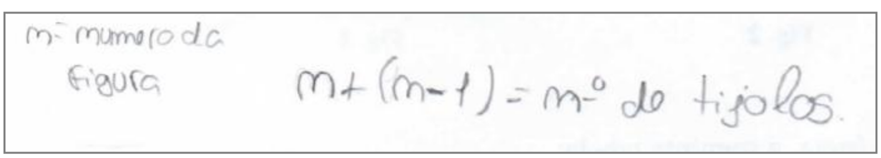


Figura 54 – Resolução apresentada pela Andreia à questão 2.a da Tarefa 5

Na questão 1.b o Paulo calcula o termo pretendido a partir da adição do número da figura com o número da figura anterior mas quando efetua a generalização utiliza outro tipo de raciocínio: calcula o dobro no número da figura e subtrai uma unidade. Possivelmente terá observado a existência dessa regularidade nos números da tabela. Exprime a regra geral através de linguagem simbólica e pré-simbólica tal como a aluna anterior.

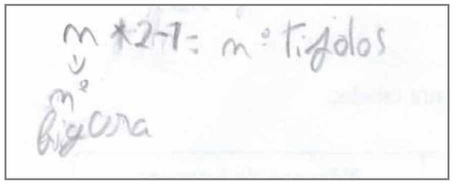


Figura 55 – Resolução apresentada pelo Paulo à questão 2.a da Tarefa 5

5.6. Tarefa 6 – *As pilhas*

A aula

Esta tarefa (anexo 6) inicia a transição para a Proporcionalidade Direta e pretende mobilizar conhecimentos adquiridos na análise de sequências para estabelecimento de relações entre as grandezas apresentadas. Esta é a primeira tarefa desta experiência de ensino em que não é apresentada uma sequência pictórica.

Outra particularidade desta tarefa é o facto de ser proposto, também pela primeira vez, a construção de um gráfico, em Excel. Depois de exemplificada a respetiva construção e salientados os procedimentos a adotar, os alunos iniciaram a resolução da tarefa sem dificuldade. Os alunos mostraram-se muito entusiasmados com a construção do gráfico e interpretaram-no com muita facilidade.

Na resolução desta tarefa os alunos usaram raciocínios escalares e funcionais e através da sua exploração foi abordada a noção de razão e grandezas diretamente proporcionais.

Estratégias e representações

Os alunos não tiveram dificuldade na realização das questões iniciais da tarefa. Na questão 4 era pedida uma expressão algébrica para a relação entre as duas variáveis.

Escreve uma expressão algébrica que relacione o número de pilhas com o número de embalagens.

Figura 56 – Questão 4 da Tarefa 6

Na determinação do termo geral verifica-se que todos os alunos adotaram as mesmas estratégias.

Quadro 24 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 4 da Tarefa 6

Andreia	Paulo	Luísa	Duarte
Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCN)

Também todos os alunos utilizaram a linguagem simbólica para apresentar o termo geral, embora o Duarte inserisse também uma descrição em linguagem natural.

Quadro 25 – Representações utilizadas na questão 4 da Tarefa 6

Andreia	Paulo	Luísa	Duarte
Linguagem simbólica e Linguagem pré-simbólica	Linguagem simbólica e Linguagem pré-simbólica	Linguagem simbólica e Linguagem pré-simbólica	Linguagem simbólica, Linguagem pré-simbólica e Linguagem natural

O Paulo apresenta duas expressões algébricas, através de uma fórmula, para o cálculo do número de pilhas, evidenciando em ambos os casos uma estratégia explícita funcional.

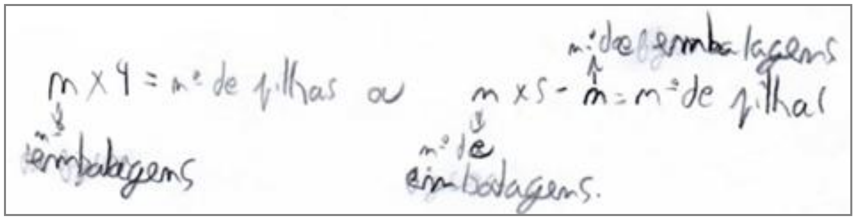


Figura 57 – Resolução apresentada pelo Paulo à questão 4 da Tarefa 6

Na primeira expressão, o aluno identifica a razão entre o número de pilhas e o número de embalagens, através da interpretação numérica da tabela, e utiliza-a como fator multiplicativo. Na segunda expressão, apoiando-se também na interpretação numérica da tabela, possivelmente influenciado pela estratégia adotada na tarefa anterior, o aluno procura operar sobre os valores da variável independente de modo a obter os valores respetivos da variável dependente.

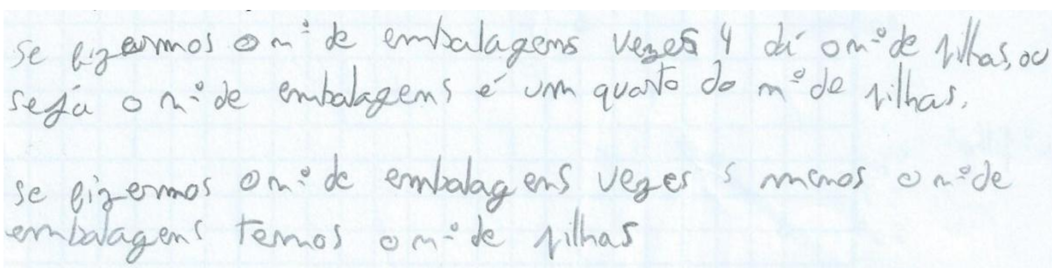


Figura 58 – Resolução apresentada pelo Paulo à questão 1 da Tarefa 6

O Duarte identifica a relação funcional entre as variáveis, determina a razão unitária e utiliza-a nas duas expressões algébricas apresentadas. No entanto, o aluno usa a mesma letra (*n*) para representar variáveis diferentes, ou seja, tanto para designar o número de embalagens como o número de pilhas, mas evidencia saber o que representa em cada uma delas, quando exprime as relações em linguagem natural.

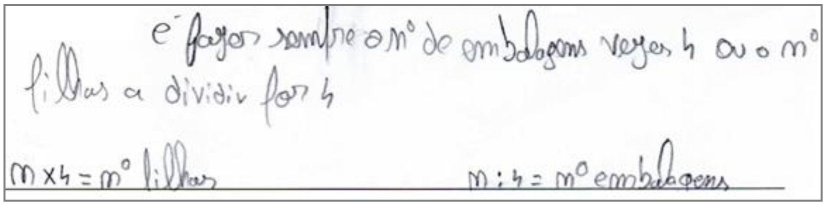


Figura 59 – Resolução apresentada pelo Duarte à questão 4 da Tarefa 6

Mais uma vez se verifica que os alunos usam uma fórmula para representar a expressão algébrica que congrega linguagens simbólica e pré-simbólica.

5.7. Tarefa 7 – *As bicicletas*

A aula

Nesta tarefa (anexo 7) pretendia-se que os alunos verificassem a existência de Proporcionalidade Direta em duas situações. Este procedimento requereu uma parte significativa da aula na procura de relações entre as grandezas apresentadas, o que pressupõe um maior grau de complexidade da tarefa.

Alguns alunos quando se confrontaram com a inexistência de relações proporcionais entre as grandezas exprimiram dificuldades em justificá-la.

Apesar da utilização da folha de cálculo *Excel* ter um caráter facultativo nesta tarefa praticamente todos os alunos optaram por utilizá-la. Para além da confirmação de dados os alunos manifestam motivação por utilizarem esta ferramenta tecnológica.

Estratégias e representações

Depois de um trabalho de análise das relações existentes nas duas situações, os alunos foram averiguar a possibilidade de determinar um certo valor que não se encontra na tabela.

Em alguma das empresas é possível prever o preço a pagar pelo aluguer da bicicleta durante 120 minutos? Justifica a tua resposta.

Figura 60 – Questão 1.b da Tarefa 7

Registaram-se uma variedade de estratégias por parte dos alunos, tal como se expressa no quadro seguinte:

Quadro 26 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 1.b da Tarefa 7

Andreia	**Paulo**	**Luísa**	**Duarte**
Funcional - Raciocínio Funcional (FCN)	Diferença - Recursiva (D_1)	Parte da resolução errada Termo unidade - sem ajuste (TU_1)	Funcional - Raciocínio Funcional (FCN)

O Paulo identifica a covariação das grandezas, assinalando a diferença, por um lado, entre os valores do tempo e, por outro, os valores do preço. O aluno continua a sequência com base na diferença entre os valores da tabela (D_1) mas revela ter sentido de covariação das grandezas porque atende ao facto de as diferenças entre os valores registados para a variável independente não serem sempre as mesmas.

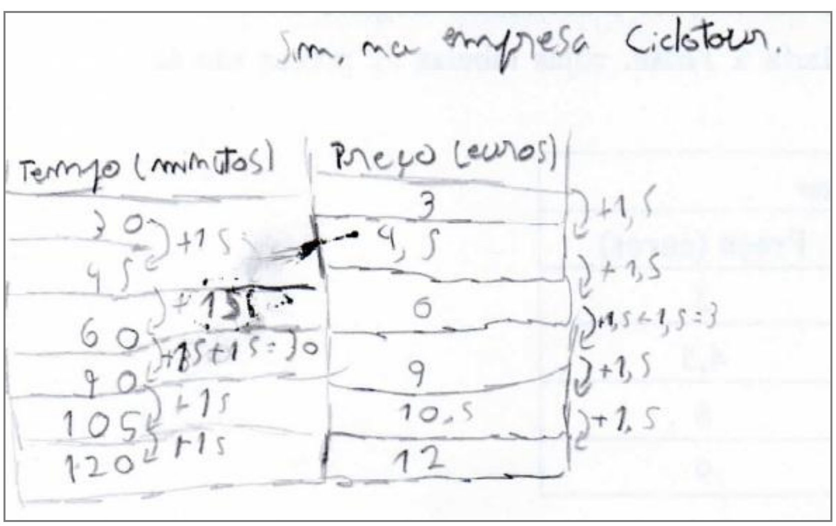


Figura 61 – Resolução apresentada pelo Paulo à questão 1.b da Tarefa 7

Na resposta a esta questão a Luísa considera um termo da sequência como unidade e usa um múltiplo dessa unidade, neste caso o dobro, a fim de obter o termo pretendido, independentemente de existir, ou não, proporcionalidade direta. A aluna utiliza para as duas empresas o mesmo procedimento apesar de na questão anterior ter identificado, corretamente, que as grandezas não eram diretamente proporcionais na "2.ª" empresa.

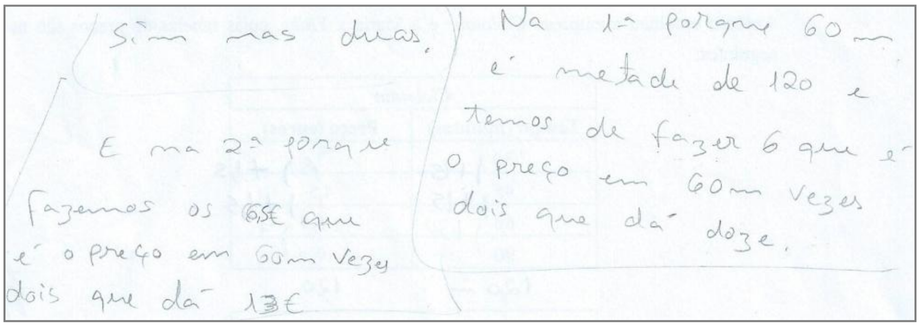


Figura 62 – Resolução apresentada pela Luísa à questão 1.b da Tarefa 7

O Duarte apoia-se na relação funcional e identifica a relação entre as variáveis – décima parte/décuplo. O aluno refere na questão 1.*a*: "Na empresa "*Ciclotour*" o preço é sempre a décima parte do tempo, e o tempo é dez vezes maior que o preço".

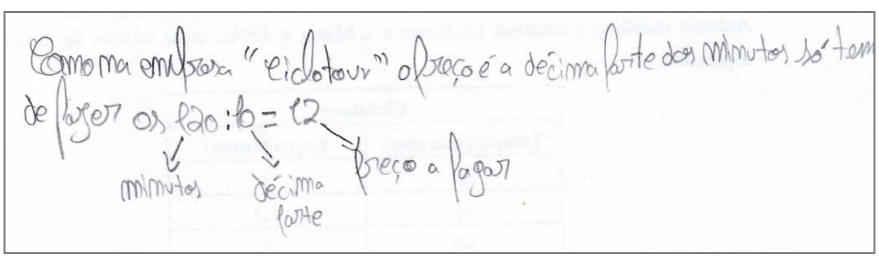


Figura 63 – Resolução apresentada pelo Duarte à questão 1.b da Tarefa 7

Na última questão solicita-se a determinação de uma expressão algébrica, caso exista proporcionalidade direta, entre as grandezas apresentadas.

Para alguma das empresas é possível escrever uma expressão algébrica que permita determinar o preço a pagar por qualquer tempo de utilização da bicicleta? Em caso afirmativo identifica qual a empresa e escreve a expressão.

Figura 64 – Questão 1.c da Tarefa 7

Na determinação do termo geral, os alunos usaram maioritariamente, uma estratégia explícita para apresentar a regra geral, apoiada no contexto numérico:

Quadro 27 – Estratégias de generalização utilizadas na questão 1.c da Tarefa 7

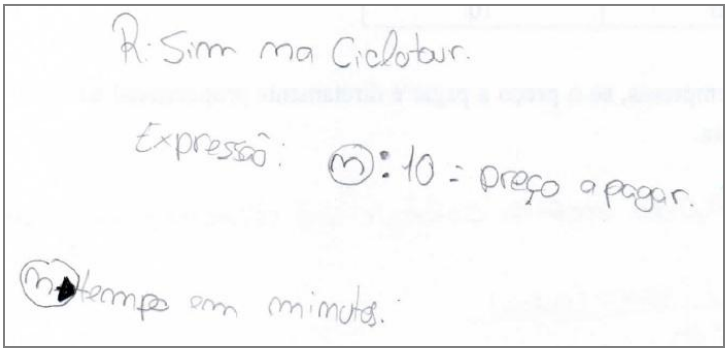
Andreia	Paulo	Luísa	Duarte
Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCN)	Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCN)	Não escreve a regra geral	Regra geral Explícita - Raciocínio Funcional (EFCN)

Relativamente ao tipo de representações utilizadas regista-se uma variedade, como o quadro seguinte ilustra:

Quadro 28 – Representações utilizadas na questão 1.c da Tarefa 7

Andreia	Paulo	Luísa	Duarte
Linguagem simbólica e Linguagem pré-simbólica	Linguagem simbólica e Linguagem pré-simbólica	Não escreve a regra geral	Linguagem Simbólica

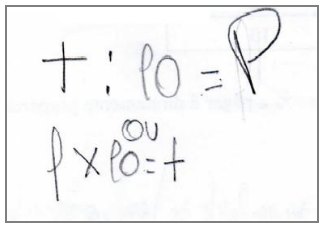
As duas respostas que se apresentam de seguida são descritas em linguagem simbólica e pressupõem uma relação funcional entre as variáveis. Os alunos explicitam a regra geral apoiando-se no contexto numérico da situação (EFCN), tal como se observou nas suas respostas a questões anteriores. No entanto, a Andreia apresenta uma fórmula, a exemplo do que os alunos fizeram em outras tarefas, em que usa linguagem simbólica e também pré-simbólica (fig. 65). Já o Duarte usa uma fórmula em que utiliza apenas símbolos matemáticos (fig. 66).


R: Sim ma Ciclotur.

Expressão: m : 10 = preço a pagar.

m → tempo em minutos.

Figura 65 – Resolução apresentada pela Andreia à questão 1.c da Tarefa 7


t : 10 = P

ou

P x 10 = t

Figura 66 – Resolução apresentada pelo Duarte à questão 1.c da Tarefa 7

Além do solicitado na questão, o Duarte indica também a regra que permite calcular o tempo de utilização da bicicleta em função do preço pago.

Capítulo 6

Reflexão sobre o trabalho realizado

Neste último capítulo efetua-se uma apresentação das principais conclusões do estudo tendo em consideração as questões formuladas anteriormente e os resultados obtidos e, por último, é feita uma reflexão sobre a experiência de ensino realizada e a contribuição desta para o meu desenvolvimento profissional.

6.1. Conclusões do estudo

Nesta secção procura-se dar resposta às questões que nortearam o estudo realizado numa turma do 6.º ano e que incidem sobre as estratégias e representações associadas à generalização de relações no tópico Sequências e Regularidades e na fase introdutória do tópico da Proporcionalidade Direta. A discussão sobre as dificuldades evidenciadas pelos alunos na resolução das tarefas, terceira questão do estudo, será integrada em cada uma das respetivas temáticas: estratégias ou representações. Procura-se também evidenciar a evolução dos alunos ao longo da experiência de ensino nos aspetos em estudo, por isso, começa-se por sintetizar os resultados relativos a cada aluno individualmente e, em seguida, discutem-se os resultados de forma global.

Estratégias de generalização

No conjunto das tarefas realizadas, a Andreia evidencia, nas primeiras quatro, uma clara preferência pelas estratégias de Múltiplo da Diferença com ou sem ajuste (D_2 ou D_3), de acordo com o que a situação exige, e que usa na determinação de termos próximos ou distantes. A aluna mobiliza, com sucesso, este tipo de estratégias para encontrar uma regra geral explícita (ED_1 ou ED_2). A partir da Tarefa 5 a aluna recorre a estratégias funcionais a partir da observação de regularidades numéricas que surgem nas tarefas e que lhe permitem determinar termos próximos e distantes (FCN) e que estende, com facilidade, às situações em que lhe é pedida a regra geral (EFCN).

O Paulo usa, na maioria das vezes, estratégias muito semelhantes às da Andreia, mas na tarefa 4 apresenta um raciocínio funcional apoiado no contexto da figura (FCF) que depois mobiliza para determinar a regra geral para esta sequência (EFCF). A partir da tarefa 5 usa, no geral, as mesmas estratégias que a sua colega.

Estes dois alunos, Andreia e Paulo, evidenciam claramente que intuem a regra geral a partir da estratégia que utilizaram para fazer generalizações próximas ou distantes. Quando se encontram perante uma nova tarefa, os alunos conseguem abstrair a estrutura da sequência, sem necessitarem de se apoiar diretamente no contexto, porque percebem que podem aplicar o tipo de estratégia que adotaram a novos casos semelhantes (quando se trata de situações de proporcionalidade direta) ou adaptá-la quando se deparam com uma sequência com uma estrutura diferente, como se observou na sua resolução da tarefa 3. Ainda assim observa-se que o contexto tem um papel importante, nas primeiras tarefas, porque é neste que os alunos se apoiam, ao observarem a estrutura da sequência para adaptarem as suas estratégias a novas situações.

A partir da Tarefa 5, é com base na tabela que é proposta no enunciado da tarefa que analisam as sequências, agora numa perspetiva claramente numérica. Os alunos manifestam que perceberam bem a natureza de uma relação funcional e procuram encontrar regularidades nos números que lhes permitam obter uma regra geral que relacione a variável dependente com a independente, sem ficarem presos às estratégias particulares que adotaram nas tarefas anteriores. Assim, destaca-se por exemplo, a situação em que o Paulo na Tarefa 7, embora aparentemente recorrendo a uma estratégia recursiva de diferença entre os valores para determinar um valor da variável dependente (D_2) usa um raciocínio covariacional, aspeto importante do pensamento funcional. Estes alunos não revelaram dificuldades na resolução das tarefas, tendo conseguido desenvolver estratégias adequadas às situações propostas.

A aluna Luísa nas duas primeiras tarefas usa a estratégia de Múltiplo da Diferença da determinação de termos próximos ou distantes, tal como a Andreia e o Paulo, sendo que nessas situações não é necessário fazer ajuste (D_2). Tal como os seus colegas também usa esse tipo de estratégia para determinar uma regra geral explícita (ED_1). No entanto, nas Tarefas 3 e 4 já não utiliza o mesmo tipo de estratégia passando a usar o contexto das figuras para determinar termos distantes, através de uma relação funcional que procura adaptar para determinar a regra geral. Apesar de se apoiar nas características figurativas dos termos da sequência nessas duas tarefas, consegue nas tarefas 5 e 6 usar um raciocínio de tipo funcional recorrendo às regularidades numéricas presentes. Tal como os seus colegas, Andreia e Paulo, para a mesma sequência, a Luísa usa o mesmo tipo de estratégia de generalização para termos distantes e para a determinação da regra geral.

Esta aluna apresenta, no entanto, algumas dificuldades na determinação da regra geral, por exemplo, na tarefa 4, onde embora recorrendo uma estratégia adequada à determinação de um termo distante, não responde ao que lhe é solicitado, possivelmente porque a forma como percebe a estrutura da sequência se torna difícil de verbalizar, de uma forma genérica. Também na Tarefa 7 não apresenta uma regra geral para a situação de proporcionalidade direta, embora o tenha conseguido fazer na tarefa anterior. O que distingue o seu trabalho nestas duas tarefas é que na primeira a aluna conseguiu identificar a relação funcional logo ao determinar um valor pedido, enquanto que na segunda, usou a estratégia do termo unidade-sem ajuste (TU_1) que não facilita a generalização para qualquer valor. Comparativamente com os seus colegas, Andreia e Paulo, a Luísa tem maior dificuldade em adaptar estratégias que desenvolveu a novas situações, tendendo a experimentar estratégias diferentes que lhe são suscitadas de modo mais óbvio pelo contexto pictórico ou numérico da situação.

Ao longo da experiência de ensino, o Duarte é o aluno que apresenta a maior diversidade de estratégias de generalização, e as que mais se distinguem das dos colegas referidos. Este aluno distingue-se também pelo facto de muitas vezes não usar estratégias semelhantes para a determinação de termos distantes e de uma regra geral. É o único aluno que usa a estratégia de Termo unidade sem ajuste (TU_1) nas primeiras tarefas, para determinar termos distantes, estratégia esta que é bastante adequada para estas situações. Consegue ainda assim usar a estratégia de Múltiplo da Diferença sem ajuste para determinar a regra geral explícita (ED_1). A partir da Tarefa 3, o aluno recorre sempre a estratégias de tipo funcional, sendo que nas Tarefas 3 e 4 se apoia no contexto das figuras da sequência e nas seguintes no contexto numérico da situação, não revelando dificuldades.

Nas questões que dizem respeito à determinação da ordem de um termo dado ou da verificação se um dado valor é termo da sequência, questões habitualmente designadas de Raciocínio Inverso, verifica-se que a estratégia que é mais usada pelos alunos é a de Exclusão - Características dos números (ECN) que se revela eficaz e aparentemente é mais fácil para os alunos do que a estratégia Explícita através de Operações inversas (EOI). Esta apenas é usada por três alunos na tarefa 2, onde a operação envolvida não tem grande dificuldade. Verifica-se também que, na maioria dos casos, os quatro alunos tendem a usar todos a mesma estratégia em cada tarefa. Esta opção parece decorrer de uma identificação de uma estratégia eficaz que é adequada à situação, em particular, atendendo às características dos números envolvidos. Salienta-se, mais uma vez, o aluno Duarte que usa uma estratégia diferente dos seus colegas, a Adição de termos (AT).

Globalmente, verifica-se que os alunos foram bem sucedidos na resolução das tarefas propostas, sendo que apenas a Luísa não conseguiu responder de forma adequada a todas as questões das sete tarefas. De uma forma geral, os alunos evoluíram de estratégias do tipo Múltiplo da Diferença, que ainda assim se revelaram adequadas para conseguirem obter uma regra geral, para estratégias de tipo Funcional que lhes permitem resolver as várias situações com que se vão confrontando.

Representações

Através da análise das questões em que os alunos eram solicitados a descrever uma regra geral, nas primeiras tarefas, e uma expressão algébrica nas últimas tarefas da experiência de ensino, foram identificadas as representações que estes usaram nas várias tarefas, permitindo perceber como evoluem na linguagem que utilizam.

Assim verifica-se que nas primeiras duas tarefas predominam as representações do termo geral em linguagem natural, começando a emergir uma linguagem pré-simbólica em que os alunos usam linguagem sincopada e símbolos próprios. A utilização de abreviaturas é bastante comum na linguagem pré-simbólica. A partir da terceira tarefa começa a surgir a linguagem simbólica. Os alunos que usam a linguagem simbólica nessa tarefa sentem necessidade de a complementar com linguagem natural, possivelmente porque ainda se sentem pouco seguros com esse novo tipo de representação.

A partir da tarefa 4 os alunos passam a apresentar a expressão geral sob a forma de uma fórmula mas que congrega a linguagem simbólica, na representação do termo geral com a variável independente, e linguagem pré-simbólica, na representação da variável dependente, através de uma linguagem abreviada. O uso destas fórmulas, em que surgem os dois tipos de linguagem, constitui uma etapa para que possam começar a considerar dois símbolos numa mesma expressão, representando cada uma das variáveis. A exclusividade do uso de linguagem simbólica neste tipo de fórmulas apenas surge na resolução de um aluno, o Duarte, na última tarefa, denotando este uma boa compreensão das duas variáveis envolvidas nas situações, como é visível na tarefa 6, onde apresenta os três tipos de representações para explicitar as relações envolvidas.

É notório que os alunos vão progredindo no uso de uma linguagem gradualmente mais formal, no entanto, verifica-se que em algumas tarefas voltam a usar linguagem natural quando já tinham usado linguagem pré-simbólica ou, até mesmo, simbólica em tarefas anteriores. Depreende-se que tal facto tem a ver com o grau de dificuldade estrutura envolvida ou da familiaridade e confiança do aluno com a estratégia adotada. Assim, por exemplo, a Andreia que desde a Tarefa 2 usava linguagem simbólica, quando resolve a Tarefa 4, exprime a regra geral através de linguagem natural. Neste caso, a aluna pela forma como descreve a regra geral, permite perceber que está a transitar de uma estratégia de Diferença (ED2) para um raciocínio de tipo funcional, coexistindo na sua explicação os dois tipos de raciocínio. Também o Duarte recorre novamente à linguagem natural na Tarefa 5, quando nas Tarefas 1 e 4 já tinha recorrido a linguagem pré-simbólica e na Tarefa 3 a linguagem simbólica. Possivelmente, a dificuldade do aluno em escrever o termo geral da sequência em linguagem simbólica, decorre do facto de que nas duas tarefas anteriores este pôde apoiar-se no contexto das figuras para dar sentido aos símbolos, mas no caso da Tarefa 5 centrou-se unicamente nos números, sendo que a estrutura da sequência não é claramente percetível através da sua representação pictórica. Portanto, este aparente avançar e recuar dos dois alunos na utilização da linguagem simbólica tem de ser entendido à luz das situações que são propostas.

Ao invés, o Paulo progride de forma gradual e sem retrocessos na utilização da linguagem simbólica, ao longo da experiência de ensino. Começa por usar na primeira tarefa unicamente linguagem natural, na segunda também esquemas ou desenhos, na terceira linguagem sincopada (pré-simbólica) e a partir da tarefa 4 usa sempre linguagens simbólica e pré-simbólica para representar uma fórmula com as duas variáveis.

Finalmente, Luísa mantém o recurso à linguagem natural para exprimir a regra geral até à tarefa 4, sendo que nas tarefas 5 e 6 já utiliza linguagem simbólica acompanhada de linguagem natural ou pré-simbólica. Na última tarefa não consegue exprimir a expressão geral.

Em síntese

Os resultados deste estudo evidenciam que ao contrário do que muitos estudos defendem, nem sempre as estratégias recursivas constituem um impedimento à generalização. Verificou-se que as estratégias recursivas não são todas da mesma natureza e podem apoiar os alunos em conseguir chegar a uma regra geral explícita, como foi o caso destes quatro alunos. Para tal podem ter contribuído as características particulares das tarefas que começando com uma sequência pictórica linear, ajudou os alunos a apreender a relação entre a diferença entre termos e o fator multiplicativo. Tal perceção pode ter sido reforçada pelo facto de os alunos terem usado o *Excel*, na primeira tarefa, o que os levou a olharem para um grande número de dados (Cunha, 2010), podendo aperceber-se da existência do fator multiplicativo. A utilização desta estratégia de múltiplo da diferença para chegarem a uma regra geral explícita, em que não era necessário um ajuste por ser linear, foi depois adaptada pelos alunos, na tarefa 3, de modo a acomodar uma situação não linear.

Os contextos das figuras mostraram-se fundamentais para ajudar os alunos a usar linguagem pré-simbólica e, gradualmente, a simbólica, ajudando a dar sentido às duas variáveis presentes em cada situação. Estas começaram por ser representadas por etiquetas mas progressivamente começaram a ser representadas por letras. Ao contrário de outros estudos (Barbosa, 2013; Santos, 2008), a visualização não é um elemento central no processo de generalização desde o início.

Ao transitarem das tarefas em que a relação funcional surgia sob a forma de sequência pictórica para as duas tarefas que apresentavam situações de proporcionalidade direta em tabelas, os alunos são capazes de usar raciocínios funcionais, apoiados nas relações numéricas presentes, e recorrem também à linguagem simbólica que desenvolveram nas tarefas anteriores.

Por último, há a salientar que, relativamente às categorias que foram consideradas para a análise das estratégias e representações da generalização, verifica-se que a maioria delas está contemplada nos dados recolhidos mas o mesmo não ocorre com as categorias respeitantes às estratégias que os alunos usam em questões de raciocínio inverso. Assim sendo, haveria interesse em analisar as estratégias dos restantes alunos da turma para averiguar se terão usado estratégias diferentes das dos alunos escolhidos para este estudo. Uma análise mais profunda será necessária também para afinar as várias categorias de estratégias de generalização, confrontando com o quadro apresentado por Barbosa (2013) e assim poder contribuir para uma compreensão mais aprofundada dos processos envolvidos na atividade de generalização.

6.2. Reflexão final

Realizei a parte curricular do mestrado no ano letivo 2005/2006 e, desde então, que ambicionava concluir o projeto de formação que tinha iniciado mas que, por motivos vários, não me foi possível concretizar. Retomei este ano o projeto com um novo tema e, finalmente, materializei o que há muito pretendia. Foi com um enorme prazer que nele trabalhei, em parceria, criando e discutindo as propostas para a sala de aula. Foi igualmente gratificante desenvolver este trabalho com os meus alunos, verificar as suas descobertas e aprendizagens, bem como constatar alguns raciocínios singulares com que ainda me continuam a surpreender.

Ao longo do meu percurso profissional, sempre tenho tentado reconstruir o meu conhecimento profissional, no sentido da minha intervenção poder maximizar as potencialidades dos meus alunos, motivando-os e selecionando as estratégias, as metodologias e sequências curriculares adequadas. Apesar de habitualmente ser orientada por estes princípios, este estudo tornou possível realizar uma reflexão mais profunda e pormenorizada sobre a minha prática letiva relativamente aos temas abordados neste trabalho.

As unidades Sequências e Regularidades e Proporcionalidade Direta foram objeto de análise cuidada tendo como base os documentos orientadores do Ministério da Educação. Estes definem pontos fundamentais relativos ao desenvolvimento do pensamento algébrico, o que pressupõe uma nova abordagem aos temas curriculares, tendo especial atenção à generalização e representações assim como às capacidades transversais como raciocínio, comunicação e uso de tecnologias.

A necessidade decorrente da reconceptualização do currículo originou a criação de um conjunto de tarefas que foram desenhadas para este estudo de forma a articular, de modo consistente, a aplicação de conhecimentos das Sequências para a Proporcionalidade Direta. A coerência das tarefas, relativamente à sua conceção, sequência e duração, demonstrou que promoveram eficazmente o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos.

Foi inovador e enriquecedor para mim esta perspetiva integradora de relacionamento entre os dois temas assim como o uso da folha de cálculo para trabalhar as sequências pictóricas. Pretendo continuar a aprofundar este estudo na minha prática letiva assim como passar a integrar mais momentos de trabalho exploratório e de autonomia nos alunos.

Durante esta experiência de ensino existiram aspetos na dinâmica da sala de aula com os quais os alunos já estavam familiarizados nomeadamente o modo de exploração das tarefas. É cultura da sala de aula o trabalho ser realizado a pares na maior parte das vezes, existir entreajuda entre colegas quando terminam o seu trabalho, e a existência de um momento de discussão conjunta em que os alunos apresentam e registam as diferentes estratégias utilizadas.

É muito frequente o uso de recursos tecnológicos na sala de aula mas com uma vertente diferente da utilizada neste estudo. Normalmente é utilizada como suporte ao ensino através da exploração do quadro interativo e programas associados, para efetuar apresentações, visualizar de *applets* ou ainda para realizar testes interativos. Nesta experiência de ensino a dimensão da vertente tecnológica teve uma abrangência muito superior, ao potenciar o desenvolvimento do pensamento algébrico e promover a aprendizagem dos alunos de uma forma exploratória. No entanto, penso que para existir aprendizagens efetivas é sempre necessária a utilização da tecnologia articulada com o suporte escrito convencional, como ficou patente neste estudo.

Depois de refletir sobre o trabalho desenvolvido considero que este estudo enriqueceu, de uma forma significativa, o meu conhecimento profissional dentro da minha área científica e no âmbito da pedagogia. Simultaneamente, proporcionou aos meus alunos uma experiência de qualidade onde as aprendizagens foram efetivas e as experiências de trabalho relevantes.

Referências

Barbosa, A. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga.

Barbosa, A. (2013). O contributo da visualização no desenvolvimento do raciocínio funcional. In *Investigação em Educação Matemática 2013 – Raciocínio Matemático* (pp. 51-80), Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico.* Tese de mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Canavarro, A. (2009). *O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos*. *Quadrante*, 16(2), 81-118.

Cunha, C. (2010). *A utilização de ferramentas tecnológicas e os processos de aprendizagem: um estudo na introdução à Álgebra no 2º ciclo*. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In Kaput, J. J.; Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (Eds.). *Algebra in the early grades* (pp. 5 -17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. (2006). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

ME, (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2011). Compensação e variação: Um estudo sobre o pensamento relacional de alunos do 4º ano de escolaridade. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Eds), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 195-218). Póvoa de Varzim: EIEM.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2013). Um percurso na generalização matemática: uma experiência de ensino no 4.º ano. In *Investigação em Educação Matemática 2013 – Raciocínio Matemático* (pp. 254-276), Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Oliveira, H. (2009). *A Álgebra no novo programa de Matemática no Ensino Básico*. In Educação e Matemática, 105 (p. 83-86), Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática*. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (p. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Ponte, J. P., Silvestre, A. I., Garcia, C., & Costa, S. (2010). *O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade directa pela exploração de regularidades*. Projeto IMLNA Promover a Aprendizagem Matemática em Números e Álgebra. (acedido em 12 de fevereiro de 2013, de http://www.apm.pt/files/_Materiais_Proporcionalidade__%28IMLNA%29_4cfc0dcb29b46.pdf)

Santos, M. (2008). *A generalização nos padrões: Um estudo no 5.º ano de escolaridade* Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

Silvestre, A. (2012). *O desenvolvimento do raciocínio proporcional: percursos de aprendizagem de alunos do 6.º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Anexo 1 – Tarefa 1 – *Sequência de Estrelas*

1. Abre o ficheiro "*Tarefa 1 – Sequência de Estrelas*" que se encontra no ambiente de trabalho do computador e observa as figuras.

a) Representa, no quadriculado, as figuras 4 e 5 colorindo-as.

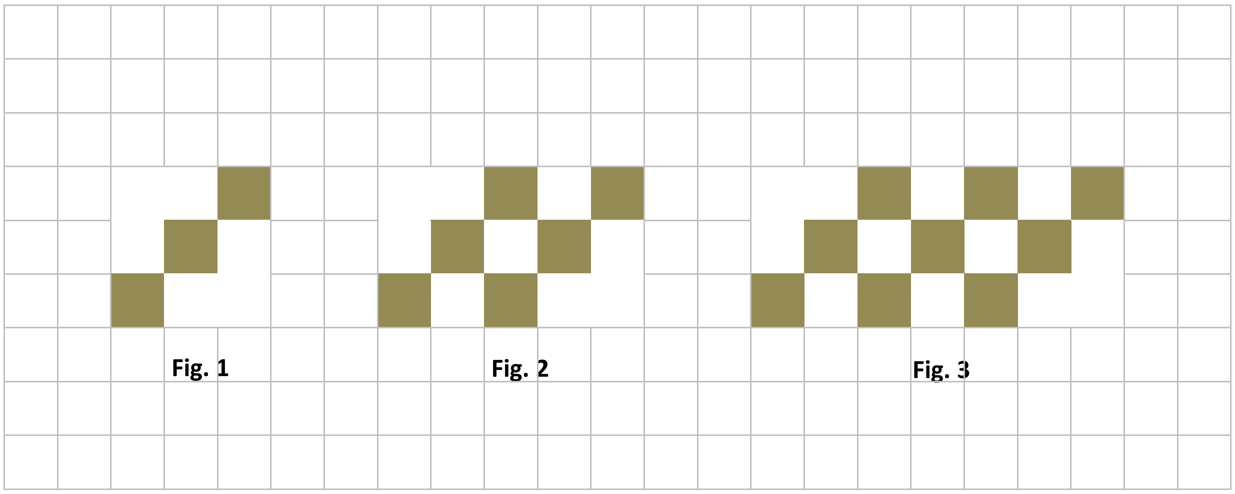
b) Preenche a coluna "*Nº quadrículas pintadas*" até à figura 10.

2. Descobre quantas quadrículas pintadas terá a 16.ª figura, sem a desenhar. Explica como pensaste.

3. Descreve uma regra que te permita determinar o número de quadrículas pintadas de qualquer figura da sequência.

Anexo 2 – Tarefa 2 – *Os azulejos*

1. O Manuel está a construir azulejos a partir de pequenos quadrados, segundo uma certa regra. Observa a sequência de figuras que ele já construiu.



a) Representa, no quadriculado abaixo, as figuras 4 e 5 da sequência e indica quantos quadradinhos pintados tem cada uma delas.

A figura 4 tem _______________ quadradinhos pintados.

A figura 5 tem _______________ quadradinhos pintados.

Descobre quantos quadradinhos pintados terá a 10.ª figura da sequência, sem a desenhar. Explica como pensaste.

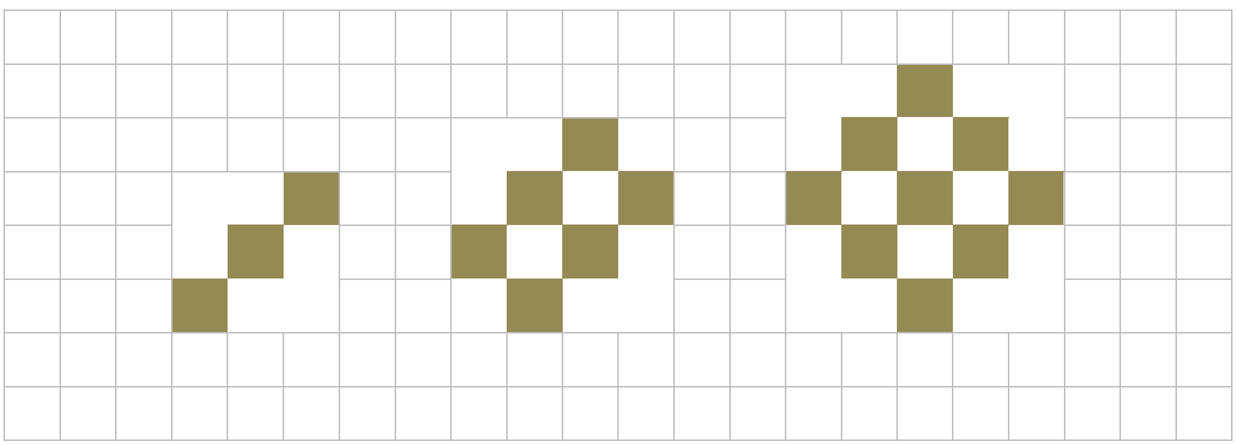
b) E quantos quadradinhos pintados terá a 16.ª figura?

c) Qual a figura com 32 quadradinhos pintados?

d) Qual a figura com 45 quadradinhos pintados?

e) Descreve uma regra que te permita determinar o número de quadradinhos pintados de qualquer figura da sequência.

2. O André também está construir azulejos, com pequenos quadrados coloridos, que dispõe da seguinte forma.



a) Que diferenças e semelhanças encontras entre esta sequência e a do Manuel?

b) Como explicarias a regra que permite descobrir o número de quadrados pintados que o André usa para construir qualquer figura da sequência?

c) Cria uma tabela em *Excel* com a sequência até à 100.ª figura. Verifica se a regra que indicaste na alínea anterior é verdadeira.

Anexo 3 – Tarefa 3 – *Os colares*

A Inês fez três colares, com contas pretas e brancas, conforme as figuras 1, 2 e 3.

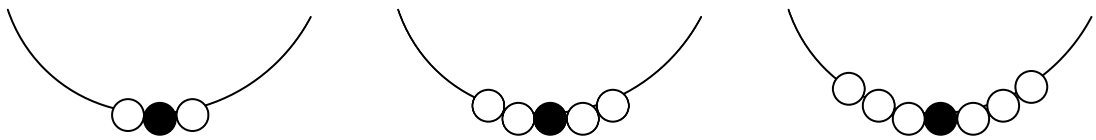


Fig. 1 **Fig. 2** **Fig. 3**

Nº contas do colar			

1. Indica acima o número **total** de contas de cada figura.

2. Continuando esta sequência de colares, quantas contas terá, no total, o colar correspondente à figura seguinte?

3. E quantas contas terá o colar correspondente à figura 8?

4. Descobre quantas contas terá, no total, o colar correspondente à figura 19, sem o desenhares.

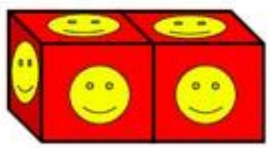
5. Existe algum colar na sequência que tenha 52 contas? Explica, detalhadamente, o teu raciocínio.

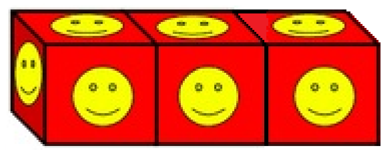
6. Descreve uma regra que te permita determinar o número total de contas de qualquer figura da sequência.

7. Cria uma tabela em *Excel* e representa a sequência acima até à figura 150. Verifica a regra que indicaste na pergunta anterior.

Anexo 4 – Tarefa 4 – *Os cubos*

A Joana está a fazer construções de cubos com autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois de os unir, cola um autocolante em cada uma das faces incluindo aquelas que não estão visíveis na figura (atrás e em baixo).





1. Indica o número de autocolantes utilizados em cada uma das construções.

Nº de cubos	**2**	**3**
Nº de autocolantes		

2. Descobre quantos autocolantes a Joana usa numa construção com:

   a) Quatro cubos.
   b) Dez cubos.
   c) Trinta e cinco cubos.

3. Descobre uma regra que te permita saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos. Explica como pensaste.

(Tarefa adaptada de Mestre, C., & Oliveira, H. (2013). Um percurso na generalização matemática: uma experiência de ensino no 4.º ano. In *Investigação em Educação Matemática 2013 – Raciocínio Matemático* (pp. 254-276), Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática).

Anexo 5 – Tarefa 5 – *Os tijolos*

1. Considera a seguinte sequência de figuras:

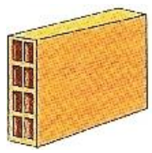


Fig. 1

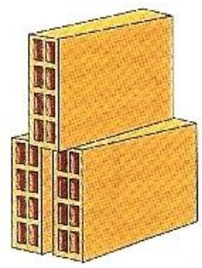


Fig. 2

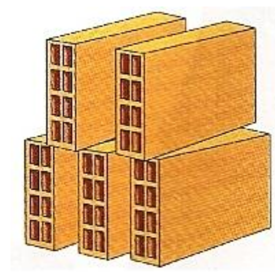


Fig. 3

a) Completa, de acordo com a sequência, a seguinte tabela:

Número da figura	Número de tijolos	Número de buracos dentro dos tijolos
1		
2		
3		
4		
5		
6		

b) Quantos tijolos tem, no total, a figura que corresponde ao termo de ordem 27? E quantos buracos têm todos os tijolos da 27.ª figura?

c) Existe, nesta sequência, alguma figura com 88 tijolos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.

2. Escreve uma expressão algébrica que te permita determinar para qualquer figura:

a) o número de tijolos.

b) o número de buracos de todos os tijolos dessa figura.

3. Cria uma tabela em *Excel* e representa a sequência até à 100.ª figura, considerando o número de tijolos e o número de buracos dentro dos tijolos.

Preenche a tabela utilizando somente as expressões gerais.

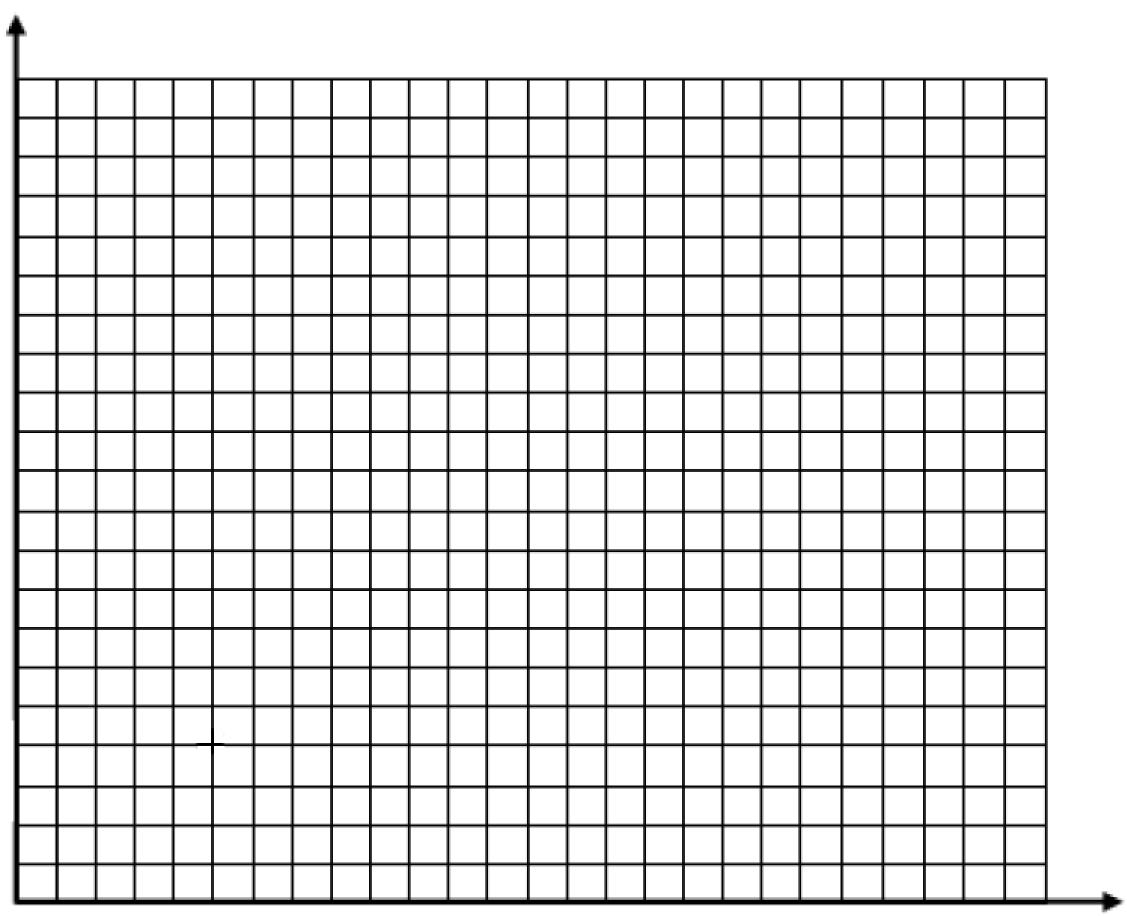
Anexo 6 – Tarefa 6 – *As pilhas*

O Francisco esteve a contar o número de pilhas em diversos conjuntos de embalagens na loja do avô e registou-o na tabela seguinte:

Número de embalagens	**Número de pilhas**
5	20
10	40
15	60
20	80

1. Explica que relação existe entre o número de pilhas e o número de embalagens e verifica se esta relação é a mesma para todos os casos indicados na tabela.

2. Representa esta tabela no *Excel* e constrói um gráfico com esses valores. Desenha aqui o gráfico que obtiveste.



3. Será possível determinar, através do gráfico, o número de pilhas que há em 25 embalagens? Justifica a tua resposta.

4. Escreve uma expressão algébrica que relacione o número de pilhas com o número de embalagens.

(Tarefa adaptada de Ponte, J. P., Silvestre, A. I., Garcia, C., & Costa, S. (2010). *O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade directa pela exploração de regularidades*. Projeto IMLNA Promover a Aprendizagem Matemática em Números e Álgebra)

Anexo 7 – Tarefa – *As bicicletas*

1. O António e a Maria foram passear ao Parque das Nações e decidiram alugar bicicletas. O António escolheu a empresa *Ciclotour* e a Maria a *YBike*, cujas tabelas de preços são as seguintes:

Ciclotour	
Tempo (minutos)	**Preço (euros)**
30	3
45	4,5
60	6
90	9

YBike	
Tempo (minutos)	**Preço (euros)**
20	1,5
40	4
60	6,5
90	10

a) Verifica, para cada uma das empresas, se o preço a pagar é diretamente proporcional ao tempo de utilização da bicicleta.

b) Nalguma das empresas é possível prever o preço a pagar pelo aluguer da bicicleta durante 120 minutos? Justifica a tua resposta.

c) Para alguma das empresas é possível escrever uma expressão algébrica que permita determinar o preço a pagar por qualquer tempo de utilização da bicicleta? Em caso afirmativo identifica qual a empresa e escreve a expressão. (Se quiseres podes usar a folha de cálculo para responder a esta questão)

(Tarefa adaptada de Ponte, J. P., Silvestre, A. I., Garcia, C., & Costa, S. (2010). *O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade directa pela exploração de regularidades*. Projeto IMLNA Promover a Aprendizagem Matemática em Números e Álgebra)

Anexo 8 – Teste escrito

GRUPO I

1. A Madalena usou fósforos para construir a seguinte sequência de figuras.

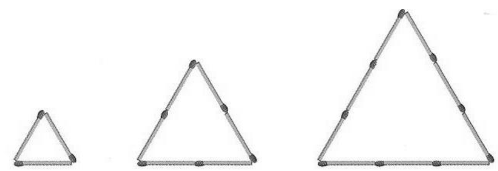
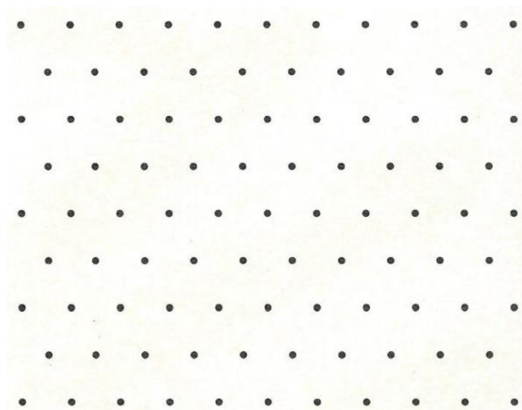


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Desenha a próxima figura desta sequência.



b) Descobre quantos fósforos terá a 21.ª figura da sequência, sem a desenhar.

c) Descreve uma regra que te permita determinar o número de fósforos de qualquer figura desta sequência.

2. Considera a sequência de figuras:

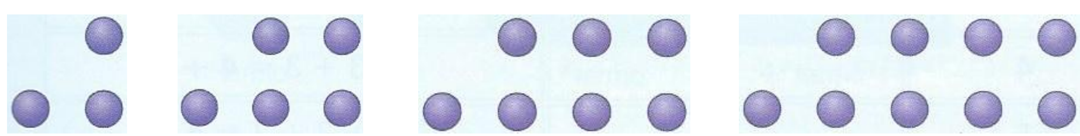


Fig. 1 **Fig. 2** **Fig. 3** **Fig. 4**

a) Completa:

A figura 5 é composta por ____________________ bolas.

A figura 6 é composta por ____________________ bolas.

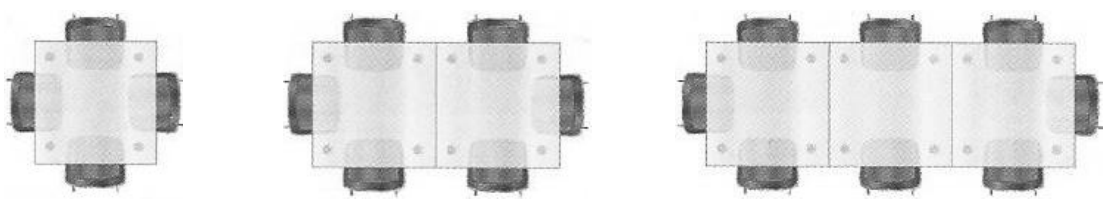
b) Quantas bolas terá a 14.ª figura? Explica como pensaste.

c) Existe alguma figura na sequência com 66 bolas? Explica o teu raciocínio.

d) Qual a expressão algébrica que te permite determinar o número de bolas de qualquer figura desta sequência?

3. O pai da Madalena tem uma esplanada. Por vezes junta mesas para sentar grupos de pessoas.

Observa a seguinte sequência formada por mesas e cadeiras.



a) Completa a tabela admitindo que esta sequência se mantém para todas as formações.

Número de mesas	1	2	3	4	5	6	7
Número de cadeiras	4	6	8				

b) Quantas mesas terá, no total, a figura que corresponde ao termo de ordem 27? E quantas cadeiras tem a 27.ª formação?

c) Escreve uma expressão algébrica que te permita determinar o número de cadeiras de qualquer formação desta sequência.

4. Observa a seguinte tabela de preços.

Número de fotocópias	1		6			10
Preço (em cêntimos)	5	15		40	45	

a) Completa-a de forma a haver proporcionalidade direta entre o preço e o número de fotocópias.

b) Escreve uma expressão algébrica que te permita determinar o preço de qualquer número de fotocópias.

5. Observa o cartão em que estão registadas algumas das alturas da Madalena, quando era pequena.

1 ano - 73 cm

2 anos - 84 cm

3 anos - 90 cm

4 anos - 100 cm

A altura da Madalena será diretamente proporcional à idade? Justifica.

GRUPO II

6. A Madalena leu $\frac{1}{3}$ das páginas de um livro num dia e $\frac{2}{7}$ no dia seguinte.

Calcula a parte do livro que a Madalena **ainda não leu**.

7. A Madalena comprou 2 cestos de cerejas, com $\frac{3}{4}$ de kg cada, e 6 pacotes de uvas, com $\frac{1}{4}$ de kg cada.

a) **Escreve o que significa** cada uma das expressões:

$2 \times \frac{3}{4}$ ____

$2 \times \frac{3}{4} + 6 \times \frac{1}{4}$ ____

b) **Quantos quilogramas** de fruta comprou a Madalena?

8. A Madalena viu $\frac{3}{4}$ de uma lasanha em cima da mesa da cozinha. Como tinha muita fome, comeu metade dessa quantidade. Que parte da lasanha comeu a Madalena?

9. Um depósito tem 500 litros de água. Utilizou-se $\frac{1}{4}$ dessa água para distribuir por garrafões de 5 litros cada. Quantos garrafões se encheram?

10. A Madalena recebeu, no dia de anos, uma caixa de bombons. No mesmo dia comeu $\frac{2}{3}$ dos bombons da caixa. Sabendo que comeu 10 bombons, determina **quantos bombons lhe sobraram**?

11. A Madalena perguntou a idade aos professores de Matemática e Ciências. O professor de Matemática afirmou: "$\frac{1}{5}$ dos anos que vivi são 8" e a professora de Ciências respondeu: "A minha idade é a soma de metade de 30 com a terça parte de 60". Quem é o mais velho? Explica o teu raciocínio.

12. Calcula o valor das seguintes expressões e apresenta o resultado na forma irredutível.

$$\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}+2\div\frac{3}{2}=$$

$$\frac{22}{4}-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\times 3\times 0=$$