

**UNIVERSIDADE DE LISBOA**

**FACULDADE DE CIÊNCIAS**

Departamento de Estatística e Investigação Operacional



**AMOSTRAGEM DE ACEITAÇÃO PARA VARIÁVEIS NÃO  
GAUSSIANAS**

Elisabete Teresa da Mata Almeida Carolino

Doutoramento em Estatística e Investigação Operacional.

Especialidade em Probabilidades e Estatística.

Lisboa 2012

**UNIVERSIDADE DE LISBOA**

**FACULDADE DE CIÊNCIAS**

Departamento de Estatística e Investigação Operacional



**AMOSTRAGEM DE ACEITAÇÃO PARA VARIÁVEIS NÃO  
GAUSSIANAS**

Elisabete Teresa da Mata Almeida Carolino

Sob a orientação de:

Professora Doutora Maria Isabel Calisto Frade Barão

Doutoramento em Estatística e Investigação Operacional.

Especialidade em Probabilidades e Estatística.

Lisboa 2012

# Amostragem de Aceitação para Variáveis não Gaussianas

## Resumo

No Controlo de Qualidade de um processo de produção, pode proceder-se ao controlo do processo propriamente dito (Controlo Estatístico do Processo), ou ao controlo nas suas fronteiras – Amostragem de Aceitação, por atributos ou por variáveis e ao Planeamento de Experiências. Abordar-se-á, neste trabalho, a Amostragem de Aceitação por variáveis.

A Amostragem de Aceitação é utilizada para inspeccionar quer o “input” – matéria-prima – quer o “output” – produto final – do processo de produção. A Amostragem de Aceitação determina um procedimento, que se aplicado a uma série de lotes, dá o risco de aceitar lotes com uma determinada qualidade. Por outras palavras, a Amostragem de Aceitação permite assegurar a qualidade e não estimá-la. Um plano de Amostragem de Aceitação apenas aceita ou rejeita lotes, considerando a informação fornecida pela amostra.

O caso clássico de Amostragem de Aceitação por variáveis para a percentagem não-conforme, tratado em normas clássicas [ANSI/ASQC Z1.9, 2008], baseia-se na hipótese de que a variável em estudo segue uma distribuição Gaussiana. Ora, assumir que a característica de qualidade em estudo é Gaussiana, pode em algumas situações ser abusiva, tal como no caso de variáveis assimétricas e/ou com caudas pesadas, dando origem a decisões erradas. A Amostragem de Aceitação para variáveis não Gaussianas, é então, relevante.

Quando se está a trabalhar com uma distribuição não Gaussiana, podem construir-se planos específicos de Amostragem de Aceitação, para a distribuição subjacente, com um único limite de especificação (inferior ou superior) e planos com limites de especificação simultâneos, ambos estudados neste trabalho. Na literatura encontram-se alguns estudos limites simultâneos e um único limite de especificação, mas a maioria sobre o caso clássico.

Neste trabalho, focar-se-á o problema de determinar planos de amostragem de aceitação para variáveis, com um limite de especificação e limites de especificação simultâneos, com distribuição Exponencial, Gama, Weibull, Fréchet e Gumbel, comparando-se os resultados com os obtidos para o caso Gaussiano (dando maior ênfase ao caso em que os parâmetros são desconhecidos, recorrendo-se, neste caso, a métodos de simulação).

Se a distribuição real dos dados é bastante assimétrica e/ou possui caudas pesadas, mas é fácil modelar os dados e estimar os seus parâmetros, o que usualmente não acontece, então podem construir-se planos de amostragem específicos. Alternativamente, pode proceder-se à transformação dos dados originais em valores normais, através de uma transformação tipo Box-Cox, que não requer a modelação prévia dos dados, e construir de seguida um plano de Amostragem de Aceitação para o caso clássico – o Gaussiano.

Considerando as distribuições já referidas anteriormente, os dois métodos são comparados.

**Palavras-chave:** controlo de qualidade, amostragem de aceitação, amostragem de aceitação por variáveis, amostragem de aceitação para variáveis não Gaussianas, transformações Box-Cox

# Acceptance Sampling for Non-Gaussian Distributions

## Abstract

In the quality control of a production process (of goods and services), from a statistical point of view, focus is either on the process itself with application of Statistical Process Control, or on its frontiers, with application of Acceptance Sampling (AS) – studied here – and Experimental Design.

AS is used to inspect either the output process – final product – or the input – initial product. The purpose of AS is to determine a course of action, not to estimate lot quality. AS prescribes a procedure that, if applied to a series of lots, will give a specified risk of accepting lots of given quality. In other words, AS yields quality assurance. An AS plan merely accepts and rejects lots, considering sampling information.

The AS by variables is based on the hypothesis that the observed quality characteristics follow a known distribution, namely the Gaussian distribution (classical case of the AS by variables – treated in classical standards, [ANSI/ASQC Z1.9, 2008]). This is sometimes, however, an abusive assumption, as in the case of asymmetric variables and/or heavy tails, that leads to wrong decisions. AS for non-Gaussian, is thus relevant.

When we have a non-Gaussian distribution we can build specific AS plans associated with that distribution. In acceptance sampling we can build plans with a single specification limit (upper or lower) or simultaneous specification limits – both situations are studied in this work. In the literature there are few studies on simultaneous limits, single limits on AS, but most of the classical case.

In this work we will address the problem of determining acceptance sampling plans by variables with single and simultaneous specification limits for Exponential, Gamma, Weibull, Fréchet and Gumbel distributions, the results being compared to the Gaussian case (greater emphasis will be given to the case of unknown parameters, using, in this case, simulation methods).

If the real distribution of data is very asymmetric and/or has heavy tails, but we are able to adequately model the data and estimate its parameters, which usually is not easy, we can use those specific AS plans. Alternatively, we can make the transformation of the original data into normal values through a transformation of the Box-Cox type, which requires no prior modeling process of the data and then use AS plans for the classical case – the Gaussian case. Considering the previous distributions, both methods being compared.

**Keywords:** quality control, acceptance sampling, acceptance sampling by variables, acceptance sampling for non-Gaussian variables, Box-Cox transformation.

## **Agradecimentos**

Um trabalho desta natureza requer tempo e dedicação exclusivos, o que não foi possível, pelo que muito deste tempo necessário foi retirado à família e amigos, que sem o seu apoio, não teria conseguido concluir esta árdua tarefa e a quem quero agradecer publicamente.

Agradeço assim, de coração ao meu marido e filho a compreensão pelo tempo que deixei de lhes dedicar.

Agradeço, também de coração, à minha orientadora Professora Doutora Isabel Barão, pela dedicação, profissionalismo, paciência, amizade e apoio manifestados durante este período.

Ao Professor Doutor Miguel Casquilho, o meu muito obrigada.

Agradeço aos meus pais todo o apoio e preocupação manifestados durante este período, e para com quem estarei sempre em dívida.

Agradeço aos meus amigos, que de uma forma ou de outra me apoiaram e encorajaram.

À ajuda financeira das bolsas PROTEC.

Um bem-haja a todos.

## Conteúdo

	Pág.
Resumo	i
Abstract	iii
Agradecimentos	iv
Lista de figuras	viii
Lista de tabelas	xiii
<b>1. Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2. Amostragem de Aceitação</b>	<b>9</b>
2.1. Resenha Histórica	9
2.2. O que é a Amostragem de Aceitação?	11
2.3. Amostragem de Aceitação por Atributos	17
<b>3. Amostragem de Aceitação para variáveis Gaussianas</b>	<b>21</b>
3.1. Introdução	21
3.2. $\sigma$ conhecido	22
3.2.1. Limite Superior de Especificação	22
3.2.2. Limite Inferior de Especificação	25
3.2.3. Limites de Especificação Simultâneos	27
3.3. $\sigma$ desconhecido	29
3.3.1. Limite Superior de Especificação	29
3.3.2. Limite Inferior de Especificação	31
3.3.3. Limites de Especificação Simultâneos	33
3.4. Amostragem de Aceitação para variáveis com distribuição Gaussiana Inversa: Breve referência	35
<b>4. Amostragem de Aceitação para Variáveis Exponenciais</b>	<b>41</b>
4.1. Introdução	41
4.2. Limite Superior de Especificação	43
4.3. Limite Inferior de Especificação	45
4.4. Limites de Especificação Simultâneos	46
<b>5. Amostragem de Aceitação para Variáveis Gama</b>	<b>49</b>
5.1. Introdução	49
5.2. $\theta$ conhecido	51

5.2.1.	Limite Superior de Especificação	51
5.2.2.	Limite Inferior de Especificação	53
5.2.3.	Limites de Especificação Simultâneos	54
5.3.	$\theta$ desconhecido	56
<b>6.</b>	Amostragem de Aceitação para Variáveis de Valores Extremos	59
6.1.	Introdução	59
6.2.	Amostragem de Aceitação para Variáveis Weibull	60
6.2.1.	Introdução	60
6.2.2.	$\theta$ conhecido	63
6.2.2.1.	Limite Superior de Especificação	63
6.2.2.2.	Limite Inferior de Especificação	65
6.2.2.3.	Limites de Especificação Simultâneos	66
6.2.3.	$\theta$ desconhecido	67
6.3.	Amostragem de Aceitação para Variáveis Fréchet	70
6.3.1.	Introdução	70
6.3.2.	$\theta$ conhecido	72
6.3.2.1.	Limite Superior de Especificação	72
6.3.2.2.	Limite Inferior de Especificação	74
6.3.2.3.	Obtenção do plano de Amostragem de Aceitação para o caso Fréchet a partir da Weibull	76
6.3.2.4.	Limites de Especificação Simultâneos	77
6.3.3.	$\theta$ desconhecido	79
6.4.	Amostragem de Aceitação para Variáveis Gumbel	80
6.4.1.	Introdução	80
6.4.2.	$\delta$ conhecido	82
6.4.2.1.	Limite Superior de Especificação	82
6.4.2.2.	Limite Inferior de Especificação	85
6.4.2.3.	Obtenção do plano de Amostragem de Aceitação para o caso Gumbel a partir da Weibull	86
6.4.2.4.	Limites de Especificação Simultâneos	88
6.4.3.	$\delta$ desconhecido	89
<b>7.</b>	Transformações Box-Cox em Amostragem de Aceitação por Variáveis	91
7.1.	Introdução	91

7.2. Transformações de Box-Cox	92
<b>8. Apresentação e discussão de Resultados</b>	<b>95</b>
8.1. Introdução	95
8.2. Caso Gaussiano vs caso Expenencial	97
8.3. Caso Gaussiano vs caso Gama	102
8.3.1. Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) vs caso Gama ( $\theta$ conhecido)	102
8.3.2. Gaussiano ( $\sigma$ desconhecido) vs caso Gama ( $\theta$ desconhecido)	108
8.4. Caso Gaussiano vs caso Weibull	111
8.4.1. Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) vs caso Weibull ( $\theta$ conhecido)	111
8.4.2. Gaussiano ( $\sigma$ desconhecido) vs caso Weibull ( $\theta$ desconhecido)	117
8.5. Caso Gaussiano vs caso Fréchet	124
8.5.1. Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) vs caso Fréchet ( $\theta$ conhecido)	124
8.5.2. Gaussiano ( $\sigma$ desconhecido) vs caso Fréchet ( $\theta$ desconhecido)	130
8.6. Caso Gaussiano vs caso Gumbel	136
8.6.1. Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) vs caso Gumbel ( $\delta$ conhecido)	136
8.6.2. Gaussiano ( $\sigma$ desconhecido) vs caso Gumbel ( $\delta$ desconhecido)	141
8.7. Caso específico vs clássico, após transformação Box-Cox	147
<b>9. Conclusões</b>	<b>153</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>157</b>

## Lista de figuras

	<b>Pág.</b>
<b>Figura 1.1:</b> Esquema de integração do Controlo Estatístico do Processo (C.E.P) e da Amostragem de Aceitação (Am. Ac.) no Controlo Estatístico de Qualidade	5
<b>Figura 2.1:</b> Esquema de um plano de amostragem simples	12
<b>Figura 2.2:</b> Esquema de um plano de amostragem duplo	13
<b>Figura 2.3:</b> Curva <i>OC</i> , Tipo B	15
<b>Figura 3.2:</b> Efeito na <i>f.d.p.</i> dos valores do parâmetro de forma, $\lambda$ , mantendo $\mu$ constante (=1)	36
<b>Figura 3.3:</b> Efeito na <i>f.d.p.</i> dos valores do parâmetro de localização, $\mu$ , mantendo $\lambda$ constante (=1)	36
<b>Figura 4.1:</b> Efeito na <i>f.d.p.</i> dos valores do parâmetro $\delta$	42
<b>Figura 5.1:</b> Efeito na <i>f.d.p.</i> dos valores do parâmetro de escala, $\delta$ , mantendo $\theta$ constante	50
<b>Figura 5.2:</b> Efeito na <i>f.d.p.</i> dos valores do parâmetro de forma, $\theta$ , mantendo $\delta$ constante	50
<b>Figura 6.1:</b> Função densidade de probabilidade da distribuição de Valores Extremos Generalizada, para vários valores de $\xi$ , com $\lambda=0$	60
<b>Figura 6.2:</b> Efeito na <i>f.d.p.</i> dos valores do parâmetro de forma, $\theta$ , mantendo $\delta$ constante	62
<b>Figura 6.3:</b> Efeito na <i>f.d.p.</i> dos valores do parâmetro de escala, $\delta$ , mantendo $\theta$ constante	62
<b>Figura 6.4:</b> Efeito na <i>f.d.p.</i> dos valores do parâmetro de escala, $\theta$ , mantendo $\delta$ constante	71
<b>Figura 6.5:</b> Efeito na <i>f.d.p.</i> dos valores do parâmetro de escala, $\delta$ , mantendo $\theta$ constante	71
<b>Figura 6.6:</b> Efeito na <i>f.d.p.</i> dos valores do parâmetro de localização, $\lambda$ , mantendo $\delta$ constante	81
<b>Figura 6.7:</b> Efeito na <i>f.d.p.</i> dos valores do parâmetro de escala, $\delta$ , mantendo $\lambda$ constante	81
<b>Figura 8.1:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Exponencial (•) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=10$ e $\delta=10$	101
<b>Figura 8.2:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Exponencial (•) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=20$ e $\delta=10$	101
<b>Figura 8.3:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Exponencial (•) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=50$ e $\delta=10$	101
<b>Figura 8.4:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Exponencial (•) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=100$ e $\delta=10$	101
<b>Figura 8.5:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gama (•) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=10$ , $\delta=10$ e $\theta=3$	106

<b>Figura 8.6:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gama (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=10$ , $\delta=10$ e $\theta=7$	106
<b>Figura 8.7:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gama (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=20$ , $\delta=10$ e $\theta=3$	106
<b>Figura 8.8:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gama (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=20$ , $\delta=10$ e $\theta=7$	106
<b>Figura 8.9:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gama (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=50$ , $\delta=10$ e $\theta=3$	106
<b>Figura 8.10:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gama (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=50$ , $\delta=10$ e $\theta=7$	106
<b>Figura 8.11:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gama (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=100$ , $\delta=10$ e $\theta=3$	107
<b>Figura 8.12:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gama (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=100$ , $\delta=10$ e $\theta=7$	107
<b>Figura 8.13:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Weibull ( $\theta=0.5, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=10$	115
<b>Figura 8.14:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=10$	115
<b>Figura 8.15:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Weibull ( $\theta=0.5, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=20$	115
<b>Figura 8.16:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=20$	115
<b>Figura 8.17:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Weibull ( $\theta=0.5, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=50$	115
<b>Figura 8.18:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=50$	115
<b>Figura 8.19:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Weibull ( $\theta=0.5, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=100$	116
<b>Figura 8.20:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=100$	116
<b>Figura 8.21:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Weibull ( $\theta=10, \delta=3$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=10$	121
<b>Figura 8.22:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=10$	121

<b>Figura 8.23:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Weibull ( $\theta=10, \delta=3$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=20$	121
<b>Figura 8.24:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=20$	121
<b>Figura 8.25:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Weibull ( $\theta=10, \delta=3$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=50$	122
<b>Figura 8.26:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=50$	122
<b>Figura 8.27:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Weibull ( $\theta=10, \delta=3$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=100$	122
<b>Figura 8.28:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=100$	122
<b>Figura 8.29:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Fréchet ( $\theta=5, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=10$	128
<b>Figura 8.30:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Fréchet ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=10$	128
<b>Figura 8.31:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Fréchet ( $\theta=5, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=20$	128
<b>Figura 8.32:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Fréchet ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=20$	128
<b>Figura 8.33:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Fréchet ( $\theta=5, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=50$	129
<b>Figura 8.34:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Fréchet ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=50$	129
<b>Figura 8.35:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Fréchet ( $\theta=5, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=100$	129
<b>Figura 8.36:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Fréchet ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=100$	129
<b>Figura 8.37:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Fréchet ( $\delta=10, \theta=5$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=20$	134
<b>Figura 8.38:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Fréchet ( $\delta=10, \theta=7$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=20$	134
<b>Figura 8.39:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Fréchet ( $\delta=10, \theta=5$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido ( $^{\circ}$ ), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=30$	134

<b>Figura 8.40:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Fréchet ( $\delta=10, \theta=7$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=30$	134
<b>Figura 8.41:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Fréchet ( $\delta=10, \theta=5$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=50$	134
<b>Figura 8.42:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Fréchet ( $\delta=10, \theta=7$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=50$	134
<b>Figura 8.43:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Fréchet ( $\delta=10, \theta=5$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=100$	135
<b>Figura 8.44:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Fréchet ( $\delta=10, \theta=7$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=100$	135
<b>Figura 8.45:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=10$	139
<b>Figura 8.46:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=10$	139
<b>Figura 8.47:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=20$	140
<b>Figura 8.48:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=20$	140
<b>Figura 8.49:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=50$	140
<b>Figura 8.50:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=50$	140
<b>Figura 8.51:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=100$	140
<b>Figura 8.52:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ conhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=100$	140
<b>Figura 8.53:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=10$	145
<b>Figura 8.54:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=10$	145
<b>Figura 8.55:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=20$	145
<b>Figura 8.56:</b> Curvas <i>OC</i> para os casos Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) (●) e Gaussiano para $\sigma$ desconhecido (°), já com o ajuste dos $\alpha$ 's e considerando $AQL=1\%$ , $n=20$	146

- Figura 8.57:** Curvas *OC* para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$  146
- Figura 8.58:** Curvas *OC* para os casos Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$  146
- Figura 8.59:** Curvas *OC* para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$  146
- Figura 8.60:** Curvas *OC* para os casos Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$  146

## Lista de tabelas

	Pág.
<b>Tabela 2.1.:</b> Excerto de um boletim de análise ao leite em pó desnatado destinado à merenda escolar, produzido por determinada fábrica da indústria alimentar	17
<b>Tabela 8.1:</b> Valores do coeficiente de assimetria e índice de peso de cauda	96
<b>Tabela 8.2:</b> Resultados do ajuste dos $\alpha$ 's, caso Exponencial( $\delta=10$ ) e $AQL=1\%$	99
<b>Tabela 8.3:</b> Comparação de $LTPD$ e de $k$ , entre o caso Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) e o caso Exponencial( $\delta=10$ )	100
<b>Tabela 8.4:</b> Comparação dos métodos específico e clássico: Taxa de resultados coincidentes, a aceitação ou rejeição do lote, caso Exponencial, $AQL=1\%$ e com ajuste dos $\alpha$ 's	102
<b>Tabela 8.5:</b> Resultados do ajuste dos $\alpha$ 's, caso Gama $\theta$ conhecido ( $\theta=3, \delta=10$ ) e considerando $AQL=1\%$	105
<b>Tabela 8.6:</b> Comparação de $LTPD$ e $k$ , entre o caso Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) e o caso Gama, com $\theta$ conhecido	105
<b>Tabela 8.7:</b> Comparação dos métodos específico e clássico: Taxa de resultados coincidentes, a aceitação ou rejeição do lote, entre o caso Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) e caso Gama ( $\theta$ conhecido), com ajuste dos $\alpha$ 's	107
<b>Tabela 8.8:</b> Resultados das simulações: $\alpha$ estimado para o caso Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) quando o $\alpha$ do caso Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) é 0.05 e $\alpha$ estimado para o caso Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) quando o $\alpha$ do caso Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) é 0.05 e Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha$	113
<b>Tabela 8.9:</b> Comparação do $LTPD$ e de $k$ , entre o caso Gaussiano com $\sigma$ conhecido e o caso Weibull com $\theta$ conhecido ( $\theta=7, \delta=10$ )	113
<b>Tabela 8.10:</b> Comparação dos métodos específico e clássico: Taxa de resultados iguais, a aceitação ou rejeição do lote, entre o caso Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) e caso Weibull ( $\theta$ conhecido), com ajuste dos $\alpha$ 's	117
<b>Tabela 8.11:</b> Resultados das simulações: $\alpha$ estimado para o caso Gaussiano ( $\sigma$ desconhecido) quando o $\alpha$ do caso Weibull ( $\theta$ desconhecido) é 0.05 e $\alpha$ estimado para o caso Weibull ( $\theta$ desconhecido) quando o $\alpha$ do caso Gaussiano ( $\sigma$ desconhecido) é 0.05 e Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha$ , com $AQL=1\%$	119
<b>Tabela 8.12:</b> Resultados das simulações: Comparação do $LTPD$ e de $k$ , entre o caso Gaussiano com $\sigma$ desconhecido e o caso Weibull com $\theta$ desconhecido (dados simulados com ( $\theta=10, \delta=10$ ) e ( $\theta=7, \delta=10$ ))	120
<b>Tabela 8.13:</b> Comparação dos métodos específico e clássico: Taxa de resultados iguais, a aceitação ou rejeição do lote, entre o caso Gaussiano ( $\sigma$ desconhecido) e caso Weibull ( $\theta$ desconhecido), com ajuste dos $\alpha$ 's	123
<b>Tabela 8.14:</b> Comparação de $k$ e $LTPD$ entre o plano de Amostragem de Aceitação específico e o plano obtido pelo método Delta, caso Weibull com $\theta$ desconhecido.	124

<b>Tabela 8.15:</b> Resultados das simulações: $\alpha$ estimado para o caso Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) quando o $\alpha$ do caso Fréchet ( $\theta=5, \delta=10$ ) é 0.05 e $\alpha$ estimado para o caso Fréchet ( $\theta=5, \delta=10$ ) quando o $\alpha$ do caso Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) é 0.05 e Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha$ , com $AQL=1\%$	126
<b>Tabela 8.16:</b> Comparação do <i>LTPD</i> e de $k$ , entre o caso Gaussiano com $\sigma$ conhecido e o caso Fréchet com $\theta$ conhecido ( $\theta=5, \delta=10$ )	127
<b>Tabela 8.17:</b> Comparação dos métodos específico e clássico: Taxa de resultados coincidentes, a aceitação ou rejeição do lote, entre o caso Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) e caso Fréchet ( $\theta$ conhecido), com ajuste dos $\alpha$ 's	130
<b>Tabela 8.18:</b> Resultados das simulações: $\alpha$ estimado para o caso Gaussiano ( $\sigma$ desconhecido) quando o $\alpha$ do caso Fréchet ( $\theta$ desconhecido) é 0.05 e $\alpha$ estimado para o caso Fréchet ( $\theta$ desconhecido) quando o $\alpha$ do caso Gaussiano ( $\sigma$ desconhecido) é 0.05 e Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha$	132
<b>Tabela 8.19:</b> Resultados das simulações: Comparação do <i>LTPD</i> e de $k$ , entre o caso Gaussiano com $\sigma$ desconhecido e o caso Fréchet com $\theta$ desconhecido (dados simulados com ( $\delta=10, \theta=5$ ) e ( $\delta=10, \theta=7$ ))	132
<b>Tabela 8.20:</b> Comparação dos métodos específico e clássico: Taxa de resultados iguais, a aceitação ou rejeição do lote, entre o caso Gaussiano ( $\sigma$ desconhecido) e caso Fréchet ( $\theta$ desconhecido), com ajuste dos $\alpha$ 's	135
<b>Tabela 8.21:</b> Resultados das simulações: $\alpha$ estimado para o caso Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) quando o $\alpha$ do caso Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) é 0.05 e $\alpha$ estimado para o caso Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) quando o $\alpha$ do caso Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) é 0.05 e Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha$	138
<b>Tabela 8.22:</b> Comparação do <i>LTPD</i> e de $k$ , entre o caso Gaussiano com $\sigma$ conhecido e o caso Gumbel com $\delta$ conhecido ( $\lambda=1, \delta=0.5$ )	138
<b>Tabela 8.23:</b> Comparação dos métodos específico e clássico: Taxa de resultados iguais, a aceitação ou rejeição do lote, entre o caso Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) e caso Gumbel ( $\delta$ conhecido), com ajuste dos $\alpha$ 's	141
<b>Tabela 8.24:</b> Resultados das simulações: $\alpha$ estimado para o caso Gaussiano ( $\sigma$ desconhecido) quando o $\alpha$ do caso Gumbel ( $\delta$ desconhecido) é 0.05 e $\alpha$ estimado para o caso Gumbel ( $\delta$ desconhecido) quando o $\alpha$ do caso Gaussiano ( $\sigma$ desconhecido) é 0.05 e Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha$	143
<b>Tabela 8.25:</b> Resultados das simulações: Comparação do <i>LTPD</i> e de $k$ , entre o caso Gaussiano com $\sigma$ desconhecido e o caso Gumbel com $\delta$ desconhecido (dados simulados com ( $\lambda=1, \delta=0,5$ ) e ( $\lambda=5, \delta=0,6$ ))	144
<b>Tabela 8.26:</b> Comparação dos métodos específico e clássico: Taxa de resultados iguais, a aceitação ou rejeição do lote, entre o caso Gaussiano ( $\sigma$ conhecido) e caso Gumbel ( $\delta$ desconhecido), com ajuste dos $\alpha$ 's	147
<b>Tabela 8.27:</b> Resumo das distribuições trabalhadas, critérios de aceitação do lote e planos de Amostragem de Aceitação específicos	149

<b>Tabela 8.28:</b> Avaliação da performance dos planos de Amostragem de Aceitação clássicos com $\sigma$ conhecido, quando a característica de qualidade de interesse não é Gaussiana (parâmetros $\theta$ das distribuições Gama, Weibull e Fréchet e $\delta$ da distribuição Gumbel são conhecidos)	150
<b>Tabela 8.29:</b> Avaliação da performance dos planos de Amostragem de Aceitação clássicos com $\sigma$ conhecido, quando a característica de qualidade de interesse não é Gaussiana (parâmetros $\theta$ das distribuições Gama, Weibull e Fréchet e $\delta$ da distribuição Gumbel são desconhecidos)	151



## ***Capítulo 1.***

### **Introdução**

Qual o significado de Qualidade?

Realmente é difícil defini-la, mas com toda a certeza, que se consegue ter a sua percepção quando se está perante ela. O conceito de qualidade está dependente da percepção dos indivíduos, ou conjunto de indivíduos que poderão proceder à sua definição.

Pode-se concordar com a qualidade de algo ou discordar completamente. Se um serviço, actividade ou produto satisfazem o consumidor/utilizador, é julgado como algo com qualidade. Se não se ficar satisfeito então poder-se-á classificar a qualidade como má. O senso comum, permite julgar e classificar a qualidade de algo, com base em comparações, explícita e implicitamente, com situações análogas e/ou com base na experiência de vida.

Os indivíduos que façam um julgamento relativo à satisfação de um produto/serviço, podem ser classificados como “clientes”. No entanto, a sua classificação pode definir-se consoante o tipo de serviços que lhes são prestados, por exemplo, os engenheiros preferem designá-los por “clientes”; companhias de *software* poderão classificá-los como “utilizadores” ou “subscritores”; os médicos utilizam o termo “pacientes” ou “doentes”; os educadores preferem a designação de “estudantes”; os actores ou cantores designá-los-ão por “audiência” ou “fans”; etc.

É completamente indiferente qual o termo utilizado, em senso comum, todos são clientes e são os que devem ser satisfeitos.

Qualidade então deverá ser correlacionada com a satisfação de clientes. Em suma, qualidade de um produto ou serviço, não é mais do que a sua adequabilidade para ser consumido ou utilizado. Em consequência, qualidade é o factor chave para o sucesso, crescimento e competitividade das empresas e instituições. Efectivamente a implementação de programas de qualidade pode resultar num aumento da inserção no mercado, uma maior produtividade e menores custos globais quer de

produção quer de serviços. Desta forma, as instituições ou empresas que implementem programas de qualidade podem desfrutar de significativas vantagens de competitividade.

A rápida evolução tecnológica vem aumentar a difícil tarefa de definir qualidade, quer nas empresas quer nas instituições que produzem bens e serviços. Nos últimos 30 anos, houve uma evolução tecnológica em várias áreas, como por exemplo, na electrónica, na composição de materiais, nas ciências químicas e farmacológicas. Um dos aspectos da evolução recente e rápida em todas as áreas é, conseqüentemente, a preocupação com a Qualidade.

Facilmente se constata que a procura da qualidade está fundamentada num “compromisso”, que é essencialmente económico, entre clientes (consumidores) e produtores. Este “compromisso” reflecte, apenas, um momento do desenvolvimento tecnológico e industrial, sendo portanto, mutável ao longo do tempo. A confiabilidade deste “compromisso” é garantida por determinados critérios estatísticos e probabilísticos que subsidiam os critérios de inspecção, aceitação e rejeição de bens e serviços aquando do seu recebimento.

Segundo Montgomery (1991), há dois aspectos gerais de qualidade: a qualidade do planeamento e a qualidade da conformidade. Todos os bens e serviços são produzidos em vários graus ou níveis de qualidade. Estas variações dos graus ou níveis de qualidade são intencionais e, conseqüentemente, o termo técnico apropriado é “qualidade do planeamento”. A “qualidade da conformidade” pode ser definida como “quão bem, o produto ou serviço se ajusta às especificações e tolerâncias requeridas pelo projecto” e é influenciada por vários factores, tais como, a escolha do processo de produção, a experiência dos intervenientes no processo, processos de controlo, testes, actividades de inspecção, etc.

Ainda segundo Montgomery (1991), planear a qualidade do produto ou serviço desta forma, resulta muitas vezes no aumento do custo do produto ou serviço. No entanto, tais aumentos nos custos, são efectivamente “custos preventivos”, pois o planear a qualidade do produto ou serviço, tem por objectivo prevenir problemas de qualidade em fases posteriores do ciclo de vida do produto ou serviço.

Todos os produtos ou serviços possuem um número de elementos, que em conjunto descrevem a sua adequabilidade para uso. Estes parâmetros são muitas vezes designados por características de qualidade. Estas características de qualidade podem ser de várias formas: físicas (ex. peso, viscosidade, etc.); sensoriais (ex. cheiro, gosto, aparência, cor, etc.); de carácter temporal (ex. fiabilidade, durabilidade, manutenção, funcionalidade, etc.).

De forma a facilitar o controlo da qualidade e a criação de processos de Controlo de Qualidade, pode classificar-se as características de qualidade em atributos (quando se efectua o registo de um número de itens que atendam ou não a qualquer requisito especificado, ou seja a característica de

qualidade é observada e classificada como conforme – não defeituoso – ou não conforme – defeituoso) e em variáveis (quando se efectua o registo de uma característica de qualidade que é mensurável e que pode assumir todo e qualquer valor entre quaisquer dois valores e é expressa em termos de unidades de medida apropriadas).

Apesar da classificação das características de qualidade em vários tipos, de forma a facilitar o controlo da qualidade e a criação de processos de controlo da qualidade, torna-se muito complicado para as empresas/instituições servirem o cliente/consumidor com produtos ou serviços que possuam características de qualidade perfeitas. A principal razão para esta dificuldade é a variabilidade. Assim sendo, uma das chaves para melhorar a qualidade de um produto ou serviço consiste em reduzir a variabilidade de uma ou mais características. O Controlo Estatístico de Qualidade, assume aqui um papel fundamental, pois os métodos estatísticos permitem detectar formas estranhas de variação, testar alterações nos valores dos parâmetros do processo e identificar factores que influenciem as características do processo.

É de salientar que apesar de as técnicas estatísticas desempenharem um papel fundamental, elas são implementadas e fazem parte de um sistema de gestão de qualidade que apresenta várias estratégias, das quais destacamos o *Total Quality Management*, que numa primeira abordagem tem em atenção a estreita relação entre qualidade e produtividade e o conceito de custos de qualidade (que não vão ser aqui objecto de estudo) em que um dos objectivos é diminuir estes últimos. No entanto, há outros aspectos relevantes do *Total Quality Management*, tais como desempenho, fiabilidade, durabilidade, funcionalidade, estética, característica, qualidade percebida, conformidade com as especificações.

O Controlo Estatístico de Qualidade tem duas vertentes de avaliação: i) vertente *on-line* – o controlo é efectuado durante o processo; ii) vertente *off-line* – o controlo é efectuado nas fronteiras do processo (à entrada ou à saída).

Um grande número de técnicas estatísticas faz parte do Controlo Estatístico de Qualidade, que são utilizadas na análise de diferentes problemas directamente ligados à qualidade e melhoria do desempenho dos processos. Destas técnicas destacam-se:

- i) O Planeamento de Experiências, que é uma técnica *off-line* que procede a um planeamento cuidadoso do processo de produção, cujo objectivo é reduzir a variabilidade das características de qualidade e permite identificar os níveis óptimos das características de qualidade – variáveis controláveis – de forma a otimizar o funcionamento do processo de produção. O planeamento de experiências é a maior ferramenta *off-line* do Controlo de Qualidade, uma vez que é muitas vezes utilizada durante o desenvolvimento das actividades e fases primárias de produção, em vez de ser utilizado como uma rotina *on-line* do Controlo de Qualidade.

Uma vez identificada a lista de variáveis que podem afectar o *output* do processo é, normalmente, necessário modelar a relação entre as variáveis de *input* que podem influenciar e as características de qualidade de *output*. Da panóplia de técnicas estatísticas utilizadas na construção de tais modelos, destacam-se a análise de regressão e a análise de séries temporais.

- ii) O Controlo Estatístico do Processo que procura detectar alterações no processo ao longo do tempo, é uma técnica *on-line* do controlo do processo de produção, ou seja, acompanha o processo. Tem como principal objectivo eliminar ou, pelo menos, reduzir a variabilidade do processo de produção. Quando a variabilidade é devida não só a causas aleatórias – que são inerentes ao processo, constituindo a sua variabilidade natural, sendo portanto variações negligíveis – mas também a causas assinaláveis (dão origem a maiores variações que as anteriores, provocando alterações nas características de qualidade que são inaceitáveis), o processo diz-se fora de controlo. Devem então, estas últimas, ser detectadas e eliminadas do processo, para que se possa contribuir para a melhoria da qualidade do processo. Na presença exclusiva de causas aleatórias, o processo diz-se sob controlo. Também aqui no Controlo Estatístico do Processo muitas técnicas estatísticas são utilizadas, das quais se destacam a análise multivariada, métodos não paramétricos, análise bayesiana, diagramas e cartas de controlo. Estas últimas foram introduzidas por A. Shewhart em 1924. Trata-se de uma ferramenta simples mas poderosa, que permite avaliar e controlar o desempenho do processo ao longo do tempo.

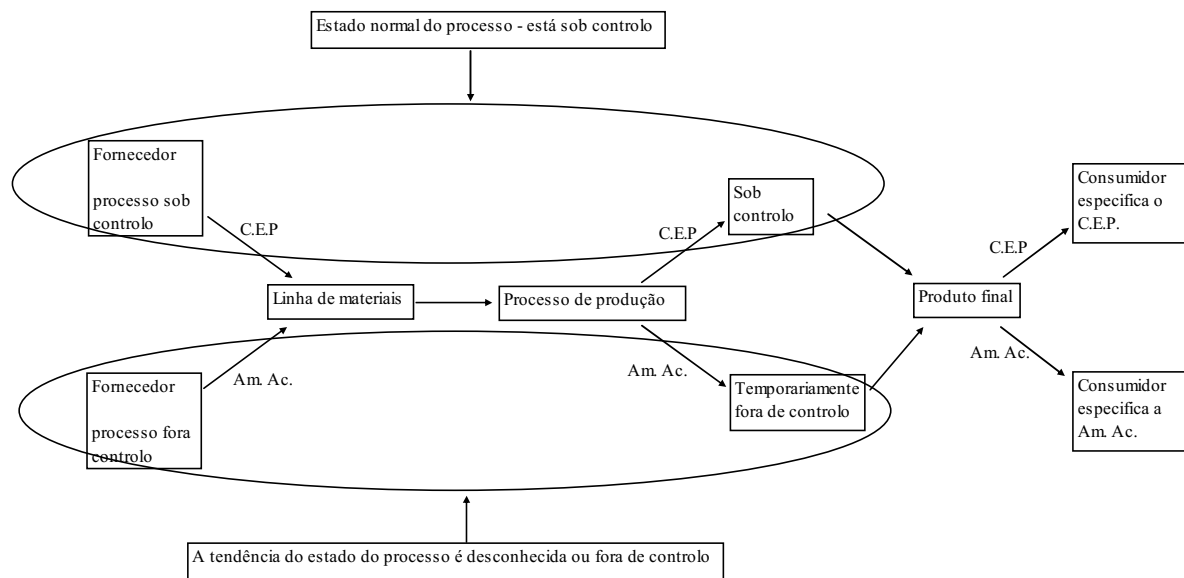
A carta de controlo é uma representação gráfica de valores de uma estatística em função do tempo. A estatística mede uma determinada característica da qualidade com base nos elementos seleccionados aleatoriamente do processo.

Se a característica de qualidade for de natureza quantitativa (ex. temperatura, pressão, diâmetro, etc.) utilizar-se-ão cartas de controlo por variáveis (ex. cartas de controlo para a média – carta  $\bar{X}$ , para a amplitude – carta R e para o desvio padrão – carta S, entre outras).

Quando a característica de qualidade é de natureza qualitativa, onde cada unidade de produto é classificada como não defeituosa ou defeituosa, ou se se puder contar o número de defeitos numa determinada unidade produzida, utilizamos cartas de controlo por atributos (ex. carta de controlo para a proporção de defeituosos – carta p e para o número de defeitos por unidade – carta c, entre outras).

- iii) A Amostragem de Aceitação que é uma técnica *off-line* do Controlo Estatístico de Qualidade e é utilizada na tomada de decisão sobre lotes de bens ou serviços – aceitar ou rejeitar – à entrada e/ou à saída de um processo de produção com base na informação fornecida por uma

amostra aleatória. A Amostragem de Aceitação, tem então por objectivo determinar quando aceitar ou rejeitar um lote de material que pode ser constituído por matéria-prima, produtos semi-acabados ou produtos já acabados, por forma a avaliar a qualidade da matéria-prima e/ou do produto final que é enviado para o consumidor. A figura 1.1 mostra claramente a integração do Controlo Estatístico do Processo e a Amostragem de Aceitação no Controlo Estatístico de Qualidade.



**Figura 1.1:** Esquema de integração do Controlo Estatístico do Processo (C.E.P) e da Amostragem de Aceitação (Am. Ac.) no Controlo Estatístico de Qualidade

O procedimento da Amostragem de Aceitação é necessariamente uma medida defensiva. É implementado como um dispositivo de protecção contra a ameaça de deterioração da qualidade. Como tal, deve ser criado com o objectivo de descontinuidade a favor de procedimentos de controlo do processo, tão cedo quanto possível.

O Controlo de Qualidade é o aspecto do sistema de qualidade relacionado com a monitorização e aperfeiçoamento do processo através de análise de tendências e sinais de problemas de qualidade ou criação de oportunidades para a melhoria da qualidade. Assim, no início e no final de um procedimento de Amostragem de Aceitação, o Controlo de Qualidade do processo desempenha um papel importante. Contudo, para que haja uma melhoria efectiva da qualidade, é necessário o recorrer a planos de Amostragem de Aceitação adequados, o que na prática nem sempre ocorre.

Encontra-se na literatura, duas abordagens sobre Amostragem de Aceitação. A primeira, versa sobre a Amostragem de Aceitação por Atributos, na qual, cada produto é classificado como conforme (não defeituoso) ou não conforme (defeituoso), consoante um determinado critério específico. O número de unidades não conformes é então utilizado. A segunda, trata da

Amostragem de Aceitação por variáveis, quando a característica de qualidade de interesse é uma variável contínua. Relativamente à Amostragem de Aceitação por variáveis, existem vários tipos de planos de amostragem, nomeadamente planos para controlar a média do processo, planos para controlar a amplitude, entre outros.

Este trabalho irá abordar a Amostragem de Aceitação na modalidade por variáveis para controlar a média/localização através da fracção (percentagem) não conforme com base em planos de amostragem simples. Nota-se, na literatura, a frequente ausência desta em favor da modalidade por atributos.

O caso típico de Amostragem de Aceitação por variáveis “para percentagem não conforme” (percentagem defeituosa), tratado em normas clássicas [ANSI/ASQC Z1.9, 2008], baseia-se na suposição de que a variável observada é Gaussiana, suposição, porém, abusiva em variadas circunstâncias, prestando-se a decisão errada, conduzindo a prejuízos para o produtor/consumidor. Assim, é relevante a Amostragem de Aceitação para variáveis não Gaussianas, mormente assimétricas e com peso de cauda acentuado, focando-se os casos por variáveis com distribuição Exponencial, por variáveis com distribuição Gama e por variáveis com distribuições de Extremos (Weibull, Gumbel e Fréchet).

Planos de Amostragem de Aceitação para variáveis com distribuição Gaussiana Inversa foram já abordados por Aminzadeh (1996), Das et al. (2002), Constantino (2004) e Casquilho et al. (2005). De acordo com o exposto anteriormente, este trabalho tem como objectivos gerais, alertar as instituições/indústria e serviços, sobre os erros que são cometidos com a utilização indevida dos planos de Amostragem de Aceitação clássicos, quando a característica de qualidade de interesse não é Gaussiana e propor alternativas que facilitem a implementação da Amostragem de Aceitação. Como objectivos específicos, estudar os casos Exponencial, Gama, Weibull, Fréchet e Gumbel, avaliando a influência do grau de assimetria assim como o índice de peso de cauda da distribuição.

Uma breve resenha histórica e a definição de Amostragem de Aceitação são efectuadas no capítulo 2, subcapítulos 2.1 e 2.2 respectivamente. A Amostragem de Aceitação por atributos é abordada no subcapítulo 2.3, com o objectivo de poder constituir uma alternativa à Amostragem de Aceitação por variáveis quando o produto poder ser classificado como conforme ou não conforme, no caso em que a característica de interesse não é Gaussiana.

A Amostragem de Aceitação por variáveis é adiante tratada, primeiro, no caso de variável Gaussiana (capítulo 3) e, depois, nos casos de variável Exponencial (capítulo 4), variáveis Gama (capítulo 5) e variáveis de Extremos (capítulo 6). Aborda-se em primeiro lugar o caso de um único limite de especificação para a característica de qualidade (limite superior), enquadrável na

extensão do estudo. Esta opção prendeu-se com a aplicação industrial subjacente, relativa à presença de contaminantes químicos vestigiais que devem encontrar-se abaixo de dado limite (tão próximo de zero quanto possível). O caso do limite inferior é análogo (também de interesse em química ou, por exemplo, no controlo de tempos de vida de componentes), apresentado em segundo lugar. O caso de limites simultâneos (inferior e superior, também de interesse em química, por exemplo, a água de abastecimento para consumo humano é considerada própria para consumo desde que a quantidade de cloro esteja dentro dos limites 0.2 – 0.4 mg/l), de maior complexidade teórica, será apresentado por último em cada um dos casos.

No capítulo 7 são abordadas as transformações de Box-Cox para as variáveis não Gaussianas, como uma alternativa aos planos de Amostragem de Aceitação específicos, propostos para cada situação. Procede-se à transformação adequada e aplica-se a Amostragem de Aceitação para o caso Gaussiano com  $\sigma$  desconhecido. A comparação dos resultados é feita com base na decisão tomada sobre o lote através dos planos de Amostragem de Aceitação específicos para cada tipo de variável e dos planos de Amostragem de Aceitação para o caso Gaussiano com  $\sigma$  desconhecido (após transformação).

Por fim, discutem-se os resultados obtidos (capítulo 8), comparando-se os resultados face ao caso Gaussiano e apresentando-se algumas conclusões, das quais se destacam as que se descrevem de seguida.

A aplicação de planos de Amostragem de Aceitação clássicos (utilização da Norma) quando a característica de qualidade em estudo é uma variável aleatória (v.a) não Gaussiana, erros são cometidos quer relativamente ao produtor quer relativamente ao consumidor. Independentemente da distribuição, não Gaussiana, subjacente à característica de qualidade, se se utilizar os valores das Normas clássicas da Amostragem de Aceitação, o risco do produtor, assim como o do consumidor são mal calculados. Esta situação conduziu a que se proceda em primeiro lugar ao ajuste dos erros tipo I ( $\alpha$ 's) para que os planos de amostragem clássicos e específicos de cada distribuição possam ser comparados e ser avaliada a performance de ambos.

Independentemente da distribuição da característica de qualidade, verifica-se sempre que com o aumento da dimensão das amostras,  $n$ , as curvas características – *Operating Characteristic Curve* – (curvas *OC*) decrescem mais rapidamente, significando que a probabilidade de aceitação do lote com uma fracção não conforme elevada diminui, assim como a fracção não conforme “assumida” pelo consumidor.

Relativamente ao caso Exponencial, que é uma distribuição acentuadamente assimétrica positiva e com um índice de peso de cauda próximo do da Gaussiana, verifica-se que o parâmetro  $\delta$ , não

exerce influência nos resultados, e após o ajuste dos  $\alpha$ 's os planos clássico e específico coincidem. Neste caso, é plausível a utilização da Norma clássica, após o ajuste dos  $\alpha$ 's.

No que diz respeito ao caso Gama, duas situações se distinguem, parâmetro de forma,  $\theta$ , conhecido e desconhecido. Quando  $\theta$  conhecido, verifica-se que após o ajuste dos  $\alpha$ 's os planos clássico e específico coincidem, situação análoga à do caso Exponencial. Com o aumento do valor de  $\theta$ , distribuições menos assimétricas positivas e com índice de peso de cauda próximo do da Gaussiana, as curvas *OC* decrescem mais rapidamente. Quanto ao parâmetro de escala,  $\delta$ , não exerce influência nos resultados, nem no coeficiente de assimetria e índice de peso de cauda. Quando  $\theta$  desconhecido, por problemas computacionais, nomeadamente na estimação dos parâmetros, não foi possível chegar a bom porto, nem retirar conclusões credíveis.

Quanto ao caso Weibull, duas situações se distinguem também, parâmetro de forma,  $\theta$ , conhecido e desconhecido. Em ambas as situações, verifica-se que após o ajuste dos  $\alpha$ 's, se obtêm melhores resultados com os planos de Amostragem de Aceitação específicos uma vez que as curvas *OC* vêm abaixo das dos planos clássicos, independentemente dos valores dos parâmetros  $\theta$  e  $\delta$  (parâmetro de escala), significando que a probabilidade de aceitação do lote no caso clássico é superior à do caso específico, o que é prejudicial para o consumidor. Com o aumento de  $n$ , além do decréscimo mais rápido das curvas *OC*, as discrepâncias entre os planos clássico e específico diminuem. A variação do valor de  $\theta$ , influencia os resultados, nomeadamente para valores de  $\theta$  baixos – (por exemplo,  $\theta=0,5$ ) distribuições com acentuada assimetria positiva e índice de peso de cauda elevado – e para valores de  $\theta$  elevados – (por exemplo  $\theta=10$ ) distribuições com acentuada assimetria negativa e um índice de peso de cauda inferior ao da Gaussiana – as diferenças entre os planos clássico e específicos são superiores às das situações em que assimetria das distribuições não é tão acentuada e o índice de peso de cauda é próximo do da Gaussiana. Relativamente ao parâmetro de escala,  $\delta$ , não exerce influência nos resultados, nem no coeficiente de assimetria e índice de peso de cauda.

Quando a característica de qualidade é uma v.a. com distribuição Fréchet, também são distinguidas duas situações, parâmetro de forma,  $\theta$ , conhecido e desconhecido. Em ambas as situações, após o ajuste dos  $\alpha$ 's, verifica-se que as curvas *OC* dos planos específicos vêm abaixo das dos planos clássicos, à excepção do caso de amostras de dimensão reduzida quando  $\theta$  é desconhecido devido à estimação pouco precisa dos parâmetros da distribuição. Isto indica que se obtêm melhores resultados com os planos de Amostragem de Aceitação específicos. Verifica-se ainda, não existir influência do parâmetro de escala,  $\delta$ , nos resultados, enquanto que o aumento do valor do parâmetro de forma,  $\theta$ , as curvas *OC* decrescem mais rapidamente. Com o aumento de  $n$ ,

além das curvas OC decrescerem mais rapidamente, verifica-se também que as diferenças entre os planos clássico e específico se esbatem.

Finalmente, quando a característica de qualidade é uma v.a. com distribuição Gumbel, duas situações são também distinguidas, parâmetro de escala,  $\delta$ , conhecido e desconhecido. Em qualquer uma das situações, não se verifica influência dos parâmetros de localização,  $\lambda$ , e de escala,  $\delta$  neste caso, pelo facto de que o coeficiente de assimetria e índice de peso de cauda serem constantes para qualquer valor de  $\lambda$  e  $\delta$ . Em ambas as situações, após o ajuste dos  $\alpha$ 's, verifica-se que as curvas OC dos planos específicos vêm abaixo das dos planos clássicos, indicando a obtenção de melhores resultados para os planos específicos, esbatendo-se as diferenças entre os dois planos com o aumento de  $n$ .

No que diz respeito a metodologias alternativas à utilização dos planos específicos, propõe-se para o caso em que os parâmetros são desconhecidos, situação de maior complexidade de implementação dos planos específicos, o recurso ao método Delta, para determinar a distribuição assintótica do índice de qualidade, somente para o caso de amostras de elevada dimensão. Verifica-se que este método só constitui uma alternativa vantajosa aos planos clássicos, pois os resultados de ambos os métodos são muito próximos, para amostras de dimensão bastante elevada ( $n > 100$ ), sendo variável de caso para caso. Para qualquer uma das situações, parâmetros conhecidos e desconhecidos, propõe-se o recurso às transformações Box-Cox, que não requer a modelação prévia dos dados, o que constitui desde já, uma vantagem, pois nem sempre é fácil a modelação dos mesmos, assim como a estimação dos parâmetros das distribuições quando estes são desconhecidos. Verifica-se que esta metodologia constitui boa uma alternativa à utilização dos planos específicos.



## *Capítulo 2.*

# **Amostragem de Aceitação**

### **2.1. Resenha histórica**

Técnicas estatísticas aplicadas aos processos de produção e garantia de qualidade têm uma longa história. Em 1924, Walter A. Shewart de “*Bell Telephone Laboratories*” desenvolveu o conceito estatístico de cartas de controlo e é considerado o fundador do Controlo Estatístico de Qualidade. No final da década de 1920, H. F. Dodge e H. G. Romig, ambos de “*Bell Telephone Laboratories*”, desenvolveram, com base estatística, a Amostragem de Aceitação, como uma alternativa à inspeção a 100%. Entre 1925 e 1926 foram desenvolvidas a terminologia da Amostragem de Aceitação (risco do consumidor, risco do produtor, probabilidade de aceitação, curvas características, *OC*, *LTPD* – *Lot Tolerance Percent Defective*, controlo total médio – *average total inspection*, amostragem dupla, riscos tipo A e tipo B) e tabelas de Amostragem de Aceitação *LTPD*. Em 1927 foram desenvolvidas tabelas de amostragem *AOQL* – *Average Outgoing Quality Limit*, e o conceito de amostragem múltipla. Segundo Stephens (2000) as tabelas *AOQL* (para um *AOQL* fixo determinam-se os valores da dimensão da amostra, da constante de aceitação e de *LTPD*) apresentam basicamente a mesma estrutura das tabelas *LTPD*. Em meados da década de 1930, os métodos do Controlo Estatístico de Qualidade, em particular a Amostragem de Aceitação, foram amplamente utilizados na “*Western Electric*”, braço de produção do Sistema Bell. Contudo, o valor do Controlo Estatístico de Qualidade, não era geralmente reconhecido pela indústria.

No início da década de 1940, Dodge e Romig (1941), publicaram o artigo “*Sampling Inspection Tables*” que provêm de planos baseados no risco do consumidor que é fixo, (protecção *LTPD*) e também planos para rectificação (protecção *AOQL*) que garantem a protecção após a inspeção a 100% de lotes rejeitados.

A II Guerra Mundial, proporcionou a utilização e aceitação, em larga escala, dos conceitos estatísticos do Controlo de Qualidade na indústria fabril. A experiência da guerra, tornou clara a necessidade das técnicas estatísticas para controlar a qualidade dos produtos. Por outras palavras, com a II Guerra Mundial, o Controlo de Qualidade, em particular a Amostragem de Aceitação emergiram. Isto inclui o desenvolvimento de normas de procedimentos de inspecção por parte do gabinete do chefe da Artilharia do Exército dos Estados Unidos da América (EUA) (1942), das quais as tabelas de amostragem da Artilharia, utilizando sistemas de amostragem baseados no *AQL – Acceptable Quality Level* (as utilizadas neste trabalho), eram uma parte. Este trabalho, foi desenvolvido mais tarde nas tabelas do Serviço do Exército dos EUA em 1944 (*U.S. Department of the Army*, 1944).

Tabelas estatísticas de amostragem e procedimentos desenvolvidos pelo grupo de investigação estatística da Universidade da Columbia para a Marinha dos EUA foram publicados pela primeira vez em 1945. O padrão destas tabelas e procedimentos foi semelhante ao utilizado pelo Serviço do exército dos EUA. No entanto, vários planos de amostragem foram disponibilizados. Após a unificação das forças armadas dos EUA, estas tabelas da Marinha foram aprovadas pelo Departamento de Defesa no início de 1949, Norma JAN (*Joint Army Navy*) 105. MIL-STD-105A vem substituir a JAN-STD-105, em 1950. Contudo, embora o padrão subjacente tenha sido semelhante aos padrões anteriores, houve novamente importantes mudanças em vários detalhes. Apenas pequenas alterações da Norma 105A estavam vertidas em MIL-STD-105B, aprovado pelo Departamento de Defesa dos EUA em 1958 e em MIL-STD-105C, aprovada em 1961.

Entre 1960 e 1962 um grupo de trabalho das agências militares dos EUA, Grã-Bretanha e Canadá, desenvolveu normas comuns de Amostragem de Aceitação por Atributos a serem utilizadas pelos três países. A comissão trabalhou com o apoio e a cooperação de organizações americanas e europeias para o Controlo de Qualidade. Nos EUA, estas normas são adoptadas em 1963 e foram designadas por MIL-STD-105D. A designação internacional foi ABC-STD-105 até a Organização Internacional de Normas alterar a designação para ISO 2859 em 1974. Esta norma foi adoptada para fins comerciais nos EUA pelo Instituto Nacional de Normas Americano em 1971 e foi designada por ANSI/ASQC Z1.4 e foi, ao longo dos anos actualizada em detalhes. A versão mais recente é a ANSI/ASQC Z1.4 de 2008.

Em 1972, foram criadas as normas para a Amostragem de Aceitação por variáveis, ANSI/ASQC Z1.9-1972 que corresponde directamente à norma militar MIL-STD-414. Tal como as normas da Amostragem de Aceitação por Atributos, também estas têm vindo a sofrer actualizações em detalhes ao longo dos anos. A versão mais recente é a ANSI/ASQC Z1.9-2008, sendo designada também por ISO/DIS 3951:1 2008. As tabelas e procedimentos contidos na presente norma são os

do original MIL-STD-414, com as devidas actualizações para obter uma correspondência com a norma ISO/DIS 3951 e combinando com a norma MIL-STD-105D (para atributos).

## 2.2. O que é a Amostragem de Aceitação?

A Amostragem de Aceitação é utilizada, frequentemente, para avaliar a qualidade “à saída” do produto final ou “à entrada” da matéria-prima, sendo portanto, uma técnica “off-line”. Consiste em retirar uma amostra aleatória de  $n$  unidades de um lote de dimensão  $N$  ( $N \geq n$ ), de bens ou serviços e com base na informação fornecida por essa amostra decidir se aceita ou rejeita o lote.

Montgomery (1991) e Foster (2010) elencam várias situações onde a inspecção a 100% não é viável (quando a inspecção implica a destruição das unidades do lote, quando os custos de inspecção são extremamente elevados, quando o tempo ou limitações tecnológicas são uma limitação, quando a dimensão dos lotes é muito grande e a probabilidade de erros de inspecção é elevada, quando o historial do fornecedor é bom o suficiente para permitir uma inspecção inferior a 100%) e que podem conduzir à utilização da Amostragem de Aceitação que é uma técnica que se encontra num ponto intermédio entre dois extremos, a inspecção a 100% e a aceitação cega do lote (sem qualquer inspecção). Desta forma, as vantagens da Amostragem de Aceitação, são as desvantagens da inspecção a 100%, ou seja: diminui os custos de inspecção quando a mesma implica a destruição das unidades do lote; é, geralmente, menos dispendiosa; diminui, frequentemente, os erros de inspecção; quando o historial do fornecedor é suficientemente bom, de tal forma que a inspecção a 100% não faz sentido, mas a falta de inspecção é arriscada, pois conduziria à aceitação “cega” dos lotes; os planos de Amostragem de Aceitação permitem poupar tempo e esforço, testando e inspeccionando não mais do que o necessário, a fim de minimizar custos; dá uma maior motivação ao produtor para a procura de uma melhor qualidade para os seus produtos, mediante a rejeição de lotes completos contra o simples rejeitar de unidades defeituosas. Este último ponto vem de encontro à noção que todos têm: “O consumidor pretende que a inspecção o proteja contra a aceitação de um lote com muitas unidades defeituosas. Por outro lado, o produtor quer evitar a devolução de um lote, por ele enviado, com uma fracção de unidades defeituosas que considera suficientemente pequena.”

Apesar de todas as vantagens anteriormente referidas, a Amostragem de Aceitação apresenta também alguns inconvenientes, face à inspecção a 100%, tais como (Montgomery, 1991): existe o risco de aceitar “maus” lotes e rejeitar “bons” lotes; gera, normalmente, menos informação acerca do produto ou do processo de produção; a Amostragem de Aceitação requer o planeamento e a

documentação dos planos de Amostragem de Aceitação, contrariamente à inspecção a 100% que não necessita.

Da primeira desvantagem da Amostragem de Aceitação, referida anteriormente, surgem os erros tipo I e tipo II. Uma vez que a tendência de decisão sobre o lote é baseada nos resultados da amostra, existe a probabilidade de cometermos decisões incorrectas sobre o lote, ou seja:

- à probabilidade de rejeitar um lote que é realmente aceitável, chamamos de probabilidade de erro tipo I ( $\alpha$ ), designada por risco do produtor.
- à probabilidade de aceitarmos um lote que é realmente inaceitável, chamamos de probabilidade de erro tipo II ( $\beta$ ), designada por risco do consumidor.

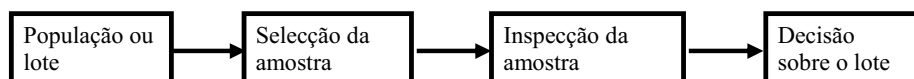
De acordo com o exposto anteriormente, e segundo Foster (2010), o objectivo da Amostragem de Aceitação é então reduzir o risco do produtor a baixos níveis enquanto mantém o risco do consumidor em níveis aceitáveis.

Os planos de Amostragem de Aceitação, que determinam a qualidade do lote, dividem-se em planos de (Gomes, Figueiredo e Barão, 2010):

- Amostragem por atributos, na qual o produto é classificado como conforme ou não conforme segundo um determinado critério. O número de unidades não conformes é então utilizado para a decisão quanto ao lote;
- Amostragem por variáveis, quando a característica de qualidade de interesse é uma variável contínua. Na Amostragem de Aceitação por variáveis, existe uma série de planos de amostragem: planos para controlar a fracção de não conformes, planos para controlar a média do processo, planos para controlar a amplitude (R), etc.

Quer na amostragem por atributos, quer na amostragem por variáveis podemos proceder a:

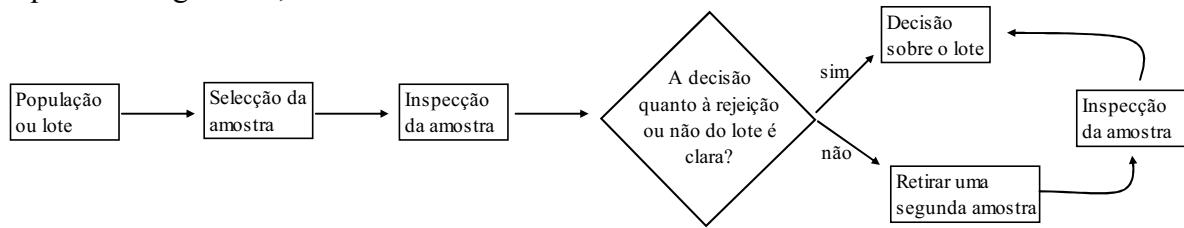
- planos de amostragem simples, quando o processo de decisão sobre o lote, utiliza informação de uma amostra aleatória de dimensão  $n$  retirada do lote de dimensão  $N$  – situação ilustrada na figura 2.1;



**Figura 2.1:** Esquema de um plano de amostragem simples

- planos de amostragem duplos, quando não é clara a tomada de decisão quanto à rejeição ou aceitação do lote a partir da informação fornecida por uma primeira amostra aleatória, então tomamos a decisão de retirar uma segunda amostra. Assim, para decidirmos pela rejeição ou

não do lote, combinamos a informação fornecida pelas duas amostras, tal como mostra o esquema da figura 2.2;



**Figura 2.2:** Esquema de um plano de amostragem duplo

- planos de amostragem múltiplos; planos de amostragem sequenciais. Nos planos de amostragem múltiplos, o número de amostras necessário para podermos tomar uma decisão quanto ao lote é superior a dois, tratando-se portanto, de uma extensão dos planos de amostragem duplos. Nos planos de amostragem sequenciais, as unidades são retiradas e inspeccionadas uma a uma (plano sequencial unidade a unidade) e a tomada de decisão quanto à rejeição ou não do lote, ou à necessidade de reamostragem, é tomada após cada unidade ter sido inspeccionada.

Qualquer um destes planos de amostragem pode ser delineado de modo a produzir os mesmos resultados que os restantes. Isto significa que estes planos podem ser desenvolvidos de tal forma que a probabilidade de aceitação do lote para determinada qualidade seja a mesma, qualquer que seja o plano escolhido: o simples, o duplo, múltiplo ou sequencial.

Neste trabalho irão ser abordados planos de amostragem por variáveis para controlar a fracção de não conformes, segundo planos de amostragem simples, tal como mostra o esquema da figura 2.1. Quer a Amostragem de Aceitação por atributos, quer a Amostragem de Aceitação por variáveis apresentam vantagens e desvantagens uma relativamente à outra (Montgomery (1991)): O plano de amostragem por variáveis requer uma amostra de dimensão mais reduzida que os planos de amostragem por atributos para o mesmo nível de protecção; A medição dos dados fornece mais informação acerca do processo de produção ou lote que os atributos dos dados. Geralmente, a medição numérica das características de qualidade é mais útil que a simples classificação de cada item, em conforme ou não conforme; num plano de amostragem por atributos podemos rejeitar um lote, mesmo que não se observe, na amostra, nenhum elemento defeituoso (por exemplo, para um lote de dimensão 100, uma amostra de dimensão 15,  $\alpha=5\%$  e uma fracção defeituosa de 1%, rejeita-se o lote). A ocorrência desta situação é rara, mas quando ocorre, surgem sérios protestos por parte do produtor sobre o processo de rejeição. Apesar das vantagens anteriormente referidas, a Amostragem de Aceitação por variáveis apresenta também algumas desvantagens, tais como: as medições requeridas pelo plano de amostragem por variáveis podem dar origem a maiores custos por observação que um plano de amostragem por atributos; na Amostragem de Aceitação por

variáveis, deve utilizar-se um plano de amostragem para cada característica de qualidade, enquanto que para a Amostragem de Aceitação por atributos apenas é necessário um plano de amostragem para rejeitar ou aceitar o lote. No entanto, a principal desvantagem da Amostragem de Aceitação por variáveis relativamente à amostragem por atributos é o facto de a distribuição da característica de qualidade em estudo ter que ser conhecida. Além disso, muitos dos planos de amostragem por variáveis, “*Standard*”, assumem que a distribuição da característica de qualidade é Gaussiana. Se a distribuição da característica de qualidade não for Gaussiana e se for aplicado um plano baseado no pressuposto de Gaussianidade, sérios riscos se correm na decisão de rejeitar ou aceitar o lote.

Na amostragem “baseada no *AQL*” (Wetherill et al., 1991), associam-se: o risco do produtor ao *AQL* (*Acceptable Quality Level*), nível de qualidade aceitável; e o risco do consumidor ao *LTPD* (*Lot Tolerance Percent Defective*), qualidade tolerável. O procedimento para a resolução do problema da Amostragem de Aceitação assenta na definição do plano de amostragem, isto é, na determinação da dimensão da amostra,  $n$ , a retirar do lote de dimensão  $N$ , e no critério de aceitação, ou seja, na determinação do valor crítico da medida da qualidade,  $k$ , também chamado como constante de aceitação, condições expressas em (2.1).

Uma vez que o objectivo é determinar os valores da dimensão da amostra,  $n$ , e do número de aceitação,  $k$ , que satisfaçam as condições relativas aos riscos assumidos pelo produtor e pelo consumidor, onde (Gomes, Figueiredo e Barão, 2010):

- o produtor pretende que se aceitem os lotes com uma pequena fracção de não conformes, *AQL*, com uma probabilidade elevada  $1-\alpha$  ( $\alpha$  pequeno);
- quanto ao consumidor, pretende aceitar o lote com probabilidade  $\beta$  (o mais pequena possível) se a fracção de não conformes for *LTPD*, com  $LTPD > AQL$ ,

surge o sistema

$$\begin{cases} P_{ac}(\omega = AQL) = 1 - \alpha \\ P_{ac}(\omega = LTPD) = \beta \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $P_{ac}$  é a probabilidade de aceitação (dependente de  $n$  e  $k$ ) e  $\omega = AQL$  e  $\omega = LTPD$  são fracções não conformes. A resolução deste sistema de equações fornece então a dimensão da amostra,  $n$ , a extrair, e a constante de aceitação,  $k$ .

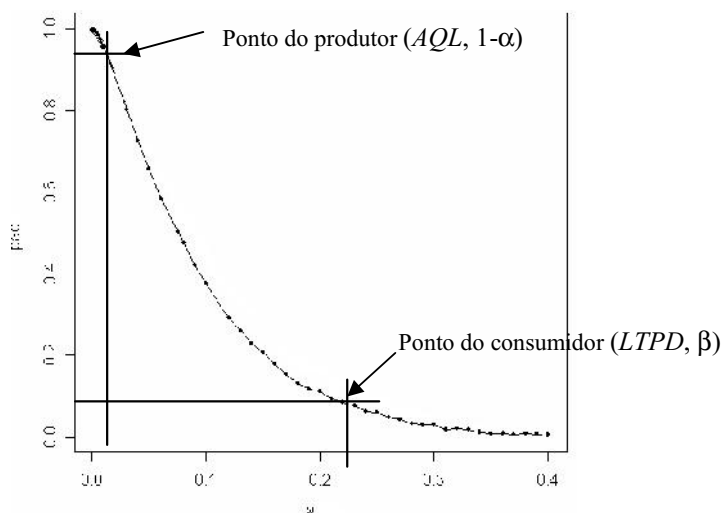
Como  $n$  deve ser inteiro, as duas equações não se podem verificar exactamente e passam, na prática, a desigualdades do tipo  $\leq$  e  $\geq$ , respectivamente (condições, por vezes, não verificadas rigorosamente, se se usar um mero arredondamento de  $n$  sem posterior recálculo de  $k$ ).

O procedimento referido, se aplicado à gama de fracção não conforme entre 0 e 1 (e não apenas às fracções não conformes  $AQL$  e  $LTPD$ ), leva ao estabelecimento da curva característica (*Operating Characteristic Curve, OC*) (Gomes, Figueiredo e Barão, 2010), a qual indica a probabilidade de aceitação de um lote em função da sua qualidade, dada pela fracção não conforme,  $\omega$ , tal como ilustrado na figura 4. Temos então aqui, dois pontos de interesse da curva característica, ( $AQL, 1-\alpha$ ) e ( $LTPD, \beta$ ), que nos irão auxiliar no cálculo de  $n$  e  $k$ .

H. F. Dodge e H. G. Romig (1959) fazem a distinção entre dois tipos de curvas características (*OC*), curvas Tipo A e curvas Tipo B. As curvas Tipo A dão a probabilidade de aceitação, para várias fracções não conformes, como uma função da qualidade do lote, considerando lotes de dimensão finita. As curvas Tipo B, as utilizadas neste trabalho e ilustradas na figura 2.3, dão a probabilidade de aceitação do lote como uma função da qualidade do lote, considerando lotes de dimensão infinita. Na prática, estas curvas dão a probabilidade de aceitação para um determinado plano de amostragem, sob o intervalo de possíveis valores de fracção não conforme do lote. Quando a dimensão do lote é elevada, isto é, em geral, quando o tamanho da amostra,  $n$ , não é mais do que um décimo do tamanho do lote,  $N$ , as curvas Tipo A e Tipo B podem ser consideradas como idênticas para a maioria das situações práticas.

De ora em diante, sempre que for feita referência à curva *OC*, esta corresponderá à curva tipo B.

Em alternativa a fornecer ( $AQL, 1-\alpha$ ) e ( $LTPD, \beta$ ) e retirar  $n$  e  $k$  do sistema (2.1), optou-se, face ao objectivo de comparar vários planos de amostragem, por seguir o procedimento das Normas: fornecer  $n, AQL, \alpha$  e  $\beta$ , e retirar do sistema (2.1) os valores de  $k$  e  $LTPD$ .



**Figura 2.3:** Curva *OC*, Tipo B

Um aspecto importante a ter em conta quando se trabalha com a inspecção (a 100% ou por amostragem) de produtos ou serviços é os erros de inspecção. Segundo Schilling e Neubauer (2009), nenhuma inspecção é perfeita todo o tempo. De facto, é geralmente reconhecido que a inspecção a 100% não é 100% eficaz na detecção de produtos/serviços defeituosos. Vários estudos apontam para que apenas 80% dos defeituosos sejam detectados, como consequência da monotonia e cansaço (Juran e Gryna, 1970). Algumas das razões que conduzem à imprecisão da inspecção são: erros intencionais (actos criminosos tais como fraude e conluio, falsificação), erros de arredondamento, erros devido a excesso de zelo, erros devido a fadiga e monotonia, erros involuntários, entre outros.

A inspecção por amostragem está também sujeita a este tipo de erros. Uma das vantagens da amostragem é a redução do número de peças sujeitas a inspecção. No entanto, as circunstâncias e motivações existem e podem conduzir à imprecisão do inspector. O resultado pode ser então uma incorrecta representação da qualidade recebida.

Muito do efeito de um plano de amostragem depende da disposição que se toma face ao produto após inspecção. Lotes aceites, vão para o consumidor. Lotes rejeitados, podem ser tratados de várias formas:

- i) Destruídos → Sem efeito sobre a qualidade geral se o produtor continua a apresentar um nível de qualidade constante.
- ii) Reenviados → Sem efeito sobre a qualidade global se o produtor continua a apresentar um nível constante de qualidade.
- iii) Filtrados → A qualidade dos lotes rejeitados melhorará dentro dos limites de erro de inspecção. A inspecção a 100% dos lotes rejeitados irá transformá-los em lotes perfeitos.

Como resultado, o nível global de qualidade, do ponto de vista do consumidor, irá melhorar.

Esquemas de amostragem de aceitação que incluem a inspecção a 100% dos lotes rejeitados são designados por “esquemas de rectificação” (Schilling e Neubauer, 2009).

As referências para este subcapítulo são Stephens (2001), Duncan (1986), Montgomery (2004), Guenther (1977), Gomes, Figueiredo e Barão (2010), H. F. Dodg e H. G. Romig (1959), Juran e Gryna (1970) e Schilling e Neubauer (2009).

### 2.3. Amostragem de Aceitação por Atributos

Quando o produto pode ser classificado como conforme ou não conforme, de acordo com determinadas especificações (estamos a considerar que a característica de qualidade é uma variável categórica – discreta – que assume os valores correspondentes a conforme ou não conforme) estão reunidas as condições para se poder aplicar a Amostragem de Aceitação por atributos. No entanto, a Amostragem de Aceitação por atributos, pode constituir uma alternativa à Amostragem de Aceitação por variáveis quando a Gaussianidade da característica de qualidade em estudo não se verifica e é possível classificar o produto em conforme e não conforme, tratando-se portanto, de um atributo. Este é o caso de variáveis tratadas como atributos em que, inicialmente se tem interesse em observar, apenas, o valor que determinado item apresenta (variável). De seguida, pretende-se verificar se este item é considerado bom ou não (atributo), de acordo com determinadas especificações. Em consequência, nesta fase, as variáveis são tratadas como atributos, bastando para tal agrupar os itens de acordo com as especificações. Para exemplificar considere-se o boletim de análise ao leite em pó integral e desnatado destinado à merenda escolar, produzido por uma determinada fábrica da indústria alimentar, do qual se apresenta um excerto na tabela 2.1. Pode ver-se que do boletim de análise constam várias características de qualidade, umas são atributos e outras variáveis. Ora, no conjunto das várias características de qualidade pode classificar-se o produto como conforme ou não conforme de acordo com as especificações.

Departamento de Controlo de Qualidade de Alimentos	
...	
2. Análises Mínimas:	
Especificações de rótulo de acordo com as normas.....	presença (tolerável)
Peso líquido inferior ao declarado.....	ausência (tolerável)
Características organolépticas.....	próprias (crítico)
Sujidades, larvas e parasitas.....	ausência (crítico)
Humidade.....	máximo 4% (crítico)
Resíduo mineral fixo.....	máximo 8% (crítico)
Acidez em ácido láctico.....	máximo 0.18% (crítico)
Solubilidade.....	mínimo 98% (crítico)
Amido.....	ausência (crítico)
Coliformes totais.....	máximo 10/g (crítico)
Coliformes fecais.....	máximo 1/g (crítico)
...	

**Tabela 2.1.:** Excerto de um boletim de análise ao leite em pó desnatado destinado à merenda escolar, produzido por determinada fábrica da indústria alimentar

É este facto que conduz a uma descrição sumária da Amostragem de Aceitação por Atributos. Suponha-se então que se tem um lote de dimensão  $N$ , cuja fracção de unidades defeituosas é  $\omega$ . O que se pretende é então, inferir quanto à aceitabilidade, ou não, do lote no que diz respeito à sua qualidade. Do lote retira-se uma amostra aleatória de dimensão  $n$  (a determinar), apura-se o número de unidades não conformes e compara-se com um valor crítico,  $c$  (a determinar) – designado por número de aceitação. Se o número de unidades não conformes for inferior a  $c$ , então aceita-se o lote; caso contrário, rejeita-se o lote.

A definição do plano de amostragem passa pelo cálculo da dimensão,  $n$ , da amostra aleatória a retirar do lote a inspecionar e pelo cálculo do número de aceitação,  $c$ .

O critério usual de optimalidade de um plano de Amostragem de Aceitação é a curva característica,  $OC$ , que representa a probabilidade de aceitação de um lote em função da fracção de não conformes, no lote. A curva  $OC$ , mostra como a probabilidade de aceitação de um lote varia com a qualidade do produto fornecido pela inspecção, avaliada pela fracção não conforme.

De acordo com o exposto anteriormente e considerando que  $N\omega$  é o número esperado de unidades não conformes (defeituosas) no lote, a variável aleatória  $X$ , que representa o número de unidades não conformes numa amostra aleatória de dimensão  $n$  – efectuada sem reposição – segue uma distribuição Hipergeométrica, cuja função massa de probabilidade é dada por (2.2):

$$f_x(x) = P(X = x) = \frac{\binom{N\omega}{x} \binom{N - N\omega}{n - x}}{\binom{N}{n}} \quad (2.2)$$

Pelo que, a probabilidade de aceitação do lote é:

$$P_{ac} = P_{ac}(\omega) = P(X \leq c) = \sum_{x=0}^c \frac{\binom{N\omega}{x} \binom{N - N\omega}{n - x}}{\binom{N}{n}}, \quad (2.3)$$

equação que determina as curvas  $OC$  tipo A.

Na prática, a dimensão da amostra terá de ser aproximada pelo valor inteiro que satisfaça as condições:

$$\begin{cases} P_{ac}(AQL) \geq 1 - \alpha \\ P_{ac}(LTPD) \leq \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{x=0}^c \frac{\binom{N AQL}{x} \binom{N - N AQL}{n-x}}{\binom{N}{n}} \geq 1 - \alpha \\ \sum_{x=0}^c \frac{\binom{N LTPD}{x} \binom{N - N LTPD}{n-x}}{\binom{N}{n}} \leq \beta \end{cases} \quad (2.4)$$

o que significa que a curva característica passará acima do ponto do produtor e abaixo do ponto do consumidor.

Pode, ainda, determinar-se os parâmetros do plano de amostragem,  $n$  e  $c$ , utilizando as seguintes aproximações:

- Quando  $N\omega \gg 10$ , a distribuição da v.a.  $X$ , é bem aproximada pela distribuição Binomial de parâmetros  $n$  e  $\omega$ . Desta forma, para a obtenção dos valores de  $n$  e  $c$ , para definir o plano de Amostragem de Aceitação, basta resolver o sistema de equações (2.5):

$$\begin{cases} P_{ac}(AQL) \geq 1 - \alpha \\ P_{ac}(LTPD) \leq \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{x=0}^c \frac{n!}{x!(n-x)!} (AQL)^x (1 - AQL)^{n-x} \geq 1 - \alpha \\ \sum_{x=0}^c \frac{n!}{x!(n-x)!} (LTPD)^x (1 - LTPD)^{n-x} \leq \beta \end{cases} \quad (2.5)$$

- Baseada na utilização da distribuição de Poisson como uma aproximação à distribuição Binomial (quando  $n$  grande e  $\omega$  pequeno -  $n\omega$  constante) e recorrendo à relação da função de distribuição da Poisson com a função distribuição Qui-quadrado (Wetherill e Brown, 1991):

$$\begin{cases} P_{ac}(AQL) \geq 1 - \alpha \\ P_{ac}(LTPD) \leq \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{x=0}^c \frac{e^{-nAQL} (nAQL)^x}{x!} \geq 1 - \alpha \\ \sum_{x=0}^c \frac{e^{-nLTPD} (nLTPD)^x}{x!} \leq \beta \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \text{uma vez que se prova que} \\ \sum_{x=0}^c \frac{e^{-k} k^x}{x!} = 1 - F_{\chi^2_{2(c+1)}}(2k) \quad (2k) \end{matrix} \begin{cases} 1 - F_{\chi^2_{2(c+1)}}(2nAQL) \geq 1 - \alpha \\ 1 - F_{\chi^2_{2(c+1)}}(2nLTPD) \leq \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2nAQL \leq F_{\chi^2_{2(c+1)}}^{-1}(\alpha) \\ 2nLTPD \geq F_{\chi^2_{2(c+1)}}^{-1}(1 - \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2nAQL \leq \chi^2_{2(c+1); \alpha} \\ 2nLTPD \geq \chi^2_{2(c+1); 1 - \beta} \end{cases} \quad (2.6)$$

Nos capítulos seguintes descrever-se-á a Amostragem de Aceitação por variáveis, interesse particular do presente estudo.



## **Capítulo 3.**

# **Amostragem de Aceitação para variáveis Gaussianas**

### **3.1. Introdução**

Quando a característica de qualidade em estudo é uma variável contínua que segue uma distribuição Gaussiana, estão reunidas as condições para se poder aplicar a Amostragem de Aceitação clássica, por variáveis. Nestas condições, os planos de Amostragem de Aceitação são baseados na média e no desvio padrão amostrais.

A Amostragem de Aceitação por variáveis no caso Gaussiano está essencialmente resolvida na teoria e, para aplicação, vertida na norma americana MIL-STD 414, várias vezes actualizada (em detalhes). A versão internacional mais recente é a ISO/DIS 3951-1:2008 [2008]. Embora a variável observada deva ser Gaussiana, a norma é frequentemente aplicada como aproximação, eventualmente grosseira, a outras variáveis, com mais graves consequências se a distribuição for, nomeadamente, assimétrica (Levinson, 1997, Zimmer e Burr IW., 1963), podendo a decisão de aceitar ou rejeitar o lote inverter-se.

Considere-se então que a característica de qualidade a ser inspeccionada,  $X$ , é uma v.a. contínua com distribuição Gaussiana, ou seja  $X \sim N(\mu, \sigma)$ . Esta distribuição é matematicamente definida pela sua função densidade de probabilidade (*f.d.p.*), que é dada pela expressão:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

onde  $\mu$  representa o parâmetro de localização (o valor médio) e  $\sigma$  o parâmetro de escala – dispersão (o desvio padrão).

O que se pretende então saber é se o valor da média amostral,  $\bar{X}$ , para a característica de interesse conduz a uma fracção de defeituosos pequena e neste caso, aceita-se o lote, ou se pelo contrário, a fracção de defeituosos é elevada e conduz à rejeição do lote. Assume-se que as alterações da qualidade no processo de produção, são devidas à variação do parâmetro de localização,  $\mu$  (e não a alterações no parâmetro de escala,  $\sigma$ ).

À semelhança dos planos de amostragem por atributos, o objectivo é determinar os valores da dimensão da amostra,  $n$ , e da constante de aceitação,  $k$ , que satisfaçam as condições relativas aos riscos assumidos pelo produtor e pelo consumidor. Vai considerar-se, portanto, os dois pontos de interesse da curva  $OC$ ,  $(AQL, 1-\alpha)$  e  $(LTPD, \beta)$ , que irão determinar os valores de  $n$  e  $k$ . Na prática, a dimensão da amostra terá de ser aproximada pelo valor inteiro que satisfaça as condições indicadas em (2.1).

Para definir os planos de amostragem, baseados no limite superior de especificação,  $U$ , (Grant et al., 1996), baseados no limite inferior de especificação,  $L$ , e baseados em limites de especificação simultâneos, vai considerar-se duas situações:  $\sigma$  conhecido e  $\sigma$  desconhecido. De referir que, os limites de especificação são valores da característica de qualidade em estudo para além dos quais se considera inaceitável a sua qualidade.

Considere-se que  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) são v.a's. Gaussianas independentes e identicamente distribuídas (*i.i.d.*).

## 3.2. $\sigma$ conhecido

### 3.2.1. Limite Superior de Especificação

Considerando então a situação em que a característica de interesse é uma v.a. Gaussiana de parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$ , com  $\sigma$  conhecido, e que se pretende definir planos de amostragem baseados no limite superior de especificação,  $U$ , a fracção não conforme,  $\omega$ , é dada por:

$$\omega = P(X \geq U) = 1 - \Phi\left(\frac{U - \mu}{\sigma}\right), \quad (3.2)$$

pelo que, para que  $\omega$  seja pequeno,  $\mu$  tem de ser o menor possível. Assim, o que se pretende é testar  $H_0: \mu \leq \mu_0$  v.s.  $H_1: \mu > \mu_0$ , sendo  $\mu_0$  o valor médio especificado.

Neste caso, decide-se pela aceitação do lote quando a média amostral for pequena, ou se se definir o índice de qualidade,  $Q_U$ , por  $Q_U = \frac{U - \bar{X}}{\sigma}$ , quando  $Q_U$  for superior ou igual à constante de aceitação,  $k$ , ou seja,

$$Q_U = \frac{U - \bar{X}}{\sigma} \geq k. \quad (3.3)$$

Em consequência, a média amostral deve satisfazer a condição

$$\bar{X} + k\sigma \leq U. \quad (3.4)$$

Uma vez que se está a trabalhar com uma mostra de dimensão  $n$  e  $\mu$  é desconhecido, uma estimativa da fracção não conforme,  $\omega$ , é dada por

$$\hat{\omega} = 1 - \Phi\left(\frac{U - \bar{X}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(Q_U) = \Phi(-Q_U). \quad (3.5)$$

A probabilidade de aceitação do lote é então dada por

$$P_{ac}(\omega) = P(\text{Ac. lote}|\omega) = P(Q_U \geq k) = P(\bar{X} \leq U - k\sigma). \quad (3.6)$$

Uma vez que  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) é uma amostra aleatória *i.i.d.* de uma população Normal ou Gaussiana de parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  finitos,  $\sigma$  conhecido e sendo  $\bar{X}$  a média desta amostra, então

$$\bar{X} \cap N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \quad (3.7)$$

Com base em (3.7) a probabilidade dada em (3.6), pode reescrever-se do seguinte modo:

$$P_{ac}(\omega) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{U - k\sigma - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \Phi\left(\frac{U - k\sigma - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right). \quad (3.8)$$

Por outro lado, para que a fracção de defeituosos seja  $\omega$  o valor esperado de  $X$ ,  $\mu$ , com base em (3.2), terá que ser<sup>(1)</sup>:

$$\omega = \Phi\left(-\frac{U - \mu}{\sigma}\right) \Leftrightarrow \mu = U + \sigma z_\omega, \quad (3.9)$$

onde  $z_\omega = \Phi^{-1}(\omega)$ .

Finalmente, para definir o plano de Amostragem de Aceitação, ou seja, para se obter os valores de  $n$  e  $k$ , basta resolver o sistema de equações dado em (2.1), isto é

$$\begin{cases} P(Q_U \geq k | \mu_0) = 1 - \alpha \\ P(Q_U \geq k | \mu_1) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi\left(\frac{U - k\sigma - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \alpha \\ \Phi\left(\frac{U - k\sigma - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \beta \end{cases} \xrightarrow{\text{considerando (3.9)}} \begin{cases} \frac{U - k\sigma - U - \sigma z_{AQL}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z_{1-\alpha} \\ \frac{U - k\sigma - U - \sigma z_{LTPD}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z_\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} - z_{AQL} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha} + z_{AQL} - z_{LTPD} = \frac{1}{\sqrt{n}} z_\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{z_{1-\alpha} z_{LTPD} - z_\beta z_{AQL}}{z_\beta - z_{1-\alpha}} \\ n = \left(\frac{z_{1-\alpha} - z_\beta}{z_{LTPD} - z_{AQL}}\right)^2 \end{cases}, \quad (3.10)$$

onde cada  $\mu_i$  ( $i=0, 1$ ), está associado a uma fracção não conforme,  $AQL$  e  $LTPD$ , respectivamente. Como  $n$  tem de ser inteiro, na prática, as igualdades em (3.10) passam a desigualdades  $\leq$  e  $\geq$  respectivamente.

O resultado dado em (3.10), dá-nos a forma de cálculo da dimensão da amostra e da constante de aceitação, para definir o plano de Amostragem de Aceitação no caso de a variável de interesse ser Gaussiana com  $\sigma$  conhecido e fixado o limite superior de especificação  $U$ .

---

<sup>(1)</sup>  $\begin{cases} P(X > U | \mu = \mu_0) = AQL \\ P(X > U | \mu = \mu_1) = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(Z > \frac{U - \mu}{\sigma} | \mu = \mu_0\right) = AQL \\ P\left(Z > \frac{U - \mu}{\sigma} | \mu = \mu_1\right) = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_0 = U + \sigma z_{AQL} \\ \mu_1 = U + \sigma z_{LTPD} \end{cases}.$

### 3.2.2. Limite Inferior de Especificação

Caso se pretenda fixar o limite inferior de especificação,  $L$ , o procedimento é análogo ao anterior e decide-se pela aceitação do lote quando o índice de qualidade,  $Q_L$ , for superior ou igual à constante de aceitação,  $k$ , ou seja,

$$Q_L = \frac{\bar{X} - L}{\sigma} \geq k. \quad (3.11)$$

pelo que, a média amostral tem que satisfazer a condição

$$\bar{X} - k\sigma \geq L. \quad (3.12)$$

Sendo a fracção não conforme,  $\omega$ , dada por

$$\omega = P(X < L) = \Phi\left(\frac{L - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu - L}{\sigma}\right), \quad (3.13)$$

uma estimativa da fracção não conforme é  $\hat{\omega} = \Phi(-Q_L)$ . Para que  $\omega$  seja pequeno,  $\mu$  tem de ser o maior possível. Assim, o que se pretende é testar  $H_0: \mu \geq \mu_0$  v.s.  $H_1: \mu < \mu_0$ , sendo  $\mu_0$  o valor médio especificado.

Assim sendo, a probabilidade de aceitação é dada por

$$P_{ac}(\omega) = P(\text{Ac. lote} | \omega) = P(Q_L \geq k) = P\left(\frac{\bar{X} - L}{\sigma} \geq k\right) = P(\bar{X} \geq L + k\sigma). \quad (3.14)$$

Com base em (3.7) a probabilidade dada em (3.14), pode reescrever-se do seguinte modo:

$$P_{ac}(\omega) = 1 - \Phi\left(\frac{L + k\sigma - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right). \quad (3.15)$$

Por outro lado, para que a fracção de defeituosos seja  $\omega$  o valor esperado de  $X$ ,  $\mu$ , com base em (3.13), terá que ser<sup>(2)</sup>:

$$\frac{\mu - L}{\sigma} = -\Phi^{-1}(\omega) \Leftrightarrow \mu = L - \sigma z_{\omega}. \quad (3.16)$$

Resolvendo o sistema dado em (2.1), obtém-se os valores de  $n$  e  $k$ , para definir o plano de Amostragem de Aceitação dado em (3.17).

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(Q_L \geq k | \mu_0) = 1 - \alpha \\ P(Q_L \geq k | \mu_1) = \beta \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \Phi\left(\frac{L + k\sigma - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha \\ \Phi\left(\frac{L + k\sigma - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \beta \end{cases} \xrightarrow{\text{considerando (3.16)}} \begin{cases} \frac{L + k\sigma - L + \sigma z_{AQL}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z_{\alpha} \\ \frac{L + k\sigma - L - \sigma z_{LTPD}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = z_{1-\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} k = \frac{1}{\sqrt{n}} z_{\alpha} - z_{AQL} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} z_{\alpha} - z_{AQL} + z_{LTPD} = \frac{1}{\sqrt{n}} z_{1-\beta} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{z_{1-\alpha} z_{LTPD} - z_{\beta} z_{AQL}}{z_{\beta} - z_{1-\alpha}} \\ n = \left(\frac{z_{1-\alpha} - z_{\beta}}{z_{LTPD} - z_{AQL}}\right)^2 \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde cada  $\mu_i$  ( $i=0, 1$ ), está associado a uma fracção não conforme,  $AQL$  e  $LTPD$ , respectivamente. Comparando os resultados obtidos em (3.17) com os obtidos em (3.10), pode verificar-se que o cálculo da dimensão da amostra é igual nas duas situações (com limite de especificação superior ou limite de especificação inferior fixado), enquanto que o valor da constante de aceitação é simétrico.

$$^{(2)} \begin{cases} P(X < L | \mu = \mu_0) = AQL \\ P(X < L | \mu = \mu_1) = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi\left(-\frac{\mu_0 - L}{\sigma}\right) = AQL \\ \Phi\left(-\frac{\mu_1 - L}{\sigma}\right) = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_0 = L - \sigma z_{AQL} \\ \mu_1 = L - \sigma z_{LTPD} \end{cases}$$

### 3.2.3. Limites de especificação simultâneos

Uma terceira situação a ter em atenção é o caso em que se pretende trabalhar com dois limites de especificação em simultâneo (inferior,  $L$ , e superior,  $U$ ). Esta situação é de maior complexidade teórica pois, de uma forma simplista de dizer, é agregar os dois procedimentos anteriores num só, como se descreve de seguida.

Ao considerar-se os dois limites de especificação em simultâneo, a fracção não conforme é dada por

$$\omega = P(X \leq L) + P(X \geq U) = \omega_L + \omega_U, \quad (3.18)$$

cuja estimativa é

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}_L + \hat{\omega}_U, \quad (3.19)$$

sendo  $\hat{\omega}_U$  a estimativa da expressão (3.5) e  $\hat{\omega}_L$  a estimativa obtida com base em (3.13), ou seja

$$\begin{cases} \hat{\omega}_U = 1 - \Phi(Q_U) \\ \hat{\omega}_L = \Phi(-Q_L) \end{cases} \quad (3.20)$$

Para que  $\omega$  seja pequeno,  $\mu$  tem de obedecer a duas condições em simultâneo, pelo que, o que se pretende é testar  $H_0: \mu = \mu_0$  v.s.  $H_1: \mu \neq \mu_0$ .

Quando se pretende construir planos de amostragem por variáveis com limites simultâneos, ter-se-á, no fundo, que proceder à construção de dois planos de amostragem (Duncan, 1986) (E. G. Schilling and D. V. Neubauer, 2009).

O critério de aceitação do lote é então

$$Q_L = \frac{\bar{X} - L}{\sigma} \geq k_L \quad \wedge \quad Q_U = \frac{U - \bar{X}}{\sigma} \geq k_U \quad (3.21)$$

pelo que a probabilidade de aceitação do lote é dada por

$$P_{ac}(\omega) = P(\text{Ac. lote}|\omega) = P(Q_L \geq k_L \wedge Q_U \geq k_U) = P\left(\frac{\bar{X} - L}{\sigma} \geq k_L \wedge \frac{U - \bar{X}}{\sigma} \geq k_U\right), \quad (3.22)$$

e conseqüentemente, a probabilidade de se rejeitar o lote, sob as condições de  $H_0$ , é

$$\alpha = P(\text{Rej. lote}|H_0) = P\left(\frac{\bar{X} - L}{\sigma} < k_L|H_0\right) + P\left(\frac{U - \bar{X}}{\sigma} < k_U|H_0\right), \quad (3.23)$$

onde  $\alpha_1 = P\left(\frac{\bar{X} - L}{\sigma} < k_L|H_0\right)$ ,  $\alpha_2 = P\left(\frac{U - \bar{X}}{\sigma} < k_U|H_0\right)$  e  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ .

Salienta-se ainda o facto de que as fracções defeituosas  $AQL$  e  $LTPD$ , também são o resultado da soma das fracções defeituosas relativas aos limites inferior e superior, respectivamente, tal como referido em (3.18), ou seja

$$\begin{cases} AQL_1 + AQL_2 = AQL \\ LTPD_1 + LTPD_2 = LTPD \end{cases}. \quad (3.24)$$

Assim sendo, com base em (3.23) e (3.24) e, desenvolvendo em separado cada uma das probabilidades relativas ao limite inferior e limite superior respectivamente, tal como feito (3.10) e (3.17), obtém-se:

$$\begin{cases} k_L = -\frac{z_{1-\alpha_1} z_{LTPD_1} - z_{\beta_1} z_{AQL_1}}{z_{\beta_1} - z_{1-\alpha_1}} \\ n_L = \left(\frac{z_{1-\alpha_1} - z_{\beta_1}}{z_{LTPD_1} - z_{AQL_1}}\right)^2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} k_U = \frac{z_{1-\alpha_2} z_{LTPD_2} - z_{\beta_2} z_{AQL_2}}{z_{\beta_2} - z_{1-\alpha_2}} \\ n_U = \left(\frac{z_{1-\alpha_2} - z_{\beta_2}}{z_{LTPD_2} - z_{AQL_2}}\right)^2 \end{cases}. \quad (3.25)$$

Dado que  $n_L$  e  $n_U$  têm de ser inteiros, na prática, as igualdades em (3.25) passam a desigualdades  $\leq$  e  $\geq$  respectivamente, em cada um dos sistemas.

Finalmente, para definir o plano de Amostragem de Aceitação, consideram-se os valores  $k_L$ ,  $k_U$  e  $n = \max\{n_L, n_U\}$ , de forma a satisfazer as condições relativas ao limite inferior e limite superior. Ao considerar-se  $n$ , o valor de  $k$  relativo ao outro limite deve ser recalculado. Relativamente à dimensão da amostra, poder-se-ia considerar também  $n = n_L + n_U$ , contudo, o plano de

amostragem tornar-se-ia mais dispendioso – o que não é conveniente –, uma vez que a dimensão da amostra seria superior à sugerida em primeiro lugar.

Um caso particular é considerar-se o caso equilibrado, em que os limites, inferior e superior, são simétricos e em consequência tem-se  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \frac{\beta}{2}$ ,  $AQL_1 = AQL_2 = \frac{AQL}{2}$  e

$LTPD_1 = LTPD_2 = \frac{LTPD}{2}$ . Sendo as igualdades relativas a  $AQL$  e a  $LTPD$  consequência da

alteração sofrida em (3.18) e consequentemente em (3.19), ou seja,  $\omega_L = \omega_U = \frac{\omega}{2}$ , então as suas

estimativas são  $\hat{\omega}_L = \hat{\omega}_U = \frac{\hat{\omega}}{2}$ . Utilizando-se um raciocínio análogo apresentado em (3.25),

obtem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} k_L = -\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} Z_{\frac{LTPD}{2}} - Z_{\frac{\beta}{2}} Z_{\frac{AQL}{2}}}{Z_{\frac{\beta}{2}} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}} \\ n_L = \left( \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} - Z_{\frac{\beta}{2}}}{Z_{\frac{LTPD}{2}} - Z_{\frac{AQL}{2}}} \right)^2 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} k_U = \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} Z_{\frac{LTPD}{2}} - Z_{\frac{\beta}{2}} Z_{\frac{AQL}{2}}}{Z_{\frac{\beta}{2}} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}} \\ n_U = \left( \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} - Z_{\frac{\beta}{2}}}{Z_{\frac{LTPD}{2}} - Z_{\frac{AQL}{2}}} \right)^2 \end{array} \right. , \quad (3.26)$$

em que as constantes de aceitação são simétricas ( $k_U = -k_L$ ) e a dimensão da amostra é igual nas duas situações, pelo que, os valores a considerar para a definição do plano de Amostragem de Aceitação são  $-k_U$ ,  $k_U$  e  $n$ . Estes resultados já eram esperados, tendo em consideração os já obtidos nos subcapítulos 3.2.1 e 3.2.2.

### 3.3. $\sigma$ desconhecido

#### 3.3.1. Limite Superior de Especificação

Vai considerar-se agora a situação em que a característica de interesse é uma v.a. Gaussiana de parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$ , com  $\sigma$  desconhecido, e em que se pretende definir planos de amostragem baseados no limite superior de especificação,  $U$ . A fracção não conforme,  $\omega$ , é dada por (3.2), pelo que, para que  $\omega$  seja pequeno,  $\mu$  tem de ser o menor possível. Assim, à semelhança do caso  $\sigma$  conhecido, o que se pretende é testar  $H_0: \mu \leq \mu_0$  v.s.  $H_1: \mu > \mu_0$ .

Aceita-se o lote, à semelhança das situações anteriores, quando o índice de qualidade,  $Q_U$ , for superior ou igual à constante de aceitação,  $k$ , ou seja, o critério de aceitação do lote é:

$$Q_U = \frac{U - \bar{X}}{S} \geq k, \quad (3.27)$$

onde  $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$  é um estimador não enviesado para  $\sigma^2$ .

Assim sendo, para que se possa decidir pela aceitação do lote, a média amostral tem que satisfazer a condição:

$$\bar{X} + kS \leq U \quad (3.28)$$

A probabilidade de aceitação do lote é então dada por

$$P_{ac}(\omega) = P(\text{Ac. lote}|\omega) = P(Q_U \geq k) = P\left(\frac{U - \bar{X}}{S} \geq k\right) = P(\bar{X} \leq U - kS). \quad (3.29)$$

Sabendo que

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cap N(0,1), \quad (3.30)$$

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \cap \chi_{n-1}^2, \quad (3.31)$$

$$\text{e que } T_\lambda = \frac{Z + \lambda}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}} \cap t_{n-1}(\lambda), \quad (3.32)$$

onde  $t_{n-1}(\lambda)$ , é uma distribuição  $t$  não central de parâmetro de não centralidade  $\lambda$ , e considerando

$$\lambda = \frac{\mu - U}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\Phi^{-1}(\omega) = \sqrt{n}z_{\omega} \quad (3.33)$$

então (3.29) toma o seguinte aspecto

$$P_{ac}(\omega) = P\left(Z + \lambda \leq -\frac{kS}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(\frac{Z + \lambda}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}} \leq -\frac{kS\sqrt{n}}{\frac{\sigma}{\sqrt{(n-1)S^2}}}\right) = P(T_{\lambda} \leq -k\sqrt{n}). \quad (3.34)$$

Com base em (3.34) e resolvendo o sistema de equações (2.1), obtém-se a definição do plano de Amostragem de Aceitação, dado em (3.35).

$$\begin{aligned} P(Q_U \geq k | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha &\Leftrightarrow \begin{cases} F_{t_{n-1}(\lambda_0)}(-k\sqrt{n}) = 1 - \alpha \\ F_{t_{n-1}(\lambda_1)}(-k\sqrt{n}) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{\sqrt{n}} F_{t_{n-1}(\lambda_0)}^{-1}(1 - \alpha) \\ n : \frac{F_{t_{n-1}(\lambda_2)}^{-1}(\beta)}{F_{t_{n-1}(\lambda_0)}^{-1}(1 - \alpha)} = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde cada  $\mu_i$  ( $i=0, 1$ ) está associado a uma fracção não conforme,  $AQL$  e  $LTPD$  respectivamente, ficando  $\lambda_0 = \sqrt{n}z_{AQL}$  e  $\lambda_1 = \sqrt{n}z_{LTPD}$ .

### 3.3.2. Limite Inferior de Especificação

Fixando o limite inferior de especificação,  $L$ , o procedimento é análogo ao apresentado para o limite superior de especificação.

Decide-se pela aceitação do lote quando o índice de qualidade,  $Q_L$ , for superior ou igual à constante de aceitação,  $k$ , ou seja,

$$Q_L = \frac{\bar{X} - L}{S} \geq k. \quad (3.37)$$

---

<sup>(3)</sup> A fracção não conforme,  $\omega$ , é dada por  $\omega = P(X > U) \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{U - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \omega \Leftrightarrow \mu = U + \sigma z_{\omega}$

Uma vez mais, para que se possa decidir pela aceitação do lote, a média amostral tem que satisfazer a condição:

$$\bar{X} - kS \geq L. \quad (3.38)$$

Considerando os resultados dados em (3.16), (3.30), (3.31) e (3.32), fazendo

$$\lambda = \frac{\mu - L}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -\Phi^{-1}(\omega)\sqrt{n} = -z_{\omega}\sqrt{n}, \quad (3.39)$$

a probabilidade de aceitação do lote é então dada por

$$P_{ac}(\omega) = P(Q_L \geq k) = 1 - P(T_{\lambda} < k\sqrt{n}), \quad (3.40)$$

$$\text{onde } T_{\lambda} = \frac{Z + \lambda}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}} \cap t_{n-1}(\lambda). \quad (3.41)$$

Resolvendo o sistema de equações (2.1), obtém-se a definição do plano de Amostragem de Aceitação, dado em (3.42).

$$\begin{cases} P(Q_L \geq k | \mu = \mu_0) = 1 - \alpha \\ P(Q_L \geq k | \mu = \mu_1) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{t_{n-1}(\lambda_0)}(k\sqrt{n}) = 1 - \alpha \\ F_{t_{n-1}(\lambda_1)}(k\sqrt{n}) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{\sqrt{n}} F_{t_{n-1}(\lambda_0)}^{-1}(\alpha) \\ n : \frac{F_{t_{n-1}(\lambda_1)}^{-1}(1 - \beta)}{F_{t_{n-1}(\lambda_0)}^{-1}(\alpha)} = 1 \end{cases} \quad (3.42)$$

onde cada  $\mu_i$  ( $i=0, 1$ ) está associado a uma fracção não conforme, *AQL* e *LTPD* respectivamente, ficando  $\lambda_0 = -\sqrt{n}z_{AQL}$  e  $\lambda_1 = -\sqrt{n}z_{LTPD}$ . (3.43)

Comparando os resultados aqui obtidos com os obtidos para a situação de ser fixado o limite superior de especificação pode ver-se que o parâmetro de não centralidade da distribuição *t* não central é simétrico entre as duas situações. Relativamente aos quantis da distribuição *t* não central,

no caso do limite superior tem-se os quantis de probabilidade  $1-\alpha$  e  $\beta$ , e para o caso do limite inferior tem-se os quantis de probabilidade  $\alpha$  e  $1-\beta$ .

### 3.3.3. Limites de especificação simultâneos

Fixando os dois limites de especificação, inferior,  $L$ , e superior,  $U$ , ficar-se-á perante uma situação análoga à já apresentada no subcapítulo 3.2.3.

O critério de aceitação do lote é dado por

$$Q_L = \frac{\bar{X} - L}{S} \geq K_L \wedge Q_U = \frac{U - \bar{X}}{S} \geq K_U \quad (3.44)$$

e consequentemente, a probabilidade de aceitação do lote é

$$P_{ac}(\omega) = P(\text{Ac. lote}|\omega) = P(Q_L \geq k_L \wedge Q_U \geq k_U) = P\left(\frac{\bar{X} - L}{S} \geq k_L \wedge \frac{U - \bar{X}}{S} \geq k_U\right), \quad (3.45)$$

pelo que a probabilidade de rejeição do lote, sob  $H_0$ , é

$$\alpha = P(\text{Rej. lote}|H_0) = P\left(\frac{\bar{X} - L}{S} < k_L | H_0\right) + P\left(\frac{U - \bar{X}}{S} < k_U | H_0\right), \quad (3.46)$$

sendo  $\alpha_1 = P\left(\frac{\bar{X} - L}{S} < k_L | H_0\right)$  e  $\alpha_2 = P\left(\frac{U - \bar{X}}{S} < k_U | H_0\right)$ .

Com base em (3.24) e (3.46) e, desenvolvendo em separado cada uma das probabilidades relativas aos limites inferior e superior, respectivamente, tal como apresentado em (3.35) e (3.42), obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} k_L = \frac{1}{\sqrt{n_L}} F_{t_{n_L-1}(\lambda_{L_0})}^{-1}(\alpha_1) \\ n_L : \frac{F_{t_{n_L-1}(\lambda_{L_1})}^{-1}(1-\beta_1)}{F_{t_{n_L-1}(\lambda_{L_0})}^{-1}(\alpha_1)} = 1 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} k_U = -\frac{1}{\sqrt{n_U}} F_{t_{n_U-1}(\lambda_{U_0})}^{-1}(1-\alpha_2) \\ n_U : \frac{F_{t_{n_U-1}(\lambda_{U_1})}^{-1}(\beta_2)}{F_{t_{n_U-1}(\lambda_{U_0})}^{-1}(1-\alpha_2)} = 1 \end{array} \right. , \quad (3.47)$$

onde  $\lambda_{L_0} = -\sqrt{n_L} z_{AQL_1}$ ,  $\lambda_{L_1} = -\sqrt{n_L} z_{LTPD_1}$ ,  $\lambda_{U_0} = \sqrt{n_U} z_{AQL_2}$  e  $\lambda_{U_1} = \sqrt{n_U} z_{LTPD_2}$ .

Para definir o plano de Amostragem de Aceitação, consideram-se os valores  $k_L$ ,  $k_U$  e  $n = \max\{n_L, n_U\}$ , de forma a satisfazer as condições relativas ao limite inferior e limite superior.

Uma vez mais, ao considerar-se  $n$ , o valor de  $k$  relativo ao outro limite deve ser recalculado.

Passando agora ao caso particular, isto é, considerar-se intervalos equilibrados pelo que

$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \frac{\beta}{2}$ ,  $AQL_1 = AQL_2 = \frac{AQL}{2}$  e  $LTPD_1 = LTPD_2 = \frac{LTPD}{2}$ . Sendo as

igualdades relativas a  $AQL$  e a  $LTPD$  consequência da alteração sofrida em (3.18) e

consequentemente em (3.19), ou seja  $\omega_L = \omega_U = \frac{\omega}{2}$ , e em consequência  $\hat{\omega}_L = \hat{\omega}_U = \frac{\hat{\omega}}{2}$ .

Utilizando-se um raciocínio análogo apresentado em (3.47), obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} k_L = \frac{1}{\sqrt{n_L}} F_{t_{n_L-1}(\lambda_{L_0})}^{-1} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \\ F_{t_{n_L-1}(\lambda_{L_1})}^{-1} \left( 1 - \frac{\beta}{2} \right) \\ n_L : \frac{F_{t_{n_L-1}(\lambda_{L_1})}^{-1} \left( 1 - \frac{\beta}{2} \right)}{F_{t_{n_L-1}(\lambda_{L_0})}^{-1} \left( \frac{\alpha}{2} \right)} = 1 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} k_U = -\frac{1}{\sqrt{n_U}} F_{t_{n_U-1}(\lambda_{U_0})}^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \\ F_{t_{n_U-1}(\lambda_{U_1})}^{-1} \left( \frac{\beta}{2} \right) \\ n_U : \frac{F_{t_{n_U-1}(\lambda_{U_1})}^{-1} \left( \frac{\beta}{2} \right)}{F_{t_{n_U-1}(\lambda_{U_0})}^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)} = 1 \end{array} \right. , \quad (3.48)$$

onde  $\lambda_{L_0} = -\sqrt{n_L} z_{\frac{AQL}{2}}$ ,  $\lambda_{L_1} = -\sqrt{n_L} z_{\frac{LTPD}{2}}$ ,  $\lambda_{U_0} = \sqrt{n_U} z_{\frac{AQL}{2}}$  e  $\lambda_{U_1} = \sqrt{n_U} z_{\frac{LTPD}{2}}$ . Considerando que

$n = \max\{n_L, n_U\}$ , de forma a satisfazer as duas condições, os parâmetros de não centralidade da

distribuição t não central ficam simétricos, pelo que recalculando, os sistemas (3.48) podem ser

reescritos da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_L = \frac{1}{\sqrt{n_L}} F_{t_{n_L-1}(\lambda_{L_0})}^{-1} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \\ F_{t_{n_L-1}(\lambda_{L_1})}^{-1} \left( 1 - \frac{\beta}{2} \right) \\ n_L : \frac{F_{t_{n_L-1}(\lambda_{L_1})}^{-1} \left( 1 - \frac{\beta}{2} \right)}{F_{t_{n_L-1}(\lambda_{L_0})}^{-1} \left( \frac{\alpha}{2} \right)} = 1 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} k_U = -\frac{1}{\sqrt{n_U}} F_{t_{n_U-1}(-\lambda_{L_0})}^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \\ F_{t_{n_U-1}(-\lambda_{L_1})}^{-1} \left( \frac{\beta}{2} \right) \\ n_U : \frac{F_{t_{n_U-1}(-\lambda_{L_1})}^{-1} \left( \frac{\beta}{2} \right)}{F_{t_{n_U-1}(-\lambda_{L_0})}^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)} = 1 \end{array} \right. . \quad (3.49)$$

Uma vez que a distribuição t não central, não é simétrica em torno de zero, não se obtém um plano

de amostragem tão simples como no caso de  $\sigma$  conhecido, em que a distribuição subjacente é

simétrica em torno de zero. Por este facto, para definir o plano de Amostragem de Aceitação os

valores a considerar são valores  $k_L$ ,  $k_U$  e  $n$ . Uma vez mais, ao considerar-se  $n$ , o  $k$  relativo ao outro limite deve ser recalculado.

Deve referir-se que nos capítulos seguintes não irá ser feita referência, sistemática, ao facto de  $n$  ter de ser inteiro, pelo que na prática as igualdades do sistema (2.1) passam a ser desigualdades do tipo  $\leq$  e  $\geq$ , respectivamente, uma vez que apesar de omissa ele é considerado.

### 3.4. Amostragem de Aceitação para variáveis com distribuição Gaussiana Inversa: breve referência

Os planos de Amostragem de Aceitação para o caso em que a característica de qualidade em estudo segue uma distribuição Gaussiana Inversa (GI) – também conhecida como distribuição de Wald – já foram tratados por Aminzadeh (1996), Das *et al.* (2002) e Casquilho *et al.* (2006). Motivo pelo qual, neste subcapítulo se irá apresentar somente uma breve descrição da construção destes planos de amostragem, focando-se os resultados mais relevantes obtidos pelos autores.

Seja então  $X$  a característica de qualidade de interesse. Diz-se que  $X \cap GI(\mu, \lambda)$  se e só se a sua *f.d.p.* for dada pela expressão

$$f_x(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\lambda}{2x} \left(\frac{x-\mu}{\mu}\right)^2}, \quad x > 0, \mu > 0, \lambda > 0, \quad (3.50)$$

e a sua função distribuição dada por

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{x}} \left(\frac{x}{\mu} - 1\right)\right) + e^{\frac{2\lambda}{\mu}} \Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{x}} \left(\frac{x}{\mu} + 1\right)\right), \quad (3.51)$$

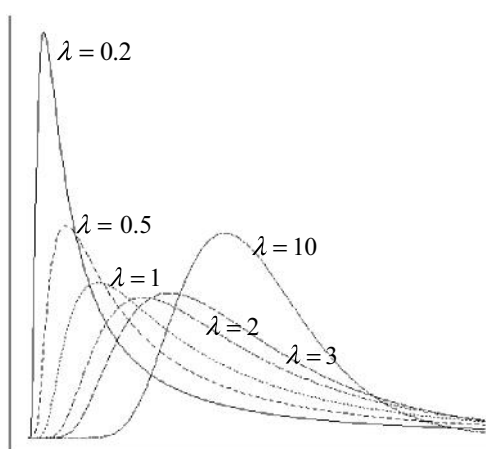
onde  $\mu$  representa o parâmetro de localização e  $\lambda$  o parâmetro de forma.

Segundo Aminzadeh (1996), a segunda parcela de (3.51) pode ser desprezada face ao pequeno valor de  $\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{x}} \left(\frac{x}{\mu} + 1\right)\right)$ , para valores de  $x$  consideravelmente inferiores a  $\mu$  e para valores de

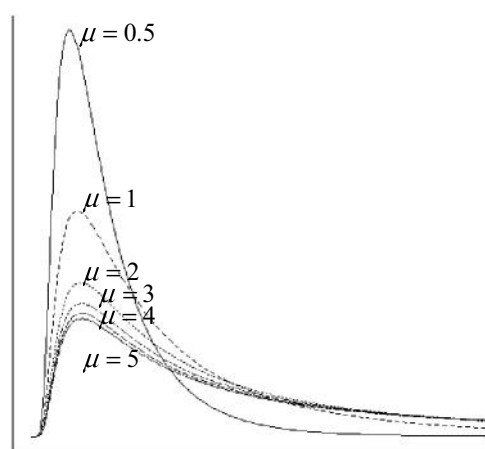
$\frac{\lambda}{x}$  suficientemente grandes, nomeadamente superiores a 10. Resultado que vai ser utilizado posteriormente.

A distribuição Gaussiana Inversa é muito utilizada em estudos sobre o tempo de permanência de um traçador num sistema biológico e duração de equipamentos (Folks e Chhikara (1978)).

É agora de todo o interesse ver de que forma a variação dos parâmetros afecta as características da distribuição e a forma da *f.d.p.*. Os gráficos das figuras 3.2 e 3.3, ilustram o efeito da variação dos parâmetros nas características e na forma da *f.d.p.*. Da sua análise verifica-se que fixando  $\mu$  e aumento o valor de  $\lambda$ , é notória a diminuição do desvio padrão e da assimetria positiva da distribuição, aumentando o peso da cauda direita, excepto quando  $\lambda$  é muito maior que  $\mu$ . Fixando  $\lambda$  e aumentando  $\mu$  ocorre um aumento do desvio padrão e da assimetria positiva da distribuição, apresentando cauda direita mais pesada.



**Figura 3.2:** Efeito na *f.d.p.* dos valores do parâmetro de forma,  $\lambda$ , mantendo  $\mu$  constante (=1)



**Figura 3.3:** Efeito na *f.d.p.* dos valores do parâmetro de localização,  $\mu$ , mantendo  $\lambda$  constante (=1)

A média e a variância da distribuição Gaussiana Inversa, são dados respectivamente por:

- $\mu = \mu$  ;
- $\sigma^2 = \frac{\mu^3}{\lambda}$

Para a definição dos planos de Amostragem de Aceitação baseados no limite superior de especificação,  $U$ , baseados no limite inferior de especificação,  $L$ , e baseados em limites de especificação simultâneos, considera-se que as alterações da qualidade no processo de produção, são devidas à variação do parâmetro de localização,  $\mu$  (e não pelas alterações no parâmetro de forma,  $\lambda$ ). À semelhança das situações anteriormente apresentadas para o caso Gaussiano, também aqui se considera duas situações,  $\lambda$  conhecido e  $\lambda$  desconhecido.

Tendo por base o trabalho de Casquilho et. al (2006), irá ser feita referência à situação de  $\lambda$  desconhecido, fixando-se o limite inferior de especificação.

Considere-se então, que  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) são v.a.'s *i.i.d.*, com distribuição Gaussiana Inversa.

Pretende-se então definir, para este caso os planos de amostragem baseados no limite inferior de especificação,  $L$ , em que a fracção não conforme,  $\omega$ , é dada por

$$\omega = P(X < L) = F_X(L) \approx \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{L}}\left(\frac{L}{\mu} - 1\right)\right) \quad (3.52)$$

pelo que, para que  $\omega$  seja pequeno é necessário que  $\mu$  seja o maior possível. Assim o que se pretende é testar  $H_0: \mu \geq \mu_0$  v.s.  $H_1: \mu < \mu_0$ . Uma estimativa para  $\omega$  é dada por

$$\hat{\omega} = P(X < L) = F_X(L) \approx \Phi\left(\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{L}}\left(\frac{L}{\hat{\mu}} - 1\right)\right), \quad (3.53)$$

onde  $\hat{\mu} = \bar{X}$ , estimador de máxima verosimilhança de  $\mu$ , tal que, segundo Tweedie (1967)

$\bar{X} \cap GI(\mu, n\lambda)$ , e  $\hat{\lambda} = \frac{n}{V}$  estimador de máxima verosimilhança de  $\lambda$ , com  $V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{X_i} - \frac{1}{\bar{X}}\right)$ .

Tweedie (1957) provou também que que  $W = \lambda V \cap \chi_{n-1}^2$  e que  $\bar{X}$  e  $V$  são v.a. independentes.

Folksne e Chhikara (1978) referem que  $R^2 = \frac{V}{n-1}$  é um estimador centrado com variância

uniformemente mínima (UMVUE) de  $\frac{1}{\lambda}$ . A este respeito ainda, Aminzadeh (1996) com base em

estudos de simulação e testes de ajustamento afirma que:

$$T = \bar{X}(1 - kR\sqrt{L}) \cap GI(\mu(1 - k\sqrt{L}), n\lambda(1 - k\sqrt{L})). \quad (3.54)$$

O critério de aceitação do lote, é uma vez mais  $Q_L \geq k$ , tal que

$$Q_L = \frac{\bar{X} - L}{\bar{X} R \sqrt{L}} \quad (5), \quad (3.55)$$

---

<sup>(4)</sup> Para valores de  $L$  consideravelmente menores que  $\mu$  e para valores  $\frac{\lambda}{\mu}$  suficientemente grandes, a segunda parcela

de  $F_X(x)$  pode ser desprezada, segundo Aminzadeh (1996).

<sup>(5)</sup> Índice de qualidade proposto por Aminzadeh (1996).

Pelo que a probabilidade de aceitação do lote é

$$P_{ac}(\omega) = P(\text{Ac. lote}|\omega) = P(Q_L \geq k) \approx 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{n\lambda \left(1 - k\sqrt{\frac{L}{\lambda}}\right)}{L}} \left( \frac{L}{\mu \left(1 - k\sqrt{\frac{L}{\lambda}}\right)} - 1 \right) \right) \quad (6) \quad (3.56)$$

Com base em (3.56) e resolvendo o sistema (2.1), obtém-se a definição do plano de Amostragem de Aceitação, dado em (3.57).

$$\begin{cases} P(Q_L \geq k|\mu_0) = 1 - \alpha \\ P(Q_L \geq k|\mu_1) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(T \geq L|\mu = \mu_0) = 1 - \alpha \\ P(T \geq L|\mu = \mu_1) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi \left( \sqrt{\frac{n\lambda_0 \left(1 - k\sqrt{\frac{L}{\lambda}}\right)}{L}} \left( \frac{L}{\mu_0 \left(1 - k\sqrt{\frac{L}{\lambda}}\right)} - 1 \right) \right) = \alpha \\ \Phi \left( \sqrt{\frac{n\lambda_1 \left(1 - k\sqrt{\frac{L}{\lambda}}\right)}{L}} \left( \frac{L}{\mu_1 \left(1 - k\sqrt{\frac{L}{\lambda}}\right)} - 1 \right) \right) = 1 - \beta \end{cases} ,$$

com cada  $\mu_i$  ( $i=0, 1$ ) associado a uma fracção não conforme e dados por

$$\begin{cases} P(X < L|\mu = \mu_0) = AQL \\ P(X < L|\mu = \mu_1) = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_0 = L \left( 1 + \sqrt{\frac{L}{\lambda}} z_{AQL} \right)^{-1} \\ \mu_1 = L \left( 1 + \sqrt{\frac{L}{\lambda}} z_{LTPD} \right)^{-1} . \end{cases}$$

Procedendo-se às substituições e simplificações e considerando as condições já referidas anteriormente, obtém-se a definição do plano de amostragem, ou seja, os valores de  $n$  e  $k$ , dados por

---

<sup>(6)</sup> Considerando (3.56) e (3.54) e o facto de a segunda parcela da função distribuição da Gaussiana Inversa ser desprezável.

$$\begin{cases} k = \frac{z_\alpha z_{LTPD} - z_{1-\beta} z_{AQL}}{z_{1-\beta} - z_\alpha} \\ n = \left( \frac{z_{1-\beta} - z_\alpha}{z_{LTPD} - z_{AQL}} \right)^2 \end{cases} \quad (3.57)$$

Finalmente, a probabilidade de aceitação do lote para a gama de fracções não conformes, é dada por

$$P_{ac}(\omega) = P(\text{Ac. lote} | \omega) = P(Q_L \geq k) \approx 1 - \Phi(\sqrt{n}(k + z_\omega)).$$

A abordagem utilizada por Casquilho *et. al.* (2006) para a comparação dos planos de amostragem específicos da Gaussiana Inversa e os planos de amostragem clássicos, os da Gaussiana, foi idêntica à utilizada neste trabalho. Foram considerados fixos os valores de  $n$ ,  $AQL$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  e o sistema (2.1) resolvido em ordem a  $k$  e  $LTPD$ . Os resultados obtidos mostram as diferenças entre os dois planos e evidenciam os perigos de decisão errada quanto à aceitação ou rejeição do lote, podendo ocorrer prejuízo quer do produtor, quer do consumidor. No entanto, não é feita qualquer referência à influência do valor dos parâmetros nos resultados. Verifica-se, contudo, que à medida que a dimensão das amostras aumenta, diminuem as discrepâncias entre o caso específico e o clássico, como se esperava.



## Capítulo 4.

# Amostragem de Aceitação para Variáveis Exponenciais

### 4.1. Introdução

A distribuição Exponencial é uma das distribuições contínuas mais importantes e é muito utilizada no estudo de filas de espera e de fiabilidade de sistemas complexos.

A distribuição Exponencial tem uma larga aplicação em Engenharia. É usada em situações em que se pode identificar um processo de Poisson, isto é, de ocorrência de eventos, a uma taxa constante, num intervalo de tempo ou numa região do espaço. Esta distribuição é utilizada, em particular para representar o tempo e espaço entre eventos independentes. Por exemplo, o tempo entre chegada de clientes a um estabelecimento, o tempo entre chegadas de encomendas a um armazém ou o intervalo de tempo decorrido entre o instante em que uma peça é sujeita a um esforço mecânico e o instante em que ocorre uma falha – por exemplo a quebra da peça.

Considera-se agora, então, o caso em que a característica de qualidade é uma variável com distribuição Exponencial, ou seja,  $X \cap Exp(\delta)$ . A sua *f.d.p.* é dada por

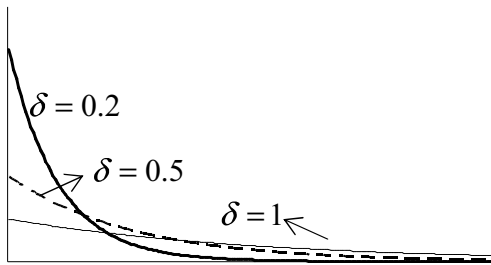
$$f_x(x) = \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x}{\delta}}, x \geq 0, \delta > 0 \quad (4.1)$$

e a sua função distribuição por

$$F_x(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\delta}}, x \geq 0, \delta > 0, \quad (4.2)$$

em que  $\delta$  é a taxa média do processo, que reflecte, em média, quantos eventos ocorrem numa unidade de tempo. Sendo o valor esperado e variância da distribuição dados, respectivamente, por  $E[X] = \mu = \delta$  e  $V[X] = \sigma^2 = \delta^2$ .

É de todo o interesse ver de que forma a variação do parâmetro  $\delta$  afecta as características da distribuição e a forma da *f.d.p.*. A figura 4.1, ilustra a influência do parâmetro na forma da *f.d.p.*, e da sua análise pode verificar-se que à medida que o valor do parâmetro  $\delta$  aumenta a curva da *f.d.p.* vai ficando mais achatada e com a cauda direita mais pesada.



**Figura 4.1:** Efeito na *f.d.p.* dos valores do parâmetro  $\delta$

Como o parâmetro  $\delta$  é desconhecido, irá utilizar-se o seu estimador de máxima verosimilhança  $\hat{\delta} = \bar{X}$ .

À semelhança do caso clássico, o que se pretende saber é se o valor da média amostral,  $\bar{X}$ , para a característica de interesse conduz a uma fracção não conforme baixa, levando a aceitar o lote, ou se, pelo contrário, a fracção não conforme é alta, levando a rejeitar o lote. Para tal, é necessário determinar a distribuição da variável aleatória  $\bar{X}$ .

Sejam então,  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) v.a.'s *i.i.d.*, tais que é  $X_i \cap \text{Exp}(\delta)$ . Uma vez que  $\frac{X_i}{\delta} \cap \text{Exp}(1)$ ,

sabendo que  $\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{\delta} = \frac{n\bar{X}}{\delta} \cap \text{Gama}(n,1)$  e considerando  $Y = \frac{2n\bar{X}}{\delta}$ , esta v.a. segue uma

distribuição Gama de parâmetros  $n$  e 2. Sabe-se também que uma distribuição  $\text{Gama}(n,2)$  é uma distribuição  $\chi_{2n}^2$ , pelo que se tem

$$Y = \frac{2n\bar{X}}{\delta} \cap \chi_{2n}^2, \text{ variável fulcral para } \delta \tag{4.3}$$

Quanto às propriedades do estimador de  $\delta$   $\bar{X}$ , de (4.3) tira-se que  $E[\bar{X}] = \delta$  e  $V[\bar{X}] = \frac{\delta^2}{n}$ .

Concluindo-se portanto, que  $\hat{\delta}$  é um estimador centrado de  $\delta$  e com variância assintótica nula, o que significa que  $\bar{X}$  é um estimador fracamente consistente de  $\delta$ .

Estando-se a trabalhar com variáveis Exponenciais, assume-se portanto, que as alterações da qualidade no processo de produção, são devidas à variação do parâmetro  $\delta$ .

À semelhança dos planos de amostragem anteriormente abordados, o objectivo é determinar os valores da dimensão da amostra,  $n$ , e da constante de aceitação,  $k$ , que satisfaçam as condições relativas aos riscos assumidos pelo produtor e pelo consumidor. Vai considerar-se, portanto, os dois pontos de interesse da curva  $OC$ ,  $(AQL, 1-\alpha)$  e  $(LTPD, \beta)$ , que irão auxiliar no cálculo de  $n$  e  $k$ . Na prática, a dimensão da amostra terá de ser aproximado pelo valor inteiro que satisfaça as condições indicadas em (2.1).

## 4.2. Limite Superior de Especificação

Começando por fixar o limite superior de especificação, a fracção não conforme,  $\omega$ , é dada por

$$\omega = P(X > U) = e^{-\frac{U}{\delta}}, \quad (4.4)$$

pelo que, para que  $\omega$  seja pequeno,  $\delta$  tem de ser o mais pequeno possível. Desta forma, o que se pretende é testar  $H_0: \delta \leq \delta_0$  v.s.  $H_1: \delta > \delta_0$ . Uma estimativa de  $\omega$  é  $\hat{\omega} = P(X > U) = e^{-\frac{U}{\hat{\delta}}} = e^{-\frac{U}{\bar{X}}}$ . (4.5)

Neste caso, o índice de qualidade natural é  $Q_U = \frac{U}{\hat{\delta}} = \frac{U}{\bar{X}}$  e o plano de amostragem a definir aceitará o lote se se verificar

$$Q_U = \frac{U}{\bar{X}} \geq k. \quad (4.6)$$

Esta condição de  $Q_U$  suficientemente grande é aquela que a média amostral deve satisfazer para que se possa aceitar o lote, isto é, pretende-se que o lote seja aceite para valores da média amostral suficientemente pequenos (em relação ao limite de especificação), tal como atrás referido.

Para definir um plano de amostragem, como nas situações anteriores, determinam-se os valores da dimensão da amostra,  $n$ , e da constante de aceitação,  $k$ , que satisfaçam as condições relativas aos riscos do produtor e do consumidor. Assim, para o caso de variáveis com distribuição Exponencial, a dimensão da amostra,  $n$ , e a constante de aceitação,  $k$ , resultam da resolução de (4.7).

$$\begin{cases} P(Q_U \geq k | \delta_0) = 1 - \alpha \\ P(Q_U \geq k | \delta_1) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(Q_U = \frac{U}{\bar{X}} \geq k | \delta = \delta_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(Q_U = \frac{U}{\bar{X}} \geq k | \delta = \delta_1\right) = \beta \end{cases}, \quad (4.7)$$

com cada  $\delta_i$  ( $i=0, 1$ ) associado a uma fracção não conforme:

$$\begin{cases} P(X > U | \delta = \delta_0) = AQL \\ P(X > U | \delta = \delta_1) = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-\frac{U}{\delta_0}} = AQL \\ e^{-\frac{U}{\delta_1}} = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_0 = -\frac{U}{\ln(AQL)} \\ \delta_1 = -\frac{U}{\ln(LTPD)} \end{cases}. \quad (4.8)$$

Com base no resultado (4.3) e atendendo a (4.8), o sistema (4.7) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} P\left(Y \leq \frac{2nU}{k\delta} | \delta = \delta_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(Y \leq \frac{2nU}{k\delta} | \delta = \delta_1\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{\chi_{2n}^2}\left(-\frac{2n \ln(AQL)}{k}\right) = 1 - \alpha \\ F_{\chi_{2n}^2}\left(-\frac{2n \ln(LTPD)}{k}\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{2n \ln(AQL)}{\chi_{2n;1-\alpha}^2} \\ n : \frac{\chi_{2n;\beta}^2 \ln(AQL)}{\chi_{2n;1-\alpha}^2 \ln(LTPD)} = 1 \end{cases}. \quad (4.9)$$

onde  $\chi_{2n;p}^2$  representa o quantil da distribuição  $\chi^2$  com  $2n$  graus de liberdade e de probabilidade  $p$ .

Da resolução de (4.9), obtêm-se, como se disse, os valores de  $n$  e  $k$ , ficando assim definido o plano de Amostragem de Aceitação para variáveis Exponenciais, fixado o limite superior de especificação.

### 4.3. Limite Inferior de Especificação

Fixando-se agora o limite inferior de especificação, o processo é análogo ao anterior, sendo a fracção não conforme,  $\omega$ , dada por

$$\omega = P(X < L) = 1 - e^{-\frac{L}{\delta}}, \quad (4.10)$$

pelo que para que  $\omega$  seja pequeno é necessário que  $\delta$  seja o maior possível, pretendendo-se portanto, testar  $H_0: \delta \geq \delta_0$  v.s.  $H_1: \delta < \delta_0$ . Uma estimativa para  $\omega$  é

$$\hat{\omega} = P(X < L) = 1 - e^{-\frac{L}{\hat{\delta}}} = 1 - e^{-\frac{L}{\bar{X}}}. \quad (4.11)$$

O índice de qualidade proposto é então  $Q'_L = \frac{L}{\bar{X}}$  ou  $Q_L = \frac{\bar{X}}{L}$  e o plano de amostragem a definir, aceitará o lote se se verificar

$$Q'_L = \frac{L}{\bar{X}} \leq k \Leftrightarrow Q_L = \frac{\bar{X}}{L} \geq \frac{1}{k}. \quad (4.12)$$

A definição do plano de Amostragem de Aceitação, passa pela resolução do sistema (4.13), com cada  $\delta_i$  ( $i=0, 1$ ) associado a uma fracção não conforme<sup>(7)</sup>,  $AQL$  e  $LTPD$ , respectivamente e considerando o resultado (4.3).

$$\begin{cases} P\left(Q_L \geq \frac{1}{k} \mid \delta = \delta_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(Q_L \geq \frac{1}{k} \mid \delta = \delta_1\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{2n \ln(1 - AQL)}{\chi_{2n;\alpha}^2} \\ n : \frac{\chi_{2n;1-\beta}^2 \ln(1 - AQL)}{\chi_{2n;\alpha}^2 \ln(1 - LTPD)} = 1 \end{cases}. \quad (4.13)$$

---

<sup>(7)</sup>  $\begin{cases} P(X < L \mid \delta_0) = AQL \\ P(X < L \mid \delta_1) = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_0 = -\frac{L}{\ln(1 - AQL)} \\ \delta_1 = -\frac{L}{\ln(1 - LTPD)} \end{cases}$

Da resolução do sistema (4.13) obtêm-se os valores de  $n$  e  $k$  que definem o plano de Amostragem no caso de a característica de interesse ser Exponencial e fixado o limite inferior de especificação.

#### 4.4. Limites de especificação simultâneos

Fixando agora os dois limites de especificação, inferior e superior, a fracção não conforme, tal como no caso Gaussiano, é dada pela soma das expressões (4.3) e (4.9), ou seja,

$$\omega = P(X \leq L) + P(X \geq U) = \omega_L + \omega_U, \quad (4.14)$$

cuja estimativa é

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}_L + \hat{\omega}_U, \quad (4.15)$$

sendo  $\hat{\omega}_U$  a estimativa da expressão (4.5) e  $\hat{\omega}_L$  a estimativa obtida com base em (4.11).

Uma vez mais, para que  $\omega$  seja pequeno,  $\delta$  tem de obedecer às duas condições já expostas anteriormente, pelo que o que se pretende é testar  $H_0: \delta = \delta_0$  v.s.  $H_1: \delta \neq \delta_0$ , com  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ .

O plano de amostragem aceitará o lote se  $Q_L \geq \frac{1}{k_L} \wedge Q_U \geq k_U$  e rejeitá-lo-á se  $Q_L < \frac{1}{k_L} \vee Q_U < k_U$ .

Desta forma, a probabilidade de rejeitar o lote, sob  $H_0$  é:

$$P(\text{Rej. lote} | H_0) = P\left(Q_L < \frac{1}{k_L} | H_0\right) + P(Q_U < k_U | H_0) = \alpha, \quad (4.16)$$

sendo  $\alpha_1 = P\left(Q_L < \frac{1}{k_L} | H_0\right)$  e  $\alpha_2 = P(Q_U < k_U | H_0)$ .

Considerando (3.24), resolvendo em separado as duas probabilidades e utilizando um raciocínio análogo ao caso de limites de especificação simples, obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} k_L = -\frac{2n_L \ln(1 - AQL_1)}{\chi^2_{2n_L; \alpha_1}} \\ n_L : \frac{\chi^2_{2n_L; 1-\beta_1} \ln(1 - AQL_1)}{\chi^2_{2n_L; \alpha_1} \ln(1 - LTPD_1)} = 1 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} k_U = -\frac{2n_U \ln(AQL_2)}{\chi^2_{2n_U; 1-\alpha_2}} \\ n_U : \frac{\chi^2_{2n_U; \beta_2} \ln(AQL_2)}{\chi^2_{2n_U; 1-\alpha_2} \ln(LTPD_2)} = 1 \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Para definir o plano de Amostragem de Aceitação, consideram-se os valores  $k_L$ ,  $k_U$  e  $n = \max\{n_L, n_U\}$ , de forma a satisfazer as condições relativas ao limite inferior e limite superior.

Uma vez mais, ao considerar-se  $n$ , o valor de  $k$  relativo ao outro limite deve ser recalculado.

Passando agora ao caso particular, isto é, considerar-se intervalos equilibrados e considerando as condições já expostas anteriormente, obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} k_L = -\frac{2n_L \ln\left(1 - \frac{AQL}{2}\right)}{\chi^2_{2n_L; \frac{\alpha}{2}}} \\ n_L : \frac{\chi^2_{2n_L; 1-\frac{\beta}{2}} \ln\left(1 - \frac{AQL}{2}\right)}{\chi^2_{2n_L; \frac{\alpha}{2}} \ln\left(1 - \frac{LTPD}{2}\right)} = 1 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} k_U = -\frac{2n_U \ln\left(\frac{AQL}{2}\right)}{\chi^2_{2n_U; 1-\frac{\alpha}{2}}} \\ n_U : \frac{\chi^2_{2n_U; \frac{\beta}{2}} \ln\left(\frac{AQL}{2}\right)}{\chi^2_{2n_U; 1-\frac{\alpha}{2}} \ln\left(\frac{LTPD}{2}\right)} = 1 \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Para o plano de Amostragem de Aceitação, consideram-se os valores  $k_L$ ,  $k_U$  e  $n = \max\{n_L, n_U\}$ , de forma a satisfazer as condições relativas ao limite inferior e limite superior. Uma vez mais, ao considerar-se  $n$ , o valor de  $k$  relativo ao outro limite deve ser recalculado.



## Capítulo 5.

# Amostragem de Aceitação para Variáveis *Gama*

### 5.1. Introdução

Considere-se que a característica de qualidade em estudo,  $X$ , num processo de produção, tem *f.d.p.*

$$f_X(x) = \frac{1}{\delta^\theta \Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-\frac{x}{\delta}}, \quad x > 0, \theta > 0, \delta > 0, \quad (5.1)$$

onde  $\delta$  corresponde ao parâmetro de escala e  $\theta$  ao parâmetro de forma, pelo que se diz que

$X \cap Gama(\theta, \delta)$ . De referir que  $\Gamma(k)$  é a função gama e é definida por  $\Gamma(k) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{k-1} dx$ .

Quanto à função distribuição,  $F_X(x)$ , se  $\theta$  não for um número inteiro, não existe nenhuma função expressa por um número finito de funções elementares cuja derivada seja a função densidade de probabilidade *Gama*. Contudo, se  $\theta$  for um número inteiro positivo, prova-se que a função distribuição é

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\delta^\theta \Gamma(\theta)} t^{\theta-1} e^{-\frac{t}{\delta}} dt = 1 - e^{-\frac{x}{\delta}} \sum_{i=0}^{\theta-1} \left(\frac{x}{\delta}\right)^i \frac{1}{i!}, \quad x > 0, \delta > 0, \quad (5.2)$$

e é conhecida como distribuição de *Erlang*.

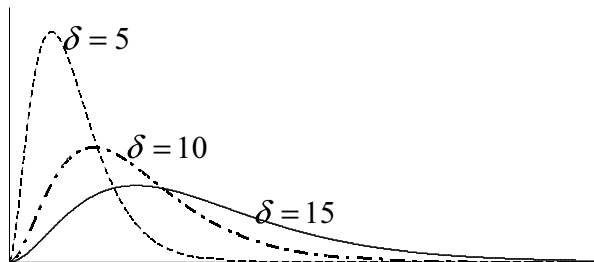
No entanto, neste trabalho irá utilizar-se o caso geral, ou seja

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\delta^\theta \Gamma(\theta)} t^{\theta-1} e^{-\frac{t}{\delta}} dt, \quad x > 0, \theta > 0, \delta > 0. \quad (5.3)$$

As distribuições Exponencial e Qui-Quadrado são casos particulares da distribuição *Gama*, em que: i) se  $\theta = 1$ , então tem-se uma distribuição  $Gama(\theta = 1, \delta) = Exp(\delta)$ ; ii) se  $\theta = \frac{\nu}{2}$  (com  $\nu$  inteiro positivo) e  $\delta = 2$ , então tem-se  $Gama\left(\theta = \frac{\nu}{2}, \delta = 2\right) = \chi_\nu^2$ .

A distribuição *Gama*, tal como a Exponencial, é muito utilizada no estudo de filas de espera e de fiabilidade de sistemas complexos. É também usada para representar a duração de uma tarefa, de um equipamento, entre outros.

À semelhança do que foi feito para as distribuições anteriores, também para a distribuição *Gama* é de todo o interesse ver de que forma a variação dos parâmetros afectam as características da distribuição e a forma da *f.d.p.* As figuras 5.1 e 5.2, ilustram a influência dos dois parâmetros na forma da *f.d.p.* e da sua análise pode verificar-se que à medida que o valor do parâmetro de escala,  $\delta$ , aumenta a curva da *f.d.p.* vai ficando mais achatada e com a cauda direita mais pesada. Quanto à influência do parâmetro de forma, pode ver-se que à medida que  $\theta$  aumenta a curva da *f.d.p.* da distribuição *Gama* aproxima-se da curva da distribuição Gaussiana.



**Figura 5.1:** Efeito na f.d.p. dos valores do parâmetro de escala,  $\delta$ , mantendo  $\theta$  constante



**Figura 5.2:** Efeito na f.d.p. dos valores do parâmetro de forma,  $\theta$ , mantendo  $\delta$  constante

A média e a variância da distribuição *Gama*, são dadas respectivamente por:

- $\mu = \theta\delta$ ;
- $\sigma^2 = \theta\delta^2$ .

Para a definição dos planos de Amostragem de Aceitação baseados no limite superior de especificação,  $U$ , baseados no limite inferior de especificação,  $L$ , e baseados em limites de especificação simultâneos, vai considerar-se que as alterações de qualidade no processo de

produção se devem à variação no parâmetro de escala,  $\delta$  (e não a alterações no parâmetro de forma,  $\theta$ ). Vai considerar-se também, duas situações:  $\theta$  conhecido e  $\theta$  desconhecido. Considere-se ainda que que  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) são v.a.'s *i.i.d.*, com distribuição *Gama*.

## 5.2. $\theta$ conhecido

### 5.2.1. Limite Superior de Especificação

À semelhança do que foi feito anteriormente, vai começar por se fixar o limite superior de especificação,  $U$ , sendo neste caso a fracção não conforme dada por

$$\omega = P(X > U) = 1 - F_X(x) = 1 - \int_0^U \frac{1}{\delta^\theta \Gamma(\theta)} t^{\theta-1} e^{-\frac{t}{\delta}} dt, \quad (5.4)$$

pelo que, para que  $\omega$  seja pequeno é necessário que  $\delta$  seja o menor possível. Assim, o que se pretende é testar  $H_0: \delta \leq \delta_0$  v.s.  $H_1: \delta > \delta_0$ . Uma estimativa para  $\omega$  é dada por

$$\hat{\omega} = 1 - \hat{F}_X(x) = 1 - \int_0^U \frac{1}{\hat{\delta}^\theta \Gamma(\theta)} t^{\theta-1} e^{-\frac{t}{\hat{\delta}}} dt. \quad (5.5)$$

O índice de qualidade proposto para este caso é  $Q_U = \frac{U}{\hat{\delta}}$ , sendo  $\hat{\delta}$  o estimador de máxima verosimilhança de  $\delta$ , tal que  $\hat{\delta} = \frac{\bar{X}}{\theta}$ .

Seja  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) uma amostra aleatória de uma população *Gama*( $\theta, \delta$ ), com  $\theta$  conhecido, então  $\sum_{i=1}^n X_i \cap \text{Gama}(n\theta, \delta)$ . Sendo  $\hat{\delta} = \frac{\bar{X}}{\theta}$  então  $n\theta\hat{\delta} = \sum_{i=1}^n X_i \cap \text{Gama}(n\theta, \delta)$ . Assim sendo, a v.a. fulcral para  $\delta$  é

$$Y = \frac{2n\theta\hat{\delta}}{\delta} \cap \chi_{2n\theta}^2. \quad (5.6)$$

Quanto às propriedades do estimador, de (5.6) tira-se que  $E[\hat{\delta}] = \frac{E[\bar{X}]}{\theta} = \frac{E[X]}{\theta} = \frac{\theta\delta}{\theta} = \delta$  e

$V[\hat{\delta}] = V\left[\frac{\bar{X}}{\theta}\right] = \frac{V[X]}{n\theta^2} = \frac{\delta^2}{n\theta}$ . Daqui se conclui que  $\hat{\delta}$  é um estimador centrado de  $\delta$  e com

variância assintótica nula, o que significa que  $\hat{\delta}$  é um estimador fracamente consistente de  $\delta$ .

O plano de amostragem a definir, aceitará o lote se se verificar a condição  $Q_U = \frac{U}{\hat{\delta}} \geq k$ . (5.7)

Para definir um plano de amostragem, tal como nas situações anteriores, determinam-se os valores da dimensão da amostra,  $n$ , e da constante de aceitação,  $k$ , que satisfaçam as condições relativas aos riscos do produtor e do consumidor:

$$\begin{cases} P(Q_U \geq k | \delta = \delta_0) = 1 - \alpha \\ P(Q_U \geq k | \delta = \delta_1) = \beta \end{cases}, \quad (5.8)$$

com cada  $\delta_i$  ( $i=0, 1$ ) associado a uma fracção não conforme:

$$\begin{cases} P(X > U | \delta = \delta_0) = AQL \\ P(X > U | \delta = \delta_1) = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_0 = \frac{U}{F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1 - AQL)} \\ \delta_1 = \frac{U}{F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1 - LTPD)} \end{cases}. \quad (5.9)$$

Com base em (5.6) e (5.9), o sistema (5.8) pode se reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} P\left(Y \leq \frac{2n\theta U}{\delta k} | \delta = \delta_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(Y \leq \frac{2n\theta U}{\delta k} | \delta = \delta_1\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(Y \leq \frac{2n\theta U}{k \frac{U}{F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1 - AQL)}}\right) = 1 - \alpha \\ P\left(Y \leq \frac{2n\theta U}{k \frac{U}{F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1 - LTPD)}}\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2n\theta F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1 - AQL)}{k} = \chi_{2n\theta; 1-\alpha}^2 \\ \frac{2n\theta F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1 - LTPD)}{k} = \chi_{2n\theta; \beta}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2n\theta F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1 - AQL)}{\chi_{2n\theta; 1-\alpha}^2} \\ n : \frac{\chi_{2n\theta; \beta}^2 F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1 - AQL)}{\chi_{2n\theta; 1-\alpha}^2 F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1 - LTPD)} = 1 \end{cases}. \quad (5.10)$$

### 5.2.2. Limite Inferior de Especificação

Fixando agora o limite inferior de especificação,  $L$ , a fracção não conforme é dada por

$$\omega = P(X < L) = F_X(x) = \int_0^L \frac{1}{\delta^\theta \Gamma(\theta)} t^{\theta-1} e^{-\frac{t}{\delta}} dt, \quad (5.11)$$

pelo que, para que  $\omega$  seja pequeno é necessário que  $\delta$  seja o maior possível. Assim, o que se pretende é testar  $H_0: \delta \geq \delta_0$  v.s.  $H_1: \delta < \delta_0$ . Uma estimativa para  $\omega$  é dada por

$$\hat{\omega} = \hat{F}_X(x) = \int_0^L \frac{1}{\hat{\delta}^\theta \Gamma(\theta)} t^{\theta-1} e^{-\frac{t}{\hat{\delta}}} dt. \quad (5.12)$$

O plano de amostragem a definir, aceitará o lote se se verificar  $Q'_L = \frac{L}{\hat{\delta}} \leq k \Leftrightarrow Q_L = \frac{\hat{\delta}}{L} \geq \frac{1}{k}$ . (5.13)

Para o cálculo dos valores da dimensão da amostra,  $n$ , e da constante de aceitação,  $k$ , ter-se-á que considerar, uma vez mais o sistema (2.1), onde se tem em consideração as condições relativas aos riscos do produtor e do consumidor:

$$\begin{cases} P\left(Q_L \geq \frac{1}{k} \mid \delta = \delta_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(Q_L \geq \frac{1}{k} \mid \delta = \delta_1\right) = \beta \end{cases}, \quad (5.14)$$

com cada  $\delta_i$  ( $i=0, 1$ ) associado a uma fracção não conforme,

$$\begin{cases} P(X < L \mid \delta = \delta_0) = AQL \\ P(X < L \mid \delta = \delta_1) = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_0 = \frac{L}{F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(AQL)} \\ \delta_1 = \frac{L}{F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(LTPD)} \end{cases}. \quad (5.15)$$

Com base em (5.6) e (5.15), o sistema (5.14) pode se reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} P\left(Y \geq \frac{2n\theta L}{k\delta} \mid \delta = \delta_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(Y \geq \frac{2n\theta L}{k\delta} \mid \delta = \delta_1\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(Y \leq \frac{2n\theta L}{k \frac{L}{F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1-AQL)}}\right) = \alpha \\ P\left(Y \leq \frac{2n\theta L}{k \frac{L}{F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1-LTPD)}}\right) = 1 - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2n\theta F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(AQL)}{k} = \chi_{2n\theta;\alpha}^2 \\ \frac{2n\theta F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(LTPD)}{k} = \chi_{2n\theta;1-\beta}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2n\theta F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(AQL) \chi_{2n\theta;\alpha}^2}{\chi_{2n\theta;\alpha}^2} \\ n : \frac{\chi_{2n\theta;1-\beta}^2 F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(AQL)}{\chi_{2n\theta;\alpha}^2 F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(LTPD)} = 1 \end{cases} \quad (5.16)$$

A definição do plano de Amostragem de Aceitação para o caso em que a característica de interesse é uma variável com distribuição *Gama*, com  $\theta$  conhecido e fixado o limite inferior de especificação, passa pela resolução do sistema (5.16).

Comparando os resultados obtidos em (5.10) e (5.16), o que se destaca é que na primeira situação os valores de  $n$  e  $k$  são obtidos com base na cauda direita das distribuições Qui-quadrado e *Gama* e na segunda são obtidos com base na cauda esquerda das distribuições.

### 5.2.3. Limites de especificação simultâneos

Fixando agora os dois limites de especificação, inferior e superior, a fracção não conforme é dada pela soma das expressões (5.4) e (5.11), ou seja,

$$\omega = P(X \leq L) + P(X \geq U) = \omega_L + \omega_U, \quad (5.17)$$

cuja estimativa é

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}_L + \hat{\omega}_U, \quad (5.18)$$

sendo  $\hat{\omega}_L$  a estimativa da expressão (5.12) e  $\hat{\omega}_U$  a estimativa obtida com base em (5.5).

Uma vez mais, para que  $\omega$  seja pequeno,  $\delta$  tem de obedecer às condições já expostas anteriormente, pelo que o que se pretende é testar  $H_0: \delta = \delta_0$  v.s.  $H_1: \delta \neq \delta_0$ , com  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ .

O plano de amostragem aceitará o lote se  $Q_L \geq \frac{1}{k_L} \wedge Q_U \geq k_U$  e rejeitá-lo-á se  $Q_L < \frac{1}{k_L} \vee Q_U < k_U$ .

Desta forma, a probabilidade de rejeitar o lote, sob  $H_0$ , é

$$P(\text{Rej. lote}|H_0) = P\left(Q_L < \frac{1}{k_L} | H_0\right) + P(Q_U < k_U | H_0) = \alpha, \quad (5.19)$$

sendo  $\alpha_1 = P\left(Q_L < \frac{1}{k_L} | H_0\right)$  e  $\alpha_2 = P(Q_U < k_U | H_0)$ .

Considerando (5.6) e resolvendo em separado as duas probabilidades utilizando um raciocínio análogo ao caso de limites de especificação simples, obtém-se os resultados:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_L = \frac{2n\theta F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(AQL_1) \chi_{2n_L\theta;\alpha_1}^2}{\chi_{2n_L\theta;\alpha_1}^2} \\ n_L : \frac{\chi_{2n_L\theta;1-\beta_1}^2 F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(AQL_1)}{\chi_{2n_L\theta;\alpha_1}^2 F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(LTPD_1)} = 1 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} k_U = \frac{2n_U\theta F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1-AQL_2)}{\chi_{2n_U\theta;1-\alpha_2}^2} \\ n_U : \frac{\chi_{2n_U\theta;\beta_2}^2 F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1-AQL_2)}{\chi_{2n_U\theta;1-\alpha_2}^2 F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1-LTPD_2)} = 1 \end{array} \right. \quad (5.20)$$

Uma vez mais, para definir o plano de Amostragem de Aceitação, consideram-se os valores  $k_L, k_U$  e  $n = \max\{n_L, n_U\}$ , de forma a satisfazer as condições relativas ao limite inferior e limite superior.

Ao considerar-se  $n$ , o valor de  $k$  relativo ao outro limite deve ser recalculado.

Tal como para os casos anteriores, passando ao caso particular, isto é, considerar-se intervalos equilibrados e considerando as condições já expostas anteriormente, obtém-se o resultado (5.21).

$$\left\{ \begin{array}{l} k_L = \frac{2n_L\theta F_{Gama(\theta,1)}^{-1}\left(\frac{AQL}{2}\right) \chi_{2n_L\theta;\frac{\alpha}{2}}^2}{\chi_{2n_L\theta;\frac{\alpha}{2}}^2} \\ n_L : \frac{\chi_{2n_L\theta;1-\frac{\beta}{2}}^2 F_{Gama(\theta,1)}^{-1}\left(\frac{AQL}{2}\right)}{\chi_{2n_L\theta;\frac{\alpha}{2}}^2 F_{Gama(\theta,1)}^{-1}\left(\frac{LTPD}{2}\right)} = 1 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} k_U = \frac{2n_U\theta F_{Gama(\theta,1)}^{-1}\left(1-\frac{AQL}{2}\right)}{\chi_{2n_U\theta;1-\frac{\alpha}{2}}^2} \\ n_U : \frac{\chi_{2n_U\theta;\frac{\beta}{2}}^2 F_{Gama(\theta,1)}^{-1}\left(1-\frac{AQL}{2}\right)}{\chi_{2n_U\theta;1-\frac{\alpha}{2}}^2 F_{Gama(\theta,1)}^{-1}\left(1-\frac{LTPD}{2}\right)} = 1 \end{array} \right. \quad (5.21)$$

Uma vez mais, para o plano de Amostragem de Aceitação, consideram-se os valores  $k_L$ ,  $k_U$  e  $n = \max\{n_L, n_U\}$ , de forma a satisfazer as condições relativas ao limite inferior e limite superior. Ao considerar-se  $n$ , o valor de  $k$  relativo ao outro limite deve ser recalculado.

### 5.3. $\theta$ desconhecido

Considerando que o limite superior de especificação,  $U$ , é fixado, a fracção não conforme é dada por

$$\omega = P(X > U) = 1 - F_X(x) = 1 - \int_0^U \frac{1}{\delta^\theta \Gamma(\theta)} t^{\theta-1} e^{-\frac{t}{\delta}} dt, \quad (5.22)$$

pelo que, para que  $\omega$  seja pequeno é necessário que  $\delta$  seja o menor possível. Assim, o que se pretende é testar  $H_0: \delta \leq \delta_0$  v.s.  $H_1: \delta > \delta_0$ . Uma estimativa de  $\omega$  é

$$\hat{\omega} = 1 - \hat{F}_X(x) = 1 - \int_0^U \frac{1}{\hat{\delta}^{\hat{\theta}} \Gamma(\hat{\theta})} t^{\hat{\theta}-1} e^{-\frac{t}{\hat{\delta}}} dt, \quad (5.23)$$

onde  $\hat{\delta}$  e  $\hat{\theta}$  são os estimadores de máxima verosimilhança de  $\delta$  e  $\theta$ , soluções do sistema:

$$\begin{cases} \hat{\theta}: -n \ln(\hat{\delta}) - n \psi(\hat{\theta}) + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = 0 \\ \hat{\delta} = \frac{\bar{X}}{\hat{\theta}} \end{cases}, \text{ sendo } \psi(\theta) = \frac{\Gamma'(\theta)}{\Gamma(\theta)} \text{ a função digama de } \theta.$$

O índice de qualidade é igual ao definido anteriormente, pois não depende de  $\theta$ , ou seja  $Q_U = \frac{U}{\hat{\delta}}$

e o critério de aceitação do lote dado pela condição:

$$Q_U = \frac{U}{\hat{\delta}} \geq k. \quad (5.24)$$

Um vez que a distribuição exacta de  $Q_U$  é desconhecida analiticamente, para determinar os valores de  $n$  e  $k$ , que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} P(Q_U \geq k | \omega = AQL) = 1 - \alpha \\ P(Q_U \geq k | \omega = LTPD) = \beta \end{cases} \quad (5.25)$$

ter-se-á que recorrer a métodos de simulação. Sempre que possível e para as comparações propostas com o caso Gaussiano, utilizam-se os mesmos valores de  $n$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $AQL$  que constam das normas para a distribuição Gaussiana com  $\sigma$  desconhecido e resolve-se o sistema em ordem a  $k$  e  $LTPD$ . Com estes valores fixos e para várias combinações de  $\delta$  e  $\theta$ , é simulado em cada “run”,  $n$  valores aleatórios de uma distribuição *Gama*,  $X \cap Gama(\theta, \delta)$ , estimam-se os valores dos parâmetros e obtém-se uma observação da v.a.  $Q_U$ . Por fim, obtém-se uma amostra simulada, de dimensão 5000 para  $Q_U$  e, considerando a primeira equação do sistema (5.25), obtém-se o valor de  $k$  como um quantil da distribuição de  $Q_U$ . Obtido o valor de  $k$  e utilizando a segunda equação do sistema (5.25), obtém-se o valor de  $LTPD$ .

Para as situações em que se especifica o limite inferior e em que se especificam os dois limites, inferior e superior, o procedimento a utilizar é análogo ao descrito no parágrafo anterior, considerando as especificidades de cada situação.



## Capítulo 6.

# Amostragem de Aceitação para Variáveis de Valores Extremos

### 6.1. Introdução

A teoria dos valores extremos desempenha um papel fundamental na modelação de eventos associados a probabilidades muito pequenas ou eventos raros. Permite inferência do comportamento de eventos raros e extremos recorrendo ao Teorema de Limite Extremal (T.L.E.). Os fundamentos desta teoria foram desenvolvidos por Fisher-Tippett (1928), que definiram os três tipos possíveis de distribuições assintóticas de valores extremos, conhecidas como Gumbel (tipo I), Fréchet (tipo II) e Weibull (tipo III) (Gumbel, 1958), casos especiais da Distribuição Generalizada de Valores Extremos (GEV) desenvolvida por Jenkinson (1955), cuja função de distribuição de probabilidade acumulada, para o caso de máximos, é dada pela expressão,

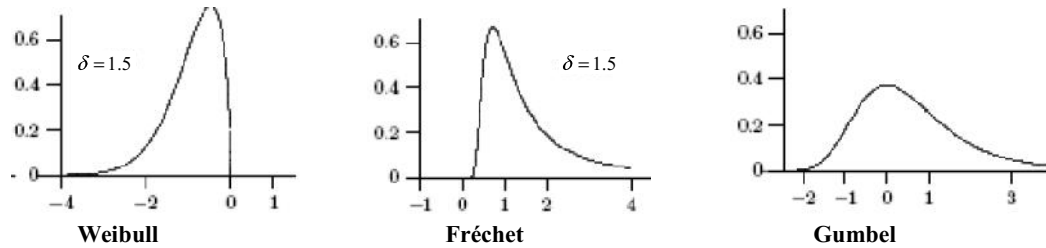
$$G_{\xi}(x) = \begin{cases} e^{-\left(1+\xi\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)\right)^{-\frac{1}{\xi}}}, & \xi \neq 0, \\ e^{-e^{-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)}}, & \xi = 0 \end{cases}$$

definida a primeira expressão em,  $-\infty < x < \lambda - \delta/\xi$ , para  $\xi < 0$  e  $\lambda - \delta/\xi < x < +\infty$ , para  $\xi > 0$ , sendo  $\lambda$ ,  $\delta$  e  $\xi$  os parâmetros de localização (posição), escala e de forma respectivamente, com  $\delta > 0$ .

A partir da distribuição GEV, obtém-se os três tipos de distribuições de Valores Extremos, Weibull, Fréchet e Gumbel, fazendo  $\xi = -\frac{1}{\delta}$ ,  $\xi = \frac{1}{\delta}$  e  $\xi = 0$ , respectivamente.

Os gráficos da figura 6.1, ilustram a função densidade de probabilidade da distribuição de Valores Extremos Generalizada, para vários valores de  $\xi$ . Como se pode ver, são distribuições claramente assimétricas.

As distribuições de Valores Extremos têm grande aplicação em Engenharia (estudos de resistência de materiais, fadiga de materiais, resistência à corrosão), Química, etc.



**Figura 6.1:** Função densidade de probabilidade da distribuição de Valores Extremos Generalizada, para vários valores de  $\xi$ , com  $\lambda=0$

Neste capítulo, vai começar-se por propor planos de Amostragem de Aceitação para variáveis Weibull, seguidos dos planos de Amostragem de Aceitação para variáveis Fréchet e por fim planos de Amostragem de Aceitação para variáveis Gumbel. Utilizar-se-á a distribuição Weibull de Mínimos, a distribuição Fréchet de Máximos e a distribuição Gumbel de Máximos.

## 6.2. Amostragem de Aceitação para Variáveis Weibull

### 6.2.1. Introdução

A distribuição Weibull é largamente utilizada no Controlo Estatístico de Qualidade, devido à sua versatilidade e relativa simplicidade, como por exemplo aplicada na análise de tempos de vida.

A distribuição Weibull de mínimos é matematicamente definida pela sua *f.d.p.*, cuja expressão geral é dada por:

$$f_x(x) = \frac{\theta}{\delta} \left( \frac{x-\lambda}{\delta} \right)^{\theta-1} e^{-\left( \frac{x-\lambda}{\delta} \right)^\theta}, \tag{6.1}$$

onde,  $x \geq \lambda$ ,  $\theta > 0$ ,  $\delta > 0$  e  $-\infty < \lambda < +\infty$ .  $\theta$  representa o parâmetro de forma,  $\delta$  representa o parâmetro de escala e  $\lambda$  representa o parâmetro de localização.

Tendo em consideração que em muitas aplicações o parâmetro de localização é nulo,  $\lambda=0$ , considera-se neste trabalho a Weibull biparamétrica com *f.d.p.*

$$f_X(x) = \frac{\theta}{\delta} \left(\frac{x}{\delta}\right)^{\theta-1} e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^\theta}, x > 0 \quad (6.2)$$

e função distribuição

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^\theta}, x > 0. \quad (6.3)$$

No entanto se se pretender trabalhar com a distribuição Weibull triparamétrica com  $\lambda \neq 0$ , mas conhecido, procede-se à transformação  $(X - \lambda)$  e todo o procedimento é igual ao que a seguir se descreve em 6.2.2. Caso  $\lambda \neq 0$ , mas desconhecido ter-se-á que proceder a métodos de simulação como se descreve em 6.2.3.

Considerando então a distribuição Weibull biparamétrica, como é que os parâmetros de forma,  $\theta$ , e escala,  $\delta$ , afectam as características da distribuição e a forma da *f.d.p.*?

Os diferentes valores do parâmetro de forma podem ter efeitos determinantes no comportamento da distribuição. De facto, alguns valores do parâmetro de forma dão origem à redução das equações da distribuição a outras distribuições. Por exemplo, quando  $\theta=1$ , a *f.d.p.* da Weibull biparamétrica reduz-se à *f.d.p.* da distribuição Exponencial (situação já tratada no capítulo 4).

As figura 6.2 e 6.3, respectivamente, mostram o efeito dos diferentes valores dos parâmetros de forma,  $\theta$ , e escala,  $\delta$ , na forma da curva da *f.d.p.*.

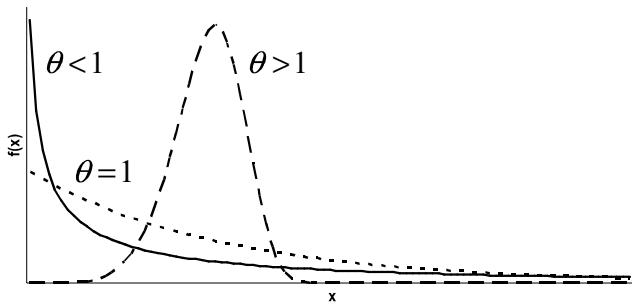
Da análise da figura 6.2, verifica-se que quando  $\theta$  aumenta, mantendo  $\delta$  constante, a distribuição apresenta caudas mais leves e assimetria menos acentuada. Quando  $\theta$  diminui, mantendo  $\delta$  constante, ocorre exactamente o inverso, ou seja, a curva da distribuição apresenta caudas mais pesadas e assimetria mais acentuada. Ainda relativamente ao parâmetro de forma, refira-se que quando  $\theta > 1$ ,  $f_X(x)$  assume várias formas:

- $f_X(x)=0$  para  $x=0$ ;
- $f_X(x)$  cresce no intervalo  $[0, \text{Moda}]$  e decresce de seguida;
- Para  $\theta=2$ , a distribuição Weibull reduz-se à distribuição Rayleigh;
- Para  $\theta < 2.6$ , a *f.d.p.* da distribuição Weibull é assimétrica positiva ou enviesada à esquerda (isto é, tem cauda direita);

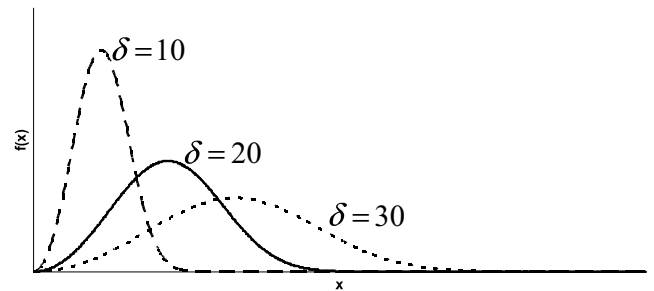
- Para  $2.6 < \theta < 3.7$ , o coeficiente da assimetria aproxima-se de zero, pelo que neste caso a distribuição Weibull, pode ser aproximada da distribuição Gaussiana;
- Para  $\theta > 3.7$ , a *f.d.p.* da distribuição Weibull é assimétrica negativa ou enviesada à direita (isto é, tem cauda esquerda).

Quanto ao parâmetro de escala,  $\delta$ , vem na mesma unidade de medida dos dados e provoca um deslocamento do “pico” da curva no eixo das abcissas e no eixo das ordenadas (uma vez que a área total abaixo da curva é 1). Assim, para  $\theta$  constante, tem-se:

- Se  $\delta$  aumenta, a curva é mais “achatada” (maior variabilidade) e o “pico” desloca-se para a direita;
- Se, pelo contrário,  $\delta$  diminui, o “pico” desloca-se para a esquerda e a curva é menos achatada (menor variabilidade).



**Figura 6.2:** Efeito na *f.d.p.* dos valores do parâmetro de forma,  $\theta$ , mantendo  $\delta$  constante



**Figura 6.3:** Efeito na *f.d.p.* dos valores do parâmetro de escala,  $\delta$ , mantendo  $\theta$  constante

Como características de interesse, para este trabalho, da distribuição Weibull, tem-se:

- Valor médio:  $\mu_x = \delta \Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right)$ ;
- Desvio padrão:  $\sigma_x = \delta \sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{\theta} + 1\right) - \left(\Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right)\right)^2}$ .

Para a definição dos planos de Amostragem de Aceitação baseados no limite superior de especificação,  $U$ , baseados no limite inferior de especificação,  $L$ , e baseados em limites de especificação simultâneos, vai considerar-se que as alterações de qualidade no processo de produção se devem à variação no parâmetro de escala,  $\delta$  (e não às alterações no parâmetro de forma,  $\theta$ ). Vai considerar-se também, duas situações:  $\theta$  conhecido e  $\theta$  desconhecido.

Considere-se ainda que  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) são v.a.'s. *i.i.d.*, com distribuição Weibull.

## 6.2.2. $\theta$ conhecido

### 6.2.2.1. Limite Superior de Especificação

Considerando então a situação em que a característica de interesse é uma v.a. com distribuição Weibull de parâmetros  $\delta$  e  $\theta$ , com  $\theta$  conhecido e que se pretende definir planos de amostragem baseados no limite superior de especificação, a fracção não conforme,  $\omega$ , é dada por:

$$\omega = P(X > U) = e^{-\left(\frac{U}{\delta}\right)^\theta}, \quad (6.4)$$

pelo que, para que  $\omega$  seja pequeno,  $\delta$  tem de ser o mais pequeno possível. Assim, o que se pretende é testar  $H_0: \delta \leq \delta_0$  v.s.  $H_1: \delta > \delta_0$ . Uma estimativa de  $\omega$  é  $\hat{\omega} = P(X > U) = e^{-\left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^\theta}$ . (6.5)

O índice de qualidade proposto para esta situação é  $Q_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^\theta$  sendo  $\hat{\delta}$ , o estimador de máxima verosimilhança para  $\delta$ , que é dado por:

$$\hat{\delta} = \left( \frac{\sum_{i=1}^n X_i^\theta}{n} \right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Tirando partido do facto de  $\left(\frac{X_i}{\delta}\right)^\theta$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) serem v.'s a.'s independentes com distribuição

Exponencial unitária, isto é, com função densidade de probabilidade  $e^{-x} I_{[0,+\infty)}(x)$ , conclui-se que:

$$Y = \frac{2n\hat{\delta}^\theta}{\delta^\theta} \cap \chi_{2n}^2, \text{ sendo } Y \text{ a v.a. fulcral para } \delta. \quad (6.6)$$

Analisando agora as propriedades do estimador de  $\delta$ , de (6.6) tira-se que o momento de ordem  $k$

$$\text{para } \hat{\delta} \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{)} \text{ é } E[\hat{\delta}^k] = \delta^k \frac{E\left[Y^{\frac{k}{\theta}}\right]}{(2n)^{\frac{k}{\theta}}} = \frac{\delta^k}{(2n)^{\frac{k}{\theta}}} \int_0^{+\infty} Y^{\frac{k}{\theta}} \left\{ \frac{Y^{n-1} e^{-\frac{Y}{2}}}{2^n \Gamma(n)} \right\} dY = \frac{\delta^k \Gamma\left(n + \frac{k}{\theta}\right)}{n^{\frac{k}{\theta}} \Gamma(n)},$$

pelo que  $\hat{\delta}$  não é um estimador centrado para  $\delta$ , a não ser quando  $\theta=1$  (caso exponencial, tratado no capítulo 4).

Considerando que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^b \Gamma(n+a)}{n^a \Gamma(n+b)} = 1$  (resultado 6.1.46, página 257 de Abramowitz e Stegun, 1964), tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[\hat{\delta}] = \delta \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V[\hat{\delta}] = \lim_{n \rightarrow +\infty} E[\hat{\delta}^2] - \delta^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta^2 \frac{\Gamma\left(n + \frac{2}{\theta}\right)}{n^{\frac{2}{\theta}} \Gamma(n)} - \delta^2 = \delta^2 \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma\left(n + \frac{2}{\theta}\right)}{n^{\frac{2}{\theta}} \Gamma(n)}}_{=1} - \delta^2 = 0.$$

Daqui se conclui que  $\hat{\delta}$  é um estimador assintoticamente centrado de  $\delta$  e com variância assintótica nula, o que significa que  $\hat{\delta}$  é um estimador fracamente consistente de  $\delta$ .

O plano de amostragem aceitará o lote, tal como no caso clássico, se se verificar

$$Q_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^\theta \geq k. \tag{6.7}$$

Para definir o plano de Amostragem de Aceitação, isto é, para se obter os valores de  $n$  e  $k$ , ter-se-á que proceder à resolução do sistema (2.1), ou seja

$$\begin{cases} P(Q_U \geq k | \delta = \delta_0) = 1 - \alpha \\ P(Q_U \geq k | \delta = \delta_1) = \beta \end{cases}, \tag{6.8}$$

com cada  $\delta_i$  ( $i=0, 1$ ) associado a uma fracção não conforme:

$$\begin{cases} P(X > U | \delta = \delta_0) = AQL \\ P(X > U | \delta = \delta_1) = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_0^\theta = -\frac{U^\theta}{\ln(AQL)} \\ \delta_1^\theta = -\frac{U^\theta}{\ln(LTPD)} \end{cases}. \tag{6.9}$$

Com base em (6.6) e (6.9), o sistema (6.8) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} P\left(Y \leq \frac{2nU^\theta}{k\delta^\theta} | \delta = \delta_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(Y \leq \frac{2nU^\theta}{k\delta^\theta} | \delta = \delta_1\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{\chi_{2n}^2}\left(-\frac{2n \ln(AQL)}{k}\right) = 1 - \alpha \\ F_{\chi_{2n}^2}\left(-\frac{2n \ln(LTPD)}{k}\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{2n \ln(AQL)}{\chi_{2n; 1-\alpha}^2} \\ n : \frac{\chi_{2n; \beta}^2 \ln(AQL)}{\chi_{2n; 1-\alpha}^2 \ln(LTPD)} = 1 \end{cases}. \tag{6.10}$$

A resolução do sistema (6.10) dá os valores de  $n$  e  $k$ , que definem o plano de Amostragem de Aceitação quando a característica de qualidade de interesse é uma v.a. com distribuição Weibull com  $\theta$  conhecido e fixado o limite superior de especificação.

De referir que, quando  $\theta=1$ , esta situação reduz-se ao caso Exponencial, já tratado no capítulo 4. Pode verificar-se também que os resultados obtidos em (6.10) são iguais aos obtidos para o caso Exponencial (4.9).

### 6.2.2.2. Limite Inferior de Especificação

Se se fixar o limite inferior de especificação, o processo é análogo ao anterior, sendo a fracção não conforme,  $\omega$ , dada por

$$\omega = P(X < L) = 1 - e^{-\left(\frac{L}{\delta}\right)^\theta}, \quad (6.11)$$

pelo que para que  $\omega$  seja pequeno é necessário que  $\delta$  seja o maior possível, pretendendo-se portanto, testar  $H_0: \delta \geq \delta_0$  v.s.  $H_1: \delta < \delta_0$ . Uma estimativa para  $\omega$  é  $\hat{\omega} = P(X < L) = 1 - e^{-\left(\frac{L}{\hat{\delta}}\right)^\theta}$ . (6.12)

O índice de qualidade proposto é  $Q'_L = \left(\frac{L}{\hat{\delta}}\right)^\theta$  ou  $Q_L = \left(\frac{\hat{\delta}}{L}\right)^\theta$  e o plano de amostragem a definir,

$$\text{aceitará o lote se se verificar } Q'_L = \left(\frac{L}{\hat{\delta}}\right)^\theta \leq k \Leftrightarrow Q_L = \left(\frac{\hat{\delta}}{L}\right)^\theta \geq \frac{1}{k}. \quad (6.13)$$

A definição do plano de Amostragem de Aceitação, passa pela resolução do sistema (6.14), onde cada  $\delta_i$  ( $i=0, 1$ ) está associado a uma fracção não conforme<sup>(8)</sup>,  $AQL$  e  $LTPD$ , respectivamente e considerando o resultado (6.6), obtém-se:

---


$$^{(8)} \begin{cases} P(X < L | \delta = \delta_0) = AQL \\ P(X < L | \delta = \delta_1) = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_0^\theta = -\frac{L^\theta}{\ln(1 - AQL)} \\ \delta_1^\theta = -\frac{L^\theta}{\ln(1 - LTPD)} \end{cases}$$


---

$$\begin{cases} P\left(Q_L \geq \frac{1}{k} \mid \delta = \delta_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(Q_L \geq \frac{1}{k} \mid \delta = \delta_1\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{2n \ln(1 - AQL)}{\chi_{2n;\alpha}^2} \\ n : \frac{\chi_{2n;1-\beta}^2 \ln(1 - AQL)}{\chi_{2n;\alpha}^2 \ln(1 - LTPD)} = 1 \end{cases} \quad (6.14)$$

Expectavelmente, o resultado (6.14) é igual ao resultado obtido para o caso Exponencial (4.13).

### 6.2.2.3. Limites de especificação simultâneos

Fixando agora os dois limites de especificação, inferior e superior, a fracção não conforme é análoga ao caso Exponencial e é dada pela soma das expressões (6.4) e (6.11), ou seja,

$$\omega = P(X \leq L) + P(X \geq U) = \omega_L + \omega_U, \quad (6.15)$$

cuja estimativa é

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}_L + \hat{\omega}_U, \quad (6.16)$$

sendo  $\hat{\omega}_L$  a estimativa dada pela expressão (6.12) e  $\hat{\omega}_U$  a estimativa dada em (6.5).

Neste caso, o que se pretende é testar  $H_0: \delta = \delta_0$  v.s.  $H_1: \delta \neq \delta_0$ , com  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ .

O plano de amostragem aceitará o lote se  $Q_L \geq \frac{1}{k_L} \wedge Q_U \geq k_U$  e rejeitá-lo-á se  $Q_L < \frac{1}{k_L} \vee Q_U < k_U$ .

Desta forma, a probabilidade de rejeitar o lote, sob  $H_0$ , é:

$$P(\text{Rej. lote} \mid H_0) = P\left(Q_L < \frac{1}{k_L} \mid H_0\right) + P(Q_U < k_U \mid H_0) = \alpha, \quad (6.17)$$

sendo  $\alpha_1 = P\left(Q_L < \frac{1}{k_L} \mid H_0\right)$  e  $\alpha_2 = P(Q_U < k_U \mid H_0)$ .

Considerando (3.24), resolvendo em separado as duas probabilidades e utilizando um raciocínio análogo ao caso de limites de especificação simples, obtém-se, uma vez mais, resultados iguais aos do caso Exponencial dados em (4.17):

$$\left\{ \begin{array}{l} k_L = -\frac{2n_L \ln(1 - AQL_1)}{\chi^2_{2n_L; \alpha_1}} \\ n_L : \frac{\chi^2_{2n_L; 1-\beta_1} \ln(1 - AQL_1)}{\chi^2_{2n_L; \alpha_1} \ln(1 - LTPD_1)} = 1 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} k_U = -\frac{2n_U \ln(AQL_2)}{\chi^2_{2n_U; 1-\alpha_2}} \\ n_U : \frac{\chi^2_{2n_U; \beta_2} \ln(AQL_2)}{\chi^2_{2n_U; 1-\alpha_2} \ln(LTPD_2)} = 1 \end{array} \right. \quad (6.18)$$

Para definir o plano de Amostragem de Aceitação, consideram-se os valores  $k_L$ ,  $k_U$  e  $n = \max\{n_L, n_U\}$ , de forma a satisfazer as condições relativas ao limite inferior e limite superior.

Ao considerar-se  $n$ , o valor de  $k$  relativo ao outro limite deve ser recalculado.

Passando agora ao caso particular, isto é, considerar-se intervalos equilibrados e considerando as condições já expostas anteriormente, obtém-se o resultado (6.19).

$$\left\{ \begin{array}{l} k_L = -\frac{2n_L \ln\left(1 - \frac{AQL}{2}\right)}{\chi^2_{2n_L; \frac{\alpha}{2}}} \\ n_L : \frac{\chi^2_{2n_L; 1-\frac{\beta}{2}} \ln\left(1 - \frac{AQL}{2}\right)}{\chi^2_{2n_L; \frac{\alpha}{2}} \ln\left(1 - \frac{LTPD}{2}\right)} = 1 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} k_U = -\frac{2n_U \ln\left(\frac{AQL}{2}\right)}{\chi^2_{2n_U; 1-\frac{\alpha}{2}}} \\ n_U : \frac{\chi^2_{2n_U; \frac{\beta}{2}} \ln\left(\frac{AQL}{2}\right)}{\chi^2_{2n_U; 1-\frac{\alpha}{2}} \ln\left(\frac{LTPD}{2}\right)} = 1 \end{array} \right. \quad (6.19)$$

Para o plano de Amostragem de Aceitação, consideram-se os valores  $k_L$ ,  $k_U$  e  $n = \max\{n_L, n_U\}$ , de forma a satisfazer as condições relativas ao limite inferior e limite superior. Uma vez mais, ao considerar-se  $n$ , o valor de  $k$  relativo ao outro limite deve ser recalculado.

### 6.2.3. $\theta$ desconhecido

Considerando que o limite superior de especificação,  $U$ , é fixado, nesta situação, a fracção não

$$\text{conforme é dada por } \omega = P(X > U) = e^{-\left(\frac{U}{\delta}\right)^\theta}, \quad (6.20)$$

pelo que, para que  $\omega$  seja pequeno,  $\delta$  tem de ser o mais pequeno possível. Assim, o que se

$$\text{pretende é testar } H_0: \delta \leq \delta_0 \text{ v.s. } H_1: \delta > \delta_0. \text{ Uma estimativa de } \omega \text{ é } \hat{\omega} = P(X > U) = e^{-\left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^\theta}. \quad (6.21)$$

O índice de qualidade é definido por  $Q_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{\hat{\theta}}$  e o critério de aceitação do lote dado pela condição:

$$Q_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{\hat{\theta}} \geq k, \quad (6.22)$$

onde  $\hat{\delta}$  e  $\hat{\theta}$  são os estimadores de máxima verosimilhança de  $\delta$  e  $\theta$ , soluções do sistema

$$\begin{cases} \hat{\delta} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\hat{\theta}} / n\right)^{1/\hat{\theta}} \\ \hat{\theta} : \frac{n}{\hat{\theta}} + \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\hat{\delta}}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\hat{\delta}}\right)^{\hat{\theta}} \ln\left(\frac{x_i}{\hat{\delta}}\right) = 0 \end{cases} .$$

Um vez que a distribuição exacta de  $Q$  é desconhecida analiticamente, para determinar os valores de  $n$  e  $k$ , que satisfazem o sistema (6.23)

$$\begin{cases} P(Q_U \geq k | \omega = AQL) = 1 - \alpha \\ P(Q_U \geq k | \omega = LTPD) = \beta \end{cases}, \quad (6.23)$$

ter-se-á que recorrer a métodos de simulação. Para as comparações propostas com o caso Gaussiano, resolve-se o sistema em ordem a  $k$  e  $LTPD$ , e utilizam-se os mesmos valores de  $n$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $AQL$  que constam das normas para a distribuição Gaussiana. Com estes valores fixos e para várias combinações de  $\delta$  e  $\theta$ , são simulados para cada “run”,  $n$  valores aleatórios de uma distribuição Weibull,  $X \cap Weibull(\theta, \delta)$ , estimam-se os valores dos parâmetros e obtém-se uma observação da v.a.  $Q_U$ . Por fim, obtém-se uma amostra simulada, de dimensão 5000, a partir de  $Q_U$  e, considerando a primeira equação do sistema (6.23), obtém-se o valor de  $k$  como um quantil da distribuição de  $Q_U$ . Obtido o valor de  $k$  e utilizando a segunda equação do sistema (6.23), obtém-se o valor de  $LTPD$ .

Para as situações em que se especifica o limite inferior e em que se especificam os dois limites, inferior e superior, o procedimento a utilizar é análogo ao descrito no parágrafo anterior, considerando as especificidades de cada situação.

Um outro processo a que se pode recorrer, para o caso de amostras de dimensão elevada, é utilizar o Método Delta para determinar a distribuição assintótica conjunta de  $Q_U$ , (Cohen (1965)).

Considere-se então o limite superior de especificação e o índice de qualidade  $Q_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^\theta$ , que é uma função de  $\hat{\delta}$  e  $\hat{\theta}$ , designando-se aqui por  $Q(\hat{\delta}, \hat{\theta})$ , da qual se desconhece a sua distribuição analiticamente. Assim sendo, considere-se o desenvolvimento em série de Taylor da função  $Q(\hat{\delta}, \hat{\theta})$  em torno de  $(\delta, \theta)$ :

$$Q(\hat{\delta}, \hat{\theta}) = Q(\delta, \theta) + (\hat{\delta} - \delta) \frac{\partial Q}{\partial \hat{\delta}} \Big|_{\hat{\delta}=\delta} + (\hat{\theta} - \theta) \frac{\partial Q}{\partial \hat{\theta}} \Big|_{\hat{\theta}=\theta} + \dots \Leftrightarrow$$

$$Q(\hat{\delta}, \hat{\theta}) = Q(\delta, \theta) + (\hat{\delta} - \delta) U^\theta (-\theta) \delta^{-\theta-1} + (\hat{\theta} - \theta) \left(\frac{U}{\delta}\right)^\theta \ln\left(\frac{U}{\delta}\right) + \dots$$

Determinando  $E[Q(\hat{\delta}, \hat{\theta})]$  e  $V[Q(\hat{\delta}, \hat{\theta})]$ , obtém-se:

$$E[Q(\hat{\delta}, \hat{\theta})] = E\left[\left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^\theta\right] \approx \left(\frac{U}{\delta}\right)^\theta = Q(\delta, \theta)$$

e

$$V[Q(\hat{\delta}, \hat{\theta})] = V\left[\left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^\theta\right] \approx V[\hat{\delta}](U^\theta (-\theta) \delta^{-\theta-1})^2 + V[\hat{\theta}]\left(\left(\frac{U}{\delta}\right)^\theta \ln^2\left(\frac{U}{\delta}\right)\right) + 2COV(\hat{\delta}, \hat{\theta})\left(U^\theta (-\theta) \delta^{-\theta-1} \left(\frac{U}{\delta}\right)^\theta \ln\left(\frac{U}{\delta}\right)\right), \quad (6.24)$$

onde  $V[\hat{\delta}]$ ,  $V[\hat{\theta}]$  e  $COV[\hat{\delta}, \hat{\theta}]$  são os valores da matriz de variâncias-covariâncias assintótica de  $(\hat{\delta}, \hat{\theta})$ , que é dada pela matriz inversa da matriz de informação:

$$\begin{bmatrix} V[\hat{\delta}] & COV(\hat{\delta}, \hat{\theta}) \\ COV(\hat{\delta}, \hat{\theta}) & V[\hat{\theta}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \delta^2} & -\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \delta \partial \theta} \\ -\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \theta \partial \delta} & -\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \theta^2} \end{bmatrix}_{\delta=\hat{\delta}, \theta=\hat{\theta}}^{-1}. \quad (6.25)$$

Sendo a função de verosimilhança ( $L$ ) logaritimizada dada por

$$\ln(L) = n \ln\left(\frac{\theta}{\delta}\right) + \sum_{i=1}^n (\theta - 1) \ln\left(\frac{x_i}{\delta}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\delta}\right)^{\theta},$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \delta^2} = -\frac{n\theta}{\delta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{\delta^2} \left(\frac{x_i}{\delta}\right)^{\theta} (\theta + 1) \\ -\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \delta \partial \theta} = -\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \theta \partial \delta} = \frac{n}{\delta} - \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{\delta} \left(\frac{x_i}{\delta}\right)^{\theta} \ln\left(\frac{x_i}{\delta}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta} \left(\frac{x_i}{\delta}\right)^{\theta} \\ -\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\delta}\right)^{\theta} \ln^2\left(\frac{x_i}{\delta}\right) \end{cases}$$

Finalmente, pode dizer-se que a distribuição assintótica de  $Q(\hat{\delta}, \hat{\theta})$  é

$$Q(\hat{\delta}, \hat{\theta}) = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{\hat{\theta}} \cap N\left(\left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{\hat{\theta}}, \sqrt{V\left[\left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{\hat{\theta}}\right]}\right).$$

Determinada a distribuição de  $Q(\hat{\delta}, \hat{\theta}) = Q_U$ , pode definir-se o plano de amostragem baseado em (6.23), obtendo-se

$$\begin{cases} k = z_{\alpha} \sqrt{V\left[\left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{\hat{\theta}}\right]} - \ln(AQL) \\ n : \ln\left(\frac{AQL}{LTPD}\right) = (z_{\alpha} - z_{1-\beta}) \sqrt{V\left[\left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{\hat{\theta}}\right]} \end{cases} \quad (6.26)$$

### 6.3. Amostragem de Aceitação para Variáveis Fréchet

#### 6.3.1. Introdução

Considere-se então que a característica de qualidade em estudo,  $X$ , num processo de produção, tem *f.d.p.*

$$f_x(x) = \frac{\theta}{\delta} \left( \frac{x-\lambda}{\delta} \right)^{-\theta-1} e^{-\left( \frac{x-\lambda}{\delta} \right)^{-\theta}}, \quad x > 0, \theta > 0, \delta > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (6.27)$$

sendo a função de distribuição traduzida pela expressão

$$F_x(x) = e^{-\left( \frac{x-\lambda}{\delta} \right)^{-\theta}}, \quad x > 0, \theta > 0, \delta > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \quad (6.28)$$

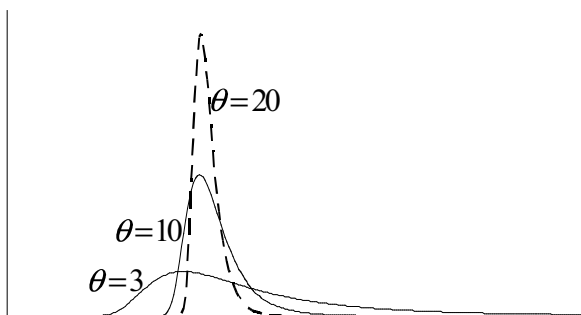
onde  $\theta$  representa o parâmetro de forma,  $\lambda$  representa o parâmetro de localização e  $\delta$  representa o parâmetro de escala. Trata-se portanto, da função distribuição de uma v.a. com distribuição Fréchet triparamétrica. No entanto, tal como foi considerado para o caso Weibull, vai considerar-se a distribuição Fréchet biparamétrica, considerando  $\lambda=0$ . Contudo, se se pretender trabalhar com a distribuição Fréchet triparamétrica com  $\lambda \neq 0$ , mas conhecido, procede-se à transformação  $(X - \lambda)$  e todo o procedimento é igual ao que a seguir se descreve em 6.3.2. Caso  $\lambda \neq 0$ , mas desconhecido ter-se-á que proceder a métodos de simulação como se descreve em 6.3.3.

Considerando então a Fréchet biparamétrica, as funções densidade de probabilidade e de distribuição dadas por (6.27) e (6.28), assumem agora o seguinte aspecto, respectivamente:

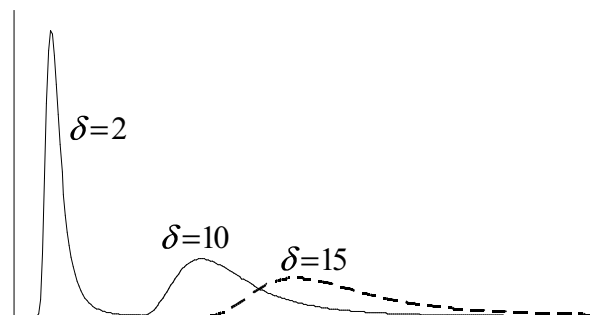
$$f_x(x) = \frac{\theta}{\delta} \left( \frac{x}{\delta} \right)^{-\theta-1} e^{-\left( \frac{x}{\delta} \right)^{-\theta}}, \quad x > 0, \theta > 0, \delta > 0, \quad (6.29)$$

$$F_x(x) = e^{-\left( \frac{x}{\delta} \right)^{-\theta}}, \quad x > 0, \theta > 0, \delta > 0. \quad (6.30)$$

Um aspecto importante a ter em consideração é, como é que os parâmetros de forma,  $\theta$ , e escala,  $\delta$ , afectam as características da distribuição e a forma da *f.d.p.* As figuras 6.4 e 6.5, ilustram a influência dos dois parâmetros na forma da *f.d.p.*



**Figura 6.4:** Efeito na *f.d.p.* dos valores do parâmetro de escala,  $\theta$ , mantendo  $\delta$  constante



**Figura 6.5:** Efeito na *f.d.p.* dos valores do parâmetro de escala,  $\delta$ , mantendo  $\theta$  constante

Da análise das figuras, pode verificar-se que à medida que o valor de  $\theta$  aumenta, o “pico” da curva da f.d.p. desloca-se no eixo das ordenadas em sentido positivo, apresentando a curva caudas mais leves. Relativamente ao parâmetro de escala,  $\delta$ , o “pico” da curva desloca-se no eixo das abcissas à medida que o seu valor aumenta. Quaisquer que sejam os valores dos parâmetros de escala e de forma, a curva da f.d.p. é sempre enviesada à esquerda.

Para este caso biparamétrico, situação mais frequente na prática, o valor médio e a variância da distribuição Fréchet, são dados, respectivamente, por:

$$\blacktriangleright \mu = \delta \Gamma\left(1 - \frac{1}{\theta}\right), \text{ apenas para } \theta > 1;$$

$$\blacktriangleright \sigma^2 = \delta^2 \left[ \Gamma\left(1 - \frac{2}{\theta}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \right], \text{ apenas para } \theta > 2.$$

À semelhança do caso Weibull, para a definição dos planos de Amostragem de Aceitação baseados no limite superior de especificação,  $U$ , baseados no limite inferior de especificação,  $L$ , e baseados em limites de especificação simultâneos, vai considerar-se que as alterações de qualidade no processo de produção se devem à variação no parâmetro de escala,  $\delta$  (e não às alterações no parâmetro de forma,  $\theta$ ). Vai considerar-se também, duas situações:  $\theta$  conhecido e  $\theta$  desconhecido.

Considere-se ainda que que  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) são v.a.'s *i.i.d.*, com distribuição Fréchet

### 6.3.2. $\theta$ conhecido

#### 6.3.2.1. Limite Superior de Especificação

Fixando o limite de especificação superior,  $U$ , a fracção não conforme,  $\omega$ , é dada por

$$\omega = P(X > U) = 1 - e^{-\left(\frac{U}{\delta}\right)^{-\theta}}, \quad (6.31)$$

pelo que, para que  $\omega$  seja pequena é necessário que  $\delta$  seja o menor possível. Assim, o que se pretende é testar  $H_0: \delta \leq \delta_0$  v.s.  $H_1: \delta > \delta_0$ . Uma estimativa para  $\omega$ , é dada por  $\hat{\omega} = 1 - e^{-\left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{-\theta}}$ . (6.32)

O índice de qualidade que se propõe é  $Q'_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{-\theta} \Leftrightarrow Q_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^\theta$ , sendo  $\hat{\delta}$  o estimador de máxima verosimilhança de  $\delta$ , tal que

$$\hat{\delta} = \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^{-\theta}} \right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

O plano de amostragem a definir, aceitará o lote se se verificar

$$Q'_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{-\theta} \leq k \Leftrightarrow Q_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^\theta \geq \frac{1}{k}. \quad (6.33)$$

Considere-se  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) uma amostra aleatória da população Fréchet( $\theta, \delta$ ), com  $\theta$  conhecido e, como  $\left(\frac{X_i}{\delta}\right)^{-\theta}$  ( $i=1, \dots, n$ ) são v.a.'s *i.i.d.*, com *f.d.p.*  $e^{-x} \times I_{[0;+\infty)}(x)$ , obtemos

$$Y = \frac{2n\hat{\delta}^{-\theta}}{\delta^{-\theta}} \cap \chi_{2n}^2, \text{ sendo } Y \text{ a v.a. fulcral para } \delta. \quad (6.34)$$

Verificando agora as propriedades do estimador de  $\delta$ , de (6.34) tira-se que o momento de ordem  $k$

$$\text{para } \hat{\delta} \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{) é } E[\hat{\delta}^k] = \delta^k \frac{E\left[Y^{-\frac{k}{\theta}}\right]}{(2n)^{-\frac{k}{\theta}}} = \frac{\delta^k}{(2n)^{-\frac{k}{\theta}}} \int_0^{+\infty} Y^{-\frac{k}{\theta}} \left\{ \frac{Y^{n-1} e^{-\frac{Y}{2}}}{2^n \Gamma(n)} \right\} dy = \frac{\delta^k \Gamma\left(n - \frac{k}{\theta}\right)}{n^{-\frac{k}{\theta}} \Gamma(n)}, \text{ pelo que } \hat{\delta}$$

não é um estimador centrado para  $\delta$ . Considerando, uma vez mais que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^b \Gamma(n+a)}{n^a \Gamma(n+b)} = 1$

(resultado 6.1.46, página 257 de Abramowitz e Stegun, 1964), tem-se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E[\hat{\delta}] = \delta$  e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V[\hat{\delta}] = \lim_{n \rightarrow +\infty} E[\hat{\delta}^2] - \delta^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta^2 \frac{\Gamma\left(n - \frac{2}{\theta}\right)}{n^{-\frac{2}{\theta}} \Gamma(n)} - \delta^2 = \delta^2 \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma\left(n - \frac{2}{\theta}\right)}{n^{-\frac{2}{\theta}} \Gamma(n)}}_{=1} - \delta^2 = 0. \text{ Daqui se conclui}$$

que  $\hat{\delta}$  é um estimador assintoticamente centrado de  $\delta$  e tem variância assintótica nula, o que significa que  $\hat{\delta}$  é um estimador fracamente consistente de  $\delta$ .

Para definir um plano de amostragem, tal como nas situações anteriores, determinam-se os valores da dimensão da amostra,  $n$ , e da constante de aceitação,  $k$ , que satisfaçam as condições relativas aos riscos do produtor e do consumidor. Desta forma,

$$\begin{cases} P(Q'_U \leq k | \delta = \delta_0) = 1 - \alpha \\ P(Q'_U \leq k | \delta = \delta_1) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(Q_U \geq \frac{1}{k} | \delta = \delta_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(Q_U \geq \frac{1}{k} | \delta = \delta_1\right) = \beta \end{cases}, \quad (6.35)$$

com cada  $\delta_i$  ( $i=0, 1$ ) associado a uma fracção não conforme, ou seja,

$$\begin{cases} P(X > U | \delta = \delta_0) = AQL \\ P(X > U | \delta = \delta_1) = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{U}{\delta_0}\right)^{-\theta}} = AQL \\ 1 - e^{-\left(\frac{U}{\delta_1}\right)^{-\theta}} = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_0 = \frac{U}{\left(-\ln(1 - AQL)\right)^{\frac{1}{\theta}}} \\ \delta_1 = \frac{U}{\left(-\ln(1 - LTPD)\right)^{\frac{1}{\theta}}} \end{cases}. \quad (6.36)$$

Tirando partido do resultado (6.34) e com base em (6.36), o sistema (6.35) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{cases} P\left(Q_U \geq \frac{1}{k} | \delta = \delta_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(Q_U \geq \frac{1}{k} | \delta = \delta_1\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(Y \geq -\frac{2n \ln(1 - AQL)}{k}\right) = 1 - \alpha \\ P\left(Y \geq -\frac{2n \ln(1 - LTPD)}{k}\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{\chi^2_{2n}}\left(-\frac{2n \ln(1 - AQL)}{k}\right) = \alpha \\ F_{\chi^2_{2n}}\left(-\frac{2n \ln(1 - LTPD)}{k}\right) = 1 - \beta \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{2n \ln(1 - AQL)}{\chi^2_{2n;\alpha}} \\ n : \frac{\chi^2_{2n;1-\beta} \ln(1 - AQL)}{\chi^2_{2n;\alpha} \ln(1 - LTPD)} = 1 \end{cases}. \quad (6.37)$$

### 6.3.2.2. Limite Inferior de Especificação

Fixando agora o limite inferior de especificação, a fracção não conforme,  $\omega$ , é dada por

$$\omega = P(X < L) = e^{-\left(\frac{L}{\delta}\right)^{-\theta}}, \quad (6.38)$$

pelo que, para que  $\omega$  seja pequena é necessário que  $\delta$  seja o maior possível. Assim, o que se pretende é testar  $H_0: \delta \geq \delta_0$  v.s.  $H_1: \delta < \delta_0$ . Uma estimativa para  $\omega$ , é dada por  $\hat{\omega} = e^{-\left(\frac{L}{\delta}\right)^{-\theta}}$ . (6.39)

O índice de qualidade que se propõe é, logicamente,  $Q_L = \left(\frac{L}{\hat{\delta}}\right)^{-\theta}$  e o plano de amostragem a definir, aceitará o lote se se verificar  $Q_L = \left(\frac{L}{\hat{\delta}}\right)^{-\theta} \geq k$ . (6.40)

Tal como anteriormente, para definir um plano de amostragem, determinam-se os valores da dimensão da amostra,  $n$ , e da constante de aceitação,  $k$ , que satisfaçam as condições relativas aos riscos do produtor e do consumidor, pelo que,

$$\begin{cases} P(Q_L \geq k | \delta = \delta_0) = 1 - \alpha \\ P(Q_L \geq k | \delta = \delta_1) = \beta \end{cases}, \quad (6.41)$$

com cada  $\delta_i$  ( $i=0, 1$ ) associado a uma fracção não conforme, ou seja,

$$\begin{cases} P(X < L | \delta = \delta_0) = AQL \\ P(X < L | \delta = \delta_1) = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-\left(\frac{L}{\delta_0}\right)^{-\theta}} = AQL \\ e^{-\left(\frac{L}{\delta_1}\right)^{-\theta}} = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_0 = \frac{L}{(-\ln(AQL))^{-\frac{1}{\theta}}} \\ \delta_1 = \frac{L}{(-\ln(LTPD))^{-\frac{1}{\theta}}} \end{cases}. \quad (6.42)$$

Considerando o resultado (6.36) e com base em (6.42), o sistema (6.41) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{cases} P(Q_L \geq k | \delta = \delta_0) = 1 - \alpha \\ P(Q_L \geq k | \delta = \delta_1) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(Y \leq -\frac{2n \ln(AQL)}{k}\right) = 1 - \alpha \\ P\left(Y \leq -\frac{2n \ln(LTPD)}{k}\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{\chi^2_{2n}}\left(-\frac{2n \ln(AQL)}{k}\right) = 1 - \alpha \\ F_{\chi^2_{2n}}\left(-\frac{2n \ln(LTPD)}{k}\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{2n \ln(AQL)}{\chi^2_{2n; 1-\alpha}} \\ n : \frac{\chi^2_{2n; \beta} \ln(AQL)}{\chi^2_{2n; 1-\alpha} \ln(LTPD)} = 1 \end{cases}. \quad (6.43)$$

A solução do sistema (6.43) dá a definição do plano de Amostragem de Aceitação para o caso em que a característica de interesse é uma variável Fréchet com  $\theta$  conhecido e fixado o limite inferior de especificação.

### 6.3.2.3. Obtenção do plano de Amostragem de Aceitação para o caso Fréchet a partir da Weibull

Poder-se-ia obter os resultados para a distribuição Fréchet a partir da distribuição Weibull,

considerando que  $X \cap Fréchet(\theta, \delta) \Rightarrow Y = \frac{1}{X} \cap Weibull\left(\theta, \frac{1}{\delta}\right)$ .

Assim sendo e considerando o limite de especificação superior da Weibull,  $U_W$ ,

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(Y > U_W | \delta = \delta_0) = AQL \\ P(Y > U_W | \delta = \delta_1) = LTPD \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} P\left(\frac{1}{X} < U_W | \delta = \delta_0\right) = 1 - AQL \\ P\left(\frac{1}{X} < U_W | \delta = \delta_1\right) = 1 - LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(X < \underbrace{\frac{1}{U_W}}_{L_F} | \delta = \delta_0\right) = AQL \\ P\left(X < \underbrace{\frac{1}{U_W}}_{L_F} | \delta = \delta_1\right) = LTPD \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-\left(\frac{L_F}{\delta_0}\right)^{-\theta}} = AQL \\ e^{-\left(\frac{L_F}{\delta_1}\right)^{-\theta}} = LTPD \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \delta_0^{-\theta} = -\frac{L_F^{-\theta}}{\ln(AQL)} \\ \delta_1^{-\theta} = -\frac{L_F^{-\theta}}{\ln(LTPD)} \end{cases}, \end{aligned} \quad (6.44)$$

onde  $L_F$  representa o limite de especificação inferior da Fréchet. Desta forma, o sistema (6.8) pode reescrever-se como

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(Q_{U_W} \geq k_W | \delta_W = \delta_0) = 1 - \alpha \\ P(Q_{U_W} \geq k_W | \delta_W = \delta_1) = \beta \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} P\left(\left(\frac{U_W}{\frac{1}{\hat{\delta}_F}}\right)^\theta \geq k_W | \delta = \delta_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(\left(\frac{U_W}{\frac{1}{\hat{\delta}_F}}\right)^\theta \geq k_W | \delta = \delta_1\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(\left(\frac{\frac{1}{L_F}}{\frac{1}{\hat{\delta}_F}}\right)^\theta \geq k_W | \delta = \delta_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(\left(\frac{\frac{1}{L_F}}{\frac{1}{\hat{\delta}_F}}\right)^\theta \geq k_W | \delta = \delta_1\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} P\left(\left(\frac{L_F}{\hat{\delta}_F}\right)^{-\theta} \geq k_W | \delta = \delta_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(\left(\frac{L_F}{\hat{\delta}_F}\right)^{-\theta} \geq k_W | \delta = \delta_1\right) = \beta \end{cases} \end{aligned}$$

Atendendo a (6.40),  $Q_L = \left(\frac{L_F}{\hat{\delta}_F}\right)^{-\theta}$ , o sistema anterior fica

$$\begin{cases} P(Q_L > k_W | \delta = \delta_0) = 1 - \alpha \\ P(Q_L > k_W | \delta = \delta_0) = \beta \end{cases} .$$

Verifica-se que este sistema é equivalente a (6.41), com  $k=k_W$ . Daqui se conclui que  $k_F$  para o limite de especificação inferior da Fréchet é igual a  $k_W$  para o limite de especificação superior da Weibull, de onde:

$$\begin{cases} k_F = -\frac{2n \ln(AQL)}{\chi_{2n;1-\alpha}^2} \\ n : \frac{\chi_{2n;\beta}^2 \ln(AQL)}{\chi_{2n;1-\alpha}^2 \ln(LTPD)} = 1 \end{cases} .$$

Também para a situação de limite de especificação inferior fixo, se poderia obter os resultados a partir da distribuição Weibull, de forma análoga à apresentada anteriormente, onde  $L_W$  representa o limite inferior de especificação da Weibull e  $U_F$  representa o limite superior de especificação da Fréchet e considerando que  $k_W=k_F$ .

#### 6.3.2.4. Limites de especificação simultâneos

Fixando agora os dois limites de especificação, inferior e superior, a fracção não conforme é dada pela soma das expressões (6.31) e (6.38), ou seja,

$$\omega = P(X \leq L) + P(X \geq U) = \omega_L + \omega_U, \quad (6.45)$$

cuja estimativa é

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}_L + \hat{\omega}_U, \quad (6.46)$$

sendo  $\hat{\omega}_L$  a estimativa da expressão (6.39) e  $\hat{\omega}_U$  a estimativa dada em (6.32).

Neste caso, o que se pretende é testar  $H_0: \delta = \delta_0$  v.s.  $H_1: \delta \neq \delta_0$ , com  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ . O plano de amostragem aceitará o lote se  $Q_L \geq k_L \wedge Q_U \geq \frac{1}{k_U}$  e rejeitá-lo-á se  $Q_L < k_L \vee Q_U < \frac{1}{k_U}$ . Desta

forma, a probabilidade de rejeitar o lote é

$$P(\text{Rej. lote}|H_0) = P(Q_L < k_L|H_0) + P\left(Q'_U < \frac{1}{k_U}|H_0\right) = \alpha, \quad (6.47)$$

sendo  $\alpha_1 = P(Q_L < k_L|H_0)$  e  $\alpha_2 = P\left(Q'_U < \frac{1}{k_U}|H_0\right)$ .

Considerando (6.34) e resolvendo em separado as duas probabilidades utilizando um raciocínio análogo ao caso de limites de especificação simples, obtém-se os resultados:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_L = -\frac{2n_L \ln(AQL_1)}{\chi_{2n_L; 1-\alpha_1}^2} \\ n_L : \frac{\chi_{2n_L; \beta_1}^2 \ln(AQL_1)}{\chi_{2n_L; 1-\alpha_1}^2 \ln(LTPD_1)} = 1 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} k_U = -\frac{2n_U \ln(1 - AQL_2)}{\chi_{2n_U; \alpha_2}^2} \\ n_U : \frac{\chi_{2n_U; 1-\beta_2}^2 \ln(1 - AQL_2)}{\chi_{2n_U; \alpha_2}^2 \ln(1 - LTPD_2)} = 1 \end{array} \right. . \quad (6.48)$$

Uma vez mais, para definir o plano de Amostragem de Aceitação, consideram-se os valores  $k_L$ ,  $k_U$  e  $n = \max\{n_L, n_U\}$ , de forma a satisfazer as condições relativas ao limite inferior e limite superior.

Uma vez mais, ao considerar-se  $n$ , o valor de  $k$  relativo ao outro limite deve ser recalculado.

Passando agora ao caso particular, isto é, considerar-se intervalos equilibrados e considerando as condições já expostas anteriormente, obtém-se o resultado (6.49).

$$\left\{ \begin{array}{l} k_L = -\frac{2n_L \ln\left(\frac{AQL}{2}\right)}{\chi_{2n_L; 1-\frac{\alpha}{2}}^2} \\ n_L : \frac{\chi_{2n_L; \frac{\beta}{2}}^2 \ln\left(\frac{AQL}{2}\right)}{\chi_{2n_L; 1-\frac{\alpha}{2}}^2 \ln\left(\frac{LTPD}{2}\right)} = 1 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} k_U = -\frac{2n_U \ln\left(1 - \frac{AQL}{2}\right)}{\chi_{2n_U; \frac{\alpha}{2}}^2} \\ n_U : \frac{\chi_{2n_U; 1-\frac{\beta}{2}}^2 \ln\left(1 - \frac{AQL}{2}\right)}{\chi_{2n_U; \frac{\alpha}{2}}^2 \ln\left(1 - \frac{LTPD}{2}\right)} = 1 \end{array} \right. . \quad (6.49)$$

Para o plano de Amostragem de Aceitação, consideram-se os valores  $k_L$ ,  $k_U$  e  $n = \max\{n_L, n_U\}$ , de forma a satisfazer as condições relativas ao limite inferior e limite superior. Uma vez mais, ao considerar-se  $n$ , o valor de  $k$  relativo ao outro limite deve ser recalculado.

### 6.3.3. $\theta$ desconhecido

Considerando que o limite superior de especificação,  $U$ , é fixado, nesta situação, a fracção não conforme é dada por

$$\omega = P(X > U) = 1 - e^{-\left(\frac{U}{\delta}\right)^{\theta}}, \quad (6.50)$$

pelo que, para que  $\omega$  seja pequeno,  $\delta$  tem de ser o menor possível. Assim, o que se pretende é testar  $H_0: \delta \leq \delta_0$  v.s.  $H_1: \delta > \delta_0$ . Uma estimativa de  $\omega$  é

$$\hat{\omega} = P(X > U) = 1 - e^{-\left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{\hat{\theta}}}. \quad (6.51)$$

O índice de qualidade é definido por  $Q'_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{-\hat{\theta}}$  ou por  $Q_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{\hat{\theta}}$  e o critério de aceitação do lote dado pela condição:

$$Q'_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{-\hat{\theta}} \leq k \Leftrightarrow Q_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{\hat{\theta}} \geq \frac{1}{k}, \quad (6.52)$$

onde  $\hat{\delta}$  e  $\hat{\theta}$  são os estimadores de máxima verosimilhança de  $\delta$  e  $\theta$ , soluções do sistema

$$\begin{cases} \hat{\delta} = \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^{-\theta}} \right)^{1/\hat{\theta}} \\ \hat{\theta} : \frac{n}{\hat{\theta}} + \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{x_i}{\hat{\delta}} \right) \left( \left( \frac{x_i}{\hat{\delta}} \right)^{-\hat{\theta}} - 1 \right) = 0 \end{cases}.$$

Uma vez que a distribuição exacta de  $Q_U$  é desconhecida analiticamente, para determinar os valores de  $n$  e  $k$ , que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} P\left(Q_U \geq \frac{1}{k} \mid \omega = AQL\right) = 1 - \alpha \\ P\left(Q_U \geq \frac{1}{k} \mid \omega = LTPD\right) = \beta \end{cases}, \quad (6.53)$$

ter-se-á que recorrer a métodos de simulação. Sempre que possível e para as comparações propostas com o caso Gaussiano, utilizam-se os mesmos valores de  $n$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $AQL$  que constam das normas para a distribuição Gaussiana e resolve-se o sistema em ordem a  $k$  e  $LTPD$ . Com estes valores fixos e para várias combinações de  $\delta$  e  $\theta$ , é simulado para cada “run”,  $n$  valores aleatórios de uma distribuição Fréchet,  $X \cap Fréchet(\theta, \delta)$ , estimam-se os valores dos parâmetros e obtém-se uma observação da v.a.  $Q_U$ . Por fim, obtém-se uma amostra simulada, de dimensão 5000, a partir de  $Q_U$  e, considerando a primeira equação do sistema (6.53), obtém-se o valor de  $k$  como um quantil da distribuição de  $Q_U$ . Obtido o valor de  $k$  e utilizando a segunda equação do sistema (6.53), obtém-se o valor de  $LTPD$ .

Para as situações em que se especifica o limite inferior e em que se especificam os dois limites, inferior e superior, o procedimento a utilizar é análogo ao descrito no parágrafo anterior, considerando as especificidades de cada situação.

À semelhança do que foi feito para o caso Weibull, também aqui, e para amostras grandes, se poderia recorrer ao Método Delta para determinar a distribuição assintótica de  $Q_U$ .

## 6.4. Amostragem de Aceitação para Variáveis Gumbel

### 6.4.1. Introdução

Considere-se então que a característica de qualidade em estudo,  $X$ , num processo de produção, tem *f.d.p.*

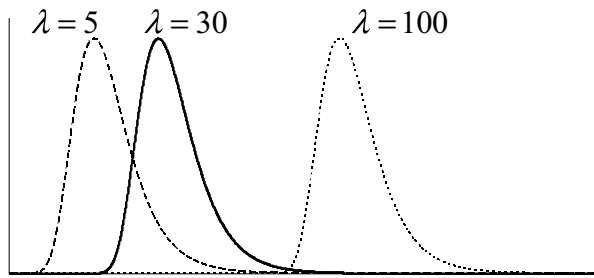
$$f_X(x) = \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x-\lambda}{\delta}} - e^{-\frac{x-\lambda}{\delta}}, \quad x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}, \delta > 0, \quad (6.54)$$

e a sua função de distribuição dada por

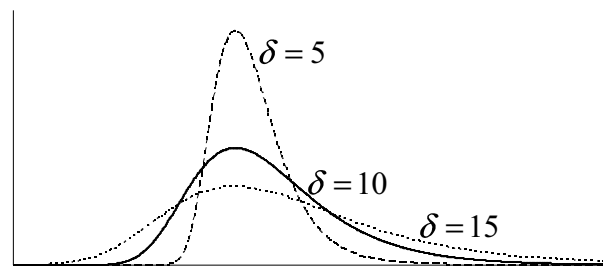
$$F_X(x) = e^{-e^{-\frac{x-\lambda}{\delta}}}, \quad x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}, \delta > 0, \quad (6.55)$$

onde  $\lambda$  representa o parâmetro de localização e  $\delta$  representa o parâmetro de escala (dispersão).

À semelhança do que foi feito para as distribuições anteriores, também aqui é de todo o interesse ver de que forma a variação dos parâmetros afectam as características da distribuição e a forma da *f.d.p.* As figuras 6.6 e 6.7, ilustram a influência dos dois parâmetros na forma da *f.d.p.*



**Figura 6.6:** Efeito na *f.d.p.* dos valores do parâmetro de localização,  $\lambda$ , mantendo  $\delta$  constante



**Figura 6.7:** Efeito na *f.d.p.* dos valores do parâmetro de escala,  $\delta$ , mantendo  $\lambda$  constante

Da análise das figuras, pode verificar-se que à medida que o valor de  $\lambda$  aumenta, há uma mudança de localização da curva da *f.d.p.* Relativamente ao parâmetro de escala,  $\delta$  o “pico” da curva desloca-se no eixo das ordenadas em sentido negativo à medida que o seu valor aumenta. Quaisquer que sejam os valores dos parâmetros de escala e de forma, a curva da *f.d.p.* é sempre enviesada à esquerda.

A média e a variância da distribuição Gumbel, são dadas respectivamente por:

➤  $\mu = \lambda + \gamma\delta$ , sendo  $\gamma$  a constante de Euler;

➤  $\sigma^2 = \frac{1}{6} \pi^2 \delta^2$ .

Para a definição dos planos de Amostragem de Aceitação baseados no limite superior de especificação,  $U$ , baseados no limite inferior de especificação,  $L$ , e baseados em limites de especificação simultâneos, vai considerar-se que as alterações de qualidade no processo de produção se devem à variação no parâmetro de localização,  $\lambda$  (e não pelas alterações no parâmetro de escala,  $\delta$ ). Vai considerar-se também, duas situações:  $\delta$  conhecido e  $\delta$  desconhecido.

Considere-se ainda que  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) são v.a.'s *i.i.d.*, com distribuição Gumbel.

## 6.4.2. $\delta$ conhecido

### 6.4.2.1. Limite Superior de Especificação

Fixando o limite superior de especificação,  $U$ , a fracção não conforme é dada por

$$\omega = P(X > U) = 1 - e^{-e^{-\frac{U-\lambda}{\delta}}}, \quad (6.56)$$

pelo que, para que  $\omega$  seja pequeno é necessário que  $\lambda$  seja o menor possível. Assim, o que se pretende é testar  $H_0: \lambda \leq \lambda_0$  v.s.  $H_1: \lambda > \lambda_0$ . Uma estimativa para  $\omega$ , é dada por  $\hat{\omega} = 1 - e^{-e^{-\frac{U-\hat{\lambda}}{\delta}}}$ . (6.57)

O índice de qualidade que se propõe é  $Q_U = \frac{U-\hat{\lambda}}{\delta}$ , sendo  $\hat{\lambda}$  o estimador de máxima verosimilhança de  $\lambda$ , tal que  $\hat{\lambda} = -\delta \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_i}{\delta}}\right)$ .

Considere-se  $X_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) uma amostra aleatória de uma população Gumbel, de parâmetros  $\lambda$  e  $\delta$ , com  $\delta$  conhecido e tirando partido do facto de  $e^{-\frac{X_i-\lambda}{\delta}}$  ( $i=1, \dots, n$ ) serem v.a.'s independentes com função densidade  $e^{-x} \times I_{[0,+\infty)}(x)$ , conclui-se que a v.a. fulcral para  $\lambda$  é

$$Y = 2ne^{-\frac{\lambda-\lambda}{\delta}} \cap \chi_{2n}^2. \quad (6.58)$$

Verificando agora as propriedades do estimador de  $\lambda$ , de (6.58) tira-se que

$$\begin{aligned} E[\hat{\lambda}] &= E\left[\lambda - \delta \ln\left(\frac{Y}{2n}\right)\right] = \lambda - \delta E\left[\ln\left(\frac{Y}{2n}\right)\right] = \lambda - \delta \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{y}{2n}\right) \frac{1}{2^n \Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\frac{y}{2}} dy \\ &= \lambda - \delta \left[ \frac{1}{2\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{y}{2}\right) \left(\frac{y}{2}\right)^{n-1} e^{-\frac{y}{2}} dy - \frac{\ln(n)}{2^n \Gamma(n)} \int_0^{+\infty} y^{n-1} e^{-\frac{y}{2}} dy \right] = \lambda - \delta \left[ \frac{1}{2\Gamma(n)} 2\Gamma'(n) - \frac{\ln(n)}{2^n \Gamma(n)} 2^n \Gamma(n) \right] \\ &= \lambda - \delta [\psi(n) - \ln(n)]. \end{aligned}$$

Sabendo que a função digama pode ser aproximada por (resultado 6.3.18, página 259,

Abramowitz e Stegun, 1964)  $\psi(n) = \ln(n) - \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + O\left(\frac{1}{n^8}\right)$ , então

$\lim_{n \rightarrow +\infty} E[\hat{\lambda}] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda - \delta[\psi(n) - \ln(n)] = \lambda - \delta \lim_{n \rightarrow +\infty} [\psi(n) - \ln(n)] = \lambda$ , concluindo-se que  $\hat{\lambda}$  é um estimador assintoticamente centrado de  $\lambda$ .

Para verificar a consistência do estimador, vai começar-se por se determinar a sua variância.

$$V[\hat{\lambda}] = E[\hat{\lambda}^2] - (E[\hat{\lambda}])^2 = E\left[\left(\lambda - \delta \ln\left(\frac{Y}{2n}\right)\right)^2\right] - [\lambda - \delta(\psi(n) - \ln(n))]^2.$$

Calculando o primeiro termo do lado direito da igualdade, tem-se

$$\begin{aligned} E\left[\left(\lambda - \delta \ln\left(\frac{Y}{2n}\right)\right)^2\right] &= E\left[\lambda^2 - 2\lambda\delta \ln\left(\frac{Y}{2n}\right) + \delta^2 \left(\ln\left(\frac{Y}{2n}\right)\right)^2\right] = \lambda^2 - 2\lambda\delta E\left[\frac{Y}{2n}\right] + \delta^2 E\left[\left(\ln\left(\frac{Y}{2n}\right)\right)^2\right] = \\ &= \lambda^2 - 2\lambda\delta(\psi(n) - \ln(n)) + \delta^2 \int_0^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{y}{2n}\right)\right)^2 \frac{1}{2^n \Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\frac{y}{2}} dy \\ &= \lambda^2 - 2\lambda\delta(\psi(n) - \ln(n)) + \delta^2 \int_0^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{y}{2}\right) - \ln(n)\right)^2 \frac{1}{2^n \Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\frac{y}{2}} dy. \end{aligned}$$

Calculando agora o integral do resultado anterior, obtém-se

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \left[\left(\ln\left(\frac{y}{2}\right)\right)^2 - 2\ln\left(\frac{y}{2}\right)\ln(n) + (\ln(n))^2\right] \frac{1}{2^n \Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\frac{y}{2}} dy = \\ &= \frac{1}{2\Gamma(n)} \underbrace{\int_0^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{y}{2}\right)\right)^2 \left(\frac{y}{2}\right)^{n-1} e^{-\frac{y}{2}} dy}_{=2\Gamma''(n)} - \frac{\ln(n)}{\Gamma(n)} \underbrace{\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{y}{2}\right) \left(\frac{y}{2}\right)^{n-1} e^{-\frac{y}{2}} dy}_{=2\Gamma'(n)} + \frac{(\ln(n))^2}{2\Gamma(n)} \underbrace{\int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{2}\right)^{n-1} e^{-\frac{y}{2}} dy}_{=2\Gamma(n)} = \\ &= \frac{\Gamma''(n)}{\Gamma(n)} - 2\ln(n)\psi(n) + (\ln(n))^2. \end{aligned}$$

Então,  $E[\hat{\lambda}^2] = \lambda^2 - 2\lambda\delta(\psi(n) - \ln(n)) + \delta^2 \frac{\Gamma''(n)}{\Gamma(n)} - 2\delta^2 \ln(n)\psi(n) + \delta^2 (\ln(n))^2$ .

Substituindo todos os resultados na expressão da variância de  $\hat{\lambda}$ , obtém-se

$$V[\hat{\lambda}] = \delta^2 \left( \frac{\Gamma''(n)}{\Gamma(n)} - (\psi(n))^2 \right).$$

Tendo em consideração que  $\psi(n) = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$ , então  $\psi'(n) = \frac{\Gamma''(n)\Gamma(n) - (\Gamma'(n))^2}{(\Gamma(n))^2}$ . Resolvendo em

ordem à segunda derivada da função gama, obtém-se  $\Gamma''(n) = \frac{(\Gamma(n))^2 \psi'(n) + (\Gamma'(n))^2}{\Gamma(n)}$ .

Substituindo este resultado na expressão da variância de  $\hat{\lambda}$ , obtém-se  $V[\hat{\lambda}] = \delta^2 \psi'(n)$ .

Atendendo ao resultado 6.4.12, página 260, Abramowitz e Stegun (1964),  $\psi'(n)$  pode ser aproximada por  $\psi'(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5} + O\left(\frac{1}{n^7}\right)$ . Assim,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V[\hat{\lambda}] = 0$ , concluindo-se que

$\hat{\lambda}$  é um estimador com variância assimpótica nula.

Dado  $\hat{\lambda}$  é um estimador assimpoticamente centrado e com variância assimpótica nula, conclui-se que é um estimador fracamente consistente para  $\lambda$ .

O plano de amostragem a definir, aceitará o lote se se verificar  $Q_U = \frac{U - \hat{\lambda}}{\delta} \geq k$ . (6.59)

Tal como anteriormente, definir o plano de amostragem passa pelo cálculo do valor da dimensão da amostra,  $n$ , e da constante de aceitação,  $k$ , que satisfaçam as condições relativas aos riscos do produtor e do consumidor.

$$\begin{cases} P(Q_U \geq k | \lambda = \lambda_0) = 1 - \alpha \\ P(Q_U \geq k | \lambda = \lambda_1) = \beta \end{cases}, \quad (6.60)$$

com cada  $\lambda_i$  ( $i=0, 1$ ) associado a uma fracção não conforme:

$$\begin{cases} P(X > U | \lambda = \lambda_0) = AQL \\ P(X > U | \lambda = \lambda_1) = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - e^{-e^{-\frac{U - \lambda_0}{\delta}}} = AQL \\ 1 - e^{-e^{-\frac{U - \lambda_1}{\delta}}} = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = \delta \ln(-\ln(1 - AQL)) + U \\ \lambda_1 = \delta \ln(-\ln(1 - LTPD)) + U \end{cases}. \quad (6.61)$$

Com base em (6.58) e em (6.61), o sistema (6.60) pode reescrever-se da seguinte forma:

$$\begin{cases} P\left(Y \geq 2ne^{-\frac{U - \delta k - \lambda}{\delta}} \mid \lambda = \lambda_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(Y \geq 2ne^{-\frac{U - \delta k - \lambda}{\delta}} \mid \lambda = \lambda_1\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \ln\left(-\frac{\chi_{2n;\alpha}^2}{2n \ln(1 - AQL)}\right) \\ n : \frac{\chi_{2n;1-\beta}^2 \ln(1 - AQL)}{\chi_{2n;\alpha}^2 \ln(1 - LTPD)} = 1 \end{cases}. \quad (6.62)$$

Calculados os valores de  $n$  e  $k$ , com base no sistema (6.62) define-se o plano de Amostragem de Aceitação para o caso em que a característica de interesse é uma variável Gumbel com  $\theta$  conhecido e fixado o limite superior de especificação.

#### 6.4.2.2. Limite Inferior de Especificação

Fixando agora o limite inferior de especificação,  $L$ , a fracção não conforme é dada por

$$\omega = P(X < L) = e^{-e^{-\frac{L-\lambda}{\delta}}}, \quad (6.63)$$

pelo que, para que  $\omega$  seja pequeno é necessário que  $\lambda$  seja o maior possível. Assim, o que se pretende é testar  $H_0: \lambda \geq \lambda_0$  v.s.  $H_1: \lambda < \lambda_0$ . Uma estimativa para  $\omega$ , é dada por

$$\hat{\omega} = e^{-e^{-\frac{L-\hat{\lambda}}{\delta}}}. \quad (6.64)$$

O plano de amostragem a definir, aceitará o lote se se verificar

$$Q_L = \frac{\hat{\lambda} - L}{\delta} \geq k. \quad (6.65)$$

Tal como anteriormente, definir o plano de amostragem passa pelo cálculo do valor da dimensão da amostra,  $n$ , e da constante de aceitação,  $k$ , que satisfaçam as condições relativas aos riscos do produtor e do consumidor:

$$\begin{cases} P(Q_L \geq k | \lambda = \lambda_0) = 1 - \alpha \\ P(Q_L \geq k | \lambda = \lambda_1) = \beta \end{cases}, \quad (6.66)$$

com cada  $\lambda_i$  ( $i=0, 1$ ) associado a uma fracção não conforme:

$$\begin{cases} P(X < L | \lambda = \lambda_0) = AQL \\ P(X < L | \lambda = \lambda_1) = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-e^{-\frac{L-\lambda_0}{\delta}}} = AQL \\ e^{-e^{-\frac{L-\lambda_1}{\delta}}} = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = \delta \ln(-\ln(AQL)) + L \\ \lambda_1 = \delta \ln(-\ln(LTPD)) + L \end{cases}. \quad (6.67)$$

Com base em (6.58) e em (6.67), o sistema (6.66) pode reescrever-se da seguinte forma:

$$\begin{cases} P\left(Y \leq 2ne^{-\frac{L-\delta k-\lambda}{\delta}} \mid \lambda = \lambda_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(Y \leq 2ne^{-\frac{L-\delta k-\lambda}{\delta}} \mid \lambda = \lambda_1\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\ln\left(-\frac{\chi_{2n;1-\alpha}^2}{2n \ln(AQL)}\right) \\ n : \frac{\chi_{2n;\beta}^2 \ln(AQL)}{\chi_{2n;1-\alpha}^2 \ln(LTPD)} = 1 \end{cases}. \quad (6.68)$$

Da resolução do sistema (6.68) obtêm-se os valores de  $n$  e  $k$  que definem o plano de Amostragem de Aceitação para o caso em que a característica de interesse é uma variável Gumbel com  $\theta$  conhecido e fixado o limite inferior de especificação.

### 6.4.2.3. Obtenção dos planos de Amostragem de Aceitação para o caso Gumbel a partir da Weibull

À semelhança do que foi exposto para a distribuição Fréchet, também os resultados para a distribuição Gumbel se poderiam obter a partir da distribuição Weibull, considerando que  $X \cap Gumbel(\lambda, \delta) \Rightarrow Y = e^{-X} \cap Weibull\left(\frac{1}{\delta}, e^{-\lambda}\right)$ , onde  $\frac{1}{\delta}$  é o parâmetro de forma e  $e^{-\lambda}$  o parâmetro de escala.

Assim sendo e considerando o limite de especificação superior da Weibull,  $U_W$ ,

$$\begin{cases} P(Y > U_W \mid \lambda = \lambda_0) = AQL \\ P(Y > U_W \mid \lambda = \lambda_1) = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(e^{-X} < U_W \mid \lambda = \lambda_0) = 1 - AQL \\ P(e^{-X} < U_W \mid \lambda = \lambda_1) = 1 - LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(X > \underbrace{-\ln(U_W)}_{L_{Gumb}} \mid \lambda = \lambda_0\right) = 1 - AQL \\ P\left(X > \underbrace{-\ln(U_W)}_{L_{Gumb}} \mid \lambda = \lambda_1\right) = 1 - LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-e^{-\frac{L_{Gumb}-\lambda_0}{\delta}}} = AQL \\ e^{-e^{-\frac{L_{Gumb}-\lambda_1}{\delta}}} = LTPD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = \delta \ln(-\ln(AQL)) + L_{Gumb} \\ \lambda_1 = \delta \ln(-\ln(LTPD)) + L_{Gumb} \end{cases}, \quad (6.69)$$

onde  $L_{Gumb}$  representa o limite inferior de especificação da Gumbel. Desta forma, com base nos resultados (6.58) e (6.69), o sistema (6.8) pode reescrever-se como:

$$\begin{cases} P(Q_{U_W} > k_W | \lambda = \lambda_0) = 1 - \alpha \\ P(Q_{U_W} > k_W | \lambda = \lambda_1) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(\left(\frac{e^{-L_{Gumb}}}{e^{-\hat{\lambda}}}\right)^{\frac{1}{\delta}} > k_W | \lambda = \lambda_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(\left(\frac{e^{-L_{Gumb}}}{e^{-\hat{\lambda}}}\right)^{\frac{1}{\delta}} > k_W | \lambda = \lambda_1\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} P\left(\frac{e^{-\frac{L_{Gumb}}{\delta}}}{e^{-\frac{\hat{\lambda}}{\delta}}} > k_W | \lambda = \lambda_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(\frac{e^{-\frac{L_{Gumb}}{\delta}}}{e^{-\frac{\hat{\lambda}}{\delta}}} > k_W | \lambda = \lambda_1\right) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(e^{\frac{\hat{\lambda} - L_{Gumb}}{\delta}} > k_W | \lambda = \lambda_0\right) = 1 - \alpha \\ P\left(e^{\frac{\hat{\lambda} - L_{Gumb}}{\delta}} > k_W | \lambda = \lambda_1\right) = \beta \end{cases} .$$

Atendendo a (6.65),  $Q_L = \frac{\hat{\lambda} - L}{\delta}$ , o sistema anterior fica

$$\begin{cases} P(Q_L > \ln(k_W) | \lambda = \lambda_0) = 1 - \alpha \\ P(Q_L > \ln(k_W) | \lambda = \lambda_1) = \beta \end{cases} .$$

Verifica-se que este sistema é equivalente a (6.66), com  $k = \ln(k_W)$ . Daqui se conclui que  $k_{Gumb}$  para o limite de especificação inferior da Gumbel é igual a  $\ln(k_W)$  para o limite de especificação superior da Weibull, de onde:

$$\begin{cases} k_{Gumb} = -\ln\left(-\frac{\chi_{2n;1-\alpha}^2}{2n \ln(AQL)}\right) \\ n : \frac{\chi_{2n;\beta}^2 \ln(AQL)}{\chi_{2n;1-\alpha}^2 \ln(LTPD)} = 1 \end{cases} .$$

Também para a situação de limite de especificação inferior fixo, se poderia obter os resultados a partir da distribuição Weibull, de forma análoga à apresentada anteriormente, onde  $L_W$  representa o limite de especificação inferior da Weibull e  $U_{Gumb}$  representa o limite de especificação superior da Gumbel e considerando que  $k_W = e^{-k_{Gumb}}$ .

#### 6.4.2.4. Limites de especificação simultâneos

Fixando agora os dois limites de especificação, inferior e superior, a fracção não conforme é dada pela soma das expressões (6.56) e (6.63), ou seja,

$$\omega = P(X \leq L) + P(X \geq U) = \omega_L + \omega_U, \quad (6.70)$$

cuja estimativa é

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}_L + \hat{\omega}_U, \quad (6.71)$$

sendo  $\hat{\omega}_L$  a estimativa da expressão (6.64) e  $\hat{\omega}_U$  a estimativa obtida com base em (6.57).

Uma vez mais, para que  $\omega$  seja pequeno,  $\delta$  tem de obedecer às condições já expostas anteriormente, pelo que o que se pretende é testar  $H_0: \lambda = \lambda_0$  v.s.  $H_1: \lambda \neq \lambda_0$ , com  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ .

O plano de amostragem aceitará o lote se  $Q_L \geq k_L \wedge Q_U \geq k_U$  e rejeitá-lo-á se  $Q_L < k_L \vee Q_U < k_U$ .

Desta forma, a probabilidade de rejeitar o lote, sob  $H_0$ , é

$$P(\text{Rej. lote} | H_0) = P(Q_L < k_L | H_0) + P(Q_U < k_U | H_0) = \alpha, \quad (6.72)$$

onde  $\alpha_1 = P(Q_L < k_L | H_0)$  e  $\alpha_2 = P(Q_U < k_U | H_0)$ .

Considerando (6.58) e resolvendo em separado as duas probabilidades utilizando um raciocínio análogo ao caso de limites de especificação simples, obtém-se os resultados:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_L = -\ln\left(-\frac{\chi_{2n;1-\alpha_1}^2}{2n_L \ln(AQL_1)}\right) \\ n_L : \frac{\chi_{2n;\beta_1}^2 \ln(AQL_1)}{\chi_{2n;1-\alpha_1}^2 \ln(LTPD_1)} = 1 \end{array} \right\} \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} k_U = \ln\left(-\frac{\chi_{2n;\alpha_2}^2}{2n_U \ln(1-AQL_2)}\right) \\ n_U : \frac{\chi_{2n;1-\beta_2}^2 \ln(1-AQL_2)}{\chi_{2n;\alpha_2}^2 \ln(1-LTPD_2)} = 1 \end{array} \right\}. \quad (6.73)$$

Uma vez mais, para definir o plano de Amostragem de Aceitação, consideram-se os valores  $k_L$ ,  $k_U$  e  $n = \max\{n_L, n_U\}$ , de forma a satisfazer as condições relativas ao limite inferior e limite superior.

Ao considerar-se  $n$ , o valor de  $k$  relativo ao outro limite deve ser recalculado.

Tal como para os casos anteriores, passando ao caso particular, isto é, considerar-se intervalos equilibrados e considerando as condições já expostas anteriormente, obtém-se o resultado (6.74).

$$\left\{ \begin{array}{l} k_L = -\ln \left( -\frac{\chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}}{2n_L \ln \left( \frac{AQL}{2} \right)} \right) \\ n_L : \frac{\chi^2_{2n;\frac{\beta}{2}} \ln \left( \frac{AQL}{2} \right)}{\chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}} \ln \left( \frac{LTPD}{2} \right)} = 1 \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} k_U = \ln \left( -\frac{\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}}{2n_U \ln \left( 1 - \frac{AQL}{2} \right)} \right) \\ n_U : \frac{\chi^2_{2n;1-\frac{\beta}{2}} \ln \left( 1 - \frac{AQL}{2} \right)}{\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}} \ln \left( 1 - \frac{LTPD}{2} \right)} = 1 \end{array} \right. \quad (6.74)$$

Para o plano de Amostragem de Aceitação, consideram-se os valores  $k_L$ ,  $k_U$  e  $n = \max\{n_L, n_U\}$ , de forma a satisfazer as condições relativas ao limite inferior e limite superior. Uma vez mais, ao considerar-se  $n$ , o valor de  $k$  relativo ao outro limite deve ser recalculado.

### 6.4.3. $\delta$ desconhecido

Considerando que o limite superior de especificação,  $U$ , é fixado, nesta situação, a fracção não conforme é dada por

$$\omega = P(X > U) = 1 - e^{-e^{-\frac{U-\lambda}{\delta}}}, \quad (6.75)$$

pelo que, para que  $\omega$  seja pequeno,  $\lambda$  tem de ser o menor possível. Assim, o que se pretende é

$$\text{testar } H_0: \lambda \leq \lambda_0 \text{ v.s. } H_1: \lambda > \lambda_0. \text{ Uma estimativa de } \omega \text{ é } \hat{\omega} = P(X > U) = 1 - e^{-e^{-\frac{U-\hat{\lambda}}{\hat{\delta}}}}. \quad (6.76)$$

O índice de qualidade é definido por  $Q_U = \frac{U - \hat{\lambda}}{\hat{\delta}}$  e o critério de aceitação do lote dado pela condição:

$$Q_U = \frac{U - \hat{\lambda}}{\hat{\delta}} \geq k, \quad (6.77)$$

onde  $\hat{\lambda}$  e  $\hat{\delta}$  são os estimadores de máxima verosimilhança de  $\lambda$  e  $\delta$ , soluções do sistema

$$\begin{cases} \hat{\lambda} = -\hat{\delta} \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{x_i}{\hat{\delta}}}\right) \\ \hat{\delta} : -\frac{n}{\hat{\delta}} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \hat{\lambda}}{\hat{\delta}^2} \left(1 - e^{-\frac{x_i - \hat{\lambda}}{\hat{\delta}}}\right) = 0 \end{cases} .$$

Um vez que a distribuição exacta de  $Q_U$  é desconhecida analiticamente, para determinar os valores de  $n$  e  $k$ , que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} P(Q_U \geq k | \omega = AQL) = 1 - \alpha \\ P(Q_U \geq k | \omega = LTPD) = \beta \end{cases} , \quad (6.78)$$

ter-se-á que recorrer a métodos de simulação. Sempre que possível e para as comparações propostas com o caso Gaussiano, utilizam-se os mesmos valores de  $n$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $AQL$  que constam das normas para a distribuição Gaussiana e resolve-se o sistema em ordem a  $k$  e  $LTPD$ . Com estes valores fixos e para várias combinações de  $\lambda$  e  $\delta$ , é simulado para cada “run”,  $n$  valores aleatórios de uma distribuição Gumbel,  $X \cap Gumbel(\lambda, \delta)$ , estimam-se os valores dos parâmetros e obtém-se uma observação da v.a.  $Q_U$ . Por fim, obtém-se uma amostra simulada, de dimensão 5000 a partir de  $Q_U$  e, considerando a primeira equação do sistema (6.78), obtém-se o valor de  $k$  como um quantil da distribuição de  $Q_U$ . Obtido o valor de  $k$  e utilizando a segunda equação do sistema (6.78), obtém-se o valor de  $LTPD$ .

Para as situações em que se especifica o limite inferior e em que se especificam os dois limites, inferior e superior, o procedimento a utilizar é análogo ao descrito no parágrafo anterior, considerando as especificidades de cada situação.

À semelhança do que foi feito para o caso Weibull, também para o caso Gumbel se poderia determinar a distribuição assintótica de  $Q_U$  através do Método Delta, para o caso de amostras grandes.

## *Capítulo 7.*

# **Transformações de Box-Cox em Amostragem de Aceitação por Variáveis**

### **7.1. Introdução**

O caso clássico da Amostragem de Aceitação por variáveis baseia-se na distribuição Gaussiana para a variável observada, condição que em alguns casos é abusiva, podendo levar a uma decisão errada, fundamentalmente quando se trabalha com amostras de dimensão reduzida, de distribuições assimétricas e/ou com caudas pesadas.

Tal como foi visto nos capítulos anteriores, quando a característica de qualidade em estudo segue uma distribuição Não-Gaussiana e se constroem planos de Amostragem de Aceitação para o caso Gaussiano, sérios prejuízos podem ocorrer para o produtor/consumidor. Por forma a evitar que sejam cometidos erros tão grosseiros, foram propostos planos de Amostragem de Aceitação específicos para cada distribuição. Contudo, quando os parâmetros são desconhecidos, em qualquer uma das situações vistas, verificou-se que a implementação de planos de Amostragem de Aceitação torna-se mais complicada pois não é fácil a modelação dos dados, não sendo prática a sua implementação por parte da indústria.

Neste capítulo, propõe-se uma alternativa aos planos específicos para cada distribuição, quando a modelação dos dados e estimação dos parâmetros é difícil – o que normalmente acontece – recorrendo às transformações tipo Box-Cox, que foram introduzidas na literatura em 1964 por Box and Cox, e que não exigem a modelação prévia dos dados.

Após a transformação normalizante dos dados, propõe-se a construção de planos de Amostragem de Aceitação considerando o caso clássico, o Gaussiano, com  $\sigma$  desconhecido. A eficácia destes

planos é avaliada através da comparação da taxa de aceitação ou rejeição do lote, entre o caso Gaussiano (após transformação) e o caso específico de cada variável.

## 7.2. Transformações de Box-Cox

Uma das suposições mais frequentes na área de controlo estatístico do processo é que variáveis mensuráveis seguem uma distribuição Gaussiana. Manuais tradicionais vão até ao ponto de admitir que existe a necessidade de testar a hipótese nula de normalidade (por exemplo, (Besterfield, 1995), (Mittag e Rinne, 1993)), mas não explicam o que fazer na eventualidade da rejeição da mesma. Na literatura, a suposição de normalidade tem sido investigada em vários estudos no que diz respeito a índices de capacidade do processo.

Com o objectivo de alcançar o pressuposto de Normalidade, têm surgido na literatura muitas transformações não lineares dos dados, entre as quais se incluem as transformações de Box-Cox. Neste trabalho vai considerar-se, então, o problema de não normalidade, pela transformação dos dados originais através da transformação Box-Cox, para chegar a valores transformados que demonstrem normalidade ou no mínimo normalidade aproximada.

A transformação é relativamente simples:

$$z = x^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{x^\lambda - 1}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \ln(x), & \lambda = 0 \end{cases}, \quad (7.1)$$

onde  $x$  representa os dados originais e  $z$  representa os dados transformados, sendo definidos somente para  $x > 0$ . O parâmetro univariado  $\lambda$  define a transformação e pode ser estimado pelos métodos usuais. O resultado de que  $x^{(0)} = \ln(x)$  pode ser demonstrado utilizando a regra de L'Hôpital.

A escolha adequada do parâmetro associado à transformação, permite transformar valores de uma distribuição  $F$  não Gaussiana em valores normalmente distribuídos e independentes (Box and Cox (1964), Figueiredo e Gomes (2002), Figueiredo (2002)).

Para a estimação do parâmetro  $\lambda$  pode recorrer-se ao método usual, o da Máxima Verosimilhança, ao método  $R^2$  e ao método  $D_{\min}$ . De acordo com o concluído por Figueiredo (2002), optou-se,

neste trabalho, pelo método da Máxima Verosimilhança, uma vez que é o método mais simples de implementar, embora os restantes métodos conduzam a resultados semelhantes.

Considerando então que as observações  $z_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) definidas em (7.1) são independentes e normalmente distribuídas, com valor médio  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , as verosimilhanças das amostras  $(z_1, \dots, z_n)$  e  $(x_1, \dots, x_n)$  estão relacionadas. Assim, a função de verosimilhança da amostra  $(z_1, \dots, z_n)$  é dada por:

$$L(\mu, \sigma, z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 2\pi}} e^{-\frac{(z_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (7.2)$$

Aplicando a transformação  $z_i = \frac{x_i^\lambda - 1}{\lambda}$ , tem-se  $L(\lambda, \mu, \sigma, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{x_i^\lambda - 1}{\lambda} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}} \frac{\partial z_i}{\partial x_i}$ ,

com  $\frac{\partial z_i}{\partial x_i} = x_i^{\lambda-1}$ . Pelo que, a função de verosimilhança da amostra  $(x_1, \dots, x_n)$  é:

$$L(\lambda, \mu, \sigma, x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^\lambda - 1}{\lambda} - \mu\right)^2} \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda-1}. \quad (7.3)$$

Logaritmizando a função de verosimilhança (7.3), tem-se:

$$\ln(L(\lambda, \mu, \sigma, x_1, \dots, x_n)) = -n \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^\lambda - 1}{\lambda} - \mu\right)^2 + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i). \quad (7.4)$$

Tendo em consideração que  $\mu$  e  $\sigma^2$  são o valor médio e a variância, respectivamente, de uma distribuição Gaussiana, as suas estimativas são:

$$\hat{\mu} = \bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\lambda - 1}{\lambda} \text{ e } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^\lambda - 1}{\lambda} - \hat{\mu}\right)^2.$$

Pode então reescrever-se (7.4) da seguinte forma:

$$\ln(L(\lambda, \hat{\mu}, \hat{\sigma}, x_1, \dots, x_n)) = -\frac{n}{2} \ln \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i^\lambda - 1}{\lambda} - \hat{\mu} \right)^2 \right) - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i). \quad (7.5)$$

Derivando a função de verosimilhança logaritimizada (7.5) em ordem a  $\lambda$  e igualando a zero, obtém-se a equação:

$$\frac{\partial \ln(L(\lambda, \mu, \sigma, x_1, \dots, x_n))}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow n \sum_{i=1}^n \left[ \left( x_i^\lambda \ln(x_i) - x_i^\lambda - 1 \right) \left( \frac{x_i^\lambda - 1}{\lambda} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\lambda - 1}{\lambda} \right) \right] - \lambda^2 \left[ \left( \frac{x_i^\lambda - 1}{\lambda} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\lambda - 1}{\lambda} \right)^2 \right] \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = 0 \quad (7.6)$$

A resolução da equação (7.6) – valor que maximiza a função de verosimilhança – dá a estimativa de máxima verosimilhança de  $\lambda \neq 0$ . Assim, a estimativa de  $\lambda$  será dada por:

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \text{solução da equação (7.6), } \lambda \neq 0 \\ 0 \text{ se } L(\lambda, \hat{\mu}, \hat{\sigma}, z_1 = \ln(x_1), \dots, z_n = \ln(x_n)) > L\left(\lambda, \hat{\mu}, \hat{\sigma}, z_1 = \frac{x_1^\lambda - 1}{\lambda}, \dots, z_n = \frac{x_n^\lambda - 1}{\lambda}\right), \lambda = 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

Obtida a estimativa de  $\lambda$ , procede-se à transformação adequada dos dados originais e determina-se o plano de Amostragem de Aceitação para o caso Gaussiano com  $\sigma$  desconhecido. A verificação da adequabilidade deste procedimento é efectuada, com base em processos de simulação, pela comparação da taxa de aceitação ou rejeição do lote entre este caso e o plano de amostragem específico.

## Capítulo 8.

### Apresentação e discussão de resultados

#### 8.1. Introdução

Neste capítulo vão encontrar-se valores numéricos para responder às principais questões abordadas nos capítulos precedentes, nomeadamente:

- i) Que erros poderão ser cometidos se for utilizado um plano de Amostragem de Aceitação para o caso Gaussiano e se a característica de qualidade em estudo não for Gaussiana, nomeadamente, se a sua distribuição for assimétrica e/ou apresentar caudas leves/pesadas?
- ii) Que influência tem nos resultados os valores dos parâmetros da distribuição Não-Gaussiana da característica de qualidade em estudo?

Os resultados apresentados neste capítulo, vão permitir responder a estas questões.

Para avaliar o grau de assimetria utilizou-se o coeficiente de assimetria de Fisher, que é dado por:

$$c_1(F) = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad (8.1)$$

onde  $F$  representa a distribuição subjacente aos dados,  $\mu_3$  representa o momento central de ordem 3 da distribuição  $F$  e  $\sigma$  representa o desvio padrão da distribuição  $F$ .

Quanto ao cálculo do peso das caudas, recorreu-se ao índice (Hoaglin, Mosteller and Tuckey (2000)):

$$\tau(F) = \frac{1}{2} \left( \frac{F^{-1}(0.99) - F^{-1}(0.50)}{F^{-1}(0.75) - F^{-1}(0.50)} + \frac{F^{-1}(0.50) - F^{-1}(0.01)}{F^{-1}(0.50) - F^{-1}(0.25)} \right) \Bigg/ \left( \frac{z_{0.99} - z_{0.5}}{z_{0.75} - z_{0.5}} \right), \quad (8.2)$$

tal que  $F^{-1}(p)$  representa o quantil de ordem  $p$  da distribuição  $F$  e  $z_p$  representa o quantil de ordem  $p$  da distribuição Normal Padrão.

Nos subcapítulos onde são apresentados os resultados para cada uma das distribuições estudadas nos capítulos anteriores foram escolhidas distribuições com vários graus de assimetria e vários índices de peso de cauda. A tabela 8.1 mostra o coeficiente de assimetria e o índice de peso de cauda para as distribuições aqui abordadas, ou seja, Exponencial, Gamma, Weibull, Fréchet, e Gumbel, justificando assim, a escolha dos parâmetros para as distribuições em estudo.

$F$	$c_1(F)$	$\tau(F)$	$F$	$c_1(F)$	$\tau(F)$
$N(\mu, \sigma), \forall \mu, \sigma > 0$	0	1	Weibull( $\delta=10, \theta=7$ )	-0,463	0,990
$\text{Exp}(\delta), \forall \delta > 0$	2	1,062	Weibull( $\delta=10, \theta=10$ )	-0,6376	1,015
Gamma( $\delta=10, \theta=3$ )	1,155	1,009	Weibull( $\delta=3, \theta=10$ )	-0,6376	1,015
Gamma( $\delta=5, \theta=7$ )	0,756	1,003	Fréchet( $\delta=2, \theta=5$ )	3,535	1,357
Gamma( $\delta=5, \theta=15$ )	0,516	1,001	Fréchet( $\delta=10, \theta=5$ )	3,535	1,357
Gamma( $\delta=10, \theta=15$ )	0,516	1,001	Fréchet( $\delta=15, \theta=5$ )	3,535	1,357
Weibull( $\delta=10, \theta=0,5$ )	6,619	2,260	Fréchet( $\delta=10, \theta=7$ )	2,425	1,264
Weibull( $\delta=20, \theta=0,5$ )	6,619	2,260	Fréchet( $\delta=10, \theta=10$ )	1,910	1,205
Weibull( $\delta=10, \theta=2$ )	0,631	0,911	Fréchet( $\delta=10, \theta=15$ )	1,605	1,164
Weibull( $\delta=1, \theta=2$ )	0,631	0,911	Gumbel( $\lambda, \delta), \forall \lambda, \delta > 0$	1,140	1,094
Weibull( $\delta=10, \theta=3$ )	0,168	0,922			

**Tabela 8.1:** Valores do coeficiente de assimetria e índice de peso de cauda

Na comparação de resultados face ao caso Gaussiano, irá utilizar-se o *software* R-Cran e irá considerar-se  $\alpha=5\%$ ,  $\beta=10\%$ ,  $AQL=1\%$  e alguns valores de  $n$  e respectivo  $k$ , retirados da norma. Tal como visto anteriormente, a determinação do plano de amostragem é baseada na solução do sistema (2.1). Este sistema será resolvido em ordem a  $k$  e  $LTPD$  e a comparação dos resultados será, essencialmente, baseada no  $LTPD$  e/ou na Curva  $OC$ .

Na apresentação e discussão de resultados irá ser utilizado o seguinte procedimento: i) comparação de resultados do caso Gaussiano para  $\sigma$  conhecido com os resultados do caso Exponencial; ii) comparação do caso Gaussiano para  $\sigma$  conhecido e  $\sigma$  desconhecido com os resultados dos casos Gama (para  $\theta$  conhecido e  $\theta$  desconhecido), Weibull (para  $\theta$  conhecido e para  $\theta$  desconhecido), Fréchet (para  $\theta$  conhecido e  $\theta$  desconhecido) e Gumbel (para  $\delta$  conhecido e  $\delta$  desconhecido).

Em qualquer uma das comparações mencionadas anteriormente, mostra-se que se for usado o ajuste Gaussiano ( $k$  retirado da norma) com dados não Gaussianos, o risco do produtor deixa de ser  $\alpha = 5\%$  (fixado) – aumenta/diminui – assim como os valores de  $LTPD$  também são mal calculados. É necessário, portanto, proceder ao ajuste dos dois modelos, ou seja, ambos terem o

mesmo  $\alpha$ , para que se possa proceder à comparação dos  $\beta$ . Em qualquer um dos casos, para exemplificar a comparação Gaussiana vs Não-Gaussiana, será utilizado sempre o limite de especificação superior.

## 8.2. Caso Gaussiano vs Caso Exponencial

Na presente situação a característica de interesse é uma v.a. com distribuição Exponencial. Para a comparação de resultados entre os casos Exponencial e Gaussiano irá utilizar-se o seguinte procedimento:

i) Determina-se a média e o desvio padrão da Exponencial, dados respectivamente por

$$\mu_E = \delta \text{ e } \sigma_E = \delta; \quad (8.3)$$

ii) A aceitação do lote no caso Gaussiano com  $\sigma$  conhecido (dados Gaussianos – ajuste à Gaussiana), com base em (3.10) é:

$$Q_N = \frac{U_N - \bar{X}}{\sigma} \geq K_N \Leftrightarrow Q_N = \frac{U_N - \bar{X}}{\sigma} \geq z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}, \quad (8.4)$$

onde  $Q_N$ ,  $U_N$ ,  $k_N$  e  $\alpha_N$  representam, respectivamente o índice de qualidade da Gaussiana, limite superior de especificação da Gaussiana, constante de aceitação da Gaussiana e probabilidade de erro tipo I da Gaussiana;

iii) A aceitação do lote no caso Exponencial (dados Exponencial – ajuste à Exponencial), com base no resultado (4.9) é:

$$Q_E = \frac{U_E}{\bar{X}} \geq k_E \Leftrightarrow Q_E = \frac{U_E}{\bar{X}} \geq -\frac{2n \ln(AQL)}{\chi_{2n;1-\alpha_E}^2}, \quad (8.5)$$

onde  $Q_E$ ,  $U_E$ ,  $k_E$  e  $\alpha_E$  representam, respectivamente o índice de qualidade da Exponencial, limite superior de especificação da Exponencial, constante de aceitação da Exponencial e probabilidade de erro tipo I da Exponencial;

iv) De acordo com (8.3), (8.4) e (8.5) e designando por  $\alpha_{EN}$  a probabilidade de erro tipo I, no caso dos dados serem Exponenciais e se proceder ao ajuste à Gaussiana, tal que  $\alpha_{EN} = \alpha_E$ , tem-se:

$$\alpha_{EN} = P(\text{rej. } H_0 | \delta_0, X \cap \text{Exp}(\delta)) \Leftrightarrow \alpha_{EN} = P(Q_N \leq k_N | \delta_0, X \cap \text{Exp}(\delta)) \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{EN} = P\left(\frac{U_N - \bar{X}}{\sigma} \leq z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}} | \delta_0, X \cap \text{Exp}(\delta)\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\alpha_{EN} &= P\left(\bar{X} \geq U_N - \sigma\left(z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}\right) \middle| \delta_0, X \cap \text{Exp}(\delta)\right) \Leftrightarrow \\ \alpha_{EN} &= P\left(\frac{2n\bar{X}}{\delta} \geq \frac{2n}{\delta}\left(U_N - \sigma\left(z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}\right)\right) \middle| \delta_0, \frac{2n\bar{X}}{\delta} \cap \chi_{2n}^2\right) \Leftrightarrow^{(9)} \\ \alpha_{EN} &= 1 - F_{\chi_{2n}^2}\left(\frac{2n}{\delta_0}\left(U_N - \sigma_0\left(z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Sabendo que  $U_N = \mu_0 + \sigma_0 z_{1-AQL}$ ,  $\mu_0 = \delta_0$  e  $\sigma_0 = \delta_0$ , então

$$\begin{aligned}\alpha_{EN} &= 1 - F_{\chi_{2n}^2}\left(\frac{2n}{\delta_0}\left(\delta_0(1 + z_{1-AQL}) - \delta_0\left(z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \Leftrightarrow \\ \alpha_{EN} &= 1 - F_{\chi_{2n}^2}\left(2n + 2\sqrt{n}z_{1-\alpha_N}\right) \Leftrightarrow \alpha_N = 1 - \Phi\left(\frac{\chi_{2n; 1-\alpha_{EN}}^2 - \sqrt{n}}{2\sqrt{n}}\right).\end{aligned}\tag{8.6}$$

Para que se possa comparar os planos clássico e específico, com  $\alpha = 5\%$ , isto é  $\alpha_E = 5\%$  e portanto também  $\alpha_{EN} = 5\%$ , terá de se ajustar  $\alpha_N$ , ou seja, consultar a norma Gaussiana com  $\alpha_N$ , dado por (8.6).

Após o ajuste dos  $\alpha$ 's (tabela 8.2), os resultados obtidos para os valores de *LTPD* e de *k*, são os que constam da tabela 8.3. Na coluna “NORMA ( $\alpha$  não é 5%!) Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$  conhecido)” os valores da constante de aceitação ( $k_N$ ) e da fracção não conforme *LTPD<sub>N</sub>*, são obtidos a partir do sistema (3.10), ou seja

$$\begin{cases} k_N = z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \\ LTPD_N = \Phi\left(z_{AQL} + \frac{1}{\sqrt{n}}(z_{1-\alpha} - z_\beta)\right) \end{cases}\tag{8.7}$$

sem se proceder ao ajuste dos  $\alpha$ 's. Com o ajuste dos  $\alpha$ 's obtém-se a coluna “Ajustamento da Norma – Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$  conhecido)” substituindo no sistema anterior  $\alpha$  por  $\alpha_N$ , dado por (8.6).

Relativamente à coluna “Dados Exponenciais Ajuste à Gaussiana”, atendendo a que

$$k_N = z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}, \quad U_N = \mu_0 + \sigma_0 z_{1-AQL}, \quad \mu_0 = \delta_0 \quad \text{e} \quad \sigma_0 = \delta_0, \quad \text{ao sistema (4.8) e que a}$$

<sup>(9)</sup> Pelo resultado (4.3).

probabilidade de aceitação do lote para a fracção não conforme  $LTPD$  é  $\beta$ , ou seja,  $PAC_N(LTPD_{EN}) = \beta$ , tem-se:

$$P\left[\frac{U_N - \bar{X}}{\sigma_0} \geq k_N \mid X \cap \text{Exp}(\delta), \omega = LTPD_{EN}, \frac{2n\bar{X}}{\delta} \cap \chi_{2n}^2\right] = \beta \Leftrightarrow LTPD_{EN} = e^{\frac{\ln(AQL)}{2n(z_{1-AQL} + 1 - k_N)}}.$$

Finalmente, para a coluna “Dados Exponenciais Ajuste à Exponencial”, os resultados foram obtidos através da resolução do sistema (4.9) em ordem a  $k$  e a  $LTPD$ , ou seja,

$$\begin{cases} k_E = -\frac{2n \ln(AQL)}{\chi_{2n; 1-\alpha}^2} \\ LTPD_E = e^{-\frac{k_E \chi_{2n; \beta}^2}{2n}} \end{cases}.$$

Dimensão da amostra, $n$	$\alpha_N$ se $\alpha_E=5\%$	$\alpha_E$ se $\alpha_N=5\%$
10	0.036	0.064
15	0.038	0.062
20	0.039	0.061
30	0.041	0.059
35	0.041	0.058
50	0.043	0.057
75	0.044	0.056
100	0.045	0.055
150	0.046	0.054
200	0.046	0.054

**Tabela 8.2:** Resultados do ajuste dos  $\alpha$ 's, caso Exponencial( $\delta=10$ ) e  $AQL=1\%$

Da análise dos resultados apresentados nas tabelas 8.2 e 8.3, pode verificar-se que se a característica de qualidade é uma variável Exponencial e se se utilizar os valores da Norma (caso clássico), o risco do produtor (assim como o do consumidor) é mal calculado. Por exemplo, considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=10$  e se se pretender um risco do produtor de 5%, consulta-se a Norma e determinam-se os valores de  $k$  e de  $LTPD$ , que neste caso são, respectivamente, 1.81 e 8.06. Mas de facto, com este  $k$ , incorre-se num risco real do produtor de 6.36% (o risco de 5% é ilusório e enganador) e a fracção não conforme, real, assumida pelo consumidor é de 16.13%. Assim sendo, para assegurar um risco de 5% e uma fracção não conforme de 16.13% do consumidor, a Norma deve ser calculada com um risco de 3.56%, obtendo-se a constante de aceitação,  $k$ , da antepenúltima coluna da tabela 8.3.

Estes resultados, mostram claramente que usando, abusivamente planos de Amostragem de Aceitação para variáveis Gaussianas quando a característica de qualidade em estudo é Exponencial, isso implica sérios riscos para o consumidor e/ou produtor, caso não se proceda ao ajuste dos  $\alpha$ 's.

Dimensão da amostra, n	AQL=1%							
	NORMA ( $\alpha$ não é 5%!) Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$ conhecido)		Ajustamento da Norma – Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$ conhecido)		Dados Exponenciais Ajuste à Gaussiana		Dados Exponenciais Ajuste à Exponencial	
	LTPD <sub>N</sub> %	K <sub>N</sub>	LTPD <sub>N</sub> %	K <sub>N</sub>	LTPD <sub>EN</sub> %	K <sub>EN</sub>	LTPD <sub>E</sub> %	K <sub>E</sub>
10	8.06	1.81	8.84	1.76	16.13	1.76	16.13	2.93
15	5.81	1.90	6.22	1.87	11.45	1.87	11.45	3.16
20	4.73	1.96	4.99	1.93	9.08	1.93	9.08	3.30
30	3.66	2.03	3.79	2.01	6.68	2.01	6.68	3.49
35	3.35	2.05	3.46	2.03	5.99	2.03	5.99	3.56
50	2.79	2.09	2.87	2.08	4.73	2.08	4.73	3.70
75	2.34	2.14	2.38	2.13	3.73	2.13	3.73	3.85
100	2.10	2.16	2.13	2.16	3.20	2.16	3.20	3.94
150	1.84	2.19	1.86	2.19	2.65	2.19	2.65	4.05
200	1.70	2.21	1.71	2.21	2.36	2.21	2.36	4.12

**Tabela 8.3:** Comparação de LTPD e de k, entre o caso Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) e o caso Exponencial( $\delta=10$ )

As figuras 8.1 a 8.4, mostram as curvas OC para os casos Exponencial

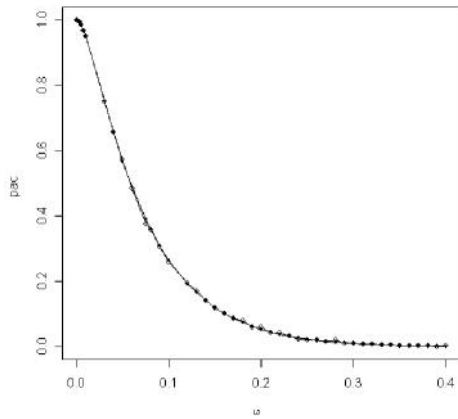
$\left( PAC_E(\omega) = F_{\chi^2_{2n}} \left( -\frac{2n \ln(\omega)}{k_E} \right) \right)$  e Gaussiano ( $\sigma$  conhecido), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's

$\left( PAC_N(\omega) = F_{\chi^2_{2n}} \left( \frac{2n \ln(\omega)}{\ln(AQL)} (-k_N + 1 + z_{1-AQL}) \right) \right)^{(10)}$  e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=\{10, 20, 50, 100\}$ ,

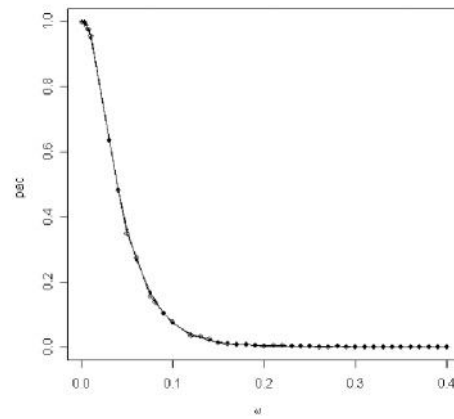
onde  $\omega$  representa a gama de fracções não conformes.

<sup>(10)</sup> Confirmação:  $PAC_N(AQL) = F_{\chi^2_{2n}} \left( \frac{2n \ln(AQL)}{\ln(AQL)} (-k_N + 1 + z_{1-AQL}) \right) = F_{\chi^2_{2n}} \left( 2n \left( \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}} + 1 \right) \right)$ .

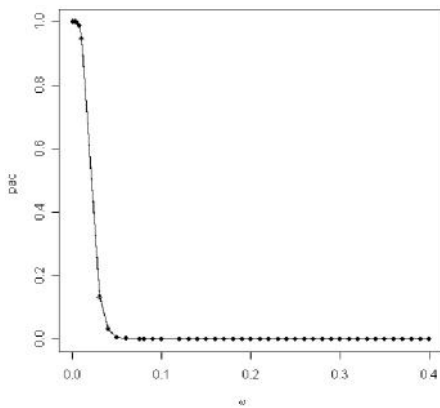
Substituindo a expressão de  $\alpha_N$ , dada por (9.6) na expressão anterior, obtém-se  $PAC_N(AQL) = 1 - \alpha_E$ , tal como se pretendia, o que significa que os planos são comparáveis.



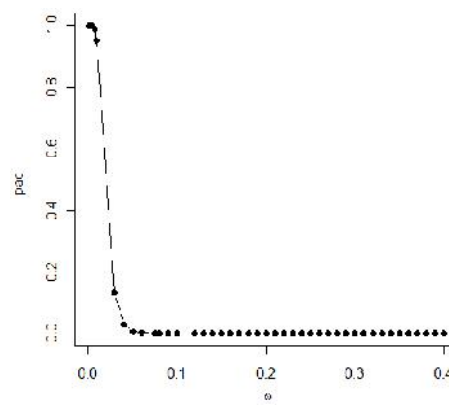
**Figura 8.1:** Curvas *OC* para os casos Exponencial (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=10$  e  $\delta=10$



**Figura 8.2:** Curvas *OC* para os casos Exponencial (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=20$  e  $\delta=10$



**Figura 8.3:** Curvas *OC* para os casos Exponencial (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$  e  $\delta=10$



**Figura 8.4:** Curvas *OC* para os casos Exponencial (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$  e  $\delta=10$

Como se pode verificar, da análise das figuras 8.1 a 8.4, com o ajuste dos  $\alpha$ 's, as curvas *OC* são coincidentes, o que vem de encontro aos resultados apresentados na tabela 8.3 (*LTPD* das duas últimas colunas). Verifica-se também que à medida que a dimensão da amostra aumenta, a curva *OC* decresce mais rapidamente, o que significa que a probabilidade de aceitação do lote com uma fracção não conforme elevada, diminui com o aumento de  $n$ , o que era expectável face à tabela 8.3, onde a fracção não conforme “assumida” pelo consumidor também diminui com  $n$ . De referir ainda que o parâmetro  $\delta$  não exerce influência nos resultados, tal como mostra a equação (4.9).

Uma outra forma de comparar resultados e avaliar a performance dos dois planos, é considerar os planos específico e standard (caso clássico ou Gaussiano), e determinar a taxa de resultados iguais, ou seja, a taxa de aceitação ou de rejeição do lote, para ambos os métodos. Para tal foram geradas 10000 amostras de dimensão  $n = \{10, 20, 50, 100\}$  com distribuição Exponencial de parâmetro  $\delta$ , aplicaram-se os dois métodos a cada uma e registou-se a taxa de resultados coincidentes, com e sem ajuste dos  $\alpha$ 's. Estes resultados constam da tabela 8.4.

Distribuição Exp( $\delta$ )	Taxa de resultados coincidentes (%) para n=			
	10	20	50	100
Exp(2)	100	100	100	100
Exp(10)	100	100	100	100

**Tabela 8.4:** Comparação dos métodos específico e clássico: Taxa de resultados coincidentes, a aceitação ou rejeição do lote, caso Exponencial,  $AQL=1\%$  e com ajuste dos  $\alpha$ 's

Da análise dos resultados da tabela 8.4, verifica-se que quando é efectuado o ajuste dos  $\alpha$ 's, a taxa de resultados coincidentes em ambos os métodos é 100%, independentemente do valor de  $\delta$  e de  $n$ , o que vem de encontro aos resultados apresentados anteriormente, mais visível nas curvas  $OC$ , uma vez que os planos são equivalentes.

### 8.3. Caso Gaussiano vs Caso Gama

#### 8.3.1. Gaussiana ( $\sigma$ conhecido) vs Gama ( $\theta$ conhecido)

A característica de qualidade neste caso, é uma v.a. com distribuição Gama ( $\theta$  conhecido) e uma vez mais, para se poder prosseguir com a comparação de resultados face ao caso Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) ter-se-á que proceder, em primeiro lugar ao ajuste dos  $\alpha$ 's. Considerando o limite superior de especificação (as restantes situações são análogas), o procedimento é o seguinte:

i) Determina-se a média e o desvio padrão da Gama, dados respectivamente por

$$\mu_G = \theta\delta \text{ e } \sigma_G = \delta\sqrt{\theta}; \quad (8.8)$$

ii) A aceitação do lote no caso Gaussiano com  $\sigma$  conhecido (dados Gaussianos – ajuste à Gaussiana) é dada pela expressão (8.4).

iii) A aceitação do lote no caso Gama (dados Gama – ajuste à Gama), com base no resultado (5.10) é dada por:

$$Q_G = \frac{U_G}{\hat{\delta}} \geq k_G \Leftrightarrow Q_G = \frac{U_G}{\hat{\delta}} \geq \frac{2n\theta F_{Gamma(\theta,1)}^{-1}(1-AQL)}{\chi_{2n\theta;1-\alpha_G}^2}; \quad (8.9)$$

iv) De acordo com (8.8), (8.4) e (8.9) e designando  $\alpha_{GN}$  a probabilidade de erro tipo I no caso de os dados seguirem uma distribuição Gama e se proceder ao ajuste à Gaussiana, tem-se:

$$\alpha_{GN} = P(\text{rej.}H_0 | \delta_0, X \cap Gama(\theta, \delta)) \Leftrightarrow \alpha_{GN} = P(Q_N \leq k_N | \delta_0, Gama(\theta, \delta)) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\alpha_{GN} &= P\left(\frac{U_N - \bar{X}}{\sigma} \leq z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}} \mid \delta_0, Gama(\theta, \delta)\right) \Leftrightarrow \\ \alpha_{GN} &= P\left(\bar{X} \geq U_N - \sigma\left(z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}\right) \mid \delta_0, Gama(\theta, \delta)\right) \Leftrightarrow \\ \alpha_{GN} &= P\left(\frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\delta} \geq \frac{2n}{\delta}\left(U_N - \sigma\left(z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}\right)\right) \mid \delta_0, \frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\delta} \cap \chi_{2n\theta}^2\right) \Leftrightarrow^{(11)} \\ \alpha_{GN} &= 1 - F_{\chi_{2n\theta}^2}\left(\frac{2n}{\delta_0}\left(U_N - \sigma_0\left(z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Sabendo que  $U_N = \mu_0 + \sigma_0 z_{1-AQL}$ ,  $\mu_0 = \delta_0 \theta$  e  $\sigma_0 = \delta_0 \sqrt{\theta}$ , então

$$\begin{aligned}\alpha_{GN} &= 1 - F_{\chi_{2n\theta}^2}\left(\frac{2n}{\delta_0}\left(\delta_0(\theta + \sqrt{\theta} z_{1-AQL}) - \delta_0 \sqrt{\theta}\left(z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \Leftrightarrow \\ \alpha_{GN} &= 1 - F_{\chi_{2n\theta}^2}\left(2n\theta + 2\sqrt{n\theta} z_{1-\alpha_N}\right) \Leftrightarrow \alpha_N = 1 - \Phi\left(\frac{\chi_{2n\theta; 1-\alpha_{GN}}^2 - \sqrt{n\theta}}{2\sqrt{n\theta}}\right).\end{aligned}\quad (8.10)$$

A norma Gaussiana deve então ser consultada para  $\alpha_N$  dado em (8.10).

Após o ajuste dos  $\alpha$ 's (tabela 8.5), os resultados obtidos para os valores de *LTPD* e de  $k$ , são os que constam da tabela 8.6, que contém os resultados para o caso Gaussiano com  $\sigma$  conhecido (dados pela Norma) *versus* o caso Gama. De forma semelhante ao apresentado para o caso Exponencial, no que diz respeito à tabela 8.6, a coluna “NORMA ( $\alpha$  não é 5%! Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$  conhecido))” os valores da constante de aceitação ( $k_N$ ) e da fracção não conforme  $LTPD_N$ , são dados por (8.7) sem se proceder ao ajuste dos  $\alpha$ 's. Com o ajuste dos  $\alpha$ 's obtém-se a coluna “Ajustamento da Norma – Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$  conhecido)” substituindo em (8.7)  $\alpha$  por  $\alpha_N$ . Relativamente à coluna “Dados Gama Ajuste à Gaussiana”, atendendo a que  $k_N = z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}$ ,  $U_N = \mu_0 + \sigma_0 z_{1-AQL}$ ,  $\mu_0 = \delta_0 \theta$  e  $\sigma_0 = \delta_0 \sqrt{\theta}$ ,

sistema (5.9) e que a aceitação do lote para a fracção não conforme  $LTPD_{GN}$  é  $\beta$ , ou seja,

$$PAC_N(LTPD_{GN}) = \beta, \text{ tem-se } LTPD_{GN} = 1 - F_{Gama(\theta, 1)}\left[\frac{\chi_{2n\theta; \beta}^2 F_{Gama(\theta, 1)}^{-1}(1 - AQL)}{2n(-\sqrt{\theta} k_N + \theta + \sqrt{\theta} z_{1-AQL})}\right]. \text{ Por último,}$$

---

<sup>(11)</sup> Sendo  $\hat{\delta} = \frac{\bar{X}}{\theta} \Leftrightarrow n\theta\hat{\delta} = \sum_{i=1}^n X_i \cap Gama(n\theta, \delta) \Leftrightarrow \frac{2\sum_{i=1}^n X_i}{\delta} \cap \chi_{2n\theta}^2$  e considerando o resultado (5.6).

os valores de  $LTPD$  e  $k$  da coluna “Dados Gama Ajuste à Gama” foram obtidos pela resolução do sistema (5.10), ou seja,

$$\begin{cases} k_G = \frac{2n\theta F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1-AQL)}{\chi_{2n\theta;1-\alpha}^2} \\ LTPD_G = 1 - F_{Gama(\theta,1)}\left(\frac{k \chi_{2n\theta;\beta}^2}{2n\theta}\right) \end{cases}$$

De referir que, quando o parâmetro de forma é igual a 1 se está perante o caso Exponencial já estudado no subcapítulo anterior.

Os resultados apresentados nas tabelas 8.5 e 8.6 são relativos a uma característica de qualidade com distribuição Gama( $\theta=3, \delta=10$ ). No entanto, se a característica de qualidade seguisse uma distribuição Gama( $\theta=3, \delta=5$ ) os resultados permaneciam os mesmos pois as expressões não dependem do valor de  $\delta$ . Daqui se conclui que o parâmetro de escala,  $\delta$ , não exerce influência nos resultados.

Da análise dos resultados das tabelas 8.5 e 8.6, pode verificar-se que se a característica de qualidade é uma variável Gama e se se utilizar os valores da Norma (caso clássico), o risco do produtor (assim como o do consumidor) é mal calculado, à semelhança do que se verificou para o caso Exponencial. Por exemplo, considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=10$  e se se pretender um risco do produtor de  $5\%$ , consulta-se a Norma e determinam-se os valores de  $k$  e de  $LTPD$ , que neste caso são, respectivamente, 1.81 e 8.06%. Mas de facto, com este  $k$ , incorre-se num risco real do produtor de  $5.9\%$  (o risco de  $5\%$  é ilusório e enganador). Por outro lado, a fracção real não conforme do consumidor, para um risco de  $10\%$  é de  $12.99\%$ . Assim sendo, para assegurar um risco de  $5\%$  e uma fracção não conforme de  $12.99\%$  (do consumidor), a Norma deve ser calculada com um risco de  $4.1\%$ , obtendo-se a constante de aceitação,  $k$ , da antepenúltima coluna da tabela 8.6.

Estes resultados mostram, uma vez mais, que usando, erradamente planos de Amostragem de Aceitação para variáveis Gaussianas quando a característica de qualidade em estudo é Gama, erros grosseiros são cometidos e que podem conduzir a decisões erradas, implicando riscos para o consumidor e/ou produtor.

Dimensão da amostra, $n$	$\alpha_N$ se $\alpha_G=5\%$ ( $\theta=3, \delta=10$ )	$\alpha_G$ ( $\theta=3, \delta=10$ ) se $\alpha_N=5\%$	Dimensão da amostra, $n$	$\alpha_N$ se $\alpha_G=5\%$ ( $\theta=3, \delta=10$ )	$\alpha_G$ ( $\theta=3, \delta=10$ ) se $\alpha_N=5\%$
10	0,041	0,059	50	0,045	0,054
15	0,042	0,058	75	0,046	0,054
20	0,043	0,057	100	0,047	0,053
30	0,044	0,056	150	0,047	0,053
35	0,045	0,055	200	0,048	0,052

**Tabela 8.5:** Resultados do ajuste dos  $\alpha$ 's, caso Gama  $\theta$  conhecido ( $\theta=3, \delta=10$ ) e considerando  $AQL=1\%$

Dimensão da amostra, $n$	$AQL=1\%$							
	NORMA ( $\alpha$ não é 5%!) Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$ conhecido)		Ajustamento da Norma – Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$ conhecido)		Dados Gama Ajuste à Gaussiana ( $\theta=3, \delta=10$ )		Dados Gama Ajuste à Gama ( $\theta=3, \delta=10$ )	
	$LTPD_N\%$	$K_N$	$LTPD_N\%$	$K_N$	$LTPD_{GN}\%$	$K_{GN}$	$LTPD_G\%$	$K_G$
10	8.06	1.81	8.53	1.78	12.99	1.78	12.99	6.38
15	5.81	1.90	6.06	1.88	9.18	1.88	9.18	6.69
20	4.73	1.96	4.89	1.94	7.30	1.94	7.30	6.88
30	3.66	2.03	3.74	2.02	5.43	2.02	5.43	7.13
35	3.35	2.05	3.42	2.04	4.89	2.04	4.89	7.21
50	2.79	2.09	2.83	2.09	3.92	2.09	3.92	7.39
75	2.34	2.14	2.36	2.13	3.15	2.13	3.15	7.56
100	2.10	2.16	2.12	2.16	2.74	2.16	2.74	7.66
150	1.84	2.19	1.85	2.19	2.32	2.19	2.32	7.79
200	1.70	2.21	1.71	2.21	2.09	2.21	2.09	7.87

**Tabela 8.6:** Comparação de  $LTPD$  e  $k$ , entre o caso Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) e o caso Gama, com  $\theta$  conhecido

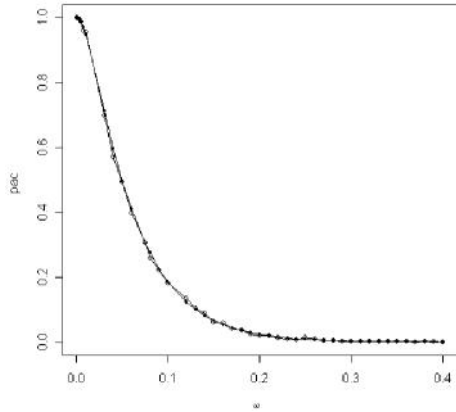
As figuras 8.5 a 8.12, mostram as curvas  $OC$  para os casos Gama ( $\theta=3, \delta=10$ ) e Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) – numeração par – e para os casos Gama ( $\theta=7, \delta=10$ ) e Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) – numeração ímpar, já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=\{10, 20, 50, 100\}$ , onde  $\omega$  representa a gama de fracções não conformes. Relativamente ao caso Gama( $\theta, \delta$ ) a probabilidade de aceitação do lote para uma determinada fracção não conforme  $\omega$  é dada por

$$Pac_G(\omega) = F_{\chi^2_{2n\theta}} \left( \frac{2n\theta F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1-\omega)}{k_G} \right). \quad \text{Quanto ao caso Gaussiano, tem-se}$$

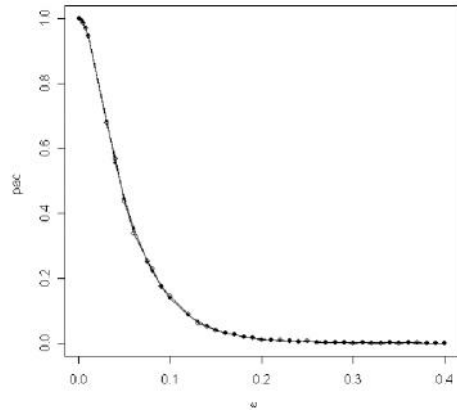
$$Pac_N(\omega) = F_{\chi^2_{2n\theta}} \left( \frac{2n F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1-\omega)}{F_{Gama(\theta,1)}^{-1}(1-AQL)} \left( -k_N \sqrt{\theta} + \theta + \sqrt{\theta} z_{1-AQL} \right) \right)^{(12)}.$$

<sup>(12)</sup> Confirmação:  $Pac_N(AQL) = F_{\chi^2_{2n\theta}} \left( 2n \left( \sqrt{\theta} \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}} + \theta \right) \right)$ , substituindo  $\alpha_N$  pela sua expressão dada por (8.10),

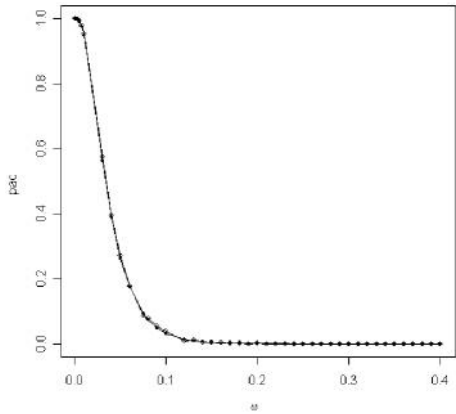
obtem-se  $Pac_N(AQL) = F_{\chi^2_{2n\theta}} \left( \chi^2_{2n\theta; 1-\alpha_G} \right) = 1 - \alpha_G$ , tal como se pretendia. Significa então, que os planos são comparáveis e além do mais equivalentes, à semelhança do caso Exponencial.



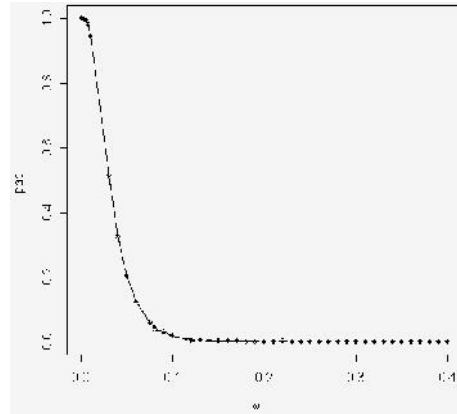
**Figura 8.5:** Curvas OC para os casos Gama (•) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=10$ ,  $\delta=10$  e  $\theta=3$



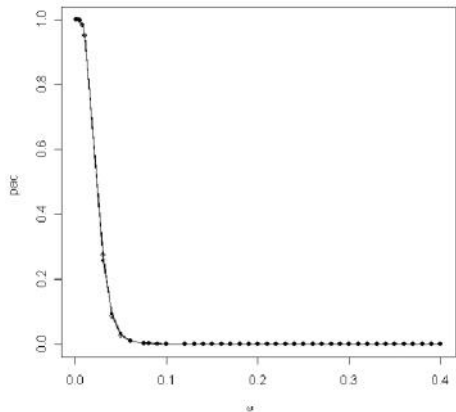
**Figura 8.6:** Curvas OC para os casos Gama (•) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=10$ ,  $\delta=10$  e  $\theta=7$



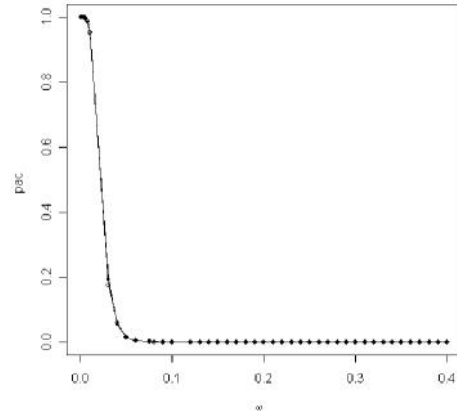
**Figura 8.7:** Curvas OC para os casos Gama (•) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=20$ ,  $\delta=10$  e  $\theta=3$



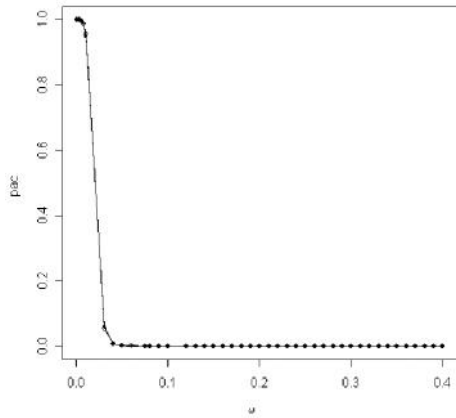
**Figura 8.8:** Curvas OC para os casos Gama (•) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=20$ ,  $\delta=10$  e  $\theta=7$



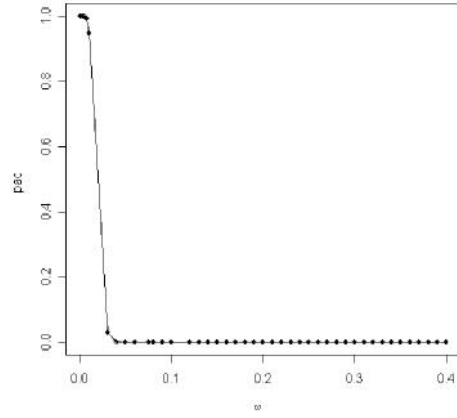
**Figura 8.9:** Curvas OC para os casos Gama (•) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$ ,  $\delta=10$  e  $\theta=3$



**Figura 8.10:** Curvas OC para os casos Gama (•) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$ ,  $\delta=10$  e  $\theta=7$



**Figura 8.11:** Curvas OC para os casos Gama (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$ ,  $\delta=10$  e  $\theta=3$



**Figura 8.12:** Curvas OC para os casos Gama (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$ ,  $\delta=10$  e  $\theta=7$

Como se pode verificar, à semelhança do que se obteve para o caso Exponencial, com o ajuste dos  $\alpha$ 's, as curvas OC são coincidentes, o que vem de encontro aos resultados já obtidos na tabela 8.6 (duas últimas colunas relativas a LTPD). Verifica-se também que à medida que a dimensão da amostra aumenta a curva OC decresce mais rapidamente, o que significa que a probabilidade de aceitação do lote com uma fracção não conforme elevada diminui com o aumento de  $n$ , o que era expectável, pois a fracção não conforme “assumida” pelo consumidor também diminui com  $n$ .

Relativamente à influência do parâmetro de forma,  $\theta$ , nos resultados, pode ver-se que as curvas OC decrescem mais rapidamente com o aumento de  $\theta$ , tratando-se de distribuições com menor coeficiente de assimetria e índice de peso de cauda muito próximo do da Gaussiana. Quanto ao parâmetro de escala  $\delta$ , não se verifica a sua influência nos resultados, pois as expressões não depende do seu valor, tal como se pode ver no sistema (5.10).

A tabela 8.7 mostra as taxas de resultados coincidentes entre o caso Gaussiano e o plano específico. O procedimento utilizado é perfeitamente análogo ao utilizado para o caso Exponencial. Da análise dos resultados da tabela 8.7, pode ver-se que a taxa de resultados coincidentes, após o ajuste dos  $\alpha$ 's, é de 100%, o que vem de encontro aos resultados já obtidos na tabela 8.6.

Distribuição Gama( $\theta, \delta$ )	Taxa de resultados coincidentes (%) para n=	10	20	50	100
	Gama(3,5)		100	100	100
Gama(7,5)		100	100	100	100

**Tabela 8.7:** Comparação dos métodos específico e clássico: Taxa de resultados coincidentes, a aceitação ou rejeição do lote, entre o caso Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) e caso Gama ( $\theta$  conhecido), com ajuste dos  $\alpha$ 's

### 8.3.2. Gaussiana ( $\sigma$ desconhecido) vs Gama ( $\theta$ desconhecido)

Para que se possa então, proceder à comparação dos planos de amostragem, o clássico com o específico, terá de se proceder em primeiro lugar ao ajuste dos  $\alpha$ 's. A característica de qualidade é neste caso, uma v.a. com distribuição Gama ( $\theta$  desconhecido). Considerando o limite superior de especificação (as restantes situações são análogas), o procedimento é o seguinte:

i) Determina-se a média e o desvio padrão da Gama, dados respectivamente por

$$\mu_{G_0} = \theta_0 \delta_0 \text{ e } \sigma_{G_0} = \delta_0 \sqrt{\theta_0}; \quad (8.11)$$

ii) A aceitação do lote no caso Gaussiano com  $\sigma$  desconhecido (dados Gaussianos – ajuste à Gaussiana) é dada pela expressão

$$Q_N = \frac{U_N - \bar{X}_G}{s_G} \geq K_N, \text{ com } k_N \text{ dado em (3.35), ou seja,}$$

$$Q_N = \frac{U_N - \bar{X}_G}{s_G} \geq -\frac{F_{t_{n-1}(\lambda)}^{-1}(1 - \alpha_N)}{\sqrt{n}} \quad (8.12)$$

e  $\lambda = \sqrt{n} z_{AQL}$  (dado pela equação (3.36)).

iii) A aceitação do lote no caso Gama (dados Gama – ajuste à Gama), com base no resultado (5.24) é:

$$Q_G = \frac{U_G}{\hat{\delta}} \geq k_G, \quad (8.13)$$

onde  $Q_G$  e  $k_G$  terão de ser determinados por processos de simulação.

iv) De acordo com (8.11), (8.12) e (8.13) e designando  $\alpha_{GN}$  a probabilidade de erro tipo I, no caso dos dados seguirem uma distribuição Gama e se proceder ao ajuste à Gaussiana, tem-se:

$$\alpha_{GN} = P(\text{rej. } H_0 | \delta_0, X \cap \text{Gama}(\theta, \delta)) \Leftrightarrow \alpha_{GN} = P(Q_N \leq k_N | \delta_0, \text{Gama}(\theta, \delta)) \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{GN} = P\left(Q_N \leq -\frac{F_{t_{n-1}(\lambda)}^{-1}(1 - \alpha_N)}{\sqrt{n}} | \delta_0, \text{Gama}(\theta, \delta)\right) \Leftrightarrow$$

$$\alpha_{GN} = F_{Q_N}\left(-\frac{F_{t_{n-1}(\lambda)}^{-1}(1 - \alpha_N)}{\sqrt{n}}\right) \Leftrightarrow -\frac{F_{t_{n-1}(\lambda)}^{-1}(1 - \alpha_N)}{\sqrt{n}} = F_{Q_N}^{-1}(\alpha_{GN}) \Leftrightarrow$$

$$\alpha_N = 1 - F_{t_{n-1}(\lambda)}\left(-\sqrt{n} F_{Q_N}^{-1}(\alpha_{GN})\right), \text{ com } \lambda = \sqrt{n} z_{AQL}. \quad (8.14)$$

Uma vez que  $Q_N = \frac{U_N - \bar{X}_G}{s_G}$ , tem distribuição desconhecida, a sua distribuição terá de ser determinada por métodos de simulação. Sabe-se que no caso Gaussiano ( $\sigma$  desconhecido) a

fracção não conforme,  $\omega$ , é dada por  $\omega = 1 - \Phi\left(\frac{U_N - \mu}{\sigma}\right)$  e  $U_N = \mu_0 + \sigma_0 z_{1-AQL}$ , sendo  $\mu_0$  e  $\sigma_0$  o valor médio e o desvio padrão da distribuição Gama, respectivamente, dados em (8.11).

Após o ajuste dos  $\alpha$ 's (tabela 8.8), procede-se então à comparação dos planos de amostragem, recorrendo para tal, a  $k$  e a  $LTPD$  que constam da tabela 8.9.

Quanto à tabela 8.9, a coluna “NORMA ( $\alpha$  não é 5%!) Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$  desconhecido)” os valores da constante de aceitação ( $k_N$ ) e da fracção não conforme  $LTPD_N$ , são obtidos a partir do sistema (3.35), ou seja

$$\begin{cases} k_N = -\frac{1}{\sqrt{n}} F_{t_{n-1}(\lambda_0)}^{-1}(1 - \alpha) \\ F_{t_{n-1}(\lambda_1)}(-k_N \sqrt{n}) = \beta \end{cases}, \text{ com } \lambda_0 = \sqrt{n} z_{AQL} \text{ e } \lambda_1 = \sqrt{n} z_{LTPD_N}, \quad (8.15)$$

sendo a segunda equação do sistema resolvida em ordem ao parâmetro de não centralidade da distribuição  $t$  não central,  $\lambda_1$ , e de seguida em ordem a  $LTPD_N$ , sem se proceder ao ajuste dos  $\alpha$ 's. Com o ajuste dos  $\alpha$ 's obtém-se a coluna “Ajustamento da Norma – Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$  desconhecido)”, substituindo  $\alpha$  por  $\alpha_N$  em (8.15). Relativamente à coluna “Dados Gama Ajuste à Gaussiana” atendendo à primeira equação de (8.15), ao sistema (5.25), que a aceitação do lote para a fracção não conforme  $LTPD_{GN}$  é  $\beta$ , ou seja  $Pac_N(LTPD_{GN}) = \beta$ , aos resultados (3.31) e (3.32), e que  $\mu_1 = U_N + \sigma z_{LTPD_{GN}}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} P(Q_N \geq k_N | X \cap Gama(\theta, \delta), \omega = LTPD_{GN}) = \beta &\Leftrightarrow \\ P\left(\frac{U_N - \bar{X}_G}{S_G} \geq k_N | \mu = \mu_1\right) = \beta &\Leftrightarrow P(\bar{X}_G \leq -k_N S_G + U_N | \mu = \mu_1) = \beta \Leftrightarrow \\ P\left(\frac{\bar{X}_G - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{-k_N S_G + U_N - \mu_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \beta &\Leftrightarrow P\left(\frac{Z + \lambda_1}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}} \leq -k_N \sqrt{n}\right) = \beta \Leftrightarrow \\ LTPD_{GN} : F_{t_{n-1}(\lambda_1)}(-k_N \sqrt{n}) = \beta, &\text{ com } \lambda_1 = \sqrt{n} z_{LTPD_{GN}}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Finalmente, os valores de  $k_G$  e  $LTPD_G$  da coluna “Dados Gama Ajuste à Gama ( $\theta$  desconhecido)” foram obtidos pela resolução do sistema (5.25) recorrendo a métodos de simulação, ou seja

$$\begin{cases} P(Q_G \geq K_G | \omega = AQL) = 1 - \alpha \\ P(Q_G \geq K_G | \omega = LTPD_G) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_G = F_{Q_G}^{-1}(\alpha) \\ LTPD_G : P(Q_G \geq K_G | \omega = LTPD_G) = \beta \end{cases} \quad (8.17)$$

Quanto ao caso Gaussiano com  $\sigma$  desconhecido a probabilidade de aceitação do lote para uma determinada fracção não conforme  $\omega$  é dada por  $Pac_N(\omega) = 1 - F_{Q_N} \left( -\frac{1}{\sqrt{n}} F_{t_{n-1}(\lambda)}^{-1}(1 - \alpha_N) \right)$ <sup>(13)</sup>,  $\lambda = \sqrt{n} z_\omega$ . No que diz respeito ao caso Gama com  $\theta$  desconhecido a probabilidade de aceitação do lote para uma dada fracção não conforme é dada por  $Pac_G(\omega) = 1 - F_{Q_G}(k_G)$ .

Como se está perante o caso em que o parâmetro de forma,  $\theta$ , é desconhecido, teve de se recorrer a métodos de simulação quer para o ajuste dos  $\alpha$ 's quer para a definição dos planos de amostragem específicos. Em consequência, teve de se proceder também à estimação dos parâmetros da distribuição Gama. Para a estimação dos parâmetros, foram utilizadas funções já existentes nos *packages* do *software* utilizado, o R-Cran. Da pesquisa efectuada, várias funções foram encontradas e experimentadas<sup>(14)</sup>. Contudo, em todas elas, as estimativas dos parâmetros não eram, de todo, precisas, principalmente no caso de amostras de pequena dimensão. Por este facto, os resultados estão condicionados à má estimação dos parâmetros da distribuição Gama, motivo pelo qual não se apresentam aqui os resultados, pois não permitiam retirar conclusões credíveis.

---

<sup>(13)</sup> Confirmação:  $Pac_N(AQL) = 1 - F_{Q_N} \left( -\frac{1}{\sqrt{n}} F_{t_{n-1}(\lambda_0)}^{-1}(1 - \alpha_N) \right)$ , substituindo  $\alpha_N$  pela sua expressão, obtém-se

$$Pac_N(AQL) = 1 - F_{Q_N} \left( -\frac{1}{\sqrt{n}} F_{t_{n-1}(\lambda_0)}^{-1} \left( 1 - 1 + F_{t_{n-1}(\lambda_0)} \left( -\sqrt{n} F_{Q_N}^{-1}(\alpha_G) \right) \right) \right) = 1 - \alpha_G, \text{ o que significa que os}$$

planos são equivalentes, podendo assim ser comparados.

<sup>(14)</sup> Foram experimentadas as seguintes funções: i) **fitdistr()**, que se encontra disponível no *package* MASS e que foi utilizada; ii) **mle()** disponível no *package* stats4 – dando especificação da expressão analítica de [log(função de verosimilhança)]. iii) estimação pelo método dos momentos, tal que  $\hat{\delta} = \frac{\bar{x}}{s^2}$  e  $\hat{\theta} = \frac{\bar{x}^2}{s^2}$ , onde  $\bar{x}$  representa a média da amostra e  $s^2$  representa a variância da amostra.

## 8.4. Caso Gaussiano vs Caso Weibull

### 8.4.1. Gaussiana ( $\sigma$ conhecido) vs Weibull ( $\theta$ conhecido)

A situação presente é que os dados são Weibull com  $\theta$  conhecido mas irá fazer-se o ajuste à distribuição Normal ou Gaussiana com  $\sigma$  conhecido. Assim, para o ajuste dos  $\alpha$ 's irá proceder-se do seguinte modo, considerando o limite superior de especificação,  $U$ :

i) Determina-se a média e o desvio padrão da Weibull, dados respectivamente por

$$\mu_w = \delta \Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right) \text{ e } \sigma_w = \delta \sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{\theta} + 1\right) - \left(\Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right)\right)^2}; \quad (8.18)$$

ii) A aceitação do lote no caso Gaussiano com  $\sigma$  conhecido (dados Gaussianos – ajuste à Gaussiana) é dada em (8.4);

iii) A aceitação do lote no caso Weibull com  $\theta$  conhecido (dados Weibull – ajuste à Weibull), com base no resultado (6.7) e (6.10) é:

$$Q_w = \left(\frac{U_w}{\hat{\delta}}\right)^\theta \geq k_w \Leftrightarrow Q_w = \left(\frac{U_w}{\hat{\delta}}\right)^\theta \geq -\frac{2n \ln(AQL)}{\chi_{2n; 1-\alpha_w}^2}; \quad (8.19)$$

iv) De acordo com (8.18), (8.4) e (8.19) e  $\alpha_{wN}$  a probabilidade de erro tipo I, no caso dos dados serem Weibull e se proceder ao ajuste à Gaussiana, tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha_{wN} &= P(\text{rej. } H_0 | \delta_0, X \cap \text{Weibull}(\theta, \delta)) \Leftrightarrow \alpha_{wN} = P(Q_N \leq k_N | \delta_0, X \cap \text{Weibull}(\theta, \delta)) \Leftrightarrow \\ \alpha_{wN} &= P\left(\frac{U_N - \bar{X}}{\sigma} \leq z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}} | \delta_0, X \cap \text{Weibull}(\theta, \delta)\right) \Leftrightarrow \\ \alpha_{wN} &= P\left(\bar{X} \geq U_N - \sigma\left(z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}\right) | \delta_0, X \cap \text{Weibull}(\theta, \delta)\right) \Leftrightarrow \\ \alpha_{wN} &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq n\left(U_N - \sigma\left(z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}\right)\right) | \delta_0, X \cap \text{Weibull}(\theta, \delta)\right) \Leftrightarrow^{(15)} \\ n\left(U_N - \sigma\left(z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}\right)\right) &= F_{\sum_{i=1}^n X_i}^{-1}(1 - \alpha_{wN}) \Leftrightarrow \\ \alpha_N &= 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma_0 \sqrt{n}} F_{\sum_{i=1}^n X_i}^{-1}(1 - \alpha_{wN}) - \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0} U_N + \sqrt{n} z_{1-AQL}\right), \quad (8.20) \end{aligned}$$

<sup>(15)</sup> Como a v.a.  $\sum_{i=1}^n X_i$  tem distribuição desconhecida, terá que ser determinada por simulação.

onde

$$U_N = \mu_0 + \sigma_0 z_{1-AQL}, \quad \mu_0 = \delta_0 \Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right) \text{ e } \sigma_0 = \delta_0 \sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{\theta} + 1\right) - \left(\Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right)\right)^2}, \text{ com base em (8.18).}$$

Após o ajuste dos  $\alpha$ 's (tabela 8.8), onde são apresentados também os intervalos de confiança a 95% para  $\alpha_N$  e  $\alpha_W$  (uma vez que a distribuição da soma de variáveis aleatórias com distribuição Weibull é desconhecida terá de ser determinada por simulação), os resultados obtidos são os que constam da tabela 8.9, que contém os resultados para o caso Gaussiano com  $\sigma$  conhecido (dados pela norma) *versus* os casos Weibull com  $\theta$  conhecido.

Relativamente à tabela 8.9, a coluna “NORMA ( $\alpha$  não é 5%! ) Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana” os valores da constante de aceitação ( $k_N$ ) e da fracção não conforme  $LTPD_N$ , são dados por (8.7) sem se proceder ao ajuste dos  $\alpha$ 's. Com o ajuste dos  $\alpha$ 's obtém-se a coluna “Ajustamento da Norma – Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$  conhecido)” substituindo em (8.7)  $\alpha$  por  $\alpha_N$  dado por (8.17). Quanto à coluna “Dados Weibull Ajuste à Gaussiana”, atendendo

$$\text{a que } k_N = z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}, \quad U_N = \mu_0 + \sigma_0 z_{1-AQL}, \quad \mu_0 = \delta_0 \Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right) \quad \text{e}$$

$$\sigma_0 = \delta_0 \sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{\theta} + 1\right) - \left(\Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right)\right)^2}, \text{ sistema (6.9) e que a aceitação do lote para a fracção não}$$

conforme  $LTPD_{WN}$  é  $\beta$ , ou seja,  $PAC_N(LTPD_{WN}) = \beta$ , tem-se:

$$P\left[\frac{U_N - \bar{X}}{\sigma_0} \geq k_N \mid X \cap Weibull(\theta, \delta), \omega = LTPD_{WN}\right] = \beta \Leftrightarrow$$

$$LTPD_{WN} = e^{-\frac{nU_W \left( \Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right) + \sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{\theta} + 1\right) + \left(\Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right)\right)^2} (z_{1-AQL} - K_N) \right)}{\sum_{i=1}^{F^{-1}(\beta)} X_i}}.$$

Finalmente, os valores de  $LTPD$  e  $k$  da coluna “Dados Weibull Ajuste à Weibull” foram obtidos pela resolução do sistema (6.10), ou seja,

$$\begin{cases} k_W = -\frac{2n \ln(AQL)}{\chi_{2n; 1-\alpha}^2} \\ LTPD_W = e^{-\frac{k \chi_{2n; \beta}^2}{2n}} \end{cases}.$$

Note-se que quando o parâmetro de forma é igual a 1, trata-se do caso Exponencial, já estudado no subcapítulo 8.2.

Dimensão da amostra, $n$	$\alpha_N$ ( $\sigma$ conhecido) se $\alpha_W$ ( $\theta=7, \delta=10$ ) é 0.05			$\alpha_W$ ( $\theta=7, \delta=10$ ) se $\alpha_N$ ( $\sigma$ conhecido) é 0.05		
	$\hat{\alpha}_N$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_N$		$\hat{\alpha}_W$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_W$	
		Limite inferior	Limite superior		Limite inferior	Limite superior
10	0,055	0,042	0,069	0,046	0,033	0,059
15	0,053	0,041	0,068	0,047	0,034	0,060
20	0,053	0,040	0,067	0,047	0,034	0,060
30	0,053	0,041	0,067	0,047	0,035	0,060
35	0,052	0,039	0,066	0,047	0,034	0,062
50	0,052	0,040	0,066	0,048	0,036	0,062
75	0,052	0,040	0,065	0,048	0,034	0,062
100	0,051	0,039	0,065	0,048	0,036	0,062
150	0,051	0,039	0,066	0,049	0,037	0,063
200	0,051	0,038	0,066	0,049	0,035	0,063

**Tabela 8.8:** Resultados das simulações:  $\alpha$  estimado para o caso Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) quando o  $\alpha$  do caso Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) é 0.05 e  $\alpha$  estimado para o caso Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) quando o  $\alpha$  do caso Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) é 0.05 e Intervalo de Confiança a 95% para  $\alpha$

Dimensão da amostra, $n$	AQL=1%							
	NORMA ( $\alpha$ não é 5%) Dados Gaussianos Ajustamento à Gaussiana ( $\sigma$ conhecido)		Ajustamento da Norma – Dados Gaussianos Ajustamento Gaussiana ( $\sigma$ conhecido)		Dados Weibull com Ajustamento Gaussiana ( $\theta$ conhecido)		Dados Weibull com Ajustamento Weibull ( $\theta$ conhecido)	
	$LTPD_N$ %	$K_N$	$LTPD_N$ %	$K_N$	$LTPD_{WN}$ %	$K_N$	$LTPD_W$ %	$K_W$
10	8,06	1,81	8,84	1,76	21,00	1,76	16,13	2,93
15	5,81	1,90	6,22	1,87	14,00	1,87	11,45	3,16
20	4,73	1,96	4,99	1,93	12,00	1,93	9,08	3,30
30	3,66	2,03	3,80	2,01	9,00	2,01	6,68	3,49
35	3,35	2,05	3,47	2,03	7,50	2,03	5,99	3,56
50	2,79	2,09	2,86	2,08	6,00	2,08	4,73	3,70
75	2,34	2,14	2,38	2,13	5,00	2,13	3,73	3,85
100	2,10	2,16	2,13	2,16	4,00	2,16	3,20	3,94
150	1,84	2,19	1,86	2,19	3,00	2,19	2,65	4,05
200	1,70	2,21	1,70	2,21	2,36	2,21	2,36	4,12

**Tabela 8.9:** Comparação do  $LTPD$  e de  $k$ , entre o caso Gaussiano com  $\sigma$  conhecido e o caso Weibull com  $\theta$  conhecido ( $\theta=7, \delta=10$ )

Da análise dos resultados das tabelas 8.8 e 8.9, pode verificar-se que se se utilizar os valores da Norma (caso clássico) sendo a característica de qualidade uma variável Weibull, o risco do produtor (assim como o do consumidor) é mal calculado, à semelhança do que se verificou para os casos anteriormente estudados. Por exemplo, considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=10$  e se se pretender um risco do produtor de 5%, consulta-se a Norma e determinam-se os valores de  $k$  e de  $LTPD$ , que neste caso são, respectivamente, 1.81 e 8.06. Mas de facto, com este  $k$ , incorre-se num risco real, estimado, do produtor de 4.55% (o risco de 5% não é correcto) e a fracção real não conforme, para um risco de 10% é de 16.13%. Assim sendo, para assegurar um risco de 5% e uma

fracção não conforme assumida pelo consumidor de 16.13%, a Norma deve ser calculada com um risco estimado de 5.46%, obtendo-se a constante de aceitação,  $k$ , da antepenúltima coluna da tabela 8.12. No entanto, com este  $k$ , a fracção não conforme assumida pelo consumidor é de 21%, o que para ele é prejudicial, dado que assumiria uma fracção não conforme superior à que assumiria caso o plano de amostragem adequado (o específico) fosse considerado (16.13%).

Estes resultados, mostram, uma vez mais e de forma mais explicita que usando, incorrectamente planos de Amostragem de Aceitação para variáveis Gaussianas quando a característica de qualidade em estudo é Weibull com  $\theta$  conhecido mas diferente de 1, implica sérios riscos para o consumidor e/ou produtor.

As figuras 8.13 a 8.20, mostram as curvas  $OC$  para os casos Weibull ( $\theta=0.5, \delta=10$ ) – com uma acentuada assimetria positiva e um índice de peso de cauda elevado (tabela 8.1) – e Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) – numeração par – e para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) – com uma assimetria negativa não muito acentuada e um índice de peso de cauda ligeiramente abaixo do da Gaussiana (tabela 8.1) – e Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) – numeração ímpar, já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=\{10, 20, 50, 100\}$ , onde  $\omega$  representa a gama de fracções não conformes.

Para determinar as curvas  $OC$ , tem de se determinar a probabilidade de aceitação ( $P_{ac}$ ) para a gama de fracções não conformes,  $\omega$ . Assim, para o caso Gaussiano tem-se

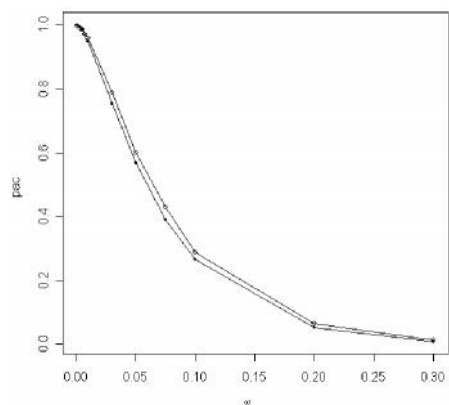
$$Pac_N(\omega) = F_{\sum_{i=1}^n X_i} \left( \delta \left( n\Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right) + \sqrt{n} \sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{\theta} + 1\right) + \left(\Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right)\right)^2} \right) z_{1-\alpha_N} \right)^{(16)}$$

$$Pac_W(\omega) = F_{\chi^2_{2n}} \left( -\frac{2n \ln(\omega)}{k_W} \right).$$

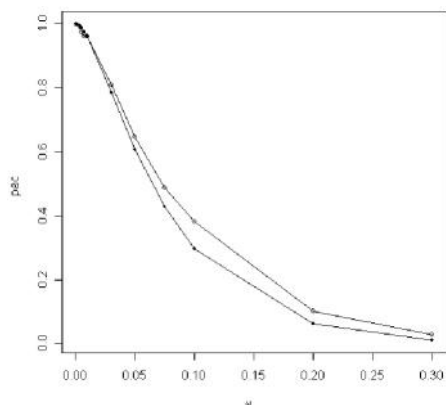
<sup>(16)</sup> Confirmação:  $Pac_N(AQL) = F_{\sum_{i=1}^n X_i} \left( \delta_0 \left( n\Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right) + \sqrt{n} \sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{\theta} + 1\right) + \left(\Gamma\left(\frac{1}{\theta} + 1\right)\right)^2} \right) z_{1-\alpha_N} \right)$ , substituindo  $\alpha_N$  pela

expressão (8.17), obtém-se  $Pac_N(AQL) = F_{\sum_{i=1}^n X_i} \left( n\mu_0 + \sqrt{n} \sigma_0 \left( \frac{F_n^{-1}(1-\alpha_W)}{\sigma_0 \sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{\sigma_0} U_N + \sqrt{n} z_{1-AQL} \right) \right) = \alpha_W$ , o que

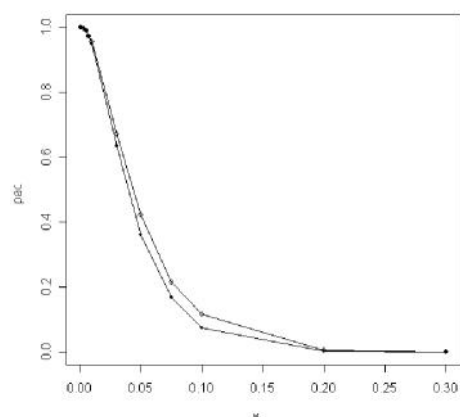
significa que os planos são comparáveis, e além do mais são equivalentes.



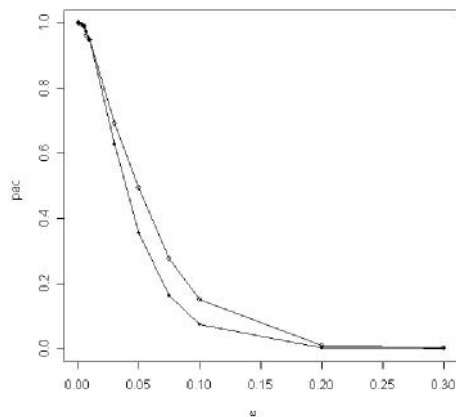
**Figura 8.13:** Curvas OC para os casos Weibull ( $\theta=0.5, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=10$



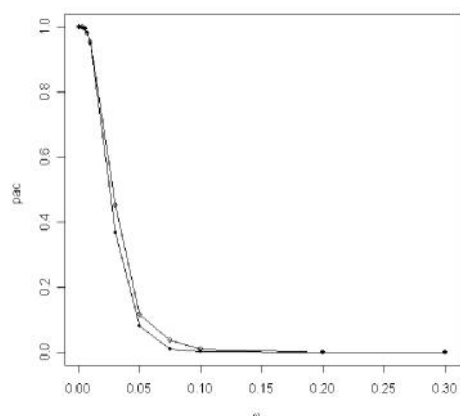
**Figura 8.14:** Curvas OC para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=10$



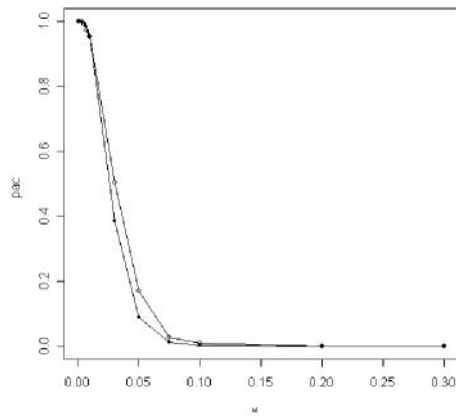
**Figura 8.15:** Curvas OC para os casos Weibull ( $\theta=0.5, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=20$



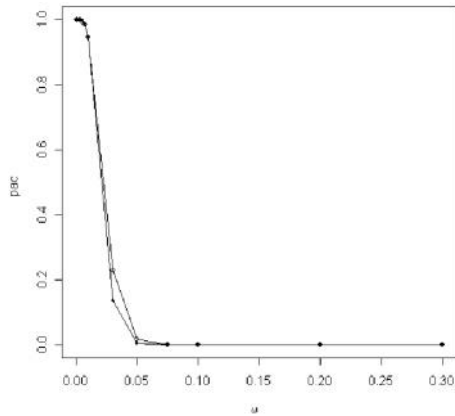
**Figura 8.16:** Curvas OC para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=20$



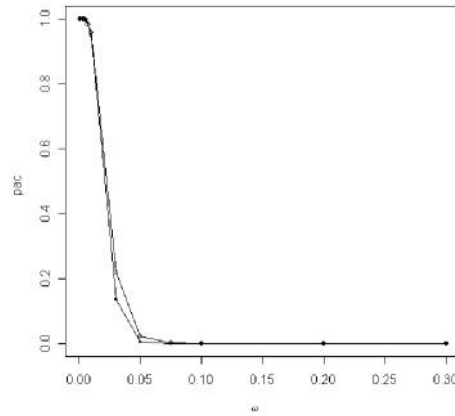
**Figura 8.17:** Curvas OC para os casos Weibull ( $\theta=0.5, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$



**Figura 8.18:** Curvas OC para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$



**Figura 8.19:** Curvas OC para os casos Weibull ( $\theta=0.5, \delta=10$ ) (•) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$



**Figura 8.20:** Curvas OC para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) (•) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$

Da análise das figuras 8.8 a 8.15, pode verificar-se que após o ajuste dos  $\alpha$ 's, se obtém melhores resultados com os planos de Amostragem de Aceitação específicos, uma vez que a curva vem abaixo da curva do plano standard (o Gaussiano), independentemente do valor dos parâmetros. Isto significa que, com os planos de Amostragem de Aceitação para o caso Gaussiano a probabilidade de aceitação do lote é maior que no caso da utilização de planos específicos, o que é mau para o consumidor. Verifica-se também que à medida que a dimensão da amostra aumenta:

- a curva OC decresce mais rapidamente, o que significa que a probabilidade de aceitação do lote com uma fracção não conforme elevada, diminui com o aumento de  $n$ , o que era expectável, face à tabela 8.9, pois a fracção não conforme “assumida” pelo consumidor também diminui com  $n$ ;
- as diferenças entre os casos específico (Weibull) e clássico (Gaussiano) vão diminuindo.

No que diz respeito à influência do parâmetro de forma,  $\theta$ , nos resultados, pode ver-se que em amostras de pequena dimensão a discrepância das curvas OC entre os casos Weibull e Gaussiano são maiores quando  $\theta$  é maior, diluindo-se estas diferenças à medida que  $n$  aumenta.

Quanto à variação do valor do parâmetro de escala,  $\delta$ , não exerce influência nos resultados, pois as expressões não dependem do seu valor (ver (6.10)).

A tabela 8.10 mostra as taxas de resultados coincidentes entre o caso Gaussiano e o plano específico, para avaliar a performance dos dois planos de amostragem. O procedimento utilizado é perfeitamente análogo ao utilizado para os casos anteriormente estudados.

Distribuição Weibull( $\theta, \delta$ )	Taxa de resultados coincidentes (%) para n=			
	10	20	50	100
Weibull(0.5,10)	84,22	81,43	76,77	72,03
Weibull(3,10)	85,40	84,20	82,97	82,43
Weibull(7,10)	89,20	88,03	86,40	86,07

**Tabela 8.10:** Comparação dos métodos específico e clássico: Taxa de resultados iguais, a aceitação ou rejeição do lote, entre o caso Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) e caso Weibull ( $\theta$  conhecido), com ajuste dos  $\alpha$ 's

Da análise dos resultados da tabela 8.10 pode verificar-se que as taxas de resultados iguais (aceitação ou rejeição em ambos os casos, clássico e específico) são mais baixas nos casos em que a distribuição Weibull apresenta uma acentuada assimetria e índice de peso de cauda elevado (Weibull(0.5,10)), tal como se pode ver na tabela 8.1. Retira-se então que, quanto maior a assimetria e índice de peso de cauda da distribuição subjacente à característica de qualidade, maiores serão os erros cometidos ao utilizar-se o plano de Amostragem de Aceitação clássico, o Gaussiano.

#### 8.4.2. Gaussiana ( $\sigma$ desconhecido) vs Weibull ( $\theta$ desconhecido)

Neste caso a característica de qualidade em estudo (os dados) segue uma distribuição Weibull com  $\theta$  desconhecido. No entanto, vai fazer-se o ajuste à distribuição Normal ou Gaussiana com  $\sigma$  desconhecido. Assim, para se poder comparar os resultados dos planos de Amostragem de Aceitação entre o caso clássico (Gaussiano) e caso específico (Weibull) ter-se-á que proceder em primeiro lugar ao ajuste dos  $\alpha$ 's, tal como nas situações anteriormente apresentadas. Considerando então, uma vez mais, o limite superior de especificação,  $U$ , o procedimento utilizado para o ajuste dos  $\alpha$ 's é o seguinte:

- i) Determina-se a média e o desvio padrão da Weibull, dados em (8.14);
- ii) A aceitação do lote no caso Gaussiano com  $\sigma$  desconhecido (dados Gaussianos – ajuste à Gaussiana) é dada pela expressão (8.11);
- iii) A aceitação do lote no caso Weibull (dados Weibull – ajuste à Weibull), com base no resultado (6.22) é:

$$Q_W = \left( \frac{U_W}{\hat{\delta}} \right)^{\hat{\theta}} \geq k_W. \quad (8.21)$$

Por processos de simulação determinar  $k_W$  e a distribuição de  $Q_W$ .

iv) De acordo com (8.18), (8.12) e (8.21) e designado  $\alpha_{WN}$  a probabilidade de erro tipo I, no caso dos dados serem Weibull e se proceder ao ajuste à Gaussiana, tem-se:

$$\begin{aligned}\alpha_{WN} &= P(\text{rej. } H_0 | \delta_0, X \cap \text{Weibull}(\theta, \delta)) \Leftrightarrow \alpha_{WN} = P(Q_N \leq k_N | \delta_0, X \cap \text{Weibull}(\theta, \delta)) \Leftrightarrow \\ \alpha_{WN} &= P\left(Q_N \leq -\frac{F_{t_{n-1}(\lambda)}^{-1}(1-\alpha_N)}{\sqrt{n}} | \delta_0, X \cap \text{Weibull}(\theta, \delta)\right) \Leftrightarrow \\ \alpha_{WN} &= F_{Q_N}\left(-\frac{F_{t_{n-1}(\lambda_0)}^{-1}(1-\alpha_N)}{\sqrt{n}}\right) \Leftrightarrow -\frac{F_{t_{n-1}(\lambda_0)}^{-1}(1-\alpha_N)}{\sqrt{n}} = F_{Q_N}^{-1}(\alpha_{WN}) \Leftrightarrow \\ \alpha_N &= 1 - F_{t_{n-1}(\lambda_0)}\left(-\sqrt{n} F_{Q_N}^{-1}(\alpha_{WN})\right), \text{ com } \lambda_0 = \sqrt{n} z_{AQL}.\end{aligned}\quad (8.22)$$

Uma vez que  $Q_N = \frac{U_N - \bar{X}_W}{S_W}$ , ter-se-á que determinar  $U_N$  dado que  $\bar{X}_W$  e  $S_W$  (média e desvio

padrão da v.a. Weibull, respectivamente) são simulados. Desta forma, a distribuição de  $Q_N$  é desconhecida, pelo que terá de ser determinada por métodos de simulação. Sabendo que no caso

Gaussiano com  $\sigma$  desconhecido a fracção não conforme,  $\omega$ , é dada por  $\omega = 1 - \Phi\left(\frac{U_N - \mu}{\sigma}\right)$  e

$U_N = \mu_0 + \sigma_0 z_{1-AQL}$ , sendo  $\mu_0$  e  $\sigma_0$  o valor médio e o desvio padrão da distribuição Weibull, respectivamente, dados em (8.14).

Após o ajuste dos  $\alpha$ 's (tabela 8.11), procede-se então à comparação dos planos de amostragem, recorrendo para tal, a  $k$  e a  $LTPD$  (tabela 8.12).

Da tabela 8.11 constam além de  $\alpha_N$  e  $\alpha_W$ , os intervalos e confiança a 95% para  $\alpha_N$  e  $\alpha_W$ , uma vez que a distribuição da soma de variáveis aleatórias com distribuição Weibull é desconhecida terá de ser determinada por simulação. Pode ver-se que a amplitude dos intervalos de confiança é relativamente elevada, o que significa que a precisão das estimativas, por intervalo de confiança, não será muito boa.

Para a construção da tabela 8.12, foi necessário passar por várias etapas, que a seguir se descrevem. Na coluna “NORMA ( $\alpha$  não é 5%!) Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$  desconhecido)”, os valores da constante de aceitação,  $k_N$ , e da fracção não conforme  $LTPD_N$ , são obtidos pela resolução do sistema (8.15), resolvendo-se a segunda equação em ordem ao parâmetro de não centralidade da distribuição  $t$  não Central,  $\lambda_t$ , e de seguida em ordem a  $LTPD_N$ , sem se proceder ao ajuste dos  $\alpha$ 's tal como descrito no subcapítulo 8.3.2; Os valores de  $k_N$  e  $LTPD_N$  da coluna “Ajustamento da Norma – Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$  desconhecido)” são obtidos através da resolução do sistema (8.15) substituindo  $\alpha$  por  $\alpha_N$ ; Na coluna “Dados Weibull Ajuste à Gaussiana” atendendo à primeira equação de (8.15), ao sistema

(6.23), que a aceitação do lote para a fracção não conforme  $LTPD_{WN}$  é  $\beta$ , ou seja  $Pac_N(LTPD_{WN}) = \beta$ , aos resultados (3.31) e (3.32), e que  $\mu_1 = U_N + \sigma z_{LTPD_{WN}}$ , tem-se:

$$P(Q_N \geq k_N | X \cap Weibull(\theta, \delta), \omega = LTPD_{WN}) = \beta \Leftrightarrow P\left(\frac{U_N - \bar{X}_W}{S_W} \geq k_N | \mu = \mu_1\right) = \beta \Leftrightarrow LTPD_{WN} : F_{t_{n-1}(\lambda_1)}(-k_N \sqrt{n}) = \beta, \text{ com } \lambda_1 = \sqrt{n} z_{LTPD_{WN}}. \quad (8.23)$$

Quanto à coluna “Dados Weibul Ajuste à Weibul ( $\theta$  desconhecido)”, os valores de  $k_W$  e  $LTPD_W$ , foram obtidos pela resolução do sistema (6.23), recorrendo a métodos de simulação, tal que

$$\begin{cases} P(Q_W \geq K_W | \omega = AQL) = 1 - \alpha \\ P(Q_W \geq K_W | \omega = LTPD_W) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_W = F_{Q_W}^{-1}(\alpha) \\ LTPD_W : P(Q_W \geq K_W | \omega = LTPD_W) = \beta \end{cases} \quad (8.24)$$

Dimensão da amostra, $n$	$\alpha_N$ ( $\sigma$ desconhecido) se $\alpha_W$ ( $\theta=10, \delta=3$ )			$\alpha_W$ ( $\theta=10, \delta=10$ ) $\alpha_N$ ( $\sigma$ desconhecido) é 0.05			$\alpha_N$ ( $\sigma$ desconhecido) se $\alpha_W$ ( $\theta=7, \delta=10$ )			$\alpha_W$ ( $\theta=7, \delta=10$ ) $\alpha_N$ ( $\sigma$ desconhecido) é 0.05		
	$\hat{\alpha}_N$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_N$		$\hat{\alpha}_W$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_W$		$\hat{\alpha}_N$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_N$		$\hat{\alpha}_W$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_W$	
		Limite inferior	Limite superior		Limite inferior	Limite superior		Limite inferior	Limite superior		Limite inferior	Limite superior
10	0,086	0,065	0,112	0,023	0,012	0,036	0,082	0,068	0,099	0,025	0,016	0,035
15	0,083	0,067	0,100	0,025	0,015	0,035	0,080	0,064	0,096	0,026	0,017	0,036
20	0,081	0,064	0,098	0,026	0,017	0,037	0,079	0,063	0,095	0,027	0,017	0,038
30	0,078	0,062	0,095	0,028	0,019	0,040	0,078	0,063	0,094	0,027	0,017	0,039
35	0,077	0,061	0,094	0,029	0,019	0,040	0,078	0,062	0,095	0,028	0,018	0,038
50	0,076	0,060	0,092	0,029	0,019	0,041	0,077	0,061	0,093	0,028	0,018	0,039
100	0,074	0,059	0,090	0,031	0,020	0,042	0,076	0,060	0,092	0,029	0,019	0,040

**Tabela 8.11:** Resultados das simulações:  $\alpha$  estimado para o caso Gaussiano ( $\sigma$  desconhecido) quando o  $\alpha$  do caso Weibull ( $\theta$  desconhecido) é 0.05 e  $\alpha$  estimado para o caso Weibull ( $\theta$  desconhecido) quando o  $\alpha$  do caso Gaussiano ( $\sigma$  desconhecido) é 0.05 e Intervalo de Confiança a 95% para  $\alpha$  com  $AQL=1\%$

Relativamente à tabla 8.11, deve referir-se que os intervalos de confiança para  $\alpha$ , apresentam amplitudes elevadas, verificando-se que a amplitude diminui com o aumento da dimensão das amostras, o que se esperava que ocorresse.

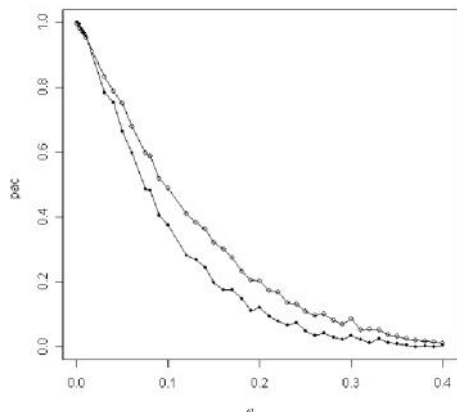
Dimensão da amostra, n		AQL=1%										
		Dados Gaussianos ajuste à Gaussiana ( $\sigma$ desconhecido) ( $\alpha$ não é 5%!)		Dados Weibull com $\theta=10, \delta=10$					Dados Weibull com $\theta=7, \delta=10$			
				Dados Weibull ( $\theta$ desconhecido) ajuste à Gaussiana ( $\sigma$ desconhecido)		Dados Weibull ( $\theta$ desconhecido) ajuste à Weibull			Dados Weibull ( $\theta$ desconhecido) ajuste à Gaussiana ( $\sigma$ desconhecido)		Dados Weibull ( $\theta$ desconhecido) ajuste à Weibull	
LTPD <sub>N</sub> %	K <sub>N</sub>	LTPD <sub>WN</sub> %	K <sub>N</sub>	LTPD <sub>W</sub> %	K <sub>W</sub>	I.C a 95% para k <sub>W</sub>	LTPD <sub>WN</sub> %	K <sub>N</sub>	LTPD <sub>W</sub> %	K <sub>W</sub>	I.C a 95% para k <sub>W</sub>	
10	18,2	1,56	25,0	1,68	21,0	2,91	(2,82; 3,11)	23,0	1,67	18,0	2,91	(2,88; 2,96)
15	12,9	1,68	20,0	1,77	14,0	3,09	(2,99; 3,20)	17,5	1,76	15,5	3,1	(3,05; 3,12)
20	10,2	1,75	16,0	1,83	12,0	3,22	(3,13; 3,31)	16,0	1,82	8,5	3,23	(3,19; 3,25)
30	7,5	1,84	12,0	1,9	9,0	3,39	(3,31; 3,47)	9,5	1,90	7,0	3,38	(3,36; 3,41)
35	6,7	1,87	10,0	1,93	8,0	3,45	(3,37; 3,53)	7,8	1,93	5,7	3,47	(3,42; 3,47)
50	5,2	1,94	8,0	1,98	6,0	3,59	(3,52; 3,66)	5,2	1,98	4,9	3,58	(3,56; 3,60)
100	3,5	2,04	5,0	2,07	4,0	3,82	(3,76; 3,88)	4,5	2,08	3,7	3,82	(3,80; 3,84)

**Tabela 8.12:** Resultados das simulações: Comparação do LTPD e de  $k$ , entre o caso Gaussiano com  $\sigma$  desconhecido e o caso Weibull com  $\theta$  desconhecido (dados simulados com  $(\theta=10, \delta=10)$  e  $(\theta=7, \delta=10)$ )

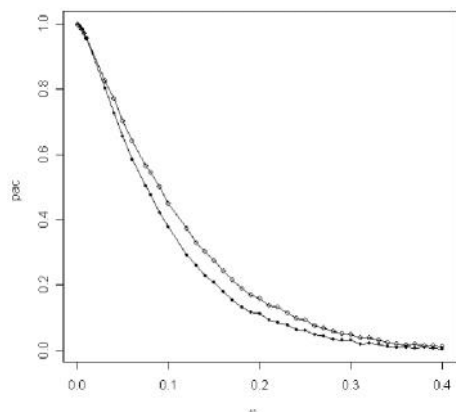
Da análise das tabelas 8.11 e 8.12, pode verificar-se, à semelhança das situações anteriores, que erros são cometidos (neste caso mais grosseiros) quando se utiliza planos para o caso clássico quando a característica de interesse é uma v.a. com distribuição Weibull ( $\theta$  desconhecido). Neste caso, a estimação dos parâmetros da distribuição Weibull foi efectuada através da função **fitdistr( )** do *package* MASS e as estimativas eram precisas. Por exemplo, se se considerar  $AQL=1\%$ ,  $n=10$  e sendo  $\theta$  desconhecido (simulado com  $\theta=7$ ) e se se pretender um risco do produtor de 5%, é consultada a norma e determinam-se os valores de  $k$  e LTPD (iguais a 1.56 e 18.2%, respectivamente). De facto, com este  $k$ , o produtor incorre num risco real estimado de 2.5% (o risco de 5% é ilusório) e a fracção não conforme do consumidor, para um risco de 10% é de 18%. Desta forma, para assegurar um risco de 5%, a norma deve ser consultada com um risco estimado de 8.2%, obtendo-se um  $k=1.67$ . No entanto, com este  $k$ , a fracção não conforme assumida pelo consumidor é de 23%, o que para ele é prejudicial, uma vez que assumiria uma fracção não conforme superior à que assumiria caso o plano específico fosse considerado (18%). As figuras 8.21 a 8.28, mostram as curvas OC para os casos Weibull ( $\theta$  desconhecido) e Gaussiano ( $\sigma$  desconhecido) – numeração par dados simulados Weibull com  $\theta=10, \delta=10$  e numeração ímpar dados simulados Weibull com  $\theta=7, \delta=10$ , já com o ajuste dos  $\alpha$ 's, onde a probabilidade de aceitação do lote para a gama de fracções não conformes,  $\omega$ , para cada caso respectivamente, é

dada por  $Pac_W(\omega) = 1 - F_{Q_W}(k_W)$  e  $Pac_N(\omega) = 1 - F_{Q_N}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}F_{t_{n-1}}^{-1}(\lambda)(1 - \alpha_N)\right)^{(17)}$ ,  $\lambda = \sqrt{n}z_\omega$ .

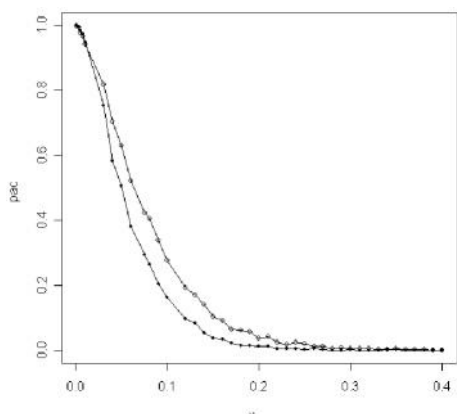
Considerando-se que  $AQL=1\%$  e  $n=\{10, 20, 50, 100\}$ .



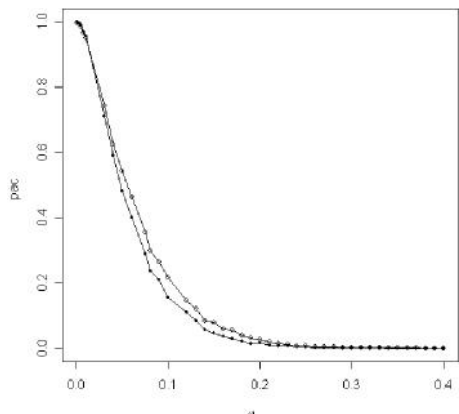
**Figura 8.21:** Curvas OC para os casos Weibull ( $\theta=10, \delta=3$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=10$



**Figura 8.22:** Curvas OC para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=10$

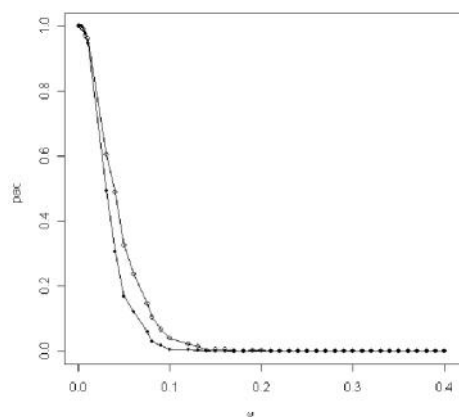


**Figura 8.23:** Curvas OC para os casos Weibull ( $\theta=10, \delta=3$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=20$

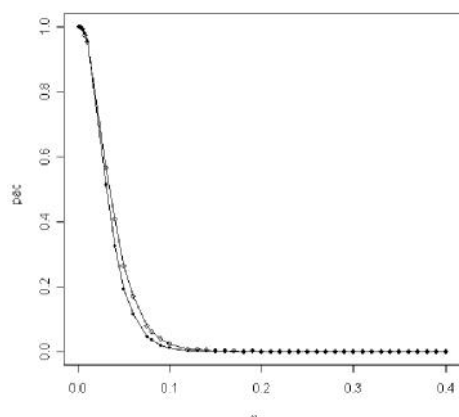


**Figura 8.24:** Curvas OC para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=20$

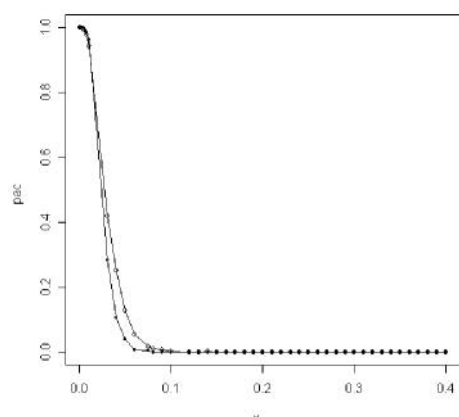
<sup>(17)</sup> Confirmação: substituindo  $\alpha_N$  e  $\omega$  respectivamente, pela sua expressão e por  $AQL$  em  $Pac_N(\omega)$  obtém-se  $Pac_N(AQL) = 1 - \alpha_W$ , mostrando assim que os planos são equivalentes, podendo-se então compará-los.



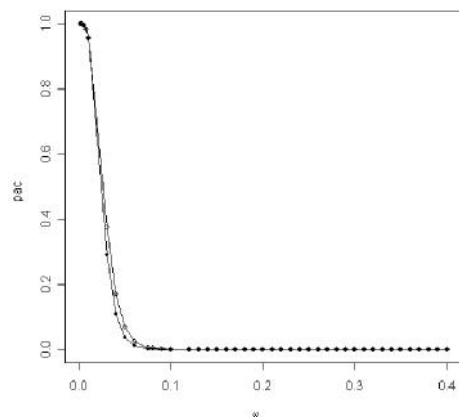
**Figura 8.25:** Curvas *OC* para os casos Weibull ( $\theta=10, \delta=3$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$



**Figura 8.26:** Curvas *OC* para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$



**Figura 8.27:** Curvas *OC* para os casos Weibull ( $\theta=10, \delta=3$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$



**Figura 8.28:** Curvas *OC* para os casos Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$

Da análise das figuras 8.21 a 8.28, pode verificar-se que as discrepâncias das curvas *OC*, após ajuste dos  $\alpha$ 's, entre os casos Weibull e Gaussiano são mais acentuadas na distribuição com um maior coeficiente de assimetria a Weibull ( $\theta=10, \delta=10$ ) (apresentando ambas as distribuições, Weibull ( $\theta=10, \delta=10$ ) e Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ), uma assimetria negativa com um índice de peso de cauda ligeiramente abaixo do da Gaussiana). Contudo, estas discrepâncias vão diminuindo com o aumento de  $n$ , sendo mais visível no caso Weibull ( $\theta=7, \delta=10$ ) – distribuição com menor assimetria.

A tabela 8.13 mostra a taxa de resultados coincidentes (aceitação ou rejeição do lote) entre os casos específico (Weibull) e clássico (Gaussiano) – para a situação em que os parâmetros de forma e escala, respectivamente, são desconhecidos.

Distribuição Weibull( $\theta, \delta$ ) – valores simulados	Taxa de resultados coincidentes (%) para n=			
	10	20	50	100
Weibull(3,10)	90,2	89,2	85,8	89,4
Weibull(7,10)	90,6	87,7	89,2	85,4
Weibull(10,10)	89,5	88,7	88,9	87,5

**Tabela 8.13:** Comparação dos métodos específico e clássico: Taxa de resultados iguais, a aceitação ou rejeição do lote, entre o caso Gaussiano ( $\sigma$  desconhecido) e caso Weibull ( $\theta$  desconhecido), com ajuste dos  $\alpha$ 's

Da análise da tabela 8.13, e considerando os resultados da tabela 8.1, pode ver-se que o tipo de assimetria tem, neste caso, muita influência nos resultados. Quando a assimetria da distribuição da característica de qualidade em estudo é pouco acentuada e com menor índice de peso de cauda, próximo da gaussiana, a taxa de resultados coincidentes entre os dois métodos, específico e clássico, é superior aos casos em que a assimetria é mais acentuada (maiores valores para  $\theta$ ). Estes resultados revelam maiores discrepâncias entre os planos clássico e específico para os casos em que a assimetria e índice de peso de cauda se afastam mais dos da Gaussiana.

De seguida vai analisar-se se há vantagem em recorrer ao Método Delta para a determinação da distribuição assintótica do índice de qualidade  $Q_U$ , somente para o caso de amostras de dimensão elevada, evitando assim o recurso a processos de simulação. Do sistema (6.26) e da expressão (6.24), obtém-se os valores de  $k$  e  $LTPD$  dados, respectivamente, por

$$\begin{cases} k = z_\alpha \sqrt{V\left[\left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{\hat{\theta}}\right]} - \ln(AQL) \\ LTPD = e^{z_{1-\beta} \sqrt{V\left[\left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{\hat{\theta}}\right]} - k} \end{cases}$$

A tabela 8.14 mostra os resultados, e da sua análise pode ver-se que os resultados são muito idênticos, tornando-se mais próximos com o aumento de  $n$ . Estes resultados mostram que é plausível o recurso ao método Delta para determinar a distribuição assintótica do índice de qualidade, e definir os planos de Amostragem de Aceitação para uma característica de qualidade com distribuição Weibull, quando a dimensão das amostras é elevada (sugere-se  $n > 50$ ).

Dimensão da amostra ( $n$ ) \ Distribuição	Weibull( $\theta=7, \delta=10$ )		Método Delta	
	$LTPD_W$	$k_W$	$LTPD_D$	$k_D$
50	4,9	3,58	4,34	3,78
100	3,7	3,82	3,32	3,92
Dimensão da amostra ( $n$ ) \ Distribuição	Weibull( $\theta=10, \delta=3$ )		Método Delta	
	$LTPD_W$	$k_W$	$LTPD_D$	$k_D$
50	6,0	3,59	5,46	3,65
100	4,0	3,82	3,38	3,92

**Tabela 8.14:** Comparação de  $k$  e  $LTPD$  entre o plano de Amostragem de Aceitação específico e o plano obtido pelo método Delta, caso Weibull com  $\theta$  desconhecido.

## 8.5. Caso Gaussiano vs caso Fréchet

### 8.5.1. Gaussiana ( $\sigma$ conhecido) vs Fréchet ( $\theta$ conhecido)

Sendo a Característica de Qualidade uma v.a. com distribuição Fréchet ( $\theta$  conhecido), à semelhança das situações anteriormente estudadas, ter-se-á que proceder em primeiro lugar ao ajuste dos  $\alpha$ 's, para que os resultados do caso clássico, o Gaussiano, e específico, o Fréchet, possam ser comparados. Para tal, o procedimento a seguir é o que se descreve de seguida:

i) Determina-se a média e o desvio padrão da Fréchet, que são dados respectivamente por

$$\mu = \delta \Gamma\left(1 - \frac{1}{\theta}\right), \theta > 1 \text{ e } \sigma = \delta \sqrt{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\theta}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)}, \theta > 2; \quad (8.25)$$

ii) A aceitação do lote no caso Gaussiano com  $\sigma$  conhecido (dados Gaussianos – ajuste à Gaussiana) é dada pela expressão (8.4);

iii) A aceitação do lote no caso Fréchet (dados Fréchet – ajuste à Fréchet), com base nos resultados (6.30) e (6.34) é:

$$Q_F = \left(\frac{U_F}{\hat{\delta}_F}\right)^{-\theta} \leq k_F \Leftrightarrow Q_F = \left(\frac{U_F}{\hat{\delta}_F}\right)^{-\theta} \leq -\frac{2n \ln(1 - AQL)}{\chi_{2n; \alpha}^2}, \quad (8.26)$$

ou equivalentemente  $Q'_F = \left(\frac{U_F}{\hat{\delta}_F}\right)^{\theta} \geq -\frac{\chi_{2n; \alpha}^2}{2n \ln(1 - AQL)}$ ;

iv) De acordo com (8.25), (8.4) e (8.26) e designando  $\alpha_{FN}$  a probabilidade de erro tipo I, no caso dos dados serem Fréchet e se proceder ao ajuste à Gaussiana, tem-se:

$$\alpha_{FN} = P(\text{rej. } H_0 | \delta_0, X \cap \text{Fréchet}(\theta, \delta)) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \alpha_{FN} &= P\left(\frac{U_N - \bar{X}_F}{\sigma} \leq z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}} \mid \delta_0, X \cap \text{Fréchet}(\theta, \delta)\right) \Leftrightarrow \\ \alpha_{FN} &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq n\left(U_N - \sigma\left(z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}\right)\right) \mid \delta_0, X \cap \text{Fréchet}(\theta, \delta)\right) \Leftrightarrow^{(18)} \\ n\left(U_N - \sigma\left(z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}\right)\right) &= F_{\sum_{i=1}^n X_i}^{-1}(1 - \alpha_{FN}) \Leftrightarrow \\ \alpha_{FN} &= 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} F_{\sum_{i=1}^n X_i}^{-1}(1 - \alpha_{FN}) - \frac{\sqrt{n}}{\sigma} U_N + \sqrt{n} z_{1-AQL}\right), \end{aligned} \quad (8.27)$$

onde  $U_N = \mu_0 + \sigma_0 z_{1-AQL}$ ,  $\mu_0 = \delta_0 \Gamma\left(1 - \frac{1}{\theta_0}\right)$  e  $\sigma_0 = \delta_0 \sqrt{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\theta_0}\right) - \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{\theta_0}\right)\right)^2}$ , com base em

(8.25) e  $\alpha_{FN} = \alpha_F$ .

Após o ajuste dos  $\alpha$ 's (tabela 8.15), onde são apresentados também os intervalos de confiança a 95% para  $\alpha_N$  e  $\alpha_F$  (uma vez que a distribuição da soma de variáveis aleatórias com distribuição Fréchet é desconhecida, terá de ser determinada com recurso a métodos de simulação), os resultados obtidos são os que constam da tabela 8.16, que contém os resultados para o caso Gaussiano com  $\sigma$  conhecido (dados pela norma) *versus* os casos Fréchet com  $\theta$  conhecido.

A construção da tabela 8.16 passou por várias etapas que a seguir se descreve:

- A coluna “NORMA ( $\alpha$  não é 5%!) Dados Gaussianos Ajuste à Guassiana” os valores da constante de aceitação ( $k_N$ ) e da fracção não conforme  $LTPD_N$ , são dados por (8.7) sem se proceder ao ajuste dos  $\alpha$ 's.
- Com o ajuste dos  $\alpha$ 's obtém-se a coluna “Ajustamento da Norma – Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$  conhecido)” substituindo em (8.7)  $\alpha$  por  $\alpha_N$  dado por (8.27).
- Quanto à coluna “Dados Fréchet Ajuste à Gaussiana”, atendendo a que  $k_N = z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}$ ,

$$U_N = \mu_0 + \sigma_0 z_{1-AQL}, \mu_0 = \delta_0 \Gamma\left(1 - \frac{1}{\theta_0}\right) \text{ e } \sigma_0 = \delta_0 \sqrt{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\theta_0}\right) - \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{\theta_0}\right)\right)^2}, \text{ sistema (6.33) e}$$

que a aceitação do lote para a fracção não conforme  $LTPD_{FN}$  é  $\beta$ , ou seja,  $PAC_N(LTPD_{FN}) = \beta$ , tem-se:

<sup>(18)</sup> Como a v.a.  $\sum_{i=1}^n X_i$  tem distribuição desconhecida, terá que ser determinada por simulação.

$$P\left[\frac{U_N - \bar{X}_F}{\sigma_0} \geq k_N \mid X \cap \text{Fréchet}(\theta, \delta), \omega = LTPD_{FN}\right] = \beta \Leftrightarrow$$

$$LTPD_{FN} = 1 - e^{-\left(\frac{\sum_{i=1}^{F^{-1}(\beta)} x_i}{nU_F \left(\frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}} \sqrt{\Gamma\left(1-\frac{2}{\theta}\right) - \Gamma^2\left(1-\frac{1}{\theta}\right) + \Gamma\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}\right)}\right)^\theta}$$

- Os valores de  $LTPD_F$  e  $k_F$  da coluna “Dados Fréchet Ajuste à Fréchet” foram obtidos pela solução do sistema (6.34), tal que

$$\begin{cases} k_F = -\frac{2n \ln(1 - AQL)}{\chi_{2n; \alpha}^2} \\ LTPD_F = 1 - e^{-\frac{k_F \chi_{2n; 1-\beta}^2}{2n}} \end{cases}$$

Dimensão da amostra, $n$	$\alpha_N$ ( $\sigma$ conhecido) se $\alpha_F$ ( $\theta=5, \delta=10$ ) é 0.05			$\alpha_F$ ( $\theta=5, \delta=10$ ) se $\alpha_N$ ( $\sigma$ conhecido) é 0.05		
	$\hat{\alpha}_N$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_N$		$\hat{\alpha}_F$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_F$	
		Limite inferior	Limite superior		Limite inferior	Limite superior
10	0,036	0,024	0,049	0,062	0,050	0,074
15	0,037	0,025	0,051	0,061	0,049	0,073
20	0,038	0,026	0,052	0,060	0,048	0,073
30	0,039	0,027	0,051	0,060	0,049	0,071
35	0,039	0,028	0,052	0,060	0,048	0,071
50	0,041	0,030	0,052	0,059	0,048	0,071
75	0,042	0,030	0,054	0,058	0,046	0,070
100	0,042	0,032	0,054	0,057	0,047	0,069
150	0,044	0,033	0,056	0,056	0,045	0,069
200	0,044	0,033	0,057	0,056	0,044	0,068

**Tabela 8.15:** Resultados das simulações:  $\alpha$  estimado para o caso Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) quando o  $\alpha$  do caso Fréchet ( $\theta=5, \delta=10$ ) é 0.05 e  $\alpha$  estimado para o caso Fréchet ( $\theta=5, \delta=10$ ) quando o  $\alpha$  do caso Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) é 0.05 e Intervalo de Confiança a 95% para  $\alpha$  com  $AQL=1\%$

Relativamente à tabela 8.15, deve referir-se que os intervalos de confiança obtidos para o risco do produtor ( $\alpha$ ) são relativamente elevados, indicando que não são muito precisos.

Dimensão da amostra, n	AQL=1%							
	NORMA ( $\alpha$ não é 5%) Dados Gaussianos Ajustamento à Gaussiana ( $\sigma$ conhecido)		Ajustamento da Norma – Dados Gaussianos Ajustamento Gaussiana ( $\sigma$ conhecido)		Dados Fréchet com Ajustamento Gaussiana ( $\theta$ conhecido)		Dados Fréchet com Ajustamento Fréchet ( $\theta$ conhecido)	
	LTPD <sub>N</sub> %	K <sub>N</sub>	LTPD <sub>N</sub> %	K <sub>N</sub>	LTPD <sub>FN</sub> %	K <sub>N</sub>	LTPD <sub>F</sub> %	K <sub>F</sub>
10	8,06	1,81	8,82	1,76	4,10	1,76	0,90	0,006
15	5,81	1,90	6,25	1,87	3,20	1,87	0,92	0,007
20	4,73	1,96	5,01	1,93	2,80	1,93	0,93	0,007
30	3,66	2,03	3,83	2,00	2,20	2,00	0,94	0,008
35	3,35	2,05	3,50	2,03	2,10	2,03	0,94	0,008
50	2,79	2,09	2,88	2,08	2,00	2,08	0,95	0,008
75	2,34	2,14	2,39	2,13	1,80	2,13	0,96	0,008
100	2,10	2,16	2,14	2,15	1,60	2,15	0,97	0,009
150	1,84	2,19	1,87	2,19	1,40	2,19	0,97	0,009
200	1,70	2,21	1,72	2,21	1,40	2,21	0,97	0,009

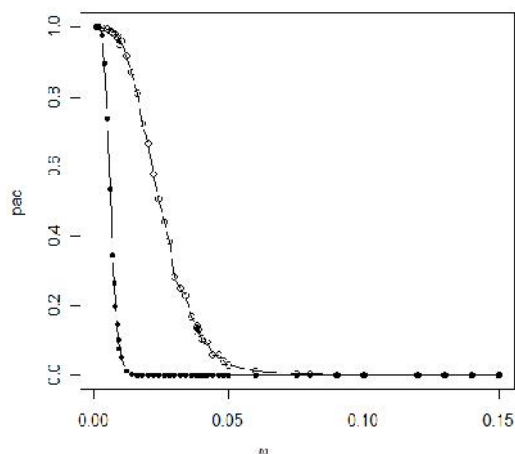
**Tabela 8.16:** Comparação do LTPD e de k, entre o caso Gaussiano com  $\sigma$  conhecido e o caso Fréchet com  $\theta$  conhecido ( $\theta=5, \delta=10$ )

Analisando os resultados das tabelas 8.15 e 8.16, pode verificar-se, uma vez mais, que se se utilizar os valores da Norma (caso clássico) sendo a característica de qualidade uma variável Fréchet, o risco do produtor (assim como o do consumidor) é mal calculado. Exemplificando, à semelhança dos casos anteriores, se se considerar um AQL=1%, n=10,  $\theta$  conhecido e igual a 5 e  $\alpha=5\%$  (risco do produtor) e se se ignorar que a característica de qualidade é uma variável aleatória com distribuição Fréchet, assumindo-se portanto que é Gaussiana, a norma é consultada para a obtenção dos valores de k e LTPD, respectivamente 1.81 e 8.06. Ora, com este k o produtor incorre num risco real estimado de 3.8% e a fracção não conforme do consumidor para um risco de 10% é de 0.9%. Assim, para assegurar um risco de 5%, a norma deve ser consultada com um risco de 3.6%, obtendo-se um k=1.76. Contudo, com este k, a fracção não conforme relativa ao consumidor é de 4.10%, o que para ele é prejudicial, pois assumiria uma fracção não conforme superior à que assumiria caso o plano específico fosse utilizado.

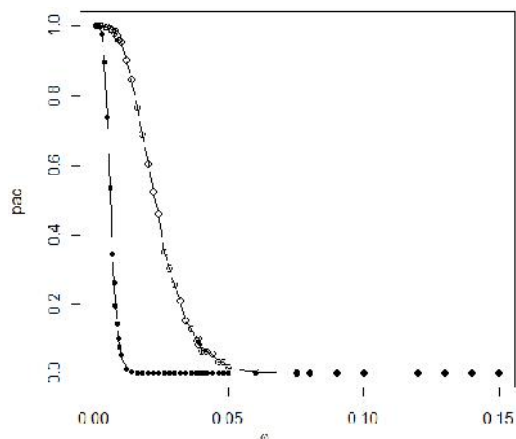
As figuras 8.29 a 8.36, mostram as curvas OC para os casos Fréchet ( $\theta=5, \delta=10$ ) e Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) – numeração par – e Fréchet ( $\theta=7, \delta=10$ ) e Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) – numeração ímpar, já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando, uma vez mais, AQL=1% e n={10, 20, 50, 100}, onde  $\omega$  representa a gama de fracções não conformes. A probabilidade de aceitação para a fracção não conforme  $\omega$ , é dada, para o caso Gaussiano e Fréchet respectivamente, por

$$Pac_N(\omega) = F_{\sum_{i=1}^n X_i} \left( n\delta \sqrt{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\theta}\right) - \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)\right)^2} \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}} + n\delta \Gamma\left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \right) \quad (19) \quad e$$

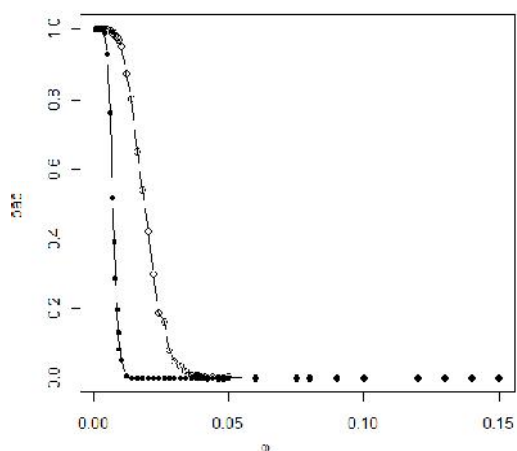
$$Pac_F(\omega) = F_{\chi^2_{2n}} \left( -\frac{2n \ln(1-\omega)}{k_F} \right).$$



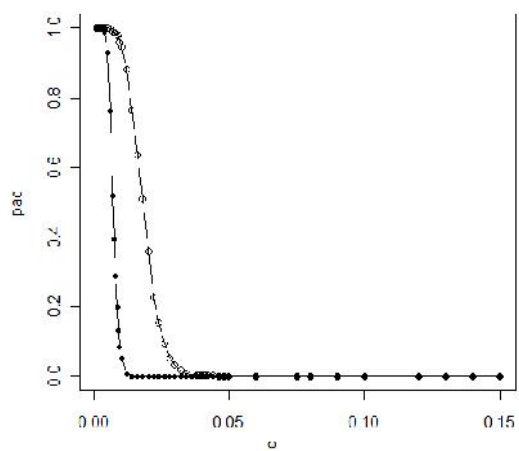
**Figura 8.29:** Curvas OC para os casos Fréchet ( $\theta=5, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=10$



**Figura 8.30:** Curvas OC para os casos Fréchet ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=10$



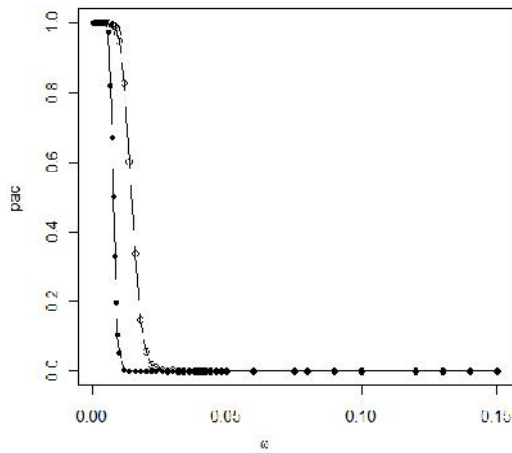
**Figura 8.31:** Curvas OC para os casos Fréchet ( $\theta=5, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=20$



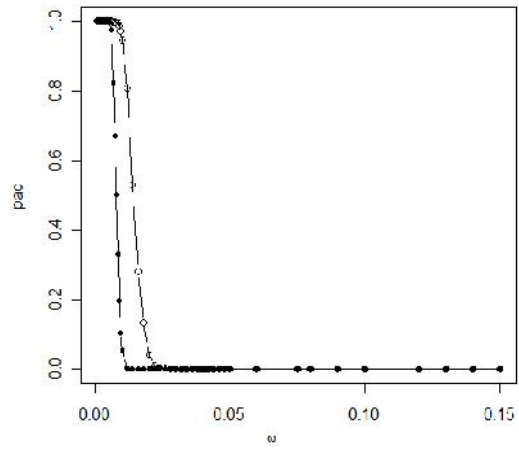
**Figura 8.32:** Curvas OC para os casos Fréchet ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=20$

<sup>(19)</sup> Confirmação: Substituindo a expressão de  $\alpha_N$  em  $Pac_N(AQL)$ , obtém-se

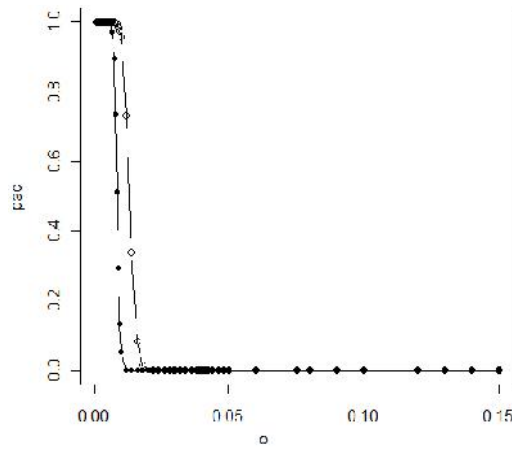
$$Pac_N(AQL) = F_{\sum_{i=1}^n X_i} \left( F^{-1} \left( 1 - \alpha_F \right) - nU_N + nU_N \right) = 1 - \alpha_F, \text{ o indica que os planos são comparáveis.}$$



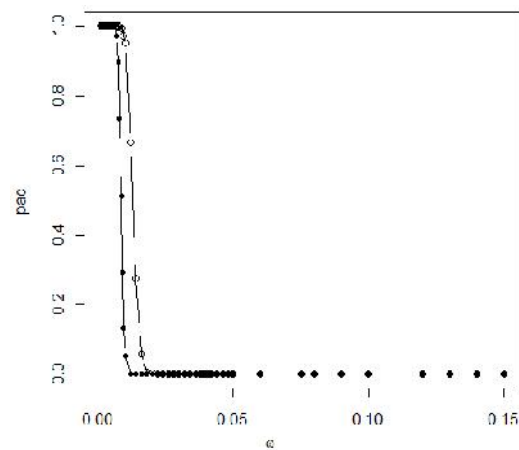
**Figura 8.33:** Curvas *OC* para os casos Fréchet ( $\theta=5, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$



**Figura 8.34:** Curvas *OC* para os casos Fréchet ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$



**Figura 8.35:** Curvas *OC* para os casos Fréchet ( $\theta=5, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$



**Figura 8.36:** Curvas *OC* para os casos Fréchet ( $\theta=7, \delta=10$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$

Analisando as figuras 8.29 a 8.36, pode verificar-se que as curvas *OC* dos casos Fréchet ( $\theta=5, \delta=10$ ) – com um coeficiente de assimetria igual a 3,535 e um índice de peso de cauda 1,357 – e Fréchet ( $\theta=7, \delta=10$ ) – com um coeficiente de assimetria igual a 2,425 e um índice de peso de cauda 1,264 – são muito idênticas, indicando uma fraca influência do parâmetro de forma ( $\theta$ ) nos resultados. Quanto ao parâmetro de escala ( $\delta$ ), não há influência nos resultados pois as expressões não dependem do seu valor (ver sistema (6.37)). Pode ver-se ainda que com o aumento da dimensão da amostra as curvas decrescem mais rapidamente e as diferenças entre o caso específico e clássico esbatem-se.

Da tabela 8.17, constam os resultados da comparação das taxas de resultados coincidentes (aceitação ou rejeição do lote) entre os dois planos, o específico e o clássico. Analisando os resultados, pode ver-se que com o aumento do valor do parâmetro de forma,  $\theta$ , ocorre uma diminuição da taxa de resultados coincidentes.

Distribuição Fréchet( $\theta, \delta$ )	Taxa de resultados coincidentes (%) para n=	10	20	50	100
	Fréchet (5,10)		83,33	79,80	75,03
Fréchet (7,10)		81,70	77,63	74,97	72,90

**Tabela 8.17:** Comparação dos métodos específico e clássico: Taxa de resultados coincidentes, a aceitação ou rejeição do lote, entre o caso Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) e caso Fréchet ( $\theta$  conhecido), com ajuste dos  $\alpha$ 's

### 8.5.2. Gaussiana ( $\sigma$ desconhecido) vs Fréchet ( $\theta$ desconhecido)

Quando a característica de qualidade de interesse segue uma distribuição Fréchet com  $\theta$  desconhecido, à semelhança das situações anteriores, ter-se-á que proceder em primeiro lugar ao ajuste dos  $\alpha$ 's para que se possam comparar os resultados dos planos de amostragem do caso clássico com o específico. Para tal, vai considerar-se uma vez mais, o limite superior de especificação, U, e o procedimento seguido para o ajuste dos  $\alpha$ 's é o que a seguir se descreve:

- i) Determina-se a média e o desvio padrão da Fréchet, dados em (8.25);
- ii) A aceitação do lote no caso Gaussiano com  $\sigma$  desconhecido (dados Gaussianos – ajuste à Gaussiana) é dada pela condição da expressão (8.11);
- iii) A aceitação do lote no caso Fréchet com  $\theta$  desconhecido (dados Fréchet – ajuste à Fréchet), com base no resultado (6.49) é:

$$Q_F = \left( \frac{U_F}{\hat{\delta}} \right)^{-\hat{\theta}} \leq k_F \Leftrightarrow Q'_F = \left( \frac{U_F}{\hat{\delta}} \right)^{\hat{\theta}} \geq \frac{1}{k_F}. \quad (8.28)$$

Por processos de simulação, determinar  $k_F$  e a distribuição de  $Q_F$ .

- iv) De acordo com (8.25), (8.12) e (8.28) e designando  $\alpha_{NF}$  a probabilidade de erro tipo I, no caso dos dados serem Fréchet e se proceder ao ajuste à Gaussiana, tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha_{FN} &= P(\text{rej. } H_0 | \delta_0, X \cap \text{Fréchet}(\theta, \delta)) \Leftrightarrow \\ \alpha_{FN} &= P\left( Q_N \leq -\frac{F_{t_{n-1}(\lambda)}^{-1}(1-\alpha_N)}{\sqrt{n}} | \delta_0, X \cap \text{Fréchet}(\theta, \delta) \right) \Leftrightarrow \\ \alpha_{FN} &= F_{Q_N} \left( -\frac{F_{t_{n-1}(\lambda_0)}^{-1}(1-\alpha_N)}{\sqrt{n}} \right) \Leftrightarrow -\frac{F_{t_{n-1}(\lambda_0)}^{-1}(1-\alpha_N)}{\sqrt{n}} = F_{Q_N}^{-1}(\alpha_{FN}) \Leftrightarrow \\ \alpha_{FN} &= 1 - F_{t_{n-1}(\lambda_0)} \left( -\sqrt{n} F_{Q_N}^{-1}(\alpha_{FN}) \right), \text{ com } \lambda_0 = \sqrt{n} z_{AQL}. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Uma vez que  $Q_N = \frac{U_N - \bar{X}_F}{S_F}$ , ter-se-á que determinar  $U_N$  dado que  $\bar{X}_F$  e  $S_F$  (média e desvio padrão da v.a. Fréchet, respectivamente) são simulados. Desta forma, a distribuição de  $Q_N$  é desconhecida, pelo que terá de ser determinada por métodos de simulação. Sabendo que no caso Gaussiano com  $\sigma$  desconhecido a fracção não conforme,  $\omega$ , é dada por  $\omega = 1 - \Phi\left(\frac{U_N - \mu}{\sigma}\right)$ , pelo que se tem  $U_N = \mu_0 + \sigma_0 z_{1-AQL}$ , sendo  $\mu_0$  e  $\sigma_0$  o valor médio e o desvio padrão da distribuição Fréchet, respectivamente, dados em (8.25).

Após o ajuste dos  $\alpha$ 's (tabela 8.18), procede-se então à comparação dos planos de amostragem, recorrendo para tal, a  $k$  e a  $LTPD$  (tabela 8.19).

Da tabela 8.18 constam além de  $\alpha_N$  e  $\alpha_F$ , os intervalos e confiança a 95% para  $\alpha_N$  e  $\alpha_F$ , uma vez que a distribuição da soma de variáveis aleatórias com distribuição Fréchet é desconhecida terá de ser determinada por simulação.

Para a construção da tabela 8.19, foi necessário passar por várias etapas, que a seguir se descrevem:

- A coluna “NORMA ( $\alpha$  não é 5%! ) Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$  desconhecido)”, os valores da constante de aceitação,  $k_N$ , e da fracção não conforme  $LTPD_N$ , são obtidos pela resolução do sistema (8.15), resolvendo-se a segunda equação em ordem ao parâmetro de não centralidade da distribuição  $t$  não Central,  $\lambda_1$ , e de seguida em ordem a  $LTPD_N$ , sem se proceder ao ajuste dos  $\alpha$ 's tal como descrito no subcapítulo 8.3.2;
- Os valores de  $k_N$  e  $LTPD_N$  da coluna “Ajustamento da Norma – Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$  desconhecido)” são obtidos através da resolução do sistema (8.15) substituindo  $\alpha$  por  $\alpha_N$ , dado por (8.29);
- Na coluna “Dados Fréchet Ajuste à Gaussiana” atendendo à primeira equação de (8.15), ao sistema (6.50), que a aceitação do lote para a fracção não conforme  $LTPD_{FN}$  é  $\beta$ , ou seja  $Pac_N(LTPD_{FN}) = \beta$ , aos resultados (3.31) e (3.32), e que  $\mu_1 = U_N + \sigma z_{LTPD_{FN}}$ , tem-se:

$$P(Q_N \geq k_N | X \cap Fréchet(\theta, \delta), \omega = LTPD_{FN}) = \beta \Leftrightarrow$$

$$P\left(\frac{U_N - \bar{X}_F}{S_F} \geq k_N | \mu = \mu_1\right) = \beta \Leftrightarrow LTPD_{FN} : F_{t_{n-1}(\lambda_1)}(-k_N \sqrt{n}) = \beta, \text{ com } \lambda_1 = \sqrt{n} z_{LTPD_{FN}}; (8.30)$$

- Quanto à coluna “Dados Fréchet Ajuste à Fréchet ( $\theta$  desconhecido)”, os valores de  $k_F$  e  $LTPD_F$ , foram obtidos pela resolução do sistema (6.50), recorrendo a métodos de simulação, tal que

$$\begin{cases} P(Q_F \leq K_F | \omega = AQL) = 1 - \alpha \\ P(Q_F \leq K_F | \omega = LTPD_W) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_F = F_{Q_F}^{-1}(1 - \alpha) \\ LTPD_F : P(Q_F \leq K_F | \omega = LTPD_F) = \beta \end{cases} \quad (8.31)$$

Dimensão da amostra, $n$	$\alpha_N$ ( $\sigma$ desconhecido) se $\alpha_F$ ( $\theta=5, \delta=10$ ) é 0,05			$\alpha_F$ ( $\theta=5, \delta=10$ ) $\alpha_N$ ( $\sigma$ desconhecido) é 0,05			$\alpha_N$ ( $\sigma$ desconhecido) se $\alpha_F$ ( $\theta=7, \delta=10$ ) é 0,05			$\alpha_F$ ( $\theta=7, \delta=10$ ) $\alpha_N$ ( $\sigma$ desconhecido) é 0,05		
	$\hat{\alpha}_N$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_N$		$\hat{\alpha}_F$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_F$		$\hat{\alpha}_N$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_N$		$\hat{\alpha}_F$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_F$	
		Limite inferior	Limite superior		Limite inferior	Limite superior		Limite inferior	Limite superior		Limite inferior	Limite superior
10	0,0011	0,0003	0,0028	0,127	0,110	0,144	0,0020	0,0010	0,004	0,130	0,114	0,147
15	0,0005	0,0000	0,0013	0,140	0,123	0,158	0,0010	0,0001	0,002	0,142	0,124	0,159
20	0,0002	0,0000	0,0007	0,149	0,131	0,167	0,0006	0,0002	0,002	0,150	0,131	0,167
30	0,0001	0,0000	0,0003	0,162	0,144	0,181	0,0003	0,0000	0,0008	0,161	0,142	0,179
35	0,0001	0,0000	0,0002	0,166	0,147	0,185	0,0003	0,0000	0,0007	0,165	0,147	0,185
50	0,0000	0,0000	0,0001	0,177	0,158	0,197	0,0001	0,0000	0,0003	0,175	0,155	0,195
100	0,0000	0,0000	0,0001	0,197	0,177	0,218	0,0000	0,0000	0,0002	0,192	0,173	0,213

**Tabela 8.18:** Resultados das simulações:  $\alpha$  estimado para o caso Gaussiano ( $\sigma$  desconhecido) quando o  $\alpha$  do caso Fréchet ( $\theta$  desconhecido) é 0.05 e  $\alpha$  estimado para o caso Fréchet ( $\theta$  desconhecido) quando o  $\alpha$  do caso Gaussiano ( $\sigma$  desconhecido) é 0.05 e Intervalo de Confiança a 95% para  $\alpha$

Dimensão da amostra, $n$	AQL=1%												
	NORMA ( $\alpha$ não é 5%!) Dados Gaussianos ajuste à Gaussiana ( $\sigma$ desconhecido)	Dados Fréchet com $\delta=10, \theta=5$						Dados Fréchet com $\delta=10, \theta=7$					
		$LTPD_N$ %	$k_N$	$LTPD_{FN}$ %	$k_{FN}$	$LTPD_F$ %	$k_F$	I.C a 95% para $k_F$	$LTPD_{FN}$ %	$k_{FN}$	$LTPD_F$ %	$k_F$	I.C a 95% para $k_F$
10	18,2	1,56	10	1,09	15	0,040	(0,038;0,046)	10	1,12	14	0,040	(0,038;0,046)	
15	12,9	1,68	9	1,19	10	0,035	(0,032;0,038)	8	1,24	10	0,035	(0,032;0,038)	
20	10,2	1,75	7,5	1,26	8	0,031	(0,029;0,033)	7,5	1,32	8	0,031	(0,029;0,033)	
30	7,5	1,84	6	1,36	6	0,026	(0,025;0,028)	6	1,43	6,2	0,026	(0,024;0,028)	
35	6,7	1,87	6	1,39	5	0,024	(0,023;0,026)	5	1,47	5,1	0,025	(0,023;0,026)	
50	5,2	1,94	4,6	1,45	4,1	0,022	(0,021;0,023)	4,2	1,55	4,2	0,022	(0,021;0,023)	
100	3,5	2,04	3,3	1,63	2,9	0,018	(0,017;0,019)	3,1	1,71	2,9	0,018	(0,017;0,019)	

**Tabela 8.19:** Resultados das simulações: Comparação do  $LTPD$  e de  $k$ , entre o caso Gaussiano com  $\sigma$  desconhecido e o caso Fréchet com  $\theta$  desconhecido (dados simulados com ( $\delta=10, \theta=5$ ) e ( $\delta=10, \theta=7$ ))

Uma vez mais, antes da análise dos resultados apresentados nas tabelas 8.18 e 8.19, deve referir-se a existência de alguma dificuldade na estimação dos parâmetros de forma,  $\theta$ , e escala,  $\delta$ , da distribuição Fréchet, essencialmente no caso de amostras de pequena dimensão. Para a estimação dos parâmetros, foram experimentadas várias funções do *software* R-Cran, nomeadamente a função `fgev()` do *package* `evd`; a função `mle()` do *package* `stats4` e a função `fitdistr()` do *package*

MASS, esta última via distribuição Weibull. De entre estas três funções a que conduziu a melhores estimativas, apesar de não serem muito boas no caso de amostras pequenas, foi a função  $\text{fitdistr}()$  do package MASS, via distribuição Weibull. Ora, esta situação vai influenciar os resultados dando a ilusão de que para o caso de amostras pequenas é preferível o recurso aos planos clássicos.

Analisando agora os resultados das tabelas 8.18 e 8.19, pode ver-se uma vez mais que erros são cometidos ao utilizar-se o caso clássico com  $\sigma$  desconhecido quando a característica de qualidade é uma v.a. com distribuição Fréchet no caso  $\theta$  desconhecido, nomeadamente o risco do produtor ( $\alpha$ ), assim como o risco do consumidor ( $\beta$ ). Motivo pelo qual se procedeu em primeiro lugar ao ajuste dos  $\alpha$ 's para se poder comparar os  $\beta$ 's. Note-se que, se se considerar  $AQL=1\%$ ,  $n=30$  e sendo  $\theta$  desconhecido (simulado com  $\theta=5$ ) e se pretender um risco do produtor de 5%, é consultada a norma e determinam-se os valores de  $k$  e  $LTPD$  (iguais a 1.84 e 7,5%, respectivamente). Ora, com este  $k$ , o produtor incorre num risco real estimado de 16.2% (o risco de 5% é falacioso) e a fracção não conforme do consumidor para um risco de 10% é de 6%. Assim sendo, para assegurar um risco de 5%, a norma deve ser consultada com um risco estimado de 0.01%, obtendo-se um  $k=1.36$ . Contudo, com este  $k$ , a fracção não conforme assumida pelo consumidor é de 6%, que é igual à fracção não conforme que assumiria caso o plano específico fosse considerado (6%).

Da tabela 8.19, verifica-se ainda que as discrepâncias entre os casos clássico e específico são menores para valores de  $\theta$  maiores (menor assimetria da distribuição e menor índice de peso de cauda) e diminuem com o aumento da dimensão das amostras,  $n$ .

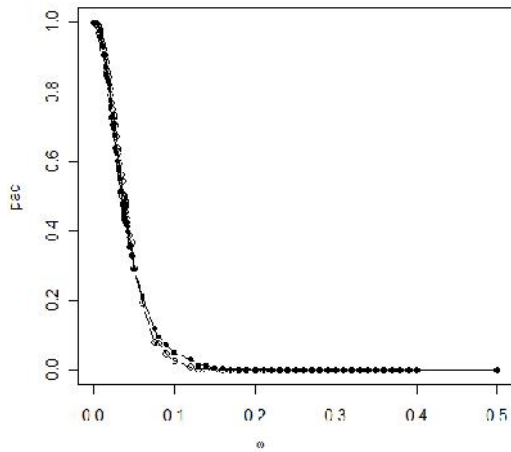
As figuras 8.37 a 8.44, mostram as curvas  $OC$  para os casos Fréchet ( $\theta$  desconhecido) e Gaussiano ( $\sigma$  desconhecido) – numeração par dados simulados Fréchet com  $\delta=10$ ,  $\theta=5$  e numeração ímpar dados simulados Fréchet com  $\delta=10$ ,  $\theta=7$ , já com o ajuste dos  $\alpha$ 's, onde a probabilidade de aceitação do lote para a gama de fracções não conformes,  $\omega$ , para cada caso respectivamente, é

dada por  $Pac_F(\omega) = 1 - F_{Q_F}(k_F)$  e  $Pac_N(\omega) = 1 - F_{Q_N}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} F_{t_{n-1}}^{-1}(\lambda)(1 - \alpha_N)\right)^{(20)}$ ,  $\lambda = \sqrt{n} z_\omega$ .

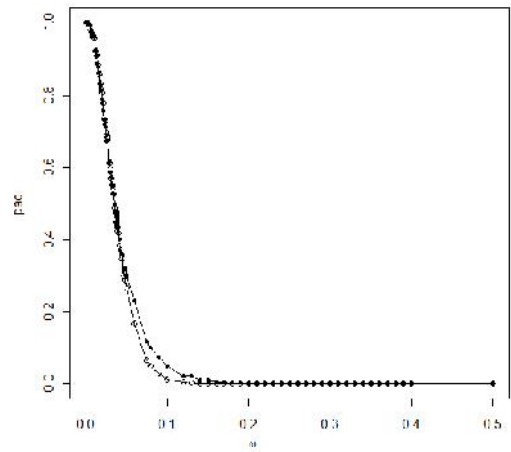
Considerando-se que  $AQL=1\%$  e  $n=\{20, 30, 50, 100\}$ .

---

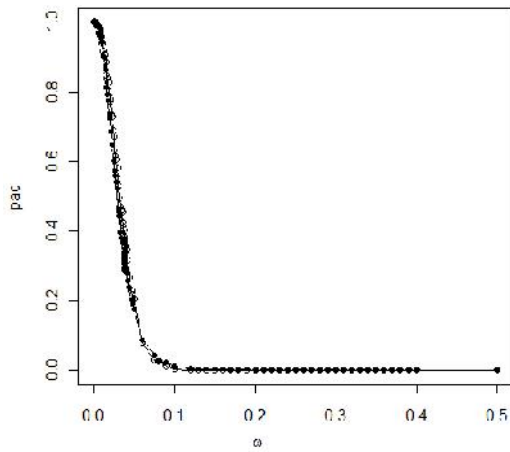
<sup>(20)</sup> Confirmação: substituindo  $\alpha_N$  e  $\omega$  respectivamente, pela sua expressão e por  $AQL$  em  $Pac_N(\omega)$  obtém-se  $Pac_N(AQL) = 1 - \alpha_F$ , mostrando assim que os planos são comparáveis.



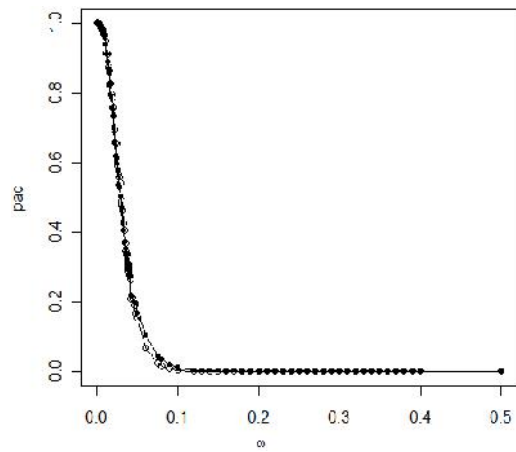
**Figura 8.37:** Curvas *OC* para os casos Fréchet ( $\delta=10, \theta=5$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=20$



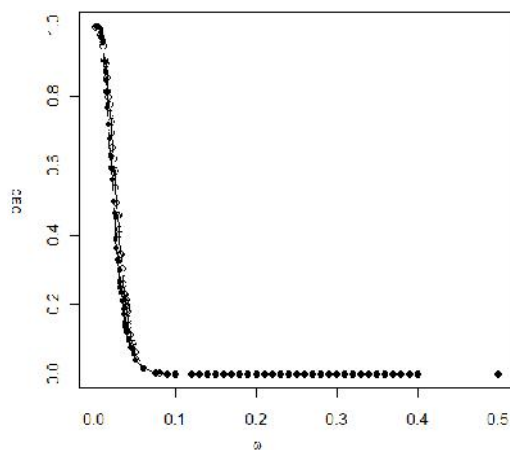
**Figura 8.38:** Curvas *OC* para os casos Fréchet ( $\delta=10, \theta=7$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=20$



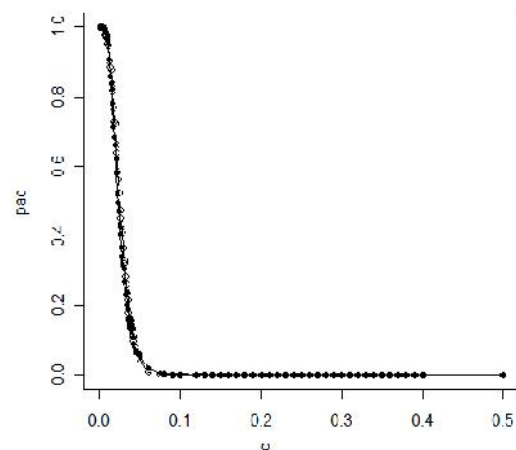
**Figura 8.39:** Curvas *OC* para os casos Fréchet ( $\delta=10, \theta=5$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=30$



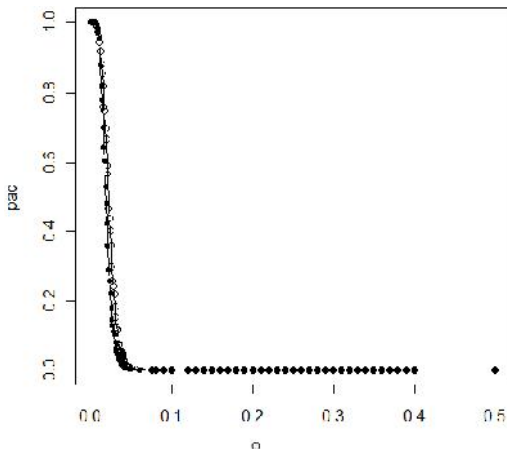
**Figura 8.40:** Curvas *OC* para os casos Fréchet ( $\delta=10, \theta=7$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=30$



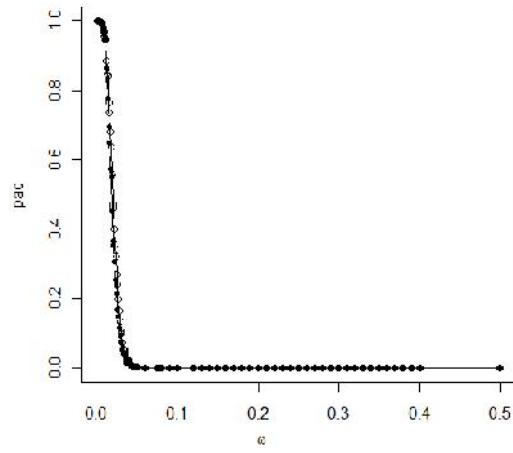
**Figura 8.41:** Curvas *OC* para os casos Fréchet ( $\delta=10, \theta=5$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$



**Figura 8.42:** Curvas *OC* para os casos Fréchet ( $\delta=10, \theta=7$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$



**Figura 8.43:** Curvas OC para os casos Fréchet ( $\delta=10, \theta=5$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$



**Figura 8.44:** Curvas OC para os casos Fréchet ( $\delta=10, \theta=7$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$

Da análise dos gráficos das figuras 8.37 a 8.44, pode ver-se no caso de amostras pequenas, independentemente do valor de  $\theta$ , a estimação dos parâmetros não é boa, pelo que as curvas OC dão a ideia errada de que é preferível a utilização dos planos clássicos. Com o aumento de  $n$ , as curvas OC decrescem mais rapidamente para maiores valores de  $\theta$  (distribuições com menor assimetria e índice de peso de cauda) diluindo-se também discrepâncias entre os dois planos. É visível, também que para maiores valores de  $\theta$  as discrepâncias entre os dois planos é menor. Relativamente ao parâmetro de escala,  $\delta$ , não exerce influência nos resultados pois as expressões não dependem do seu valor.

Da tabela 8.20, constam as taxas de resultados coincidentes, para avaliar a performance dos planos de Amostragem de Aceitação clássico e específico. Da sua análise verifica-se que com o aumento do valor de  $\theta$  a taxa de resultados coincidentes aumenta ligeiramente. Verifica-se ainda que, com o aumento de  $n$  a taxa de resultados coincidentes diminui.

Distribuição Fréchet( $\theta, \delta$ )	Taxa de resultados coincidentes (%) para n=			
	10	20	50	100
Fréchet(5,10)	95,40	94,00	93,73	92,87
Fréchet(7,10)	95,40	94,20	94,10	93,53

**Tabela 8.20:** Comparação dos métodos específico e clássico: Taxa de resultados iguais, a aceitação ou rejeição do lote, entre o caso Gaussiano ( $\sigma$  desconhecido) e caso Fréchet ( $\theta$  desconhecido), com ajuste dos  $\alpha$ 's

À semelhança do que foi feito para o caso Weibull  $\theta$  desconhecido, também para o caso Fréchet  $\theta$  desconhecido se pode recorrer ao Método Delta para a determinação da distribuição assintótica do índice de qualidade, somente para o caso de amostras de dimensão elevada.

## 8.6. Caso Gaussiano vs caso Gumbel

### 8.6.1. Gaussiana ( $\sigma$ conhecido) vs Gumbel ( $\delta$ conhecido)

À semelhança dos casos anteriores, também neste caso em que a Característica de Qualidade é uma v.a. com distribuição Gumbel com  $\delta$  conhecido, terá de se proceder em primeiro lugar ao ajuste dos  $\alpha$ 's para que os resultados do caso clássico, o Gaussiano, e específico, o Gumbel, possam ser comparados. O procedimento a seguir é análogo aos anteriores e que se descreve de seguida:

i) Determina-se a média e o desvio padrão da Gumbel, que são dados respectivamente por

$$\mu = \lambda + \gamma\delta \text{ e } \sigma = \frac{\pi\delta}{\sqrt{6}}; \quad (8.32)$$

ii) A aceitação do lote no caso Gaussiano com  $\sigma$  conhecido (dados Gaussianos – ajuste à Gaussiana) é dada pela expressão (8.4);

iii) A aceitação do lote no caso Gumbel (dados Gumbel – ajuste à Gumbel), com base nos resultados (6.56) e (6.59) é:

$$Q_{Gb} = \frac{U_{Gb} - \hat{\lambda}}{\delta} \geq k_{Gb} \Leftrightarrow Q_{Gb} = \frac{U_{Gb} - \hat{\lambda}}{\delta} \geq \ln\left(-\frac{\chi_{2n;\alpha}^2}{2n \ln(1 - AQL)}\right); \quad (8.33)$$

iv) De acordo com (8.32), (8.4) e (8.33) e designando  $\alpha_{GbN}$  a probabilidade de erro tipo I, no caso dos dados serem Gumbel e se proceder ao ajuste à Gaussiana, tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha_{GbN} &= P(\text{rej. } H_0 | \lambda_0, X \cap \text{Gumbel}(\lambda, \delta)) \Leftrightarrow \\ \alpha_{GbN} &= P\left(\frac{U_N - \bar{X}_{Gb}}{\sigma} \leq z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}} \mid \lambda_0, X \cap \text{Gumbel}(\lambda, \delta)\right) \Leftrightarrow \\ \alpha_{GbN} &= P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq n\left(U_N - \sigma\left(z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}\right)\right) \mid \lambda_0, X \cap \text{Gumbel}(\lambda, \delta)\right) \Leftrightarrow^{(21)} \\ \alpha_N &= 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} F_{\sum_{i=1}^n X_i}^{-1}(1 - \alpha_{GbN}) - \frac{\sqrt{n}}{\sigma} U_N + \sqrt{n} z_{1-AQL}\right), \end{aligned} \quad (8.34)$$

onde  $U_N = \mu_0 + \sigma_0 z_{1-AQL}$ ,  $\mu_0 = \lambda_0 + \gamma\delta$  e  $\sigma = \frac{\pi\delta}{\sqrt{6}}$ , com base em (8.32).

---

<sup>(21)</sup> Como a v.a.  $\sum_{i=1}^n X_i$  tem distribuição desconhecida, terá que ser determinada por simulação.

Após o ajuste dos  $\alpha$ 's (tabela 8.21), onde são apresentados também os intervalos de confiança a 95% para  $\alpha_N$  e  $\alpha_{Gb}$  (uma vez que a distribuição da soma de variáveis aleatórias com distribuição Gumbel é desconhecida, terá de ser determinada com recurso a métodos de simulação), os resultados obtidos são os que constam da tabela 8.22, que contém os resultados para o caso Gaussiano com  $\sigma$  conhecido (dados pela norma) *versus* os casos Gumbel com  $\delta$  conhecido.

A construção da tabela 8.22 passou por várias etapas que a seguir se descreve:

- A coluna “NORMA ( $\alpha$  não é 5%! ) Dados Gaussianos Ajuste à Guassiana” os valores da constante de aceitação ( $k_N$ ) e da fracção não conforme  $LTPD_N$ , são dados por (8.7) sem se proceder ao ajuste dos  $\alpha$ 's.
- Com o ajuste dos  $\alpha$ 's obtém-se a coluna “Ajustamento da Norma – Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$  conhecido)” substituindo em (8.7)  $\alpha$  por  $\alpha_N$  dado por (8.34).
- Quanto à coluna “Dados Gumbel Ajuste à Gaussiana”, atendendo a que  $k_N = z_{1-AQL} - \frac{z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{n}}$ ,

$$U_N = \mu_0 + \sigma z_{1-AQL}, \quad \mu_0 = \lambda_0 + \gamma\delta \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{\pi\delta}{\sqrt{6}},$$

sistema (6.58) e que a aceitação do lote para a

fracção não conforme  $LTPD_{GbN}$  é  $\beta$ , ou seja,  $PAC_N(LTPD_{GbN}) = \beta$ , tem-se:

$$P\left[\frac{U_N - \bar{X}_{Gb}}{\sigma} \geq k_N \mid X \cap Gumbel(\lambda, \delta), \omega = LTPD_{GbN}\right] = \beta \Leftrightarrow$$

$$LTPD_{GbN} = 1 - e^{-e^{\frac{1}{n\delta} \sum_{i=1}^n x_i - (\beta) \frac{\pi z_{1-\alpha_N} z_{1-AQL} + U_{Gb} - \gamma}{\sqrt{6n} \delta}}}$$

- Os valores de  $LTPD_{Gb}$  e  $k_{Gb}$  da coluna “Dados Gumbel Ajuste à Gumbel” foram obtidos pela solução do sistema (6.59), tal que

$$\begin{cases} k_{Gb} = \ln\left(-\frac{\chi^2_{2n;\alpha}}{2n \ln(1 - AQL)}\right) \\ LTPD_{Gb} = 1 - e^{-\ln\left(\frac{\chi^2_{2n;1-\beta}}{2n}\right) e^{-k_{Gb}}} \end{cases}$$

Das tabelas 8.21 e 8.22 constam, respectivamente, os resultados das simulações para estimar  $\alpha$  e respectivo intervalo de confiança e os resultados das comparações de  $LTPD$  e  $k$  entre o caso clássico (o Gaussiano com  $\sigma$  conhecido) e o específico (o Gumbel com  $\delta$  conhecido).

Dimensão da amostra, $n$	$\alpha_N$ ( $\sigma$ conhecido) se $\alpha_{Gb}$ ( $\lambda=11, \delta=0,5$ ) é 0,05			$\alpha_{Gb}$ ( $\lambda=1, \delta=0,55$ ) se $\alpha_N$ ( $\sigma$ conhecido) é 0,05		
	$\hat{\alpha}_N$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_N$		$\hat{\alpha}_{Gb}$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_W$	
		Limite inferior	Limite superior		Limite inferior	Limite superior
10	0,0410	0,0309	0,0530	0,0586	0,0467	0,0700
15	0,0426	0,0320	0,0551	0,0571	0,0447	0,0687
20	0,0434	0,0331	0,0557	0,0564	0,0453	0,0687
30	0,0444	0,0333	0,0571	0,0555	0,0433	0,0667
35	0,0448	0,0349	0,0565	0,0551	0,0440	0,0667
50	0,0457	0,0348	0,0573	0,0543	0,0427	0,0660
75	0,0464	0,0358	0,0588	0,0536	0,0427	0,0653
100	0,0467	0,0361	0,0580	0,0533	0,0420	0,0647
150	0,0473	0,0365	0,0585	0,0526	0,0427	0,0640
200	0,0476	0,0366	0,0583	0,0524	0,0413	0,0640

**Tabela 8.21:** Resultados das simulações:  $\alpha$  estimado para o caso Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) quando o  $\alpha$  do caso Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) é 0.05 e  $\alpha$  estimado para o caso Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) quando o  $\alpha$  do caso Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) é 0.05 e Intervalo de Confiança a 95% para  $\alpha$

Dimensão da amostra, $n$	AQL=1%							
	NORMA ( $\alpha$ não é 5%!) Dados Gaussianos Ajustamento à Gaussiana ( $\sigma$ conhecido)		Ajustamento da Norma – Dados Gaussianos Ajustamento Gaussiana ( $\sigma$ conhecido)		Dados Gumbel com Ajustamento Gaussiana ( $\delta$ conhecido)		Dados Gumbel com Ajustamento Gumbel ( $\delta$ conhecido)	
	$LTPD_N$ %	$K_N$	$LTPD_N$ %	$K_N$	$LTPD_{GbN}$ %	$K_N$	$LTPD_{Gb}$ %	$K_{Gb}$
10	8,06	1,81	8,51	1,78	3,20	1,78	0,65	3,99
15	5,81	1,90	6,05	1,88	2,60	1,88	0,48	4,12
20	4,73	1,96	4,88	1,94	2,40	1,94	0,39	4,18
30	3,66	2,03	3,74	2,02	2,00	2,02	0,30	4,27
35	3,35	2,05	3,42	2,04	2,00	2,04	0,27	4,30
50	2,79	2,09	2,83	2,08	1,80	2,08	0,22	4,35
75	2,34	2,14	2,36	2,13	1,60	2,13	0,17	4,40
100	2,10	2,16	2,12	2,16	1,40	2,16	0,15	4,43
150	1,84	2,19	1,85	2,19	1,40	2,19	0,12	4,46
200	1,70	2,21	1,71	2,21	1,40	2,21	0,10	4,48

**Tabela 8.22:** Comparação do  $LTPD$  e de  $k$ , entre o caso Gaussiano com  $\sigma$  conhecido e o caso Gumbel com  $\delta$  conhecido ( $\lambda=1, \delta=0.5$ )

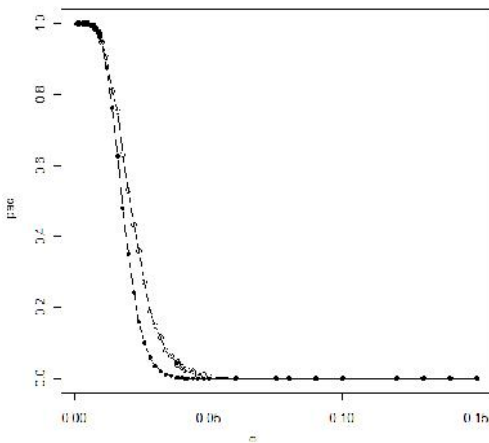
Analisando os resultados das tabelas 8.21 e 8.22, pode verificar-se, uma vez mais, que ao considerar-se o plano de Amostragem de Aceitação Clássico quando a característica de qualidade é uma v.a. com distribuição Gumbel de parâmetros  $\lambda$  e  $\delta$ , erros são cometidos podendo ocorrer prejuízo para o produtor e/ou consumidor, quer o risco do produtor quer o do consumidor são mal calculados. Para ilustrar o que foi dito anteriormente, considere-se  $AQL=1\%$ ,  $n=10$  e se se pretender um risco do produtor de 5%, consulta-se a Norma e determinam-se os valores de  $k$  e  $LTPD$ , que neste caso são 1.81 e 8.06. Mas na realidade, com este  $k$ , incorre-se num risco real,

estimado, do produtor de 5,86% (o risco de 5% não é correcto) e a fracção real não conforme para o consumidor para um risco de 10% é de 0.65%. Desta forma, para assegurar um risco de 5%, a Norma deve ser calculada com um risco estimado de 4.10%, obtendo-se a constante de aceitação,  $k$ , da antepenúltima coluna da tabela 8.22. Contudo, com este  $k$ , a fracção não conforme assumida pelo consumidor é de 3.20%, o que para ele é prejudicial, pois assumiria uma fracção não conforme superior à que assumiria caso o plano específico fosse considerado.

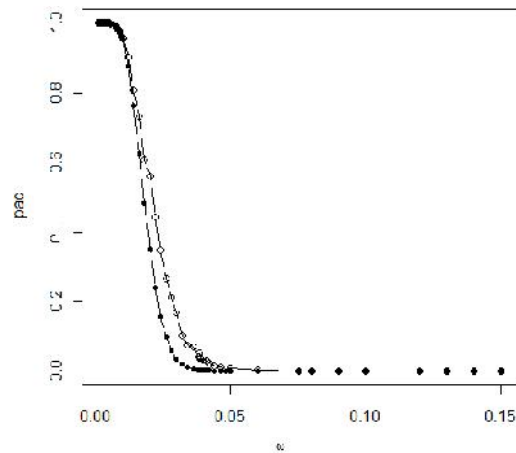
As figuras 8.45 a 8.52, mostram as curvas  $OC$  para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) e Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) – numeração par – e Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) e Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) – numeração ímpar – já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando, uma vez mais,  $AQL=1\%$  e  $n=\{10, 20, 50, 100\}$ , onde  $\omega$  representa a gama de fracções não conformes. A probabilidade de aceitação para a fracção não conforme  $\omega$ , é dada, para o caso Gaussiano e Gumbel respectivamente, por

$$Pac_N(\omega) = F_{\sum_{i=1}^n X_i} \left( \frac{n\pi\delta z_{1-\alpha_N}}{\sqrt{6n}} + n(\delta \ln(-\ln(1-\omega))) + U_{Gb} + \gamma\delta \right) \quad (22) \quad e$$

$$Pac_{Gb}(\omega) = F_{\chi^2_{2n}} \left( 2ne^{k_{Gb} + \ln(-\ln(1-\omega))} \right).$$



**Figura 8.45:** Curvas  $OC$  para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (◻), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=10$

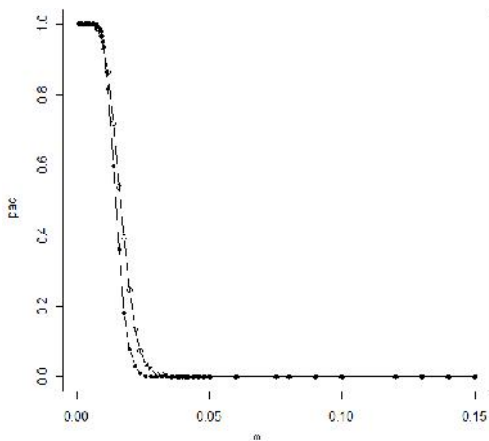


**Figura 8.46:** Curvas  $OC$  para os casos Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (◻), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=10$

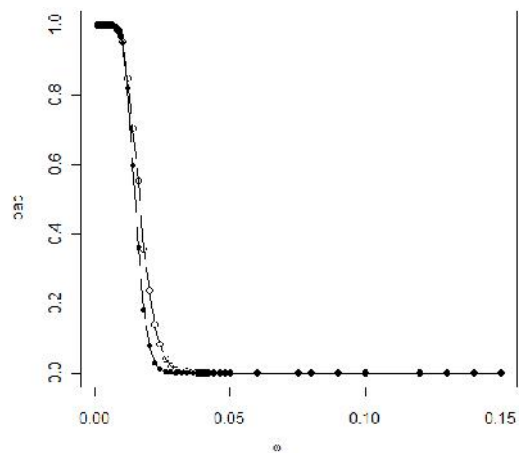
<sup>(22)</sup> Confirmação: Substituindo a expressão de  $\alpha_N$  em  $Pac_N(AQL)$ , obtém-se

$$Pac_N(AQL) = F_{\sum_{i=1}^n X_i} \left( F_{\sum_{i=1}^n X_i}^{-1} (1 - \alpha_{Gb}) - nU_N + nU_N \right) = 1 - \alpha_{Gb},$$

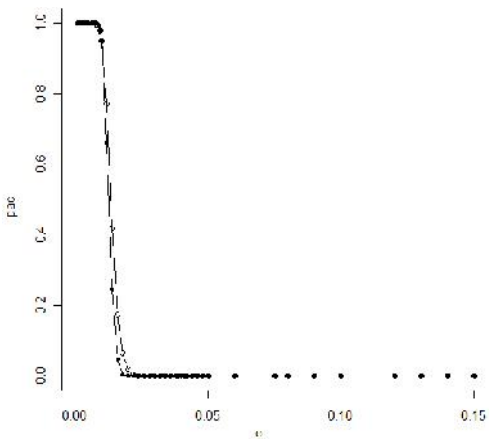
o que indica que os testes são equivalentes e por isso comparáveis.



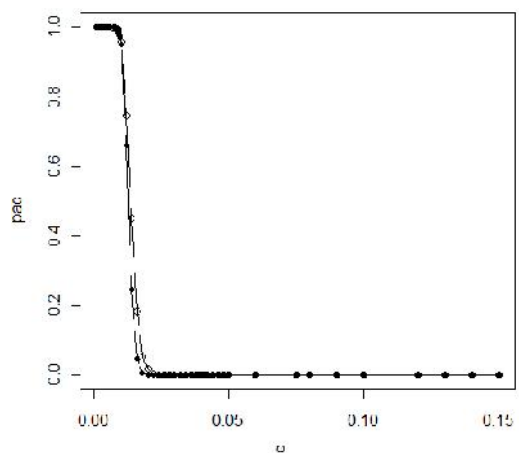
**Figura 8.47:** Curvas OC para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=20$



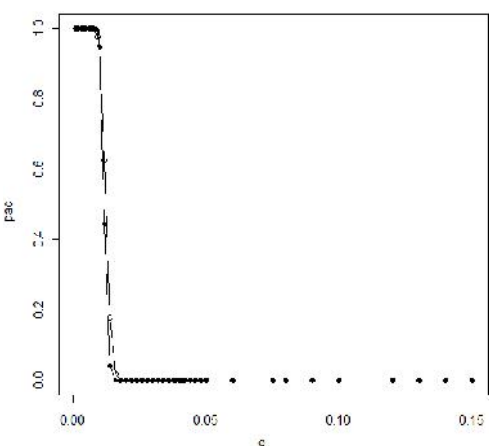
**Figura 8.48:** Curvas OC para os casos Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=20$



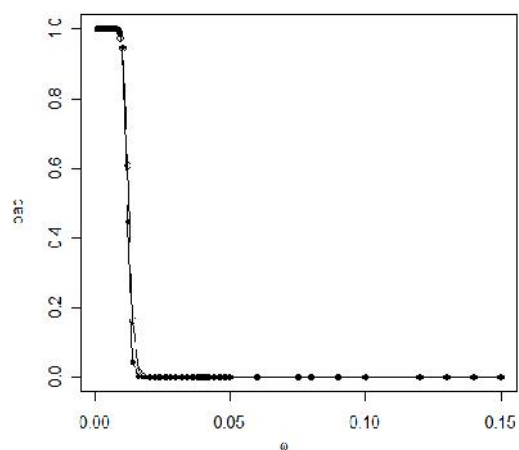
**Figura 8.49:** Curvas OC para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$



**Figura 8.50:** Curvas OC para os casos Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$



**Figura 8.51:** Curvas OC para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$



**Figura 8.52:** Curvas OC para os casos Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  conhecido (°), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$

Da análise das figuras 8.45 a 8.52, pode ver-se que se obtêm melhores resultados com o plano específico, dado que as curvas vêm sempre abaixo das curvas do plano clássico, independentemente do valor dos parâmetros e da dimensão das amostras. Isto significa que, com um plano de Amostragem de Aceitação clássico, a probabilidade de aceitação do lote é maior que no caso da utilização do plano específico, o que não é bom para o consumidor. Verifica-se também que com o aumento da dimensão da amostra,  $n$ , as curvas  $OC$  decrescem mais rapidamente (significando que a probabilidade de aceitação do lote diminui para fracções não conformes elevadas, com base na tabela 8.22) e diminuem as diferenças entre os casos clássico e específico. Quanto à influência do valor dos parâmetros  $\delta$  e  $\lambda$  nos resultados, não se verifica qualquer influência, por parte do parâmetro de localização,  $\lambda$ , e quando  $\delta$  aumenta substancialmente (por exemplo,  $\delta=5$  ou  $\delta=10$ ) as curvas  $OC$  decrescem mais rapidamente.

Da tabela 8.23, constam os resultados relativos à taxa de resultados coincidentes (aceitação ou rejeição do lote) entre os casos clássico e específico, com ajuste dos  $\alpha$ 's. Da sua análise, verifica-se que os valores dos parâmetros  $\delta$  e  $\lambda$ , não exercem influência nos resultados. Verifica-se ainda que com o aumento de  $n$ , a taxa de resultados coincidentes diminui.

Distribuição Gumbel( $\lambda, \delta$ )	Taxa de resultados coincidentes (%) para n=			
	10	20	50	100
Gumbel(1,0.5)	81,37	77,73	77,27	77,13
Gumbel(5,0.6)	81,13	77,67	77,07	76,97

**Tabela 8.23:** Comparação dos métodos específico e clássico: Taxa de resultados iguais, a aceitação ou rejeição do lote, entre o caso Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) e caso Gumbel ( $\delta$  conhecido), com ajuste dos  $\alpha$ 's

### 8.6.2. Gaussiana ( $\sigma$ desconhecido) vs Gumbel ( $\delta$ desconhecido)

Tal como efectuado para os casos anteriores, também neste caso, quando a Característica de Qualidade em estudo é uma v.a. com distribuição Gumbel ( $\delta$  desconhecido), se vai começar por proceder ao ajuste dos  $\alpha$ 's para que os planos de amostragem clássico e específico, possam ser comparados. Considerando-se uma vez mais, o limite superior de especificação,  $U$ , o procedimento seguido para o ajuste dos  $\alpha$ 's é análogo aos anteriores, e é o que a seguir se descreve:

- i) Determina-se a média e o desvio padrão da Gumbel, dados em (8.32);
- ii) A aceitação do lote no caso Gaussiano com  $\sigma$  desconhecido (dados Gaussianos – ajuste à Gaussiana) é dada pela condição da expressão (8.11);

iii) A aceitação do lote no caso Gumbel com  $\delta$  desconhecido (dados Gumbel – ajuste à Gumbel), com base no resultado (6.74) é:

$$Q_{Gb} \frac{U_{Gb} - \hat{\lambda}}{\hat{\delta}} \geq k_{Gb}. \quad (8.35)$$

Por processos de simulação, determinar  $k_{Gb}$  e a distribuição de  $Q_{Gb}$ .

iv) De acordo com (8.32), (8.12) e (8.35) e designando  $\alpha_{GbN}$  a probabilidade de erro tipo I, no caso dos dados serem Gumbel e proceder-se ao ajuste à Gaussiana, tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha_{GbN} &= P(\text{rej. } H_0 | \lambda_0, X \cap \text{Gumbel}(\lambda, \delta)) \Leftrightarrow \\ \alpha_{GbN} &= P\left(Q_N \leq -\frac{F_{t_{n-1}(\lambda)}^{-1}(1-\alpha_N)}{\sqrt{n}} | \lambda_0, X \cap \text{Gumbel}(\lambda, \delta)\right) \Leftrightarrow \\ \alpha_{GbN} &= F_{Q_N}\left(-\frac{F_{t_{n-1}(\lambda_0)}^{-1}(1-\alpha_N)}{\sqrt{n}}\right) \Leftrightarrow -\frac{F_{t_{n-1}(\lambda_0)}^{-1}(1-\alpha_N)}{\sqrt{n}} = F_{Q_N}^{-1}(\alpha_{GbN}) \Leftrightarrow \\ \alpha_N &= 1 - F_{t_{n-1}(\lambda_0)}\left(-\sqrt{n} F_{Q_N}^{-1}(\alpha_{GbN})\right), \text{ com } \lambda_0 = \sqrt{n} z_{AQL}. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Uma vez que  $Q_N = \frac{U_N - \bar{X}_{Gb}}{S_{Gb}}$ , ter-se-á que determinar  $U_N$  dado que  $\bar{X}_{Gb}$  e  $S_{Gb}$  (média e desvio

padrão da v.a. Gumbel, respectivamente) são simulados. Desta forma, a distribuição de  $Q_N$  é desconhecida, pelo que terá de ser determinada por métodos de simulação. Sabendo que no caso

Gaussiano com  $\sigma$  desconhecido a fracção não conforme,  $\omega$ , é dada por  $\omega = 1 - \Phi\left(\frac{U_N - \mu}{\sigma}\right)$ ,

consequentemente tem-se  $U_N = \mu_0 + \sigma_0 z_{1-AQL}$ , sendo  $\mu_0$  e  $\sigma_0$  o valor médio e o desvio padrão da distribuição Gumbel, respectivamente, dados em (8.32).

Após o ajuste dos  $\alpha$ 's (tabela 8.24), procede-se então à comparação dos planos de amostragem, recorrendo para tal, a  $k$  e a  $LTPD$  (tabela 8.27).

Da tabela 8.24 constam além de  $\alpha_N$  e  $\alpha_{Gb}$ , os intervalos e confiança a 95% para  $\alpha_N$  e  $\alpha_{Gb}$ , uma vez que a distribuição da soma de variáveis aleatórias com distribuição Gumbel é desconhecida terá de ser determinada por simulação.

Para a construção da tabela 8.25, foi necessário passar por várias etapas, que a seguir se descrevem:

- A coluna “NORMA ( $\alpha$  não é 5%!) Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$  desconhecido)”, os valores da constante de aceitação,  $k_N$ , e da fracção não conforme  $LTPD_N$ , são obtidos pela resolução do sistema (8.15), resolvendo-se a segunda equação em ordem ao parâmetro de não

centralidade da distribuição  $t$  não Central,  $\lambda_I$ , e de seguida em ordem a  $LTPD_N$ , sem se proceder ao ajuste dos  $\alpha$ 's tal como descrito no subcapítulo 8.3.2;

- Os valores de  $k_N$  e  $LTPD_N$  da coluna “Ajustamento da Norma – Dados Gaussianos Ajuste à Gaussiana ( $\sigma$  desconhecido)” são obtidos através da resolução do sistema (8.15) substituindo  $\alpha$  por  $\alpha_N$ , dado por (8.36);
- Na coluna “Dados Gumbel Ajuste à Gaussiana” atendendo à primeira equação de (8.15), ao sistema (6.75), que a aceitação do lote para a fracção não conforme  $LTPD_{GbN}$  é  $\beta$ , ou seja  $Pac_N(LTPD_{GbN}) = \beta$ , aos resultados (3.31) e (3.32), e que  $\mu_1 = U_N + \sigma z_{LTPD_{FN}}$ , tem-se:

$$P(Q_N \geq k_N | X \cap Gumbel(\lambda, \delta), \omega = LTPD_{GbN}) = \beta \Leftrightarrow P\left(\frac{U_N - \bar{X}_{Gb}}{S_{Gb}} \geq k_N | \mu = \mu_1\right) = \beta \Leftrightarrow LTPD_{FN} : F_{t_{n-1}(\lambda)}(-k_N \sqrt{n}) = \beta, \quad (8.37)$$

com  $\lambda_1 = \sqrt{n} z_{LTPD_{FN}}$ ;

- Quanto à coluna “Dados Gumbel Ajuste à Gumbel ( $\delta$  desconhecido)”, os valores de  $k_{Gb}$  e  $LTPD_{Gb}$ , foram obtidos pela resolução do sistema (6.75), recorrendo a métodos de simulação, tal que

$$\begin{cases} P(Q_{Gb} \geq K_{Gb} | \omega = AQL) = 1 - \alpha \\ P(Q_{Gb} \geq K_{Gb} | \omega = LTPD_W) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_{Gb} = F_{Q_{Gb}}^{-1}(\alpha) \\ LTPD_F : P(Q_{Gb} \leq K_F | \omega = LTPD_F) = 1 - \beta \end{cases} \quad (8.38)$$

Dimensão da amostra, $n$	$\alpha_N$ ( $\sigma$ desconhecido) se $\alpha_{Gb} (\lambda=1, \delta=0,5)$ é 0,05			$\alpha_{Gb} (\lambda=1, \delta=0,5)$ $\alpha_N$ ( $\sigma$ desconhecido) é 0,05			$\alpha_N$ ( $\sigma$ desconhecido) se $\alpha_{Gb} (\lambda=5, \delta=0,6)$ é 0,05			$\alpha_{Gb} (\lambda=5, \delta=0,6)$ $\alpha_N$ ( $\sigma$ desconhecido) é 0,05		
	$\hat{\alpha}_N$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_N$		$\hat{\alpha}_{Gb}$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_{Gb}$		$\hat{\alpha}_N$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_N$		$\hat{\alpha}_{Gb}$	Intervalo de Confiança a 95% para $\alpha_{Gb}$	
		Limite inferior	Limite superior		Limite inferior	Limite superior		Limite inferior	Limite superior		Limite inferior	Limite superior
10	0,0074	0,0043	0,0120	0,1168	0,1107	0,1327	0,0072	0,0041	0,0116	0,1172	0,1007	0,1340
15	0,0064	0,0034	0,0103	0,1223	0,1060	0,1393	0,0065	0,0033	0,0104	0,1229	0,1060	0,1387
20	0,0058	0,0032	0,0094	0,1266	0,1100	0,1400	0,0059	0,0033	0,0093	0,1270	0,1107	0,1433
30	0,0052	0,0028	0,0087	0,1318	0,1140	0,1487	0,0053	0,0027	0,0086	0,1311	0,1133	0,148
35	0,0049	0,0027	0,0089	0,1333	0,1160	0,1507	0,0050	0,0027	0,0081	0,1329	0,1160	0,1510
50	0,0047	0,0026	0,0079	0,1360	0,1193	0,1533	0,0050	0,0025	0,0077	0,1370	0,1187	0,1547
100	0,0041	0,0024	0,0073	0,1421	0,1212	0,1603	0,0043	0,0023	0,0072	0,1420	0,1233	0,1607

**Tabela 8.24:** Resultados das simulações:  $\alpha$  estimado para o caso Gaussiano ( $\sigma$  desconhecido) quando o  $\alpha$  do caso Gumbel ( $\delta$  desconhecido) é 0.05 e  $\alpha$  estimado para o caso Gumbel ( $\delta$  desconhecido) quando o  $\alpha$  do caso Gaussiano ( $\sigma$  desconhecido) é 0.05 e Intervalo de Confiança a 95% para  $\alpha$

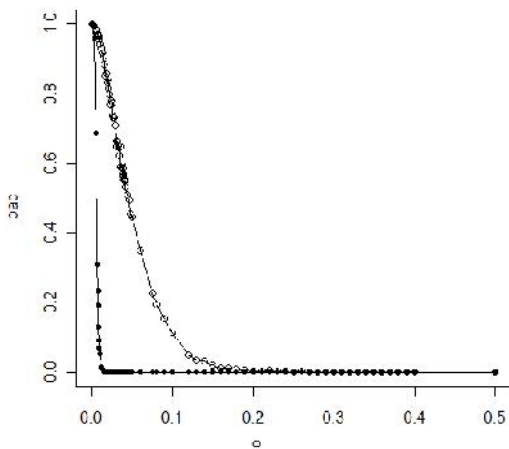
Dimensão da amostra, n		AQL=1%										
		(α não é 5%!) Dados Gaussianos ajuste à Gaussiana (σ desconhecido)		Dados Gumbel com λ=1, δ=0,5					Dados Gumbel com λ=5, δ=0,6			
				Dados Gumbel (δ desconhecido) ajuste à Gaussiana (σ desconhecido)		Dados Gumbel (δ desconhecido) ajuste à Weibull			Dados Gumbel (δ desconhecido) ajuste à Gaussiana (σ desconhecido)		Dados Gumbel (δ desconhecido) ajuste à Gumbel	
LTPD <sub>N</sub> %	K <sub>N</sub>	LTPD <sub>GbN</sub> %	K <sub>GbN</sub>	LTPD <sub>Gb</sub> %	k <sub>Gb</sub>	I.C a 95% para k <sub>Gb</sub>	LTPD <sub>GbN</sub> %	k <sub>GbN</sub>	LTPD <sub>Gb</sub> %	K <sub>Gb</sub>	I.C a 95% para k <sub>Gb</sub>	
10	18,2	1,56	10	1,23	0,9	1,17	(1,156;1,192)	10	1,27	0,9	1,17	(1,155;1,191)
15	12,9	1,68	8	1,41	0,95	1,14	(1,127;1,157)	7,5	1,41	0,9	1,15	(1,126;1,155)
20	10,2	1,75	6	1,50	0,95	1,12	(1,107;1,133)	6	1,49	0,9	1,13	(1,108;1,132)
30	7,5	1,84	4,8	1,61	0,95	1,09	(1,083;1,104)	5	1,61	0,95	1,09	(1,084;1,103)
35	6,7	1,87	4,6	1,65	0,95	1,08	(1,075;1,094)	4,6	1,62	0,95	1,08	(1,076;1,100)
50	5,2	1,94	3,8	1,74	0,95	1,06	(1,058;1,073)	3,7	1,73	0,95	1,07	(1,057;1,074)
100	3,5	2,04	2,7	1,89	0,95	1,04	(1,031;1,042)	2,5	1,88	0,95	1,03	(1,031;1,041)

**Tabela 8.25:** Resultados das simulações: Comparação do LTPD e de k, entre o caso Gaussiano com  $\sigma$  desconhecido e o caso Gumbel com  $\delta$  desconhecido (dados simulados com  $(\lambda=1, \delta=0,5)$  e  $(\lambda=5, \delta=0,6)$ )

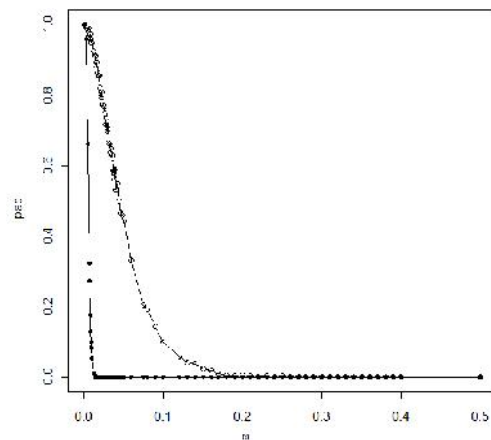
Antes de se proceder à análise dos resultados, deve referir a existência de alguma dificuldade na estimação dos parâmetros de localização,  $\lambda$ , e de escala,  $\delta$ , da distribuição Gumbel, essencialmente no caso de amostras de pequena dimensão. Para a estimação dos parâmetros, foram experimentadas várias funções do *software* R-Cran, nomeadamente a função `fgev()` do *package* `evd`; a função `mle()` do *package* `stats4` e a função `fitdistr()` do *package* `MASS`, esta última via distribuição Weibull. De entre estas três funções a que conduziu a melhores estimativas, foi a função `fitdistr()` do *package* `MASS`, via distribuição Weibull.

Passando à análise dos resultados das tabelas 8.24 e 8.25, verifica-se, uma vez mais a existência de erros grosseiros na utilização dos planos clássicos, quando a distribuição da característica de qualidade é Gumbel, quer o risco do produtor quer o do consumidor são mal calculados.. Por exemplo, se se considerar  $AQL=1\%$ ,  $n=10$ , dados simulados com  $\lambda=1$  e  $\delta=0,5$ , e se se pretender um risco do produtor de 5%, consulta-se a Norma e determinam-se os valores de  $k$  e  $LTPD$ , que neste caso são 1.56 e 18.2%, respectivamente. Mas na realidade, com este  $k$ , incorre-se num risco real, estimado, do produtor de 11.68% (o risco de 5% não é correcto) e a fracção real não conforme para o consumidor para um risco de 10% é de 0.9%. Desta forma, para assegurar um risco de 5%, a Norma deve ser calculada com um risco estimado de 0.74%, obtendo-se para a constante de aceitação,  $k$ , um valor de 1.23. Contudo, com este  $k$ , a fracção não conforme assumida pelo consumidor é de 10%, o que para ele é prejudicial, pois assumiria uma fracção não conforme superior à que assumiria caso o plano específico fosse considerado.

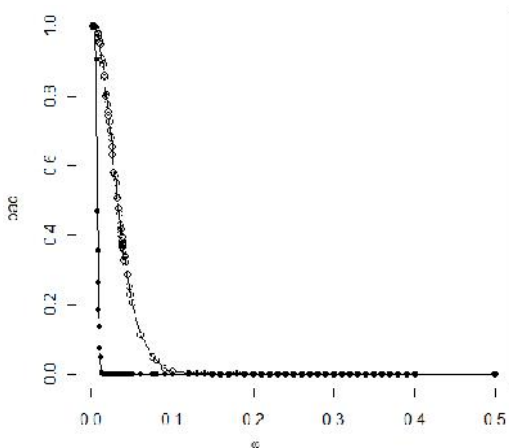
As figuras 8.53 a 8.60, mostram as curvas OC para os casos Gumbel ( $\delta$  desconhecido) e Gaussiano ( $\sigma$  desconhecido) – numeração par dados simulados Gumbel com  $\lambda=1$ ,  $\delta=0.5$  e numeração ímpar dados simulados Gumbel com  $\lambda=5$ ,  $\delta=0.6$ , já com o ajuste dos  $\alpha$ 's, onde a probabilidade de aceitação do lote para a gama de fracções não conformes,  $\omega$ , para cada caso respectivamente, é dada por  $Pac_{Gb}(\omega) = 1 - F_{Q_{Gb}}(k_{Gb})$  e  $Pac_N(\omega) = 1 - F_{Q_N}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}F_{t_{n-1}}^{-1}(\lambda)(1 - \alpha_N)\right)^{(23)}$ ,  $\lambda = \sqrt{n}z_{\omega}$ . Considerando-se que  $AQL=1\%$  e  $n=\{10, 20, 50, 100\}$ .



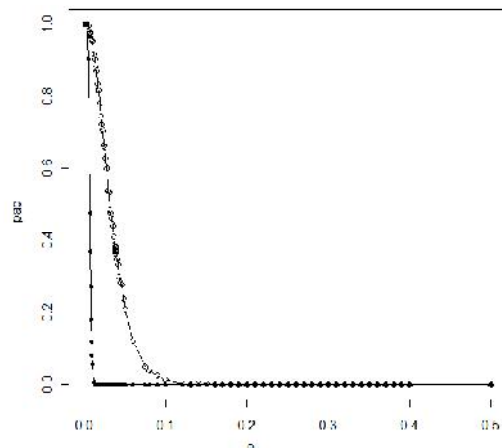
**Figura 8.53:** Curvas OC para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (○), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=10$



**Figura 8.54:** Curvas OC para os casos Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (○), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=10$

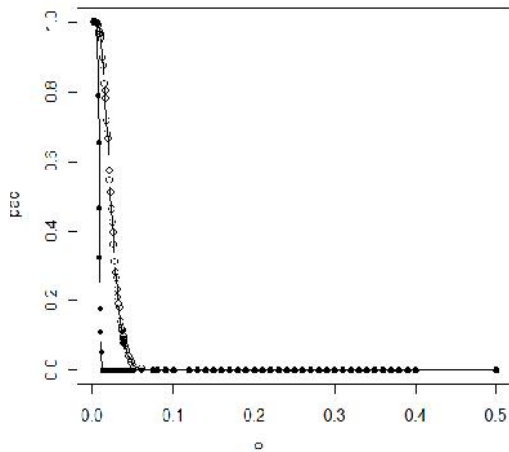


**Figura 8.55:** Curvas OC para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (○), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=20$

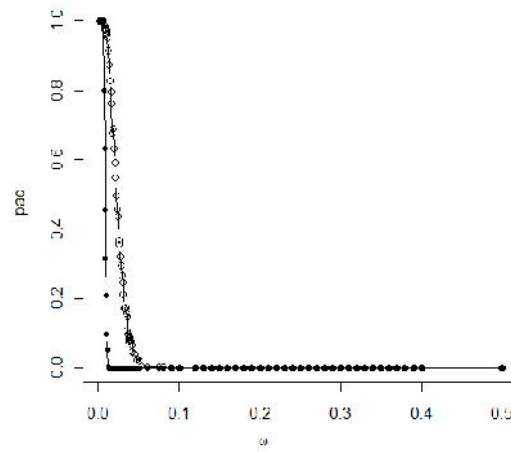


**Figura 8.56:** Curvas OC para os casos Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (○), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=20$

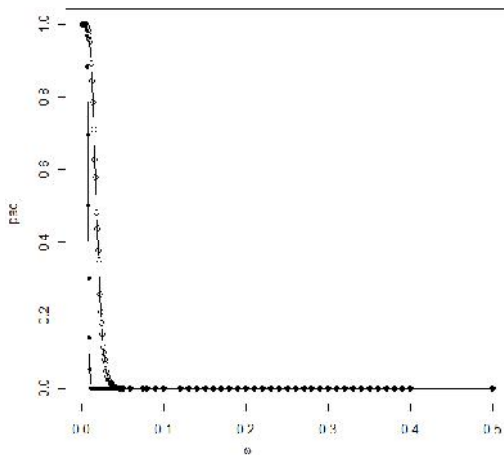
<sup>(23)</sup> Confirmação: substituindo  $\alpha_N$  e  $\omega$  respectivamente, pela sua expressão e por  $AQL$  em  $Pac_N(\omega)$  obtém-se  $Pac_N(AQL) = 1 - \alpha_F$ , mostrando assim que os planos são equivalentes, sendo, portanto, comparáveis.



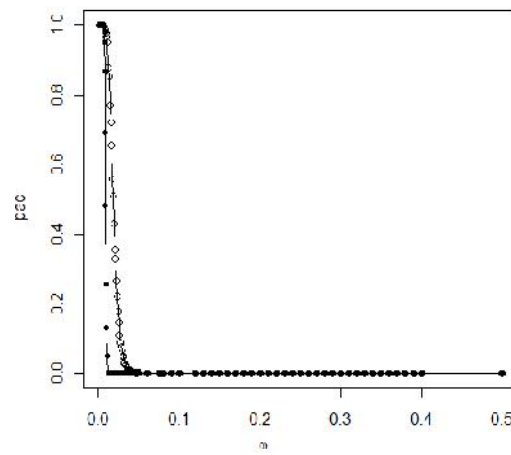
**Figura 8.57:** Curvas OC para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (○), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$



**Figura 8.58:** Curvas OC para os casos Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (○), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=50$



**Figura 8.59:** Curvas OC para os casos Gumbel ( $\lambda=1, \delta=0.5$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (○), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$



**Figura 8.60:** Curvas OC para os casos Gumbel ( $\lambda=5, \delta=0.6$ ) (●) e Gaussiano para  $\sigma$  desconhecido (○), já com o ajuste dos  $\alpha$ 's e considerando  $AQL=1\%$ ,  $n=100$

Da análise das figuras 8.53 a 8.60, pode ver-se que se obtêm melhores resultados com o plano específico, dado que as curvas vêm sempre abaixo das curvas do plano clássico, independentemente do valor dos parâmetros e da dimensão das amostras. Isto significa que, com um plano de Amostragem de Aceitação clássico, a probabilidade de aceitação do lote é maior que no caso da utilização do plano específico, o que não é bom para o consumidor, pois assumiria uma fracção não conforme superior. Verifica-se também que com o aumento da dimensão da amostra,  $n$ , as curvas OC decrescem mais rapidamente (significando que a probabilidade de aceitação do lote diminui para fracções não conformes elevadas, com base na tabela 8.25) e diminuem as diferenças entre os casos clássico e específico. Quanto à influência do valor dos parâmetros  $\delta$  e  $\lambda$  nos resultados, não se verifica qualquer influência, por parte do parâmetro de localização,  $\lambda$ , e quando  $\delta$  aumenta substancialmente (por exemplo, para dados simulados com  $\delta=5$  ou  $\delta=10$ ), à semelhança do que aconteceu no caso  $\delta$  conhecido, as curvas OC decrescem mais rapidamente.

Da tabela 8.26, constam as taxas de resultados coincidentes, para que se possa avaliar a performance dos dois planos de amostragem, clássico e específico. Da sua análise pode ver-se que as taxas de resultados coincidentes são relativamente baixas, pelo que o recurso aos planos clássicos, mesmo após o ajuste dos  $\alpha$ 's, não é recomendado.

Distribuição Gumbel( $\lambda, \delta$ )	Taxa de resultados coincidentes (%) para n=			
	10	20	50	100
Gumbel(1, 0.5)	69,20	69,07	69,01	68,93
Gumbel(5, 0.6)	73,47	70,40	70,02	69,73

**Tabela 8.26:** Comparação dos métodos específico e clássico: Taxa de resultados iguais, a aceitação ou rejeição do lote, entre o caso Gaussiano ( $\sigma$  conhecido) e caso Gumbel ( $\delta$  desconhecido), com ajuste dos  $\alpha$ 's

Tal como proposto para o caso Weibull com  $\theta$  desconhecido, também para o caso Gumbel com  $\delta$  desconhecido se pode recorrer ao método Delta para a determinação da distribuição assintótica do índice de qualidade, evitando assim, os processos de simulação que são de maior complexidade de implementação.

### 8.7. Caso específico vs clássico, após transformação Box-Cox

Tal como foi estudado anteriormente, quando a característica de qualidade de interesse é uma v.a. não Gaussiana, podem construir-se planos de Amostragem de Aceitação específicos, para cada uma das distribuições. Se a verdadeira distribuição dos dados é assimétrica e/ou tem caudas pesadas, mas a modelação dos dados é fácil, o que nem sempre acontece, então pode recorrer-se à construção de planos de Amostragem de Aceitação específicos. Propõe-se então uma alternativa à construção de planos de Amostragem de Aceitação específicos, a utilização de planos de Amostragem de Aceitação para o caso Gaussiano, com  $\sigma$  desconhecido, após a normalização dos dados, através de transformações tipo Box-Cox, que não requer modelação prévia dos mesmos. Neste subcapítulo vai verificar-se então, se o recurso à normalização dos dados, e posterior construção de planos de Amostragem de Aceitação para o caso clássico, o Gaussiano, com  $\sigma$  desconhecido, constitui uma boa alternativa aos planos específicos. Para se proceder à normalização dos dados, através das transformações tipo Box-Cox, dadas pela expressão (7.1), é necessário estimar o parâmetro  $\lambda$ , que define a transformação. Para tal, utilizou-se o seguinte procedimento:

- Geraram-se 10000 amostras de dimensão 10 e 100, com determinada distribuição (Exponencial, Gama, Weibull, Fréchet e Gumbel);
- Para cada amostra, obteve-se uma estimativa de  $\lambda$ , pelo método de máxima verosimilhança (equação (7.7)), e após a transformação (expressão (7.1)) dos dados, procedeu-se à aplicação do teste de ajustamento à distribuição Normal ou Gaussiana, o teste Shapiro-Wilk;
- Para cada um dos testes de ajustamento, obteve-se um certo *valor-p*, e com base nos 10000 *valores-p*, calculou-se a taxa de não rejeição da hipótese de normalidade;
- A cada transformação de dados, em que não se rejeitou a hipótese de normalidade (*valor-p* > 0,05), aplicou-se o plano de Amostragem de Aceitação para o caso clássico, com  $\sigma$  desconhecido;
- Em simultâneo, foram construídos, para cada uma das transformações que originaram dados normais, os planos específicos para os dados originais;
- Para a comparação de resultados e avaliar a performance dos planos de amostragem clássicos após transformação dos dados, calculou-se a taxa de resultados coincidentes (aceitação ou rejeição do lote) entre os dois métodos, o clássico e o específico de cada distribuição.
- Em qualquer uma das situações considerou-se, sempre, o limite superior de especificação.

Antes de mais, deve referir-se que para se proceder à transformação dos dados, quando a característica de qualidade é uma v.a. com distribuição Gumbel, procede-se à soma do valor absoluto do mínimo observado mais uma unidade a todas as observações, uma vez que para a transformação Box-Cox os dados têm de ser positivos.

Por forma a facilitar a leitura, resume-se na tabela 8.27 as distribuições trabalhadas, critérios de aceitação do lote e planos de Amostragem de Aceitação específicos.

Distribuição	Fracção não conforme $w = P(X > U)$	Critério de aceitação		Planos de Amostragem de Aceitação: Valores de $k$ e $n$	
		$\sigma$ conhecido	$\sigma$ desconhecido	$\sigma$ conhecido	$\sigma$ desconhecido
Normal( $\mu, \sigma$ )	$1 - \Phi\left(\frac{U - \mu}{\sigma}\right)$	$Q_U = \frac{U - \bar{X}}{\sigma} \geq k$	$Q_U = \frac{U - \bar{X}}{S} \geq k$	$\begin{cases} k = \frac{z_{1-\alpha} z_{LTPD} - z_{\beta} z_{AQL}}{z_{\beta} - z_{1-\alpha}} \\ n = \left(\frac{z_{1-\alpha} - z_{\beta}}{z_{LTPD} - z_{AQL}}\right)^2 \end{cases}$	$\begin{cases} k = -\frac{1}{\sqrt{n}} F_{t_{n-1}^{-1}(\beta)}^{-1}(1-\alpha) \\ n: \frac{F_{t_{n-1}^{-1}(\beta)}^{-1}(\beta)}{F_{t_{n-1}^{-1}(\beta)}^{-1}(1-\alpha)} = 1 \end{cases}$
		$\theta$ conhecido	$\theta$ desconhecido	$\theta$ conhecido	$\theta$ desconhecido
Exponencial( $\delta$ )	$e^{-\frac{U}{\delta}}$	$Q = \frac{U}{\bar{X}} \geq k$		$\begin{cases} k = -\frac{2n \ln(AQL)}{\chi_{2n, 1-\alpha}^2} \\ n: \frac{\chi_{2n, \beta}^2 \ln(AQL)}{\chi_{2n, 1-\alpha}^2 \ln(LTPD)} = 1 \end{cases}$	
Gama( $\theta, \delta$ )	$1 - F_X(x) = 1 - \int_0^x \frac{1}{\delta^\theta \Gamma(\theta)} t^{\theta-1} e^{-\frac{t}{\delta}} dt$	$Q_U = \frac{U}{\hat{\delta}} \geq k$	$Q_U = \frac{U}{\hat{\delta}} \geq k$	$\begin{cases} k = \frac{2n \theta F_{Gamma(\theta, 1)}^{-1}(1-AQL)}{\chi_{2n\theta, 1-\alpha}^2} \\ n: \frac{\chi_{2n\theta, \beta}^2 F_{Gamma(\theta, 1)}^{-1}(1-AQL)}{\chi_{2n\theta, 1-\alpha}^2 F_{Gamma(\theta, 1)}^{-1}(1-LTPD)} = 1 \end{cases}$	*
Weibull( $\theta, \delta$ )	$e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^\theta}$	$Q_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^\theta \geq k$	$Q_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^\theta \geq k$	$\begin{cases} k = -\frac{2n \ln(AQL)}{\chi_{2n, 1-\alpha}^2} \\ n: \frac{\chi_{2n, \beta}^2 \ln(AQL)}{\chi_{2n, 1-\alpha}^2 \ln(LTPD)} = 1 \end{cases}$	*
Fréchet( $\theta, \delta$ )	$1 - e^{-\left(\frac{U}{\delta}\right)^{-\theta}}$	$Q_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{-\theta} \leq k$	$Q_U = \left(\frac{U}{\hat{\delta}}\right)^{-\theta} \leq k$	$\begin{cases} k = -\frac{2n \ln(1-AQL)}{\chi_{2n, \alpha}^2} \\ n: \frac{\chi_{2n, 1-\beta}^2 \ln(1-AQL)}{\chi_{2n, \alpha}^2 \ln(1-LTPD)} = 1 \end{cases}$	*
		$\delta$ conhecido	$\delta$ desconhecido	$\delta$ conhecido	$\delta$ desconhecido
Gumbel( $\lambda, \delta$ )	$1 - e^{-e^{-\frac{U-\lambda}{\delta}}}$	$Q_U = \frac{U - \hat{\lambda}}{\delta} \geq k$	$Q_U = \frac{U - \hat{\lambda}}{\hat{\delta}} \geq k$	$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \ln\left(-\frac{\chi_{2n, \alpha}^2}{2n \ln(1-AQL)}\right) \\ n: \frac{\chi_{2n, 1-\beta}^2 \ln(1-AQL)}{\chi_{2n, \alpha}^2 \ln(1-LTPD)} = 1 \end{cases}$	*

\*Uma vez que a distribuição exacta de  $Q_U$  é desconhecida, para determinar os valores  $n$  e  $k$ , que satisfazem as condições do sistema (2.1), procede-se com métodos de simulação.

**Tabela 8.27:** Resumo das distribuições trabalhadas, critérios de aceitação do lote e planos de Amostragem de Aceitação específicos

Das tabelas 8.28, e 8.29 constam os resultados da avaliação da performance dos planos de Amostragem de Aceitação com recurso à taxa de resultados coincidentes (aceitação ou rejeição do lote) entre o caso clássico e o específico quando os parâmetros  $\theta$  das distribuições Gama, Weibull e Fréchet e  $\delta$  da distribuição Gumbel são conhecidos e desconhecidos, respectivamente. Da sua análise, pode verificar-se que após transformação dos dados através da correspondente transformação Box-Cox a taxa de não rejeição da hipótese de normalidade é elevada (a rondar os 99%) assim como a taxa de resultados coincidentes entre o caso clássico e o específico, variando entre os 84% e os 100%, quer no caso dos parâmetros conhecidos quer no caso dos parâmetros

desconhecidos. Deve referir-se ainda duas situações: i) os valores das estimativas de  $\lambda$ , são iguais ou muito próximos entre os casos de parâmetros conhecidos e desconhecidos; ii) para amostras pequenas, as estimativas de  $\lambda$  não são muito precisas, pois os intervalos de confiança para  $\lambda$  apresentam amplitudes elevadas. Verifica-se no entanto, mesmo para estas situações, a taxa de resultados coincidentes é elevada.

Distribuição	$n$	$\hat{\lambda}$	Intervalo de Confiança 95% para $\lambda$	Valor-p	Taxa de não rejeição da hipótese de Normalidade	Taxa de resultados coincidentes
Exp( $\delta=5$ )	10	0,22	(-0,407; 0,756)	0,6605	99,49%	94,78%
	100	0,26	(0,130; 0,373)	0,6027	98,67%	94,45%
Exp( $\delta=10$ )	10	0,22	(-0,401; 0,772)	0,6664	99,35%	94,89%
	100	0,26	(0,132; 0,376)	0,6051	98,68%	95,01%
Gama( $\theta=3, \delta=5$ )	10	0,24	(-1,020; 1,314)	0,6744	99,48%	96,38%
	100	0,30	(0,033; 0,551)	0,6551	99,27%	100,00%
Gama( $\theta=7, \delta=5$ )	10	0,26	(-1,649; 2,073)	0,6765	99,58%	94,43%
	100	0,31	(-0,110; 0,719)	0,6585	99,25%	100,00%
Weibull( $\theta=2, \delta=10$ )	10	0,52	(0,266; 0,745)	0,6060	98,64%	100,00%
	100	0,52	(0,266; 0,745)	0,6060	98,64%	100,00%
Weibull( $\theta=3, \delta=10$ )	10	0,63	(-1,208; 2,225)	0,6632	99,34%	83,89%
	100	0,78	(0,404; 1,120)	0,6072	98,70%	95,35%
Weibull( $\theta=7, \delta=10$ )	10	1,46	(-3,124; 4,999)	0,6627	99,27%	88,32%
	100	1,83	(0,934; 2,621)	0,6031	98,92%	96,45%
Fréchet( $\theta=3, \delta=10$ )	10	-0,63	(-2,180; 1,243)	0,6654	99,52%	98,03%
	100	-0,78	(-1,120; -0,401)	0,6060	98,75%	100,00%
Fréchet( $\theta=5, \delta=10$ )	10	-1,07	(-3,770; 2,140)	0,6646	99,47%	93,86%
	100	-1,30	(-1,873; -0,660)	0,6110	98,94%	99,64%
Fréchet( $\theta=5, \delta=5$ )	10	-1,04	(-3,862; 2,173)	0,6657	99,36%	93,28%
	100	-1,30	(-1,848; -0,659)	0,6066	98,60%	99,94%
Gumbel( $\lambda=1, \delta=0,5$ )	10	-0,49	(-4,011; 2,837)	0,6793	99,54%	81,80%
	100	-0,39	(-1,154; 0,321)	0,6632	99,21%	100,00%
Gumbel( $\lambda=5, \delta=0,6$ )	10	-2,17	(-4,999; 4,999)	0,6162	97,62%	80,15%
	100	-3,51	(-4,999; -1,339)	0,6033	92,59%	99,97%
Gumbel( $\lambda=1, \delta=0,6$ )	10	-0,27	(-3,177; 2,378)	0,6820	99,50%	87,97%
	100	-0,14	(-0,773; 0,423)	0,6702	99,03%	100,00%

**Tabela 8.28:** Avaliação da performance dos planos de Amostragem de Aceitação clássicos com  $\sigma$  conhecido, quando a característica de qualidade de interesse não é Gaussiana (parâmetros  $\theta$  das distribuições Gama, Weibull e Fréchet e  $\delta$  da distribuição Gumbel são conhecidos)

Distribuição	$n$	$\hat{\lambda}$	Intervalo de Confiança a 95% para $\lambda$	Valor- $P$	Taxa de não rejeição da hipótese de Normalidade	Taxa de resultados coincidentes
Gama( $\theta=3, \delta=5$ )	10	0,24	(-0,976; 1,351)	0,2355	99,66%	96,03%
	100	0,30	(0,027; 0,554)	0,6496	99,24%	100%
Gama( $\theta=7, \delta=5$ )	10	0,23	(-1,641; 2,029)	0,6769	99,57%	84,87%
	100	0,32	(-0,111; 0,714)	0,6605	99,17%	100,00%
Weibull( $\theta=2, \delta=10$ )	10	0,43	(-0,829; 1,491)	0,6673	99,33%	92,41%
	100	0,52	(0,269; 0,749)	0,6080	98,77%	100,00%
Weibull( $\theta=3, \delta=10$ )	10	0,63	(-1,242; 2,206)	0,6699	99,55%	84,18%
	100	0,78	(0,407; 1,117)	0,6048	98,69%	95,31%
Weibull( $\theta=7, \delta=10$ )	10	1,44	(-3,003; 4,999)	0,6673	99,28%	88,75%
	100	1,82	(0,955; 2,601)	0,6087	98,68%	91,24%
Fréchet( $\theta=3, \delta=10$ )	10	-0,63	(-2,268; 1,328)	0,6638	99,37%	93,03%
	100	-0,78	(-1,122; -0,414)	0,6063	98,63%	95,21%
Fréchet( $\theta=5, \delta=10$ )	10	-1,09	(-3,837; 2,037)	0,6660	99,51%	90,34%
	100	-1,30	(-1,870; -0,672)	0,6043	98,69%	94,87%
Fréchet( $\theta=5, \delta=5$ )	10	-1,06	(-3,720; 2,040)	0,6667	99,43%	89,59%
	100	-1,30	(-1,869; -0,681)	0,6087	98,67%	95,22%
Gumbel( $\lambda=1, \delta=0,5$ )	10	-0,52	(-4,014; 2,764)	0,6826	99,50%	86,73%
	100	-0,39	(-1,174; 0,355)	0,6652	99,12%	95,00%
Gumbel( $\lambda=5, \delta=0,6$ )	10	-2,18	(-4,999; 4,999)	0,6179	98,49%	85,15%
	100	-3,54	(-4,999; -1,396)	0,6000	98,84%	95,14%
Gumbel( $\lambda=1, \delta=0,6$ )	10	-0,28	(-3,249; 2,459)	0,6819	99,55%	85,09%
	100	-0,14	(-0,763; 0,409)	0,6646	99,22%	95,09%

**Tabela 8.29:** Avaliação da performance dos planos de Amostragem de Aceitação clássicos com  $\sigma$  conhecido, quando a característica de qualidade de interesse não é Gaussiana (parâmetros  $\theta$  das distribuições Gama, Weibull e Fréchet e  $\delta$  da distribuição Gumbel são desconhecidos)

Em suma, com base nos resultados anteriormente obtidos, pode então dizer-se, com alguma certeza, que se pode aplicar planos de Amostragem de Aceitação para o caso clássico com  $\sigma$  desconhecido, recorrendo por exemplo às normas clássicas, após normalização dos dados com base na transformação Box-Cox correspondente. Pode concluir-se então, que o recurso às normas clássicas com  $\sigma$  desconhecido após transformação dos dados com base na transformação Box-Cox correspondente, constitui uma boa alternativa aos planos de amostragem específicos. Este procedimento vem facilitar a aplicação da Amostragem de Aceitação para a melhoria da qualidade, pois não necessita da modelação prévia dos dados (o que nem sempre é fácil) e pode recorrer-se às normas clássicas com  $\sigma$  desconhecido.



## **Capítulo 9.**

### **Conclusões**

Na literatura existente sobre Amostragem de Aceitação para Variáveis, os planos de amostragem são, na sua maioria, baseados na hipótese de que as observações da característica de qualidade são independentes e normalmente distribuídas (caso clássico da Amostragem de Aceitação – Normas clássicas). Encontraram-se contudo, alguns trabalhos sobre Amostragem de Aceitação para variáveis não Gaussianas, com abordagens diferentes da utilizada neste trabalho.

Neste trabalho é avaliado o impacto da não Gaussianidade da característica de qualidade e são propostas alternativas à utilização indevida e indiscriminada de planos de amostragem clássicos. Para tal, foram consideradas as situações em que a característica de qualidade é uma v.a. Exponencial, Gama, Weibull, Fréchet e Gumbel, que são distribuições com vários níveis de assimetria e de índice de peso da cauda.

Dos resultados obtidos no capítulo anterior, conclui-se que se a característica de qualidade não é Gaussiana e se utilizar os valores das Normas clássicas (dos planos clássicos) o risco do produtor, assim como o do consumidor, são mal calculados, o que pode conduzir a erros grosseiros e conseqüentemente a decisões erradas sobre o lote. Estes erros são mais expressivos quando os parâmetros das distribuições consideradas são desconhecidos.

Para a comparação dos planos clássicos e os específicos, começou-se por ajustar os  $\alpha$ 's (risco do produtor, que é mal calculado), para que ambas as curvas *OC* passem no ponto (*AQL*,  $1 - \alpha$ ), por forma a que se possa determinar as constantes de aceitação,  $k$ , comparar os  $\beta$ 's e conseqüentemente determinar o valor de *LTPD*, com base no sistema (1). Da comparação dos planos clássico e específico, já apresentada no capítulo anterior, destacam-se os resultados que a seguir se resumem. Para cada uma das distribuições estudadas, após o ajuste dos  $\alpha$ 's, verificou-se (e prova-se analiticamente) que para a Exponencial e restantes distribuições com parâmetros

---

conhecidos, e Weibull ( $\theta$  desconhecido) o valor de  $\alpha_N$  ajustado converge para  $\alpha$ , no entanto, esta convergência é muito lenta.

Independentemente da distribuição da característica de qualidade, verifica-se sempre que com o aumento da dimensão das amostras,  $n$ , as curvas  $OC$  decrescem mais rapidamente, significando que a probabilidade de aceitação do lote com uma fracção não conforme elevada diminui, assim como a fracção não conforme “assumida” pelo consumidor.

Quando a característica de qualidade é uma v.a. com distribuição Exponencial, após o ajuste dos  $\alpha$ 's, os planos de amostragem clássico e específico são coincidentes, dando origem a resultados iguais, não se verificando influência do parâmetro  $\delta$  nos mesmos. A taxa de resultados coincidentes (aceitação ou rejeição do lote) entre os dois planos é de 100%, independentemente do valor de  $\delta$  e de  $n$ , quando o ajuste dos  $\alpha$ 's é efectuado. Neste caso, é plausível o recurso aos planos clássicos, após o ajuste dos  $\alpha$ 's, facilitando assim, a implementação da Amostragem de Aceitação.

No caso em que a característica de qualidade é uma v.a. com distribuição Gama, distinguiram-se duas situações,  $\theta$  conhecido e  $\theta$  desconhecido. Quando  $\theta$  conhecido, após o ajuste dos  $\alpha$ 's os planos de amostragem clássico e específico são coincidentes, tal como verificado para o caso Exponencial. Verificou-se ainda que o parâmetro de escala,  $\delta$ , não exerce influência nos resultados, enquanto que o aumento do valor do parâmetro de forma,  $\theta$ , assim como o aumento da dimensão da amostra,  $n$ , provoca um decréscimo mais rápido da curva  $OC$ , para maiores fracções não conformes. Propõe-se então, a utilização dos planos clássicos após o ajuste dos  $\alpha$ 's. No caso em que  $\theta$  desconhecido, foi necessário recorrer a processos de simulação para definir os planos de amostragem específicos, o que dificultou a obtenção de resultados precisos, pois a estimação dos parâmetros  $\theta$  e  $\delta$ , não é efectuada de forma adequada por parte do *software* utilizado. Neste caso, os resultados foram condicionados por este facto, não tendo sido terminados em tempo útil.

Relativamente ao caso em que a característica de qualidade é uma v.a. Weibull, duas situações foram também distinguidas,  $\theta$  conhecido e  $\theta$  desconhecido. Em ambas as situações, verificou-se que após o ajuste dos  $\alpha$ 's, se obtêm melhores resultados com os planos de Amostragem de Aceitação específicos uma vez que as curvas  $OC$  vêm abaixo das dos planos clássicos, independentemente dos valores dos parâmetros  $\theta$  e  $\delta$  (parâmetro de escala), significando que a probabilidade de aceitação do lote no caso clássico é superior à do caso específico, o que é prejudicial para o consumidor. Com o aumento de  $n$ , além do decréscimo mais rápido das curvas  $OC$ , as discrepâncias entre os planos clássico e específico diminuem. A variação do valor de  $\theta$ , influencia os resultados, nomeadamente para valores de  $\theta$  baixos – (por exemplo,  $\theta=0,5$ )

distribuições com acentuada assimetria positiva e índice de peso de cauda elevado – e para valores de  $\theta$  elevados – (por exemplo  $\theta=10$ ) distribuições com acentuada assimetria negativa e um índice de peso de cauda inferior ao da Gaussiana – as diferenças entre os planos clássico e específicos são superiores às das situações em que assimetria das distribuições não é tão acentuada e o índice de peso de cauda é próximo do da Gaussiana. Relativamente ao parâmetro de escala,  $\delta$ , não exerce influência nos resultados, nem no coeficiente de assimetria e índice de peso de cauda.

Quando a característica de qualidade é uma v.a. com distribuição Fréchet, também foram distinguidas duas situações, parâmetro de forma,  $\theta$ , conhecido e desconhecido. Em ambas as situações, após o ajuste dos  $\alpha$ 's, verifica-se que as curvas *OC* dos planos específicos vêm abaixo das dos planos clássicos, à excepção do caso de amostras de dimensão reduzida e quando  $\theta$  é desconhecido, devido possivelmente à estimação pouco precisa dos parâmetros da distribuição. Isto indica que se obtêm melhores resultados com os planos de Amostragem de Aceitação específicos. Verificou-se ainda, não existir influência do parâmetro de escala,  $\delta$ , nos mesmos, enquanto que o aumento do valor do parâmetro de forma, dá origem a curvas *OC* com um decréscimo mais rápido. Com o aumento de  $n$ , além das curvas *OC* decrescerem mais rapidamente, verificou-se também que as diferenças entre os planos clássico e específico se esbatem.

Finalmente, quando a característica de qualidade é uma v.a. com distribuição Gumbel, duas situações foram também distinguidas, parâmetro de escala,  $\delta$ , conhecido e desconhecido. Em qualquer uma das situações, não se verifica influência dos parâmetros de localização,  $\lambda$ , e escala,  $\delta$ , nos resultados, agora pelo facto de que o coeficiente de assimetria e índice de peso de cauda serem constantes para qualquer valor de  $\lambda$  e  $\delta$ . Em ambas as situações, após o ajuste dos  $\alpha$ 's, verificou-se que as curvas *OC* dos planos específicos vêm abaixo das dos planos clássicos, indicando a obtenção de melhores resultados para os planos específicos, esbatendo-se as diferenças entre os dois planos com o aumento de  $n$ .

Apesar de, em geral, se terem registado melhores resultados quando o plano específico é utilizado, será que existe uma boa relação entre custo/benefício na implementação dos planos específicos? Ficou claro que existem benefícios, mas a implementação dos planos específicos, quando se tem de recorrer a simulação, não é fácil. Considera-se que o principal trabalho a efectuar consiste no ajuste dos  $\alpha$ 's. Depois desta indispensável tarefa realizada, tendo em consideração os resultados obtidos da comparação das curvas *OC* e das taxas de resultados coincidentes, admite-se o recurso aos planos clássicos, apesar dos possíveis erros associados.

No que diz respeito a metodologias alternativas, na determinação de planos específicos, propõe-se para o caso em que os parâmetros são desconhecidos e as amostras têm dimensão bastante elevada

( $n > 100$ ), o recurso ao método Delta, por reduzir o tempo e a complexidade computacional de implementação dos planos específicos, por simulação.

Com o objectivo de facilitar a aplicação da Amostragem de Aceitação, com o recurso às normas clássicas, mesmo no caso de distribuições não Gaussianas, propôs-se a alternativa da utilização das transformações Box-Cox para normalização dos dados. Esta alternativa não requer a modelação prévia dos dados, o que constitui desde já, uma vantagem, pois nem sempre é fácil a modelação dos mesmos, além de evitar a estimação dos parâmetros das distribuições, quando estes são desconhecidos. Considerando os resultados das taxas de resultados coincidentes entre os planos específicos e os clássicos após transformação adequada dos dados, verifica-se que esta metodologia constitui uma alternativa, a ter em consideração, em relação à utilização dos planos específicos.

A hora, imposta pelo calendário, é de terminar o relatório da dissertação, mas não a investigação em curso. Ainda há programas e simulações a decorrer, no caso dos parâmetros desconhecidos, para obter os resultados para a Gama, e esclarecer melhor os da Frechet e Gumbel.

De futuro, gostaria de considerar a utilização de estimadores robustos para a localização e escala, comparar os resultados obtidos com a metodologia utilizada com outras metodologias.

O estudo do efeito da não independência das observações da amostra na Amostragem de Aceitação por variáveis, penso que seria também um tema interessante de investigação futura, que complementaria o presente estudo de Amostragem de Aceitação para variáveis não-Gaussianas.

## ***Bibliografia***

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1964), *Handbook of Mathematical functions*. Dover Publications, Inc., New York.
- [2] Aminzadeh, M.S. (1996), *Inverse Gaussian Acceptance Sampling Plans by Variables*, Communications in Statistics – Theory and Methods, Vol. 25, p. 923-935.
- [3] ANSI/ASQC Z1.9-2008 (2008), *Sampling procedures and tables for inspection by variables for percent nonconforming*. ASQ, Milwaukee, WI, EUA.
- [4] ANSI/ASQC Z1.9-2003, (2003), *Sampling procedures and tables for inspection by variables for percent nonconforming*. ASQ, Milwaukee, WI, EUA.
- [5] Atkinson, A.C. (1973), *Testing Transformations to Normality*. Journal of the Royal Statistical Society 3, 473-479.
- [6] Bowker A. H., Goode H. P. (1952), *Sampling Inspection by Variables*. McGraw-Hill: New York.
- [7] Box, G. E. P. and Cox, D. R. (1964), *An analysis of transformations*. Journal of the Royal Statistical Society, series B, 26, 211-252.
- [8] Castillo, E. (2005), *Extreme value and related models with applications in engineering and science*, Wiley, New York.
- [9] Casquilho, M., Constantino, M. e Morais, M. C.(2006), *Amostragem de aceitação para a variável Gaussiana inversa*. Em ed.s L. Canto e Castro et al., XIII SPE, Ericeira (Mafra), p. 267-277.
- [10] Clements, John. (1989), *Process capability calculations for non-normal distributions*. Journal of quality process, 95-101.
- [11] Constantino, M. (2004), *Sobre a amostragem de aceitação para variáveis não Gaussianas*. Dissertação de curso, Lic.a Matemática Aplicada e Computação, DMIST, Lisboa.
- [12] Carolino, E., Casquilho, M., Barão, M. (2007), *Amostragem de aceitação para uma variável assimétrica: a Exponencial*. Actas do XIV Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística, 281-292.

- 
- [13] Cohen A. Clifford (1965), *Maximum Likelihood Estimation in the Weibull Distribution Based on Complete and on Censored Samples*, Technometrics, vol.7, No. 4, 579-588.
- [14] Das, T. K., Gosavi, A. e Kanchibhatta, K, M. (2002), *Optimal design of plans for acceptance sampling by variables with Inverse Gaussian distribution*. Communications in Statistics, Simulation and Computation, Vol.31, 3, p. 463-488.
- [15] Dodge, H. F. and Romig, H. G. (1959), *Sampling Inspection Tables – Single and Double Sampling*. 2<sup>nd</sup> Ed., pp 56-59, Jhon Wiley & Sons, Inc., New York
- [16] Duncan, A. J. (1986), *Quality Control and Industrial Statistics*. 5<sup>th</sup> edition. IRWIN, USA.
- [17] Figueiredo, F. O. (2002), *Controlo Estatístico da Qualidade e Métodos Robustos*. Dissertação para obtenção do grau de Doutor em Estatística e Investigação Operacional, Especialidade em Probabilidades e Estatística. FCUL, Portugal.
- [18] Figueiredo e Gomes (2002), *Transformação de Dados em Controlo Estatístico de Qualidade*. Novos Rumos em Estatística. Sociedade Portuguesa de Estatística, 235-245.
- [19] Foster S. Thomas, (2010), *Managing Quality*, Fourth Edition, Pearson.
- [20] Gilli, M. and Këllezzi E. (2006), *An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk*, Computational Economics 27(1), 2006, p. 1-23.
- [21] Gomes, M. I. and Barão, M. I. (1999), *Controlo Estatístico de Qualidade*, Notas de mini-curso do VII Congresso Anual da SPE.
- [22] Gomes, M. I., Figueiredo, F., Barão, M. I. (2010), *Controlo Estatístico da Qualidade*, 2<sup>a</sup> edição revista e aumentada, Edições SPE.
- [23] Grant, E. L. and Leavenworth, R. S. (1996), *Statistical Quality Control*. 7<sup>th</sup> edition. McGraw-Hill, New York, NY, EUA.
- [24] Guenther William C. (1972), *Variables sampling plans for the Poisson and Binomial*. Statistica Neerlandica **26**: 17-24.
- [25] Guenther, William C. (1977), *Sampling inspection in statistical quality control*. First published. Macmillan Publishing Co., Inc: New York.
- [26] Hald, A. (1981), *Statistical Theory of Sampling Inspection by Attributes*. Academic Press.
- [27] Hoaglin David C., Mosteller Frederick, Tuckey John W. (2000), *Understanding Robust and Explanatory Data Analysis*, New York, John Wiley & Sons, Inc.
- [28] Infante, P. (2004), *Métodos de Amostragem em Controlo de Qualidade*. Dissertação para obtenção do grau de Doutor, Universidade de Évora.
- [29] Ikeda, T., Asano, M. (2008), *Lot Acceptance Sampling Plan for Non-normal CD Distribution*, Metrology, Inspection, and Process Control for Microlithography XXII, edited by John A. Allgair, Christopher J. Raymond, Proc. of SPIE Vol. 6922, p. 692-214
-

- [30] ISO 3951-1:2008 (2008), ISO standard.
- [31] Johnson, N.L., Balakrishnan, N. and Kotz, S. (1995), *Continuous Univariate Distributions*. Volume 2, Second edition, John Wiley & Sons, New York.
- [32] Johnson NL, Kotz S, Wu X (1991), *Inspection Errors for Attributes in Quality Control*, Chapman & Hall.
- [33] Juran, J. M. and Gryna, F. M. (1970), *Quality Planning and Analysis*. McGraw-Hill, New York.
- [34] Kennedy, Peter. (1992), *A guide to econometrics*. Massachusetts, third edition, The MIT press.
- [35] Kiermeier A (2008), *Visualising and Assessing Acceptance Sampling Plans: The R Package Acceptance Sampling*. Journal of Statistical Software, 26(6). URL <http://www.jstatsoft.org/v26/i06/>.
- [36] Kotz, S., Nadarajah, S. (2000), *Extreme Value Distributions: Theory and Applications*. London: Imperial College Press.
- [37] Lieberman GJ, Resnikoff GJ. (1955), *Sampling plans for inspection by variables*. Journal of the American Statistical Association **50**: 457-516.
- [38] Levinson, W. (1997), *Watch out for non-normal distributions of impurities*. Chemical Engineering Progress. May, 70-76.
- [39] MIL-SRD 105E (1989), *Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes*, Superintendent of Documents, Government Printing Office, Washington, D.C.
- [40] MIL-SRD 414 (1957), *Sampling Procedures and Tables for Inspection by Variables for Percent Defective*, Superintendent of Documents, Government Printing Office, Washington, D.C.
- [41] Mittag, H. J. and Rinne, H. (1993), *Statistical methods of quality assurance*. London, Chapman & Hall.
- [42] Montgomery, D. C. (2004), *Introduction to Statistical Quality Control*. 5<sup>th</sup> edition. John Wiley and Sons, New York, NY, EUA.
- [43] Owen D. B. (1967), *Variables sampling plans based on the normal distribution*. Technometrics **9**: 417-423.
- [44] Schilling, E. G. and Neubauer. D. V. (2009), *Acceptance Sampling in Quality Control*. 2<sup>nd</sup> edition. Chapman & Hall/CRC, USA.
- [45] Smith, Gerald (1991), *Statistical Process Control and Quality Improvement*, Columbus, OH, Prentice Hill.
- [46] Stephens, Kenneth S., (2001), *The Handbook of Applied Acceptance Sampling Plans, Procedures and Principles*, Milwaukee: American Society for Quality Control.

- 
- [47] Stuart, Coles (2004), *An Introduction to a Statistical Modeling of Extreme Values*, Springer Verlag, London, U.K.
- [48] Stuart, A.; and Ord, J. K. (1998), *Kendall's Advanced Theory of Statistics, Vol. 1: Distribution Theory*. 6<sup>th</sup> ed. New York: Oxford University Press.
- [49] Takagi, k. (1972), *On Designing Unknown-Sigma Sampling Plans Based on a Wide Class of Non-Normal Distributions*, *Technometrics*, Vol. 14, No. 3, p. 669-678.
- [50] Taylor, W. A. (1992), *Guide to Acceptance Sampling*. Libertyville, IL, Taylor Enterprises.
- [51] Smith, E.P., Zahran, A., Mahmoud, M., Ye, k. (2003), *Evaluation of water quality using acceptance sampling by variables*, *Environmetrics*, Vol. 14, Issue 4, p. 373–386.
- [52] Sposito, V.A. (1968), *Variables acceptance sampling plans for non-Normal distributions*, Iowa State University.
- [53] Suresh, R.P., Ramanathan, T.V. (1997), *Acceptance sampling plans by variables for a class of symmetric distributions*, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, Vol. 26, Issue 4, p. 1379-1391.
- [54] Wallis, W. A. (1947), *Use of variables in acceptance inspection for percent defective*. In: *Selected Techniques of Statistical Analysis for Scientific and Industrial Research and Production and Management Engineering*. McGraw Hill: New York; 3-93.
- [55] Wetherill, G. B. and Brown, D. W. (1991), *Statistical Process Control*. Chapman and Hall, London, UK.
- [56] Zimmer, W. J., Burr IW. (1963), *Variables sampling plans based on non-normal populations*. *Industrial Quality Control* **21**: 18-26.