

**UNIVERSIDADE DE LISBOA**

**INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA**



**DISSERTAÇÃO**

**Modelação e Utilização das Tecnologias no Estudo da Função Afim  
Um Estudo de Caso**

Maria de Fátima Maduro Canário

Ciclo de estudos conducente ao grau de Mestre em Educação  
Área de especialização em Didáctica da Matemática

2011



**UNIVERSIDADE DE LISBOA**

**INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA**



**Modelação e Utilização das Tecnologias no Estudo da Função Afim  
Um Estudo de Caso**

Maria de Fátima Maduro Canário

Dissertação orientada pelas Professoras Doutoradas:

Nélia Maria Pontes Amado

Susana Paula Graça Carreira

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Educação  
Área de especialização em Didáctica da Matemática

2011



## Resumo

Esta investigação visa conhecer os processos e estratégias de alunos do 8.º ano em situações problemáticas realistas, recorrendo ao software GeoGebra no estudo da função afim, tendo por base uma sequência de tarefas implementada na aula de Matemática.

O quadro teórico aborda três temas essenciais para o desenvolvimento do estudo: a educação matemática realista (RME) e toda uma didáctica específica inerente a esta perspectiva teórica, o desenvolvimento da investigação relativa ao ensino e à aprendizagem da álgebra, destacando a sua importância quer na Matemática quer na sociedade actual, e a utilização das tecnologias, tendo em conta as suas potencialidades pedagógicas no trabalho dos alunos em sala de aula.

A abordagem metodológica adoptada é qualitativa, de cariz interpretativo, tendo como modalidade de investigação o estudo de caso e utilizando como instrumentos de recolha de dados a observação participante, com registo em áudio e vídeo na sala de aula, a entrevista semi-estruturada, o diário de bordo e a recolha documental (em papel e em ficheiros informáticos).

A experiência de ensino que constitui o contexto do presente estudo desenvolveu-se numa turma de 8.º ano de escolaridade com o novo programa de matemática do ensino básico. A sequência de sete tarefas apresentada aos alunos privilegia a utilização da Matemática, e em particular dos conceitos de variação linear e de função afim, para a compreensão de problemas reais, com recurso a modelos computacionais.

No estudo de situações concretas de variação linear, o GeoGebra teve como principal efeito suscitar uma análise de índole geométrica do modelo matemático, que se sobrepôs a procedimentos de natureza algébrica, como seja a concretização de valores de uma variável numa equação para determinar a outra variável. Em segundo lugar, destaca-se a eficácia dos alunos na utilização das ferramentas oferecidas pelo software para atingirem os seus objectivos de análise e exploração dos modelos. Um dos pares de alunos observados usou o software como um ambiente intelectual em que foram aproveitadas as possibilidades gráficas e, sobretudo, a combinação entre diversas formas de representação matemática. Uma das principais vantagens do GeoGebra parece ser a ênfase no mecanismo de passagem entre diferentes tipos de representação: gráfica, geométrica, algébrica, etc., contribuindo assim para a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos (variáveis independentes e dependentes, taxa de variação, função afim, declive da recta, ordenada na origem e influência de parâmetros no comportamento da função).

Os resultados revelam ainda que os alunos se apropriaram da noção de modelo matemático e das suas possíveis formas de descrição e formulação, desenvolvendo conceitos matemáticos fundamentais em tarefas que evoluíram desde a análise de modelos associados a problemas concretos até à construção de um modelo matemático geral e abstracto da função afim.

**Palavras-chave:** Modelos matemáticos, variação linear, função afim, representações, GeoGebra



## Abstract

This research aims to understand the processes and strategies of 8<sup>th</sup> graders in realistic problem situations, using the software GeoGebra in the study of the linear function, based on a sequence of tasks developed in the mathematics classroom.

The theoretical framework addresses three key issues for the development of the study: realistic mathematics education (RME) and all the specific didactics inherent to this theoretical perspective, the development of research on the teaching and learning of algebra, emphasizing its importance both in mathematics and in today's society, and the use of technologies, taking into account their affordances in the work of students inside the classroom.

The methodological approach adopted is qualitative, interpretive in nature, with the characteristics of case study research, using participant observation, audio and video recording in the classroom, semi-structured interview, the researcher's field notes and document storage (paper and electronic records) as instruments of data collection.

The teaching experiment that supports this study was carried out in a class of grade 8 students taking the new curriculum for middle school mathematics. The sequence of seven tasks presented to students sustains the use of mathematics and in particular the concepts of linear variation and linear function in order to understand real problems, using computer models.

In the study of concrete situations of linear variation, GeoGebra main effect was to raise an analysis of geometric nature of the mathematical model that overlapped the nature of algebraic procedures, such as assigning values to a variable in an equation for determining another variable. Secondly, it was apparent the efficiency of students in the use of the tools offered by the software to achieve their goals of analysis and exploration of the models. A pair of students under observation used the software as an intellectual environment in which they took advantage of the graphic possibilities and, above all, of the combination of various forms of mathematical representation. One of the major advantages of GeoGebra seems to be the emphasis on the mechanism of translation between different types of representation: graphical, geometric, algebraic, and so on, thus contributing to the understanding of the mathematical concepts involved (independent and dependent variables, growth rate, linear function, slope of a line, y-intercept, and influence of parameters on the function).

The results also show that students have reached the notion of mathematical model and its possible ways of description and formulation, developing fundamental mathematical concepts in tasks that evolved from the analysis of models associated to practical problems to the construction of a general abstract mathematical model of the linear function.

**Keywords:** Mathematical models, linear variation, linear function, representations, GeoGebra.



## **Agradecimentos**

Este trabalho deve muito à orientação da Professora Doutora Nélia Amado pelo incentivo, pela total disponibilidade e compreensão e, ainda, por me ter ensinado novas formas de pensar e a encontrar o meu próprio caminho. E também à Professora Doutora Susana Carreira por estar sempre disponível, pela colaboração incondicional e por me ter guiado num novo ambiente intelectual marcado pelas actividades de modelação.

No decorrer da minha investigação também me senti muito apoiada pelo meu amigo Joaquim Manuel, pelos meus pais e pelos meus filhos.

A todos exprimo o meu reconhecimento e os meus agradecimentos.



# Índice Geral

CAPÍTULO I	1
Introdução	1
1.1. Motivação para o estudo	3
1.2. Apresentação do tema da investigação	4
1.3. A opção pela integração da tecnologia	8
1.4. As questões de investigação	11
CAPÍTULO II	15
Enquadramento Teórico	15
2.1. Matemática Realista	19
2.1.1.Princípios gerais	19
2.1.2.Ligação da matemática ao real nas suas implicações didácticas	20
2.1.3.Contextos realistas como meios de construção de conceitos matemáticos	29
2.2. M&A – Modelação & Aplicações no Ensino da Matemática	31
2.2.1.Argumentos favoráveis	31
2.2.2.Modelos e modelação	32
2.2.3.Modelos e aplicações	35
2.2.4.O estudo das funções lineares	36
2.3. O Computador como Ferramenta em Actividades de Aplicação	38
2.3.1.Representações múltiplas	41
2.3.2.Relações funcionais	45
2.3.3.Visualização e compreensão	47
CAPÍTULO III	49
Metodologia	49
3.1. Opções Metodológicas	51
3.2. Participantes e Critérios de Selecção	53
3.3. A experiência de ensino e a recolha de dados	55
3.3.1.Experiência de ensino	56
3.3.2.Procedimentos de recolha de dados	65
3.4. Análise de Dados	68

CAPÍTULO IV	71
O Caso do Pedro	71
4.1. Episódios de sala de aula	73
4.1.1.Episódio 1. Actividade experimental em matemática	73
4.1.2.Episódio 2. O Volume da Água	76
4.1.3.Episódio 3: Potência de um Motor	81
4.1.4.Episódio 4: Escolha de Tarifários	84
4.1.5.Episódio 5: Cestos de Compras	90
4.1.6.Episódio 6: Festa de Final de Ano	96
4.1.7.Episódio 7: Quanto custa ter carro próprio?	101
4.1.8.Episódio 8: Variação dos Parâmetros	111
4.1.9.Resultados	115
4.2. A entrevista do Pedro	117
4.2.1.Apresentação	117
4.2.2.A construção de um modelo matemático	118
4.2.3.O conceito de modelo linear	121
4.2.4.Resultados	124
CAPÍTULO V	127
Considerações finais	127
5.1. Síntese do estudo	129
5.2. Conclusões do estudo	131
5.3. Reflexões finais	138
Referências bibliográficas	141
Anexos	147

## Índice de Figuras

Figura 1 – Níveis de Gravemeijer	22
Figura 2 – Modelo de Gravemeijer	23
Figura 3 – Ciclo de modelação de Borromeo Ferri	24
Figura 4 – Resposta à questão 2 pelo par Pedro/Diogo	77
Figura 5 – Representações criadas pelo par Pedro/Diogo no GeoGebra	79
Figura 6 - Resposta à questão 5 pelo par Pedro/Diogo	80
Figura 7 - Resposta à questão 1 pelo par Pedro/Diogo	83
Figura 8 - Resposta à questão 2 pelo par Pedro/Diogo	83
Figura 9 - Resposta à questão 1 por outro par de alunos	85
Figura 10 - Representações criadas pelo par Pedro/Diogo	86
Figura 11- Resposta à questão 1 pelo par Pedro/Diogo	86
Figura 12 - Representações criadas por outro par de alunos no GeoGebra	87
Figura 13 - Resposta à questão 2 pelo par Pedro/Diogo	88
Figura 14 - Resposta à questão 2 por outro par de alunos	88
Figura 15 - Representações criadas por outro par de alunos	91
Figura 16 - Resposta à questão 2 por outro par de alunos	91
Figura 17 - Representações criadas pelo par Pedro/Diogo	93
Figura 18- Protocolo de construção do GeoGebra resultante do trabalho efectuado pelo par Pedro/Diogo	95
Figura 19 - Representações criadas pelo par Pedro/Diogo	98
Figura 20 - Resposta à questão 4 por outro par de alunos	100
Figura 21 - Representações criadas por outro par de alunos	102
Figura 22 - Resposta à questão 1 pelo par Pedro/Diogo	103
Figura 23 - Representações criadas pelo par Pedro/Diogo	104
Figura 24 - Resposta à questão 4 pelo par Pedro/Diogo	105
Figura 25 - Resposta à questão 5 pelo par Pedro/Diogo	106
Figura 26 - Resposta à questão 7 pelo par Pedro/Diogo	108
Figura 27 - Protocolo de construção do GeoGebra resultante do trabalho efectuado pelo par Pedro/Diogo	109
Figura 28 - Representações criadas pelo par Pedro/Diogo	112

Figura 29 - Resposta à questão 1 pelo par Pedro/Diogo	112
Figura 30 - Representações criadas pelo par Pedro/Diogo	113
Figura 31 - Resposta à questão 2 pelo par Pedro/Diogo	113
Figura 32 - Representações criadas pelo par Pedro/Diogo	114
Figura 33 - Resposta à questão 3 pelo par Pedro/Diogo	114
Figura 34 - Representações criadas pelo Pedro	119
Figura 35 – Resposta à questão 1, da primeira tarefa, dada pelo Pedro	120
Figura 36 - Resposta à questão 2, da primeira tarefa, dada pelo Pedro	120
Figura 37 - Representações criadas pelo Pedro	122
Figura 38 - Resposta à questão 3, da segunda tarefa, dada pelo Pedro	122
Figura 39 - Resposta à questão 4, da segunda tarefa, dada pelo Pedro	124

### **Índice de Quadros**

Quadro 1 – Vertentes fundamentais do pensamento algébrico	22
Quadro 2 – Adaptação da classificação dos registos que podem ser mobilizados em processos matemáticos, segundo Duval	43
Quadro 3 – Planificação da experiência de ensino	60

### **Índice de Fotografias**

Fotografia 1 – Realização da actividade experimental	74
--	----

# **CAPÍTULO I**

## **Introdução**



## 1.1. Motivação para o estudo

A principal motivação para este trabalho prende-se com a minha actividade profissional como docente de Matemática. Desde sempre tenho tentado desempenhar esta actividade da forma que acredito ser melhor, procurando olhar para as minhas práticas e ponderar sobre as mesmas. O meu trabalho beneficiou sempre do meu gosto por leituras gerais ou especializadas relativamente a vários assuntos ou temas relacionados com a Educação Matemática. Foram também estas pesquisas que me ajudaram a organizar os materiais apresentados nesta memória, em particular, relativamente à importância atribuída às tecnologias na sociedade moderna e, por outro lado, a novas abordagens ao processo de ensino/aprendizagem da Matemática. Entre as teorias que tive oportunidade de estudar e aprofundar, destaco, por exemplo, a perspectiva sócio-construtivista da aprendizagem ou a visão da matemática realista, no sentido que é referido por Freudenthal.

A utilização das tecnologias em sala de aula é igualmente um aspecto que suscita o meu interesse há algum tempo. Ao longo da minha experiência profissional tenho constatado que o recurso às tecnologias, em todos os níveis de ensino, se revela vantajoso, por várias razões que apresento a seguir. Menciono agora somente o maior interesse e o envolvimento dos alunos na actividade matemática assim como uma melhor aprendizagem, visível através de um domínio mais profundo dos conceitos matemáticos explorados através de ferramentas tecnológicas hoje disponíveis nas escolas. Estes aspectos concordam, de resto, com o que figura no Programa de Matemática para o Ensino Básico onde se refere que:

*Deve tirar-se partido das possibilidades de experimentação que os computadores oferecem nos domínios geométrico e numérico, e no tratamento de dados. A utilização adequada de recursos tecnológicos como apoio à resolução de problemas e à realização de actividades de investigação permite que os alunos se concentrem nos aspectos estratégicos do pensamento matemático. (ME-DGIDC, 2007, p. 62-63)*

A existência de modelos matemáticos que regulam a nossa vida e têm influência, mais ou menos visível, no nosso quotidiano leva-me a concluir que é essencial compreender como estes são construídos, como são aplicados e a desenvolver uma atitude crítica em relação à sua utilização pois esta determina a qualidade de vida de todos nós. Exemplos bem conhecidos de casos em que a Matemática tem uma função prescritiva na sociedade actual são os que regulam taxas de impostos, escalões de IRS, etc. Como são construídos os modelos matemáticos utilizados pela DGCI que definem o que cada um tem de pagar? E porquê esse modelo? E como é aplicado esse modelo? E os resultados da sua aplicação correspondem a uma forma justa e equitativa de contribuição dos cidadãos? Como este exemplo, muitos outros ocorrem, tal como os modelos matemáticos usados para efectuar a cobrança da electricidade ou da água (porque é que tem de ser uma função definida por ramos?) ou o modelo que as instituições bancárias usam para contabilizar os juros pelo capital que emprestam.

## **1.2. Apresentação do tema da investigação**

Este trabalho visa estudar o trabalho desenvolvido por alunos do 8.º ano de escolaridade com modelos matemáticos, adequados ao seu nível de conhecimentos, para resolver situações problemáticas em contextos realistas.

O estudo tem como base a implementação de uma experiência pedagógica, na sala de aula, que se estrutura em torno dos seguintes vectores:

- a) A aplicação sequenciada de um conjunto de tarefas que propõem a resolução de problemas da vida real.
- b) A actividade de construção, aplicação e ajustamento de modelos matemáticos que sirvam para dar resposta a cada problema proposto;
- c) A utilização de uma ferramenta computacional como instrumento de apoio à construção e exploração dos modelos matemáticos;

Assim, o tema deste trabalho, que se concentra no estudo da função afim, procura combinar o uso de tecnologias com o estudo de funções, especificamente da função afim, dando especial atenção à forma como a actividade de construção e exploração de modelos matemáticos é implementada na aula de Matemática.

Ao longo da minha actividade lectiva tenho reflectido bastante sobre a influência que as experiências proporcionadas aos alunos, na sala de aula, podem ter nas suas aprendizagens, concretamente na construção do saber matemático.

As dificuldades dos alunos prendem-se, na sua maioria, com o grau de abstracção exigida que, por vezes, conduz a uma certa tendência para “decorar” sem compreender o significado dos conceitos envolvidos. Por outro lado, os alunos estão pouco habituados a efectuar um registo escrito do desenvolvimento das tarefas que vão investigando, o que dificulta o surgimento de conclusões sistematizadas e de ideias matemáticas sólidas. Para além da minha consciência desta situação, senti ser urgente identificar e conhecer formas de os ajudar a ultrapassar este problema, buscando trajectos de aprendizagem que passem decididamente pela compreensão.

Lembro que um dos objectivos apresentados no Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) é que os alunos desenvolvam uma compreensão da Matemática. “Este objectivo é da ordem do ‘saber porquê’ e deve ser prosseguido a cada momento da aprendizagem” (p. 4).

Deste modo, várias questões têm vindo a tornar-se, na minha prática docente, particularmente pertinentes: Como podem os alunos superar as suas dificuldades se as propostas de trabalho apelam quase exclusivamente, à mecanização de procedimentos, a algoritmos e à resolução repetitiva de exercícios? Como poderemos contribuir para melhorar a aprendizagem dos alunos? Como estabelecer uma dinâmica de sala de aula que permita a aprendizagem dos alunos com compreensão?

Na minha prática lectiva tenho verificado que a aplicação de tarefas de natureza exploratória e/ou investigativa (realizadas em pequenos grupos) pode contribuir para melhorar a aprendizagem, verificando-se um maior envolvimento dos alunos, levando os melhores a chegar mais longe e os que sentem mais obstáculos a progredir. A comunicação matemática é, por outro lado, uma capacidade transversal a desenvolver ao longo de todo o trabalho realizado na disciplina de Matemática e surge com grande destaque no Programa de Matemática para o Ensino Básico. Este refere, por exemplo, que “os alunos devem ser capazes de *comunicar* as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático” (p. 5).

Outro tema hoje consensual nas directrizes curriculares e que também tem suscitado a minha reflexão é o da contribuição que a Matemática pode dar para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos. Assim, o ensino não deve visar apenas

a aquisição de determinados conteúdos programáticos mas, mais do que isso, deve procurar desenvolver certas capacidades que tornem os alunos mais aptos a intervir de forma efectiva na sociedade em que vivem. Esta ideia está explícita no programa de Matemática quando, ao apresentar as finalidades do ensino desta disciplina, refere que esta deve contribuir para o desenvolvimento pessoal do aluno e também para a sua plena realização na participação e desempenho sociais e na aprendizagem ao longo da vida (ME-DGIDC, 2007, p. 3). Daí surge com toda a premência a atenção a dar à dinâmica da aula, ao papel activo do aluno na construção do seu conhecimento, à interacção com os pares e com o professor.

Quando os alunos realizam tarefas com determinadas características, em pequenos grupos, procurando estratégias para resolver uma questão proposta, isto coloca-os numa situação em que são estimulados a expor o seu raciocínio aos demais elementos do grupo de trabalho. Essa interacção entre os alunos e uma orientação cuidadosa do professor constituem condições favoráveis para que o aluno aprenda Matemática com compreensão. Esta actividade é análoga à realizada pelos matemáticos quando trabalham na criação matemática. Por exemplo, Bishop & Goffree (1986) defendem que os alunos criam os seus próprios significados e que apenas através do encorajamento do professor para a comunicação entre todos os participantes na aula é possível uma genuína partilha de significados matemáticos. Devem também os professores saber qual “o estado” de conhecimento dos seus alunos para, desse modo, estarem mais aptos para intervir de forma significativa pois, caso contrário, se as explicações e orientações não estabelecem nenhuma ligação com o conhecimento do aluno, os objectivos acabam por ser falhados. Para que a aprendizagem seja significativa o professor deve proporcionar aos alunos a possibilidade de participar activamente no processo de partilha do conhecimento, deve através do questionamento levar à exposição de conexões e significados acerca de ideias matemáticas bem como proporcionar uma fase reflexiva na actividade matemática.

Em geral, parece verificar-se que os alunos adquirem os conhecimentos de uma forma mais profunda, ao serem ajudados pelos colegas e pelo professor a alcançar determinados objectivos. Será que o facto de terem de explicitar os seus raciocínios, as estratégias que utilizaram para chegar a certo resultado e todo o processo de resolução de um problema ou questão os ajuda? Será que um certo esforço para explicar o que estão a fazer lhes permite ir “mais além”? Enquanto professora, reconheço que ao

expormos o nosso pensamento estamos a reorganizar as nossas ideias e a adquirirmos uma visão mais completa sobre o assunto. Será que o mesmo se passa com os alunos?

Kieran (2001) num dos seus estudos, analisou as actividades partilhadas e, particularmente o discurso matemático interactivo entre alunos com treze anos de idade e, numa análise paralela, considerou o impacto aparente desse discurso sobre os pensamentos individuais. Uma das questões desse trabalho era averiguar se os alunos, de facto, tornam os pensamentos disponíveis para os parceiros e a forma que toma esta acção. O discurso público pode ser separado, segundo interpretações feitas pela investigadora, nas situações em que os participantes pareciam estar a dirigir-se mais a eles próprios (o canal pessoal) e aquelas em que os participantes estavam a dirigir-se ao interlocutor (canal interpessoal). A perspectiva discursiva, que forneceu uma lente teórica poderosa para a interpretação dos modelos de interacção, também permitiu ver que, para os pares de adolescentes deste estudo, estabelecer pontes entre os aspectos individual e social na resolução de problemas de Matemática pode ser extremamente difícil de pôr em prática, sobretudo quando estão envolvidas situações e problemas novos. Tornar o seu pensamento disponível para um interlocutor de tal maneira que a interacção seja altamente produtiva, do ponto de vista matemático, para ambos, pode ser um desafio suplementar para os alunos.

E porquê a álgebra?

A opção por um trabalho que envolve o tema curricular da álgebra deve-se ao meu fascínio pessoal pelo tema em si, à importância crescente deste tema no currículo de Matemática na sociedade actual e pela sua relação com outras áreas do saber.

Os vários domínios da Matemática interpenetram-se de tal maneira que, em última análise, cada conceito matemático fundamental (por exemplo, o conceito de função) depende de muitos outros e intervém em muitos domínios, entre os quais se poderá assinalar a geometria.

Muitas vezes considerada como a ciência das estruturas, a álgebra é um dos quatro temas basilares presentes nos três ciclos do Ensino Básico, tendo assim uma grande importância no currículo da Matemática escolar. É, por outro lado, um dos temas onde os alunos revelam mais dificuldades, devido à sua linguagem própria, carregada de simbolismo, para definir relações.

A brochura “Álgebra no Ensino Básico” editada pela DGIDC (2009) destaca também a importância do tema na sociedade:

*Ao longo do ensino básico, os alunos devem desenvolver a sua capacidade de ler e interpretar gráficos de funções, que constitui uma capacidade importante para o seu futuro enquanto cidadãos. Para isso, necessitam de trabalhar com gráficos que apresentem vários tipos de variação em certos intervalos: (i) estritamente crescentes, estritamente decrescentes ou constantes; e (ii) com variação constantes e não constantes (p.127).*

Este documento destaca ainda a necessidade de utilizar as funções para modelar situações da realidade e resolver problemas e não apenas para abordar os aspectos estritamente matemáticos do conceito de função. Deste modo, o aluno pode contextualizar as suas aprendizagens, não se limitando à manipulação simbólica na resolução de exercícios com expressões algébricas.

O meu gosto e interesse pessoal pela álgebra e pela sua didáctica, aliado ao reconhecimento das potencialidades da tecnologia no ensino da Matemática, nomeadamente do GeoGebra, levaram-me a encetar este estudo com o propósito de integrar o recurso a uma ferramenta tecnológica na actividade de exploração de modelos matemáticos em problemas realistas.

Antes de indicar as principais características deste último gostaria de tecer ainda algumas considerações sobre o interesse de uma ferramenta computacional.

### **1.3. A opção pela integração da tecnologia**

A tecnologia é um dos principais factores de mudança no nosso quotidiano; em cada dia surgem novos instrumentos electrónicos e informáticos que alteram o nosso dia-a-dia. O desafio para o ensino coloca-se na forma de introduzir estas novas formas de abordar o conhecimento nas escolas, com vista a criar melhores condições de aprendizagem para os alunos.

A utilização de tecnologias na aula de Matemática é um factor que, de modo geral, desperta um maior interesse e envolvimento dos alunos. Nos últimos anos, tenho tido oportunidade de utilizar o software educativo GeoGebra em sala de aula para leccionar temas de geometria e de álgebra, pois permite potenciar a investigação em

detrimento de tarefas mecânicas e rotineiras. Além disso este software associa ferramentas de geometria dinâmica à possibilidade de introduzir equações, coordenadas de pontos e a respectiva representação gráfica. Isto é, para além de uma visualização quase imediata da representação gráfica de uma função, o aluno pode ter no mesmo ambiente de trabalho, a tabela com os valores dos pares ordenados  $(x, y)$  e a expressão analítica que dão origem a determinada representação gráfica, o que possibilita o estabelecimento de conexões entre cada uma das representações. Se mudar um dos parâmetros na expressão que alterações vai ter o gráfico? Se “deslocarmos” o gráfico o que muda na expressão?

Nas orientações metodológicas do Programa de Matemática para o Ensino Básico, é referido que os alunos devem usar calculadoras e computadores, salientando-se que “o seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objectivo prioritário de aprendizagem, e a atenção se deve centrar nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados” (ME-DGIDC, 2007, p. 9).

Nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar, a tecnologia é apresentada como um dos seis princípios enunciados, tal é a importância atribuída à tecnologia que salientam “ser essencial pois influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos” (NCTM, 2000/2007, p. 26).

Afirmam ainda que “devido à utilização da tecnologia, muitos dos temas da matemática discreta adquirem uma nova importância nas salas de aula actuais; as fronteiras do domínio matemático estão em plena transformação” (NCTM, 2000/2007, p. 29).

Tal afirmação parece-me de todo pertinente na sociedade actual pois o progresso, em termos tecnológicos, é rápido e exige, de todos nós, uma capacidade de adaptação permanente. A utilização da tecnologia no ambiente escolar, nomeadamente do computador, é já um processo sem retorno. Por exemplo, o computador passou a ser uma ferramenta indispensável no dia-a-dia, em qualquer situação, por exemplo para escrever uma carta, para realizar a apresentação de um projecto, para gerir o nosso orçamento familiar, para preparar uma aula e para um sem fim de tarefas que ou são facilitadas pelo uso do computador ou são impossíveis de realizar de outro modo. Num momento em que se realiza no nosso país um grande investimento para dotar as Escolas

de recursos tecnológicos como computadores e quadros interactivos multimédia (QIM) nas salas de aula, é nossa obrigação tirar o maior partido destas ferramentas para promover as aprendizagens dos alunos.

Como está estabelecido no Despacho n.º 700/2009 de 9 de Janeiro, um dos objectivos do PTE é promover a utilização das TIC nas actividades lectivas e não lectivas. Assim, muitas escolas passaram a dispor de computadores em número suficiente para toda a comunidade escolar. O desenvolvimento tecnológico coloca ao nosso dispor instrumentos, nomeadamente software educativo, que podem alterar a dinâmica da sala de aula; no entanto, várias questões se colocam no que respeita à utilização do computador em sala de aula. Como utilizar eficazmente o computador para a melhoria das aprendizagens? Que vantagens pode trazer o seu uso para o processo de ensino/aprendizagem? De que modo pode ser útil para potenciar a motivação e o interesse dos alunos?

Sem pretender responder aqui completamente a estas questões parece-me interessante citar neste contexto Matos (2008), o qual diz que “o reconhecimento da importância e do poder que representa o ir mais longe e mais fundo nos próprios conhecimentos e trabalho – e por isso, na sua aprendizagem – através da interacção com ferramentas, pessoas e representações e não simplesmente a partir da informação dada por professores, por livros ou por software.” (Matos, 2008).

Na prática, penso que se deve utilizar a tecnologia para a realização de tarefas que dificilmente poderiam ser implementadas de outro modo (destacando, por exemplo, as tarefas de modelação de situações da vida real), que permitem libertar o aluno de actividades rotineiras e repetitivas, dando-lhe a possibilidade de explorar uma maior variedade de conjecturas. Para além disso, a tecnologia é um meio por excelência de promover a autonomia, dado que pode conduzir a uma verdadeira apropriação do conhecimento por parte do aluno que se torna mais capaz de procurar activamente os porquês de determinados resultados matemáticos.

A experiência pedagógica que está na base deste estudo foi desenvolvida através da proposta de realização de tarefas em diferentes contextos, com uma ligação (mais ou menos forte) a situações problemáticas reais.

Cada uma das tarefas foi pensada de modo a permitir aos alunos a procura de um caminho que conduza a uma solução (ou mais) para as questões colocadas, sem uma estratégia indicada ou definida pelo professor. Foi assim dada grande importância à

natureza das tarefas, que apresentaram um cunho exploratório ou investigativo. As tarefas e as situações problemáticas propostas deram oportunidade aos alunos de se envolverem e construírem o seu próprio conhecimento.

A construção da sequência de tarefas esteve ancorada nos objectivos de aprendizagem definidos, em colaboração com o professor da turma, e num possível percurso de aprendizagem dos alunos, que foi delineado tendo em conta o desenvolvimento destes alunos no ano lectivo anterior.

Estes aspectos de carácter didáctico tiveram influência determinante sobre algumas das minhas escolhas metodológicas no trabalho de investigação. Elas levaram-me a pensar em escolher os alunos para o estudo, de entre os alunos da turma que, fundamentalmente, manifestassem interesse por aprender, vontade de participar e uma atitude colaborativa.

Pelo interesse em compreender como “pensam” os alunos, que dificuldades têm na construção e exploração de modelos matemáticos e como usam a ferramenta computacional durante a resolução das tarefas propostas, optei por uma metodologia que seguiu um paradigma interpretativo, na modalidade de estudo de caso de cunho descritivo. Estes pontos serão desenvolvidos no capítulo da metodologia.

#### **1.4. As questões de investigação**

Este estudo tem como motivação a importância de desenvolver propostas de trabalho, considerando as orientações metodológicas do actual Programa de Matemática do Ensino Básico. Procura-se perceber as estratégias e processos utilizados pelos alunos na resolução de tarefas de natureza exploratória que envolvem modelos de crescimento linear. Pretende-se igualmente averiguar a influência do computador, designadamente com o recurso ao GeoGebra, na actividade desenvolvida pelos alunos. Por fim, irei analisar que aprendizagens resultam no âmbito do estudo da função afim.

Actualmente, nas aulas de Matemática, o aluno deixou de ser apenas um ouvinte passivo e passou a ter um papel activo no decorrer das mesmas; não só é questionado e convidado a colaborar como passou a assumir um papel central no desenvolvimento da actividade na sala de aula.

São indicadas, no novo Programa de Matemática do Ensino Básico, várias finalidades do ensino da Matemática. Uma delas (ME-DGIDC, 2007, p. 3) inclui o desenvolvimento, nos alunos, da:

- Compreensão de conceitos, relações, métodos e procedimentos matemáticos e da capacidade de os utilizar na análise, interpretação e resolução de situações em contexto matemático e não matemático;
- Capacidade de analisar informação e de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem processos de modelação matemática;
- Capacidade de abstracção e generalização e de compreender e elaborar argumentações matemáticas e raciocínios lógicos;
- Capacidade de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega.

No novo programa de Matemática chama-se à atenção para o facto desta disciplina ser “uma linguagem que nos permite elaborar uma compreensão e representação do mundo, e um instrumento que proporciona formas de agir sobre ele para resolver problemas que se nos deparam e de prever e controlar os resultados da acção que realizarmos” (ME-DGIDC, 2007, p. 2). Para dar cumprimento a esta finalidade a modelação matemática é uma actividade que se adequa claramente a este propósito, na medida em que o modelo, pelas suas características dinâmicas, não só representa a situação real como se vai ajustando a ela e permite, pela sua capacidade predictiva, intervir sobre essa realidade e revelar o poder da matemática.

*Os alunos devem ter a oportunidade de trabalhar com funções afins (não lineares) a partir das suas diversas representações, desenvolver a capacidade de extrair a informação relevante para a resolução de problemas e transformar essa informação noutra tipo de representação, caso seja útil.*

*Embora estas situações se assemelhem àquelas em que existe proporcionalidade directa, devido à existência de uma taxa de variação constante, diferencia-as o facto de existir um valor inicial não nulo, cujo significado real depende da situação em causa (ME-DGIDC, 2007, p.134).*

O conhecimento acerca do raciocínio dos alunos, nomeadamente em tópicos de álgebra que envolvem o estudo de funções, e a percepção dos conceitos que os alunos são capazes de descobrir e compreender, pode ser obtido de diversas maneiras, dependendo do contexto de trabalho na sala de aula. No entanto, dado que este estudo se vai desenvolver a partir da implementação de uma experiência de ensino que envolve uma sequência de tarefas sobre problemas da realidade, no âmbito do estudo da função afim e com recurso ao GeoGebra, procurarei responder às seguintes questões:

- 1) Que estratégias são usadas pelos alunos para resolver as tarefas propostas de construção e exploração de modelos em situações realistas?
- 2) Qual o papel do GeoGebra na construção de modelos matemáticos?
- 3) Como é que a utilização do GeoGebra no contexto da construção e aplicação de modelos matemáticos pode contribuir para o estudo da função afim, com compreensão?



## **CAPÍTULO II**

### **Enquadramento Teórico**



Neste capítulo, consagrado como o seu nome indica, aos fundamentos teóricos deste trabalho, apresento algumas ideias gerais de natureza filosófica ou técnica, à luz das quais analisarei os dados, nos capítulos seguintes.

Observemos, para começar que, num eixo ascendente, em que partindo da base “técnica” chegamos ao cume “metafísica”, esta reflexão ocupa um grau, por assim dizer, intermédio. Ela poderia ser, portanto, desenvolvida tanto na direcção ascendente com na descendente. Limitarei deliberadamente estes desenvolvimentos, privilegiando contudo a direcção que vai da teoria para a técnica e para a prática. Por esta razão, gostaria, nesta introdução, de tecer algumas considerações que se inserem na outra direcção – aquela que vai da teoria para a metafísica e que praticamente não voltarei a abordar.

Em primeiro lugar, um aspecto que emerge das diversas leituras que realizei, é o facto das diferentes posições didácticas repousarem sempre sobre hipóteses, que na maioria dos casos são deixadas implícitas, relativas à natureza dos alunos e de maneira mais geral à natureza humana. Assim, por exemplo, alguns autores admitem que um problema fundamental da didáctica reside no facto de o professor, segundo a metodologia utilizada, ser ou não capaz de suscitar o interesse dos alunos. Nestes mesmos trabalhos parte-se implicitamente do princípio de que conseguindo suscitar este interesse, os problemas principais se encontram praticamente resolvidos. Esta posição repousa naturalmente sobre uma visão da natureza humana análoga à que defendeu Rousseau, no seu mito do “bom selvagem”. Nesta perspectiva, o homem é bom por natureza o que o pode tornar mau ou indisciplinado são sempre ou necessidades não satisfeitas ou motivos de ordem institucional. A esta visão opõe-se a que anteriormente dominava, por exemplo, na esfera da igreja católica, e à qual podemos chamar “Doutrina do Pecado Original”. Segundo esta, a natureza humana tem um fundo bom, mas este encontra-se enfraquecido, para não dizer obscurecido, por aquilo a que os teólogos da Idade Média denominavam de “pecado original”. Nesta óptica, a educação teria por missão corrigir esse desvio da natureza. Esta correcção não se faria sem sacrifício da parte dos alunos e sem utilização de métodos relativamente autoritários na resolução, por exemplo, dos problemas de disciplina. Independentemente da questão da verdade desta doutrina, é um facto que muitos problemas partem de alunos sem dificuldades de aprendizagem mas que não encontram qualquer interesse no trabalho que é desenvolvido na sala de aula.

Outra hipótese frequente, apresentada na literatura actual, é a do igualitarismo de base dos alunos, que tem também a ver com a filosofia de Rousseau e, em particular, com o princípio de base da revolução francesa “a cada homem um voto”. Ao considerar-se os alunos como basicamente idênticos, privilegia-se automaticamente esta igualdade sobre a diversidade das personalidades, das capacidades e das possibilidades. É talvez por isto que alguns trabalhos recentes seguindo a linha de Pestalozzi e Vinet, reagem a esta posição pondo em evidência a necessidade de formas de ensino mais personalizadas. A aplicação destas recomendações esbarra contudo, na maioria dos casos, com contingências de ordem institucional (por exemplo, o elevado número de alunos por turma) que foram determinadas de maneira conforme com a visão igualitarista. Estamos perante uma situação bastante recorrente nos nossos dias: o desejo de colocar em prática determinadas ideias encontra obstáculos de ordem material ou institucional, que têm origem em questões de natureza económica.

Actualmente podemos encontrar outras situações similares em diversos domínios, por exemplo, na Medicina, onde parece existir uma incompatibilidade entre a medicina tradicional, de base igualitarista e algumas formas de medicinas paralelas, de base holística e personalista. A transformação destas aparentes contradições em complementaridades parece-me ser um dos principais desafios dos tempos modernos.

O meu objectivo não é desenvolver estes temas profundamente, mas apenas ilustrar o facto de que qualquer tese ou posição didáctica repousa sobre posições filosóficas implícitas, que poderiam conduzir em certos casos a atitudes pedagógicas completamente diferentes.

Passo, em seguida, a desenvolver algumas teorias que servem de suporte a este trabalho e com as quais me identifico.

## 2.1. Matemática Realista

### 2.1.1. Princípios gerais

O conceito de Matemática realista pode entender-se de diferentes maneiras. Por exemplo, segundo Platão, a Matemática seria realista porque os seres matemáticos existem na realidade do mundo das ideias, esta existência sendo por si só independente de qualquer operação do nosso espírito. Esta doutrina pertence à categoria daquelas que podem ser qualificadas de “ontológicas”. Numa perspectiva mais moderna e mais funcional, o conceito de Matemática realista baseia-se na ideia da Matemática como uma actividade humana (e isto aplica-se tanto à Matemática, que habitualmente é dita de pura como à aplicada). Esta perspectiva admite a existência de uma realidade objectiva, o que quer dizer, exterior ao nosso espírito, ou seja, à actividade humana. O objectivo desta actividade é a compreensão do real, por isso esta abordagem entra também na linha daquelas que se podem classificar de fenomenológicas, no sentido desenvolvido pelo filósofo Edmund Husserl na sua obra magistral a *Ideia da Fenomenologia* (1990). Esta definição tem várias consequências, em particular, pedagógicas, uma das principais é a analogia de método ou, se se preferir, a abolição de clivagem entre Matemática Pura e Matemática Aplicada, no que diz respeito ao método de ensino.

Esta concepção realista admite várias nuances e pode ser considerada como transversal, relativamente a outras, tais como o construtivismo. Por exemplo, realismo no sentido de Freudenthal e construtivismo opõem-se ambos a uma visão positivista e formalista da Matemática e do seu ensino. No entanto, realismo e construtivismo também se distinguem entre si no que diz respeito, por exemplo, à concepção da realidade. Para o construtivismo esta é uma construção social essencialmente associada a um paradigma cultural dominante.

No realismo de Freudenthal a realidade pode existir como um dado exterior objectivamente perceptível pelos nossos sentidos. Contudo, segundo Freudenthal quando se trata de didáctica é conveniente substituir “situação real” por “situação concreta”, sendo esta última uma simplificação adequada da primeira na qual se suprimiram os aspectos secundários relativamente aos fins a atingir pelo ensino. Esta necessidade resulta, em última análise, da extrema complexidade da realidade assim como da adequada compreensão do binómio actividade-finalidade, binómio que nos

escritos de Freudenthal desempenha um papel fundamental. Esta postura tem uma consequência importante do ponto de vista da didáctica: realismo, no sentido de Freudenthal, e construtivismo coincidem numa larga medida quando vistos nesta perspectiva.

Assim, em ambos os casos, uma das finalidades do ensino da Matemática é a formação de pessoas aptas à resolução de problemas concretos. Segundo o mesmo autor, esta finalidade obtém-se através de um método que privilegia a prática à abstracção e à imitação. Isto conduz-nos a um aspecto importante da filosofia de Freudenthal, trata-se de uma filosofia de cariz essencialmente humanista (novo ponto de conexão com o construtivismo).

### **2.1.2. Ligação da matemática ao real nas suas implicações didácticas**

A relação entre a Matemática e a realidade é um problema clássico da filosofia. A título de exemplo, podemos recordar a concepção platónica, segundo a qual os seres matemáticos existem na realidade do mundo das ideias assim como a célebre questão dos universais que ocupou toda a idade média (assim tratava-se de saber se os conceitos gerais existiam em si mesmos ou somente no nosso espírito). Com o passar dos tempos os mesmos problemas foram reaparecendo de formas similares ou distintas, segundo os contextos culturais, por vezes, com soluções correspondendo a propostas pedagógicas ou didácticas antagónicas.

A ausência de ligação entre o mundo empírico – entendendo-se por esta expressão o mundo que é comum aos alunos e acessível à sua percepção imediata – e a matemática, pode originar dificuldades no processo de aprendizagem, sobretudo se a matemática escolar é preparada para ser ensinada de maneira essencialmente transmissiva. Gravemeijer (2005), um discípulo de Freudenthal, refere que o facto de serem “dois mundos disjuntos” leva a que a Matemática escolar se torne dificilmente acessível aos alunos. Uma outra dificuldade resulta do facto de professores e alunos terem diferentes quadros de referência. O fosso existente entre o conhecimento do professor e o do aluno, no que se refere aos conteúdos a ensinar/aprender, provoca aquilo a que se chama o Paradoxo da Aprendizagem, segundo o qual os alunos seriam

obrigados a estabelecer conexões entre o seu próprio conhecimento e o do professor, o que nem sempre é possível.

Para Gravemeijer é importante que o professor ajude os alunos a construir o seu próprio conhecimento matemático, com base no que eles já sabem, ao invés das tentativas de estabelecer conexões com a “matemática pronta”. A apresentação de algoritmos como “receitas” para resolver problemas é um obstáculo à aprendizagem pois os alunos não conseguem estabelecer conexões com o conhecimento externo que para eles não existe (apenas os peritos que sabem matemática e construíram os modelos podem ver a matemática reflectida neles). Este autor defende ainda que os alunos têm dificuldade na apropriação do conhecimento matemático abstracto pois este situa-se num nível diferente de compreensão.

Para ultrapassar estes problemas, o Instituto Freudenthal propõe a educação matemática realística (RME), teoria que mostra como um tema pode ser ensinado de acordo com as ideias sobre a Matemática, defendidas por Freudenthal, como uma actividade humana. Para facilitar esta apropriação, a teoria propõe a “reinvenção guiada”, ou seja, os alunos devem, com o auxílio do professor, realizar um percurso de invenção onde é garantido que os alunos façam, por eles próprios, a aprendizagem da Matemática como um processo de invenção da Matemática.

Surge assim a ideia de “modelação emergente”; modelação nesta óptica é a actividade dos alunos durante a resolução de um problema contextualizado, isto é, foca-se no modelo que o aluno vai construir a partir da análise de problemas concretos e contextualizados. Assim, “a abordagem do modelo emergente ajuda os alunos a construir uma realidade matemática por eles próprios.” (Gravemeijer, 2005, p. 21). Partindo de experiências do quotidiano, o aluno tem oportunidade de desenvolver o seu conhecimento matemático, permitindo que se desenvolva um trabalho a diferentes níveis numa mesma turma.

Mas como podem os professores implementar a abordagem preconizada pela RME nas escolas portuguesas? Gravemeijer responde a esta questão apontando para a necessidade de construir sequências de ensino (*instructional design*), programas que suportem estas sequências de ensino e de recursos com possíveis tarefas a aplicar. Para que os professores sejam capazes de mudar a sua prática lectiva é imprescindível o seu desenvolvimento profissional, sendo dado que esta mudança se opõe a práticas lectivas estabelecidas e, por consequência, choca com a inércia inerente ao ser humano face a

qualquer exercício deste género. O objectivo é os professores deixarem de ser a única autoridade na sala de aula para passarem a ser moderadores das discussões em sala de aula, orientadores das aprendizagens, tendo a função de elementos catalisadores no percurso de re (invenção) da Matemática que se pretende ensinar.

Adoptar a modelação emergente, tem como ponto de partida uma actividade onde se recorre ao uso de ferramentas mais ou menos formais, como desenhos, diagramas, notações informais ou notações matemáticas convencionais. Na interacção com estes modelos que surgem na procura de resposta a um problema, a actividade vai-se refinando até à reinvenção dos conteúdos objectivos inerentes ao problema contextualizado. Pressupõe-se que a interacção com estes modelos ajuda os alunos a reinventarem a Matemática mais formal. Assim, um modelo de actividades matemáticas informais desenvolve-se num modelo para um raciocínio matemático mais formal.

No esquema seguinte, Gravemeijer (1994) identifica quatro tipos gerais de actividade e mostra o papel dos modelos em cada um dos tipos.

- (1) *Actividade na situação da tarefa*, na qual as interpretações e resoluções dependem da compreensão de como agir no contexto;
- (2) *Actividade referencial*, na qual cada *modelo de* refere-se a actividades na situação descrita nas actividades de ensino;
- (3) *Actividade geral*, na qual os *modelos para* referem-se a um quadro de representações matemáticas;
- (4) *Raciocínio matemático formal*, o qual não depende do apoio de modelos concretos para a actividade matemática.

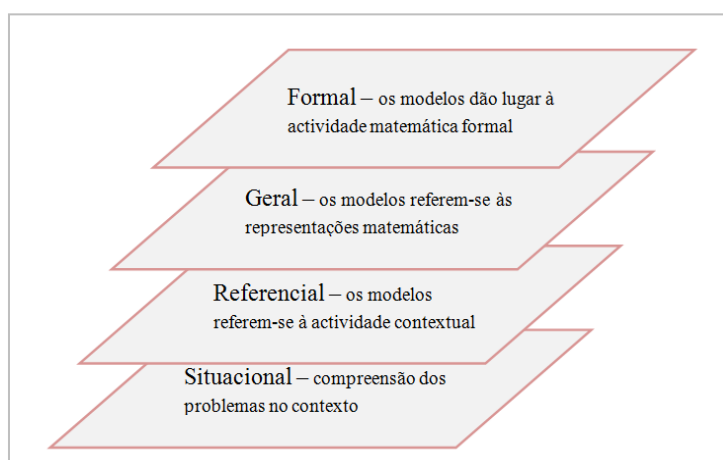


Figura 1. Níveis de Gravemeijer

Partindo duma Actividade Situacional, criam-se condições para a Reinvenção Matemática e, com ajuda do professor, pode-se chegar aos conhecimentos mais formais – da Reinvenção Guiada para a Actividade Formal.

O processo de refinamento traduz-se na transformação dum modelo de actividades matemáticas informais, num modelo para um raciocínio matemático mais formal. Trata-se duma transferência de raciocínio que passa por uma Actividade Referencial, onde os modelos se referem apenas à actividade contextual e por uma Actividade Geral, onde os modelos são uma consequência dos conteúdos matemáticos objectivos presentes.

Em geral, a perspectiva de Gravemeijer (1994) pode ser sintetizada na figura seguinte, que pode considerar-se como uma espécie de definição do que é um percurso de abstracção.

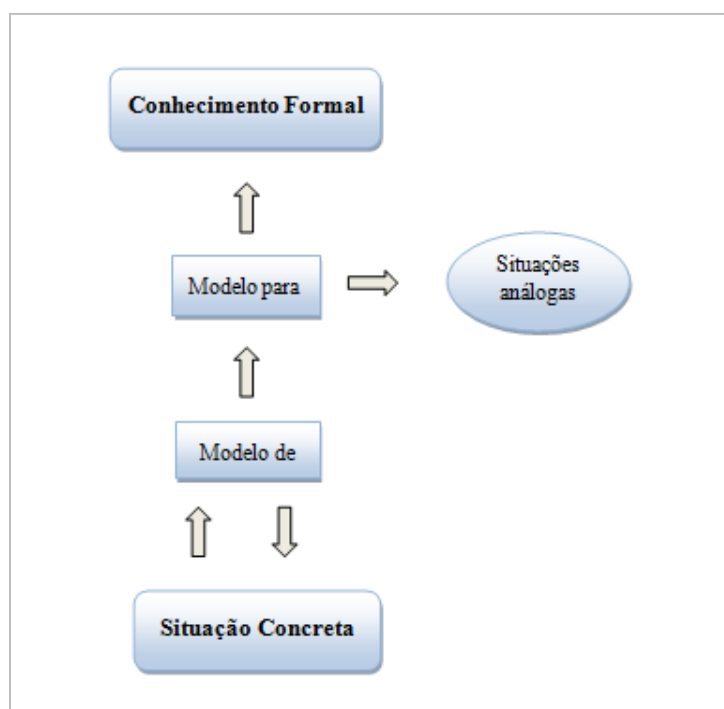


Figura 2. Modelo de Gravemeijer

Partindo da base deste esquema, temos uma situação concreta, para a qual se tenta construir um modelo. Este é induzido pela situação (flecha  $\uparrow$ ) e deve aplicar-se a esta (flecha  $\downarrow$ ). No eixo da abstracção, um passo essencial é a passagem do “modelo de” ao “modelo para”, o que quer dizer a passagem de um modelo de uma situação à



aulas de Matemática devem proporcionar aos alunos a oportunidade “guiada” de “reinventar” Matemática. Em educação matemática, o foco não deve incidir sobre a Matemática como um sistema fechado, mas sobre a actividade, sobre o processo de matematização (Freudenthal, 1968, citado por Van den Heuvel-Panhuizen, 2000).

Na Holanda, a reforma da educação matemática foi chamada de “realista” não só pela sua ligação com o mundo concreto, mas também pela ênfase que foi dada em apresentar problemas que os alunos possam “tornar reais na sua mente”, daí a designação de RME (Realistic Mathematics Education). Os problemas propostos aos alunos podem ser do mundo real ou não, desde que eles sejam reais na mente do aluno. Surge assim a importância da contextualização dos problemas a propor aos alunos, na medida em que um contexto adequado pode ser facilitador e permitir que o aluno o torne real para si.

A RME retrata uma visão de como os alunos aprendem Matemática e de como a Matemática deve ser ensinada, baseada em seis princípios:

### *1. Princípio da Actividade*

Para Freudenthal a ideia de matematização está ligada a um conceito de aprendizagem em que os alunos aprendem ao “fazer” – isto é, os alunos são participantes activos no processo educativo – quando são confrontados com situações problemáticas e socorrem-se da Matemática para encontrar uma solução para o problema.

### *2. Princípio da Realidade*

Nesta perspectiva, o objectivo da educação matemática é permitir que os alunos apliquem a matemática na resolução de problemas contextualizados.

### *3. Princípio dos Níveis*

Aprender matemática envolve a passagem através de vários níveis de compreensão, desde o informal ao formal. Os modelos matemáticos podem ser utilizados para o efeito, permitindo aos alunos a transição para um conhecimento matemático mais formal. Para estabelecerem a ligação entre os níveis formais e informais, os modelos têm de mudar de um “modelo de” uma determinada situação a um “modelo para” todos os tipos de situações equivalentes à primeira.

#### *4. Princípio da Interdependência Dinâmica*

A Matemática é vista de uma forma mais global, sem a separação por unidades (ou capítulos). A resolução de problemas, em determinados contextos, pode envolver a aplicação de uma série de conhecimentos de várias áreas, por exemplo, geometria e funções.

#### *5. Princípio da Interação*

Na RME a aprendizagem da Matemática é considerada como uma actividade social. Assim, os alunos devem partilhar e discutir, com os seus pares, as suas estratégias na resolução de problemas, pois esta interacção pode provocar a reflexão e permitir-lhes alcançar um maior nível de compreensão.

#### *6. Princípio da Orientação*

Os professores devem orientar o processo de aprendizagem dando aos alunos a oportunidade “guiada” para “reinventar” a Matemática. Deve ser criado um ambiente de aprendizagem em que os alunos possam construir o seu próprio conhecimento, sendo necessário que o professor antecipe eventuais dificuldades dos seus alunos e, com base na trajectória de aprendizagem definida, os leve a ultrapassá-las. É fundamental que os programas educativos estejam elaborados de acordo com estas finalidades.

Cada docente deverá conduzir os seus esforços de maneira a tirar o maior partido possível da capacidade potencial de aprendizagem adquirida anteriormente pelos alunos, considerando esta em todas as suas dimensões. A questão reside mais em saber acompanhá-los do que em querer dirigi-los. Os adolescentes devem, em particular, aprender a pôr espontaneamente o funcionamento das suas mentes à disposição dos seus parceiros cada vez que a situação o exija. Aprender é basicamente uma tarefa colectiva, que exige um grau elevado de capacidade comunicativa. De facto, é pela comunicação que cada um beneficia e faz beneficiar os outros, de maneira a elevar o nível do conjunto. Aprender matemática identifica-se com saber fazer matemática, de tal maneira que esta aparece como a linguagem de comunicação ideal dentro da comunidade que a pratica (Schoenfeld, 1996).

Carreira (1995) apresenta uma reflexão na procura de elementos teóricos e epistemológicos que nos permite relacionar as diversas formas de encarar a relação Matemática-Realidade. Segundo esta autora “olhando para as inúmeras facetas da relação Matemática-Realidade, é possível encontrar-se uma linha de força que atravessa várias perspectivas e que radica nos conceitos de modelo matemático e de

matematização da realidade” (p. 27). Apresenta, no entanto, duas posições distintas na forma de encarar a relação Matemática-Realidade. A primeira que considera a existência de dois mundos disjuntos, o mundo real e o mundo matemático e a segunda que admite que a matemática é parte integrante do mundo real, não sendo possível fazer a separação anterior. Por exemplo, para Blum e Niss (1991) a realidade significa “o resto do mundo fora da Matemática”. Contudo, numa óptica construtivista, a Matemática é parte integrante do mundo real e deste modo a realidade é uma construção inseparável da Matemática.

Os construtivistas radicais e sociais defendem que as pessoas não conseguem perceber directamente a realidade objectiva, mas que constroem a sua visão do mundo baseando-se no conhecimento que já possuem, daí a influência do sujeito na construção da realidade.

Como refere Carreira (1995), a matematização “pode converter-se em leis que governam estruturas físicas, económicas e sociais” (p. 30) impondo uma realidade que dependeu da forma como se seleccionaram uns elementos e se ignoraram outros. Deste modo “as formulações matemáticas impõem a sua própria realidade nos valores e comportamentos humanos” (p. 30).

Na sociedade actual, cada vez é mais visível o poder da Matemática, quer ao serviço da política (modelos destinados a definir o que cada cidadão deve pagar ao estado), quer para concretizar um qualquer contrato com uma instituição bancária (modelos que vão preconizar como iremos, por exemplo, pagar um empréstimo bancário), quer para fazer as compras mais banais (somos bombardeados com promoções enganadoras) e até para ditar o tempo de espera num semáforo ou o overbooking das companhias aéreas (onde nem sempre todas as possibilidades foram consideradas). Essas decisões foram tomadas, com base em determinados modelos matemáticos. Mas como é que esses modelos foram construídos? Que elementos foram escolhidos em detrimento de outros? De que modo a visão do agente modelador influenciou o modelo? Que repercussão tem, determinado modelo, na vida diária dos cidadãos?

Destas ideias decorre a necessidade de formar cidadãos capazes de pensar criticamente perante estas situações. Assim, a escola deve proporcionar aos alunos competências adequadas de modo a que consigam identificar os pressupostos e as consequências da aplicação de modelos matemáticos. E contribuir para que se tornem

cidadãos críticos perante modelos matemáticos que são determinados, por exemplo, pela ideologia política ou pela perspectiva da maximização do lucro.

Keitel (citada por Carreira, 1992) refere que, actualmente, estamos perante uma desmatematização dos indivíduos, isto é, no dia-a-dia, os indivíduos servem-se de aparelhos ou de modelos que têm por base ou utilizam teorias matemáticas, por vezes, complexas, mas cuja utilização supõe por parte dos indivíduos capacidades técnicas distintas das que seriam necessárias à compreensão destas teorias (como no caso de um excelente condutor de automóveis que pode ignorar completamente a mecânica necessária à construção do carro). Do ponto de vista social, este fenómeno adquire uma certa importância quando, por exemplo, um cliente descobre um erro na aplicação de determinado modelo e, após reclamação, recebe como resposta que não se pode resolver o problema, insistindo o funcionário em que a responsabilidade é do “programa que foi instalado no sistema”. Até que ponto, em casos como este, somos vítimas da utilização inapropriada de modelos matemáticos?

Carreira (1995) reforça a necessidade de criticar os modelos matemáticos, questionar o abuso de modelos matemáticos no mundo actual e revelar a matemática “escondida” nas actividades do dia-a-dia.

Podemos pensar na aplicação da Matemática a fenómenos físicos e naturais ou a fenómenos sociais e económicos. Como consequência de uma sociedade que se tornou dependente da tecnologia, em particular, do uso de computadores, o leque de aplicações da Matemática tornou-se muito mais extenso e os modelos matemáticos passaram a ter um lugar de destaque pela sua capacidade descritiva, preditiva e prescritiva. Carreira (1995) salienta como pontos comuns a ambas as matematizações, o aspecto provisório e revisível, a vertente pragmática e o papel das ferramentas tecnológicas na sua construção. Quanto ao papel do sujeito na construção do modelo matemático e à transferência das suas ideias, concepções e crenças, esta autora escreve que “ao reclamarmos para esta discussão o sujeito modelador, reconhecendo que ele é decisivo na forma como constrói uma realidade e que é simultaneamente influenciado por ela, estamos a transportar para um mesmo nível a matematização na natureza e na sociedade” (p. 64).

### 2.1.3. Contextos realistas como meios de construção de conceitos matemáticos

Uma questão que surge de imediato é se devemos dar primazia à actividade matemática desenvolvida pelos alunos em detrimento dos conteúdos a ensinar? Devem os alunos participar na construção do seu conhecimento e não ser meros ouvintes que se limitam a repetir a informação veiculada pelo professor e a memorizar determinados procedimentos? O livro, publicado pela APM em 1988, Renovação do Currículo da Matemática, destaca claramente a importância da natureza da actividade dos alunos, na sala de aula, chegando mesmo a referir que “a aprendizagem da Matemática é sempre produto da actividade, e se esta se reduz, por exemplo, à resolução repetitiva de exercícios para aplicação de certas fórmulas, é exactamente isto que se aprende e vai perdurar, enquanto ficar a memória das fórmulas” (p. 41).

Yackel & Cobb (1996) defendem uma perspectiva interaccionista de ensino e aprendizagem, em que os processos sociais fazem parte da actividade matemática. Assim, nesta perspectiva os processos de construção de significado dos alunos não se podem separar da sua participação na construção partilhada dos mesmos.

Para Bauersfeld (1993, citado por Yackel & Cobb, 1996):

*Participar nos processos de uma aula de Matemática é participar numa cultura de usar a Matemática ou melhor: uma cultura de matematização como prática. As muitas competências que um observador pode identificar e tomar como principais representantes da cultura, formam apenas a superfície procedimental. Estes são os alicerces para a construção, mas o plano para o edifício da matematização é processado num outro nível. Assim como nas culturas, o núcleo do que é aprendido através da participação está no quando fazer o quê e como fazê-lo. O conhecimento (num sentido estreito) não servirá para nada se o utilizador não puder identificar a adequação da situação. O conhecimento, também, não dará muita ajuda se o aprendiz for incapaz de relacionar flexivelmente e transformar os elementos necessários de conhecimento para a sua situação actual. Isto é, os principais resultados que emergem da participação na cultura da aula de Matemática aparecerão*

*principalmente num metanível e são “aprendidos” indirectamente (p. 4).*

Neste contexto, parece-me interessante mencionar uma experiência realizada recentemente por Thomas Lingefjard (2011) e descrita no artigo “Students Constructing Tasks to Peers” apresentado no CERME 7, que decorreu na Polónia em 2011. Nesta experiência, realizada com alunos do ensino superior, os alunos de uma determinada turma são divididos em vários grupos. Alguns destes recebem por missão conceber tarefas de modelação que os outros são chamados a resolver. Estas tarefas inserem-se naturalmente num determinado quadro teórico e o professor pode sempre desempenhar o papel de conselheiro, organizador. O autor desta experiência constata o carácter positivo da mesma e deixa em aberto a questão de saber se os alunos, a quem as tarefas são destinadas, aprendem tanto com estas como aprenderiam com tarefas propostas pelo professor segundo os parâmetros clássicos. Este trabalho, à semelhança de outros, testemunha mais uma vez uma perspectiva humanista, segundo a qual o valor do ensino mede-se não somente pela sua eficácia e desempenho técnicos, mas considera-se que a Matemática deve contribuir de forma significativa para a formação do aluno, tendo em vista o seu desenvolvimento pessoal, a sua preparação enquanto cidadão e a sua qualificação para o trabalho.

Em Portugal, o Projecto MAT<sub>789</sub> que decorreu entre 1988 e 1992, desenvolveu um trabalho que consistiu na concepção, experimentação e avaliação de um currículo inovador de Matemática para os 7.º, 8.º e 9.º anos de escolaridade, constituindo uma das principais características a importância atribuída às relações da Matemática com a realidade. Neste quadro foi concebido um currículo experimental, centrado na resolução de problemas, que permitiu aos alunos experimentar, conjecturar, provar, generalizar, discutir e comunicar. Também se deu importância ao processo em detrimento do conhecimento de factos e do domínio de técnicas, com especial destaque para as aplicações da Matemática, numa óptica de resolução de problemas onde foram amplamente utilizados computadores e calculadoras. Esta experiência foi acompanhada de um sistema de avaliação inovador.

A propósito do problema colocado num exame nacional, nos EUA, que em linhas gerais pretendia saber quantos autocarros, com 36 lugares cada, seriam necessários para transportar 1128 pessoas, Schoenfeld (1996) salienta que apesar de

70% dos alunos ter efectuado o cálculo correcto escreveram uma resposta errada, dado que não olharam para o problema como se este fosse real, caso contrário não teriam respondido “31 e um resto de 12” autocarros. Este tipo de erros resulta do exercício repetitivo de problemas de palavras que é ensinado nas aulas de Matemática. O investigador remata com uma manifestação de esperança “talvez as escolas se tornem lugares onde os alunos realmente aprendam a pensar” (p. 11).

Este autor defende que se devem propor aos alunos actividades com sentido matemático tais como, modelar e simbolizar, comunicar, analisar, explorar, conjecturar e provar, pois é isso que a Matemática realmente é.

## **2.2. M&A – Modelação & Aplicações no Ensino da Matemática**

### **2.2.1. Argumentos favoráveis**

A modelação matemática pode ser uma forma de trabalhar os conteúdos programáticos de forma contextualizada e com a possibilidade de integração em sala de aula de situações do dia-a-dia dos alunos.

Aproveitando os conhecimentos dos alunos, as experiências vividas em sociedade ou em meio escolar, podemos avançar e aumentar esses conhecimentos com actividades que façam sentido para os alunos e que os aliciem a envolver-se no processo de aprendizagem, permitindo-lhes desta forma construir o seu próprio conhecimento. Procura-se criar um ambiente rico e propício à aprendizagem com significado, por oposição a um método verbalista em que o professor se limita a expor determinados conceitos e o aluno a ouvir, detendo o controlo total da sala de aula. Assim, o ensino anteriormente referido não só ignora os conhecimentos prévios dos alunos como diminui a noção de aprendizagem, dado que esta é aferida pela mera reprodução dos conteúdos debitados pelo professor e exige a “formatação” do modo de pensar e agir dos seus intervenientes. Assim estaríamos a supor que no início da escolaridade a mente de cada um era um livro em branco e no final a “história” escrita em cada um deles seria a mesma. Estaríamos então perante um caso de sucesso... Esta passividade exigida pelo sistema de ensino vai decerto ter repercussões nos alunos enquanto cidadãos e mais tarde na sua vida profissional. De que modo este sistema de ensino contribui para o

desenvolvimento pessoal, a autonomia, o espírito crítico, a preparação para o mundo do trabalho? Quantos acabam por ser excluídos? Porquê?

A escola não pode estar desligada da sociedade onde está inserida, as aprendizagens, quer se realizem em meio escolar ou não, devem contemplar o desenvolvimento do indivíduo enquanto cidadão e a consequente preparação para a sua integração na sociedade. Note-se que, no Seminário de Vila Nova de Milfontes, que se realizou em 1988, esta posição é reforçada, salientando-se mesmo a importância de proporcionar aos alunos experiências diversificadas em contextos de aprendizagem ricos e variados.

### **2.2.2. Modelos e modelação**

A matemática permite a obtenção de modelos elaborados a partir de situações reais e que procuram dar resposta a determinada problemática.

Um modelo é uma imagem do objecto real e essa imagem, que pode ser elaborada por meio de formalizações e conceitos matemáticos e que pode ser simplificada, permite testar hipóteses, inferir conclusões, tentar generalizações e particularizações através da indução e dedução.

A natureza dinâmica do modelo matemático, que pode sofrer alterações na medida em que sendo uma representação da realidade deve mudar, procurando aproximar-se desta, permite assim fazer o retrato do problema real e variar em consonância com esta mesma realidade. Assim, através do modelo matemático estabelece-se uma ligação entre a realidade e a Matemática.

Bassanezi (2006) define cinco etapas no processo de modelação:

- (i) Experimentação – é a fase na qual são obtidos os dados. Nesta fase é importante a participação de um matemático para direccionar os trabalhos a realizar nas fases seguintes;
- (ii) Abstracção – é a fase de formulação de modelos matemáticos, onde se procura seleccionar as variáveis, formular os problemas, formular as hipóteses e realizar a simplificação;
- (iii) Resolução – é quando se obtém um modelo, ou seja, quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática;

(iv) Validação – é a fase na qual são, ou não, aceites os modelos propostos. Os modelos são testados e confrontadas as suas previsões com os resultados obtidos na realidade;

(v) Modificação – nesta etapa, caso o modelo tenha sido rejeitado, são feitas adaptações ao modelo existente ou é elaborado um novo modelo.

Uma outra perspectiva de modelo matemático é apresentada por Blum e Niss (1991) através do terno (S, M, R), em que S representa uma situação problemática real, M um conjunto de entidades matemáticas e R uma relação através da qual S se relaciona com M.

Matos & Carreira (1996) distinguem as dimensões de generalidade e de eficiência no que respeita à utilidade dos modelos matemáticos. “A potência de um modelo será tanto maior quanto maior for a sua generalidade, no sentido da sua aplicabilidade em múltiplas situações, e quanto maior for a sua capacidade de responder a questões relativas a diferentes extensões, variantes e casos particulares de uma mesma situação problemática (núcleo)” (p. 14).

Para compreender os processos cognitivos presentes na construção de um modelo matemático vamos distinguir modelos internos e modelos externos, estando os primeiros ligados aos modelos conceptuais e ao *significado* que a situação real tem para o sujeito e os segundos ligados aos sistemas de representação. “O recurso a múltiplos sistemas de representação promove a actividade metacognitiva na resolução de problemas de aplicação na medida em que pode contribuir para a monitorização do processo de modelação e para a reflexão sobre a relação entre os modelos e o objecto do fenómeno em estudo.” (Matos & Carreira, 1996, p. 15). Deste modo, a integração da modelação e aplicações da Matemática nas actividades curriculares pode ajudar a desenvolver nos alunos, para além das competências gerais, a capacidade crítica essencial a uma participação activa na sociedade.

A construção de modelos matemáticos de situações reais pode ser entendida como um processo dinâmico que envolve diversos passos. O primeiro consistiria na identificação de questões associadas à situação problemática. A *compreensão* da situação (isto é, a elaboração de modelos conceptuais considerados progressivamente como melhores *descritores* da situação) vai desenrolar-se em paralelo com o desenvolvimento dos modelos matemáticos *externos*. Numa primeira fase, a situação aparece delineada em termos fortemente ligados ao contexto real mas já apresenta

simplificações, fixando-se apenas o que é considerado mais relevante (para um dado objectivo). Este modelo real será assim a nova situação sobre a qual vai de facto incidir a modelação matemática. Skovsmose (1989) reflecte esta perspectiva, sublinhando a ideia de que os modelos não são de facto modelos da realidade mas antes modelos de uma determinada concepção do real, que é fruto de uma interpretação específica e de um substrato teórico mais ou menos elaborado.

Um segundo passo costuma ser descrito como a tradução de conteúdos e conceitos envolvidos no modelo real para objectos, conceitos e relações matemáticas. Deste processo deve resultar um primeiro modelo matemático.

Um terceiro passo tem sido definido como o processo de manipulação do modelo matemático com vista à obtenção de algum tipo de resultado (soluções de uma equação, análise de um gráfico em pontos particulares, etc.).

Numa fase seguinte, será avaliada a adequação do modelo à situação, podendo concluir-se pela necessidade de proceder a alterações nesse modelo. Entra-se assim num processo de aperfeiçoamento que procura eliminar ou reduzir as discrepâncias entre a tradução das conclusões e os resultados obtidos. Aquilo que constitui o motor do desenvolvimento do modelo matemático é a necessidade de resolver as discrepâncias entre os resultados obtidos através desse modelo e a situação problemática real (Lesh, 1990).

As tecnologias têm tido um papel muito importante na construção e exploração de modelos matemáticos dadas as potencialidades de visualização e manipulação de variadas representações matemáticas que são colocadas ao dispor do modelador. Para Matos et al. (1994) a “modelação apoiada pelo computador consiste na actividade de usar o computador para exprimir um modelo, com o objectivo subsequente de explorar esse modelo e retirar daí possíveis consequências para a resolução de problemas” (p. 9). Estes autores salientam que a utilização do computador pode ser decisiva para a implementação de “uma matemática *mais realista* na sala de aula” pois desaparecem obstáculos, designadamente ao nível do cálculo.

### 2.2.3. Modelos e aplicações

A aplicação da Matemática a situações da realidade, para além da identificação da matemática presente numa situação real, envolve ainda a forma como a matemática enquanto ferramenta procura dar resposta a situações problemáticas reais e baseia-se essencialmente na construção e exploração de modelos matemáticos. Os modelos matemáticos reproduzem uma perspectiva da realidade, com a marca pessoal de quem o elaborou e identificou o problema e seleccionou os elementos que considerou principais.

Os modelos matemáticos são formas de estudar e formalizar uma situação concreta e podem mostrar como se pode utilizar a Matemática para resolver problemas do dia-a-dia e fazer com que os conceitos estudados adquiram um maior significado para os alunos. A elaboração do modelo impõe que sejam escolhidos os factores principais que se pretendem estudar, requer conhecimentos matemáticos para a construção de um modelo matemático que possa ser representativo da problemática e, por último, inclui a experimentação e a verificação da adequação do modelo aos dados reais. Assim, para elaborar um modelo o aluno tem de saber identificar o que é mais relevante na situação real, traduzir matematicamente a problemática (usando para o efeito tabelas, gráficos, relações funcionais e outras), construir um modelo que espelhe a situação, testar esse modelo e averiguar a sua adequação. Este processo desenvolve nos alunos o sentido crítico e a criatividade e concomitantemente revela o poder da Matemática na resolução de problemas do mundo real.

Para preparar os alunos para uma melhor inserção na sociedade e desenvolver neles determinadas capacidades como forma de dar resposta ao exigido em termos de mercado de trabalho surge a necessidade de renovação do currículo e a inclusão de aplicações no ensino da Matemática. Conforme o preconizado no Seminário de Vila Nova de Milfontes, em 1988: (i) As aplicações da matemática devem ocupar um lugar relevante no conjunto das actividades de aprendizagem, em todos os níveis de ensino; (ii) O ensino e a aprendizagem da matemática devem tirar todo o partido possível, em todos os níveis de ensino, dos instrumentos que a evolução tecnológica tem posto ao serviço das mais variadas actividades nos domínios sociais, profissionais e científicos, designadamente as calculadoras e os computadores (p. 32)

Carreira (1992) apresenta resultados de investigações realizadas, que apontam no sentido da introdução de aplicações no ensino da Matemática devido a factores tais

como: (i) forma de motivação – apresentação da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas práticos; (ii) componentes culturais – a aprendizagem do Cálculo, por exemplo, com referência às suas origens e à forma como tem sido usado em sociedade; (iii) forma de evitar aprendizagens incorrectas – permitindo aos alunos que trabalhem a matemática envolvida nos tópicos de determinada disciplina nas aulas de Matemática e (iv) forma de reconhecimento de estruturas na presença de “ruído” – com a identificação de estruturas matemáticas numa variedade de situações.

#### **2.2.4. O estudo das funções lineares**

Nesta secção, seguindo a direcção que vai da teoria para a prática lectiva, os principais documentos de referência serão o novo Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME-DGIDC, 2007) e a brochura da Álgebra no Ensino Básico (Ponte et. al., 2009a).

A importância do estudo das funções está patente na brochura da Álgebra no Ensino Básico:

*Nos nossos dias, cada vez mais se dá destaque ao conceito de função, tendo as expressões que são apresentadas aos alunos conhecido uma grande simplificação. Alguns autores defendem que o papel das funções devia ser ainda mais reforçado do que aquilo que já é habitual nos nossos dias (Ponte et. al., 2009a, p. 12-13).*

Neste documento são apresentadas as três vertentes fundamentais do pensamento algébrico que se apresentam no quadro seguinte:

Representar	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais;</li> <li>▪ Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objectos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa;</li> <li>▪ Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.</li> </ul>
Raciocinar	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Relacionar (em particular, analisar propriedades);</li> <li>▪ Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras;</li> <li>▪ Deduzir.</li> </ul>
Resolver problemas e modelar situações	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).</li> </ul>

Quadro1. Vertentes fundamentais do pensamento algébrico (Ponte et al., 2009a, p.11)

A referência a este quadro justifica-se, sobretudo, pelo facto de estas vertentes assumirem um papel primordial na experiência pedagógica que irei desenvolver, nomeadamente, a ligação entre várias representações: tabelas, gráficos e expressão algébrica de funções.

A análise das representações produzidas pelos alunos reveste-se da maior importância. A passagem de uma forma de representação para outra acarreta para os alunos algumas dificuldades, nomeadamente quando se pretende efectuar a mudança da representação gráfica para a algébrica e vice-versa.

O novo PMEB (ME-DGIDC, 2007) define nos seus objectivos que os alunos devem ser capazes de:

- Ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação;
- Traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural;
- Elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas;
- Usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais (p. 5).

Assim, um dos objectivos deste estudo é permitir que os alunos compreendam o significado dos parâmetros da expressão algébrica da função afim, relacionando-os com a sua representação gráfica. Para além disso, a expressão algébrica da função afim surgiu, em cada tarefa, ligada a uma situação problemática real, de forma a contextualizar as tarefas e dar sentido aos modelos matemáticos para os alunos. Tendo como linha norteadora as recomendações presentes em vários documentos de apoio ao Programa de Matemática para o Ensino Básico aprovado em 2007, nomeadamente na brochura Álgebra no Ensino Básico:

*O trabalho com funções afins lineares e não lineares deve desenvolver-se sobretudo em situações contextualizadas. Dada informação em descrições verbais, tabelas, gráficos, ou expressões algébricas, os alunos devem ser capazes de determinar imagens correspondentes a certos objectos, bem como objectos correspondentes a certas imagens. Além disso, devem ser capazes de passar a informação de uma representação para outra e, ainda, de usar a informação dada para a resolução de problemas (Ponte et. al., 2009a, p. 122-123).*

### **2.3. O Computador como Ferramenta em Actividades de Aplicação**

Numa sociedade dominada pela tecnologia devemos estar atentos e analisar as possibilidades e vantagens que o computador nos pode proporcionar na sala de aula. A presença do computador na sala de aula permite-nos, entre várias coisas, aceder a um vasto conjunto de softwares actuais para o ensino-aprendizagem da matemática. Actualmente temos a oportunidade de testar, analisar e descobrir as vantagens e limitações de cada software e escolher o que melhor serve os nossos objectivos. O uso de software educativo para além de constituir um excelente apoio à aprendizagem do aluno é também um factor de motivação acrescido. Nos documentos oficiais emanados pelo Ministério da Educação, Currículo Nacional do Ensino Básico, Programa de Matemática para o Ensino Básico, Álgebra no Ensino Básico e Sequências e Funções,

encontram-se frequentemente recomendações para a utilização das tecnologias. Em particular na brochura Álgebra no Ensino Básico:

*Recentemente, surgiram novos programas que combinam potencialidades para o trabalho em Álgebra e Geometria, como o GeoGebra. Estes programas, tal como a calculadora gráfica, permitem relacionar as informações dadas algebricamente com as representações gráfica e em tabela e apresentam os objectos matemáticos numa representação mais próxima da usual. Têm, por isso, grandes potencialidades para o trabalho a realizar no 3.º ciclo do ensino básico (Ponte et al., 2009a, p. 16).*

E ainda a recomendação de realização de actividades de modelação com o apoio do computador:

*A folha de cálculo e programas como o GeoGebra podem servir de base à resolução de problemas e modelação de situações, constituindo importantes suportes para a aprendizagem (Ponte et. al., 2009a, p.19).*

Já em 1985 a “Agenda para a Acção” (NCTM, 1985) recomendava, por exemplo, que:

1) o foco do ensino da Matemática nos anos 80 seja a resolução de problemas; 2) as capacidades básicas em Matemática sejam definidas de forma a incluírem mais do que facilidades de cálculo; 3) os programas de Matemática tirem todas as vantagens das capacidades das calculadoras e dos computadores em todos os níveis de ensino (p.3). Reforçam ainda que “o uso das capacidades de resolução de problemas apresentadas pelos computadores como forma de alargar as abordagens tradicionais da resolução de problemas e implementar novas estratégias de interacção e simulação” (p.6). E mais à frente, ainda especificam que “mesmo se forem melhorados os cálculos de rotina, um cidadão que não possa analisar as situações da vida real de forma a reconhecer que cálculos devem ser feitos para resolver problemas reais não penetrou no essencial para realizar-se como cidadão” (p.11).

Como refere Carreira (1992) interessa “analisar o que poderá ser um novo ambiente intelectual marcado pela utilização do computador em actividades de modelação e aplicação da matemática” (p. 41). Em especial, pode enveredar-se por uma abordagem diferente na resolução de problemas, pela realização de tarefas de natureza investigativa e por uma concretização de ideias matemáticas antes impensável. Os computadores e as calculadoras poderão funcionar como amplificadores conceptuais que permitirão ajudar a perceber melhor o fenómeno real que está a ser estudado (Matos & Carreira, 1996).

Uma das consequências da utilização da tecnologia, segundo Amado e Carreira (2008), é o facto de os alunos poderem melhorar e amplificar significativamente as suas aprendizagens dado que a tecnologia efectua os cálculos rotineiros e “permite que o aluno explore uma maior variedade de situações, testemunhando a verdadeira natureza dos processos matemáticos e envolvendo-se em aplicações com dados realistas” (p. 287). Para além disso, “as tecnologias vêm permitir investir em conhecimentos e capacidades de nível superior, tais como saber interpretar um gráfico, fazer conjecturas, ser capaz de relacionar conceitos e utilizá-los, saber analisar criticamente os resultados obtidos, investigar, ser versátil em representações matemáticas diversas.” (p. 287)

O computador é, pelas suas características, uma ferramenta de excelência para ser utilizada nos processos de descoberta e construção do conhecimento. Pode favorecer a implementação de uma nova dinâmica na sala de aula, em que os alunos têm um papel activo na construção dos seus conhecimentos, com a orientação do professor, que os guia nesse processo. Possibilita ainda contemplar diferentes ritmos de aprendizagem e desenvolver a autonomia. No entanto, há que ter em conta como é usada a tecnologia em sala de aula, por quem, quando e em que situação e para quê. Distingam-se, por exemplo, as seguintes possibilidades de utilização da tecnologia (Amado, 2007):

1. **Como acessório** (o professor serve-se do computador como apoio do mesmo modo que poderia usar um manual escolar ou outro suporte, os alunos não têm acesso à ferramenta e não há alteração da dinâmica da sala de aula);
2. **Centrada apenas no professor** (os alunos são meros ouvintes e o professor usa o computador para realizar ele próprio as tarefas e tirar determinadas conclusões – o professor faz todo o trabalho);

3. **Centrada no aluno** (os alunos interagem com a ferramenta e utilizam-na para resolver problemas e como forma de promover a sua aprendizagem, o professor conduz os alunos e há alterações na dinâmica da sala de aula).

Na realização de actividades de aplicação o computador é uma ferramenta poderosa, na medida em que permite a investigação, a simulação, a execução de gráficos, a comparação de várias representações no mesmo ambiente, liberta os alunos do cálculo (quando surgem dificuldades a este nível podem até ficar impedidos de resolver o problema) e estimula o aluno a pensar. “Desta forma, os alunos não apenas aprendem Matemática, quando recorrem a ferramentas tecnológicas, como também aprendem novas formas de pensar e encontram caminhos para desenvolverem a sua própria Matemática.” (Amado & Carreira, 2008, p. 287).

### **2.3.1. Representações múltiplas**

Com o objectivo de averiguar que condições podem facilitar a compreensão da Matemática e, em simultâneo, de perceber como pensam os alunos em actividades de construção e exploração de modelos matemáticos, é de considerar a especificidade da linguagem matemática como um potencial obstáculo à compreensão.

Em determinados domínios do conhecimento científico, os alunos têm acesso ao conhecimento pela percepção ou através da observação, facilitada por instrumentos como microscópios ou telescópios que fornecem a visualização do fenómeno. Em Matemática, para se ter acesso aos objectos matemáticos é necessário recorrer a símbolos e representações semióticas. Deste modo, o desenvolvimento destas representações é uma condição necessária para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Para responder a esta problemática, Duval (2006) coloca as seguintes questões:

1. Que sistemas cognitivos são necessários mobilizar para aceder aos objectos matemáticos e para realizar as múltiplas transformações que constituem os processos matemáticos?
2. A maneira de pensar em Matemática é a mesma que nas outras áreas do conhecimento? Isto é, a actividade matemática exige apenas processos

cognitivos comuns ou, pelo contrário, trata-se de estruturas cognitivas muito específicas, cujo desenvolvimento deve ser pensado no ensino?

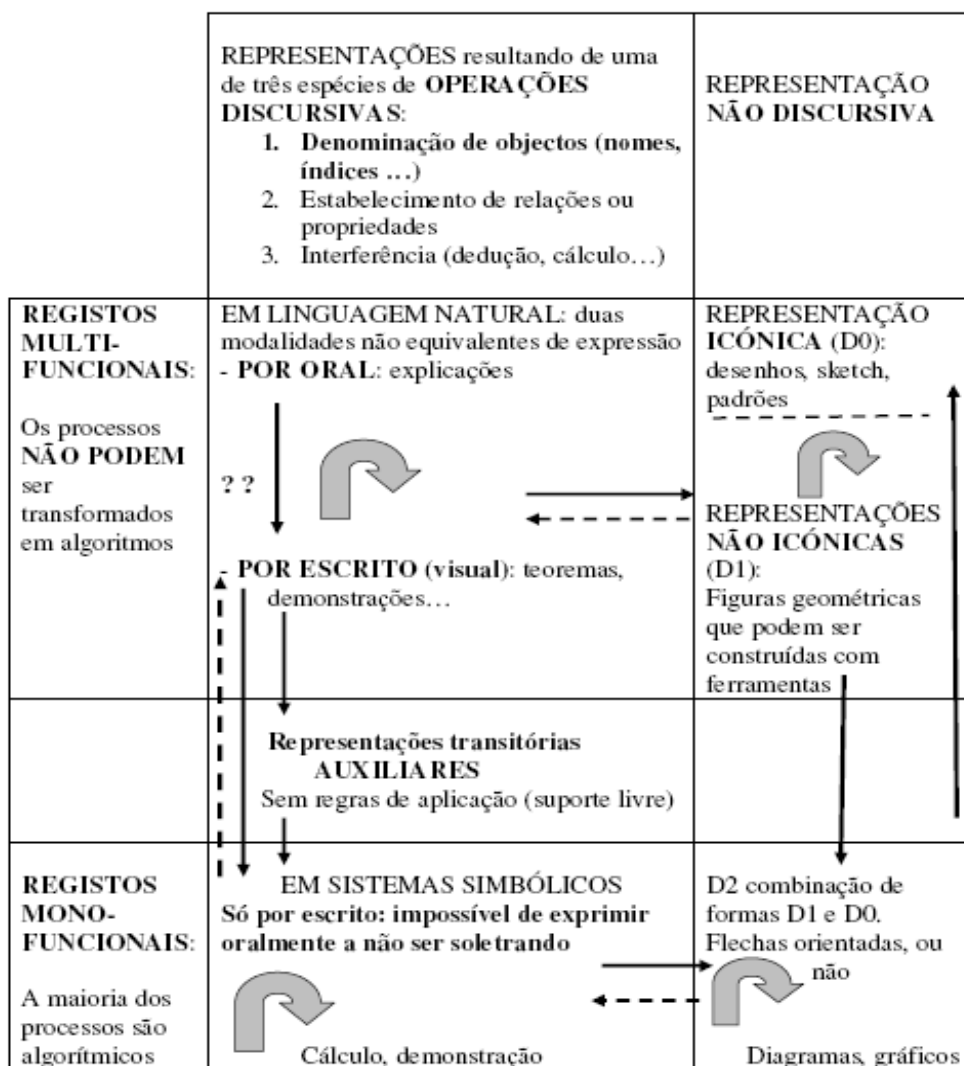
Segundo este autor, nenhum tipo de processamento matemático pode ser executado sem o uso de um sistema semiótico de representação porque a transformação matemática envolve sempre a substituição de alguma representação semiótica por outra. Os símbolos e a transformação de representações semióticas são o cerne da actividade matemática.

Uma dificuldade para os alunos é distinguirem os objectos representados da representação semiótica utilizada. Isto resulta de não terem acesso ao objecto matemático, a não ser através das representações semióticas. E isso manifesta-se no facto de que a capacidade de mudar de um sistema de representação para outro é muitas vezes o limite crítico para o progresso na aprendizagem e para resolver problemas (Duval, 2006). Se um mesmo objecto matemático pode ser representado por diferentes tipos de representação semiótica, como é que os alunos o reconhecem?

Para analisar os processos de pensamento específicos que alicerçam a actividade matemática, Duval tem em conta as diferenças entre os vários sistemas de representação semiótica que são utilizados, a articulação entre eles, a possibilidade de passar de um registo de representação para outro, admitindo que a compreensão da Matemática supõe a coordenação de pelo menos dois registos de representações semióticas.

A diferença funcional entre os vários sistemas de representação semiótica usados em Matemática é fundamental, pois está intrinsecamente ligada com a forma de execução dos processos matemáticos: dentro de um sistema semiótico monofuncional a maioria dos processos assume a forma de algoritmo, enquanto dentro de um sistema multifuncional a semiótica dos processos nunca pode ser convertida em algoritmos.

No quadro seguinte, apresento quatro diferentes tipos de registos de representação:



Quadro 2. Adaptação da classificação dos registos que podem ser mobilizados em processos matemáticos, segundo Duval (2006)

Este esquema parece-me interessante, por várias razões. Em primeiro lugar, porque ilustra o carácter dinâmico do processo de representação, no qual os diversos géneros possíveis de representação conduzem uns aos outros, podendo, por vezes, alguns desempenharem um papel propedêutico ou auxiliar, enquanto outros desempenham o papel de formas principais de representação. Um outro aspecto relevante do mesmo esquema é a classificação das representações em harmonia com as diversas capacidades do ser humano. Capacidades que, por exemplo, no caso dos alunos, podem estar presentes em combinações diversas segundo os sujeitos (um aluno pode ter mais aptidões discursivas do que esquemáticas e outro ao contrário).

Duval apresenta dois tipos de transformações de representações semióticas completamente diferentes: tratamentos e conversões. Tratamentos (setas curvas na figura anterior) são transformações de representações que acontecem dentro do mesmo registo: por exemplo, resolver uma equação. Conversões são transformações que mudam de sistema mas mantêm a referência aos mesmos objectos: por exemplo, passar da expressão algébrica de uma função à sua representação gráfica. Acresce que saber converter num sentido não implica saber converter no sentido contrário, pois pode apresentar diferentes graus de dificuldade. Do ponto de vista cognitivo, é a conversão que surge como a actividade de transformação representacional fundamental e que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão.

A compreensão conceptual em Matemática envolve uma sinergia de dois registos e, por vezes, uma sinergia de três registos. Para Duval essa é a razão pela qual o que é matematicamente simples e ocorre na fase inicial de construção do conhecimento matemático pode ser cognitivamente complexo e exige um desenvolvimento de uma consciência específica sobre essa coordenação dos registos.

A distinção entre os quatro tipos de registos de representação realça a variedade e o desfasamento cognitivo da conversão de representação do registo de origem para o registo de destino. Também torna possível definir algumas variáveis para analisar a complexidade cognitiva subjacente a qualquer actividade matemática, seja para um objectivo de investigação ou para um fim educativo.

Segundo Goldin (2008) podemos entender a matemática como uma linguagem e olhar para o desenvolvimento dos vários tipos de sistemas de representação interna expressiva da matemática como a aprendizagem de línguas, isto é, ocorrendo através da participação na comunicação e tendo aspectos estruturais (sintáctica) e aspectos representacionais (semântica).

Para Goldin (2008), a contextualização é uma espécie de complemento do processo de abstracção e igualmente importante para a matemática poderosa. Através da contextualização, os alunos aprendem a construir casos especiais, para “ver o particular no geral”, avançar para o concreto através de uma nova representação. Através da abstracção, eles aprendem a generalizar, para “ver o geral no particular”, para afastar os detalhes que não são essenciais na situação concreta e na representação. Ambos são essenciais a uma profundidade de compreensão em matemática e o objectivo deve ser o desenvolvimento de ambos (abstracção e contextualização) nos alunos.

Assim, Goldin defende que o objectivo de desenvolver a competência matemática dos alunos não deve incidir sobre as competências descontextualizadas, mas sobre o poder da matemática abstracta, ou seja, dentro de cada tópico da matemática, deve-se procurar desenvolver as estruturas de representação que promovem a fluência dos processos de abstracção matemática e contextualização.

### 2.3.2. Relações funcionais

As relações funcionais são um poderoso recurso quer para traduzir fenómenos do nosso quotidiano quer para representar situações matemáticas abstractas. Observemos que muitas vezes estas modelizam precisamente fenómenos do nosso quotidiano ou da natureza. De resto nestes casos a passagem do modelo ou fenómeno representado implica também a utilização, pelo menos implícita, de relações funcionais. Assim, este conceito é dos mais gerais e dos mais importantes, não só em matemática mas também em filosofia e, nomeadamente em ontologia. No desenvolvimento da noção de função em Matemática evidencia-se, em particular, a importância da teoria de Fourier neste contexto. Essa importância vem do facto de nesta teoria se utilizarem representações algébricas distintas de uma mesma entidade que é precisamente *a função*. A partir daí esta noção adquiriu uma importância crescente em matemática, tanto no domínio da investigação como no da aplicação como no do ensino.

Os autores da brochura *Álgebra no Ensino Básico* realçam a importância da utilização do conceito de função para modelar situações problemáticas reais:

*O estudo das funções visa a compreensão da noção de função, enquanto relação entre variáveis e como correspondência unívoca entre dois conjuntos, e também a capacidade de usar este conceito na resolução de problemas reais. Note-se, porém, que a abordagem da noção de função neste ciclo não privilegia os aspectos estritamente matemáticos do conceito, mas sim o seu uso para modelar situações da realidade e para resolver problemas (Ponte et al., 2009a, p. 116).*

A implementação da proposta pedagógica deste estudo baseou-se, fundamentalmente, na construção de modelos matemáticos em articulação com o estudo da função afim precisamente por existir uma relação de natureza dinâmica entre ambos. Assim, as recomendações dos documentos oficiais são no sentido de usarmos o conceito de função de forma contextualizada, sem nos limitarmos à vertente matemática *pura*, por vezes desprovida de sentido para os alunos. Por outro lado a construção de modelos matemáticos recorre às funções, nas três formas de representação tabular, gráfica e algébrica, conforme recomendação do PMEB:

*Deve recorrer-se às várias representações (algébrica, gráfica e tabular) de uma função na interpretação e resolução de problemas e na modelação de situações. As funções cujo estudo se propõe devem ser exploradas como ferramentas de modelação em situações diversas* (ME-DGIDC, 2007, p 56).

Neste sentido foi dada uma ênfase especial à representação gráfica, contribuindo para isso a utilização da ferramenta computacional – GeoGebra – que facilitou a construção dos gráficos bem como a articulação entre diferentes representações. Esta pluralidade de representações assim como a articulação entre elas, apresenta um grande interesse pedagógico como ilustrado na figura 4 (p. 27); esta mostra, por exemplo, que diferentes representações podem corresponder ou não a diferentes níveis semióticos. Por outro lado parece-me interessante citar aqui Tripathy (2008, referido em Guerreiro, 2009) a qual afirma que através de diferentes representações do mesmo conceito se evidenciam diferentes aspectos da sua estrutura, aumentando a sua compreensão e permitindo desenvolver capacidades cognitivas diferentes: “Uma representação matemática frequentemente salienta apenas um aspecto de um conceito matemático. Limitarmo-nos a uma representação matemática é abordar o conceito de olhos vendados” (Tripathy, 2008, p. 438).

Passando deste plano teórico para o plano prático do meu trabalho e, precisamente, sob inspiração das ideias precedentes decidi *guiar* os alunos a representar matematicamente os dados obtidos, através de uma experiência realizada por eles. Começando por traduzir graficamente a relação existente entre o tempo e a altura da água existente num copo graduado, dando sentido aos dados recolhidos e organizados

numa tabela. Posteriormente, depois da exploração gráfica do modelo obtido os alunos relacionaram essa representação com a representação algébrica.

### **2.3.3. Visualização e compreensão**

Sendo o GeoGebra um software que combina a geometria, a álgebra e o cálculo, permite efectuar construções dinâmicas que se revelam particularmente úteis, por exemplo, na procura de modelos matemáticos adequados a situações reais. A vantagem deste software em apresentar, duas janelas, uma de geometria e outra de álgebra, permite ter, em simultâneo, uma visualização de ambas as janelas.

Carreira (1992) salienta que o computador pode ser um contributo para uma abordagem experimental, podendo ter um papel importante na construção de generalizações a partir de múltiplas observações e facilitar a compreensão de ideias matemáticas abstractas na medida em que permite a manipulação de representações gráficas.

Amado e Carreira (2008) defendem que a visualização é fundamental no raciocínio matemático na medida em que torna as ideias mais perceptíveis, promove a intuição matemática e dá sentido a muitos resultados e processos, diminuindo a necessidade de abstracção.

Os professores, para além de proporcionarem aos alunos a oportunidade de trabalhar com ferramentas diversificadas, em particular, softwares educativos, devem ter o cuidado de tentar perceber como essas práticas influenciam a aprendizagem. O que se altera? Em que situações e como se devem usar estes programas?



# **CAPÍTULO III**

## **Metodologia**



Este estudo decorreu entre Setembro de 2010 e Outubro de 2011 e esteve organizado em três fases distintas. Na primeira fase, que decorreu entre Setembro de 2010 e Janeiro de 2011, procedi a leituras com vista a uma revisão da literatura e à elaboração do quadro teórico, desenvolvi a sequência de tarefas da proposta pedagógica a aplicar no estudo. Na segunda fase, que teve lugar entre Janeiro e Março de 2011, foi implementada a experiência pedagógica e procedi à recolha de dados em sala de aula. Na terceira fase, que decorreu entre Março e Setembro de 2011, foi realizada uma entrevista a um aluno e foi feita a transcrição da mesma, foi efectuada a análise dos dados, realizadas leituras complementares e elaboradas as conclusões deste estudo.

### **3.1. Opções Metodológicas**

Neste estudo optei por uma metodologia qualitativa, de cunho descritivo e interpretativo, na forma de estudo de caso.

A pesquisa qualitativa começou por ser utilizada nas áreas da Sociologia e da Antropologia. Desde há uns anos a esta parte, este tipo de metodologia ganhou presença em estudos nas mais variadas ciências como a Medicina, a Educação, a Psicologia ou a Economia.

Ao contrário dos estudos de natureza quantitativa, a pesquisa qualitativa não procura seguir com rigor um plano previamente estabelecido e, geralmente, não utiliza instrumentos estatísticos para a análise de dados. No estudo qualitativo, o investigador procura obter dados descritivos a partir do contacto directo e interactivo com o objecto de estudo. Concretamente, a descrição minuciosa do desenrolar dos acontecimentos em situação de sala de aula, questões de aprendizagem dos alunos, as estratégias empregues e a forma como utilizam o computador, conduzem-nos a respostas para questões de investigação como as do presente estudo.

O estudo de caso é uma forma de pesquisa que inclui a investigação de um ambiente, de um indivíduo ou de uma situação e procura saber porque é que certos fenómenos acontecem dentro de um certo contexto (Godoy, 1995). Por outro lado, a construção de estudos de caso pode ser a estratégia indicada quando se pretende entender o modo como um fenómeno ocorre e as razões que o podem justificar, recorrendo a informações provenientes de múltiplas fontes. De acordo com Yin (1984), um estudo de caso é uma investigação empírica que se debruça sobre um determinado fenómeno no seu próprio contexto, quando a fronteira entre ambos é pouco evidente.

Foi por esta razão que a opção por um estudo de caso me pareceu a mais apropriada ao problema e às questões de investigação formuladas.

Para uma análise mais aprofundada que forneça informação para dar resposta às questões de investigação, optei por estudar um aluno como caso. Atendendo ao facto de os alunos trabalharem em pares e estabelecerem interacções entre si, na sala de aula, o caso em estudo não se pode isolar do contexto em que decorre a experiência de ensino. Por outro lado, atendendo a que se pretende conhecer em profundidade o fenómeno em estudo, o número de alunos observado nas aulas é deliberadamente reduzido.

Este estudo enquadra-se numa perspectiva interpretativa dado que a investigadora é o principal instrumento e o ambiente natural é a fonte directa dos dados. Os dados recolhidos são essencialmente descritivos e o foco está centrado na forma como os alunos interpretam as situações problemáticas, nas estratégias usadas e na compreensão que revelam dos métodos aplicados, designadamente a sua utilização de conhecimentos e processos no domínio da álgebra. Ao participar na experiência em sala de aula, procuro compreender em primeira mão as estratégias usadas pelos alunos na resolução das tarefas propostas.

A forma como foi delineada esta investigação enquadra-se nos parâmetros recomendados na metodologia qualitativa. Segundo Bogdan e Biklen (1994) apresentam essencialmente, as seguintes características:

- (i) A fonte directa de dados é o ambiente natural, sendo o investigador o principal instrumento de recolha de dados;
- (ii) Os dados recolhidos são descritivos e não numéricos, pois têm a forma de palavras ou imagens;
- (iii) O investigador qualitativo interessa-se sobretudo pelo processo, relegando para segundo plano os resultados;
- (iv) A análise dos dados é feita de uma forma indutiva, não se pretendendo confirmar hipóteses prévias;
- (v) Compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências assume uma importância vital para o investigador qualitativo.

Estes requisitos aplicam-se directamente à minha investigação e podem caracterizá-la. Eles correspondem, em particular, aos instrumentos concretos que utilizei. Assim, por exemplo, se nos focalizarmos sobre a última característica enunciada por Bogdan e Biklen (1994) podemos dizer que a realização de entrevistas

possibilitou o esclarecimento dos significados atribuídos pelos alunos aos conceitos por eles criados ou utilizados.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), o envolvimento do investigador, na observação, pode variar num contínuo que vai desde o observador que não participa ao participante que observa. Pretendi, neste estudo, adoptar o papel de observador participante, assente no princípio da interferência nas actividades observadas e vivenciando a experiência na sala de aula e o contacto directo com os participantes.

Apresento, seguidamente, os procedimentos adoptados na presente investigação.

### **3.2. Participantes e Critérios de Selecção**

Neste estudo estiveram envolvidos, o professor e uma turma de 8.º ano de escolaridade. Optou-se por seleccionar um aluno desta turma para o caso sobre o qual recaiu este estudo. Atendendo a que os alunos desta turma, durante a experiência de ensino trabalharam regularmente em pares, o aluno caso, a que dei o nome fictício de Pedro, foi observado e estudado nas interacções com o aluno com quem fazia par, o Diogo, assim como com outros alunos da turma. Também foi dada atenção às interacções de Pedro com o professor e comigo. Deste modo, ao longo da experiência de ensino que envolveu a resolução de sete tarefas (em papel e suporte digital), o par constituído por Pedro e Diogo, foi alvo de atenção privilegiada e o seu desempenho objecto de análise. No final da experiência de ensino, foi realizada uma entrevista ao Pedro.

A escolha de Pedro prendeu-se essencialmente com quatro factores: ser interessado em aprender, estar disponível para a realização da entrevista (isto é, ter facilidade em reunir com a investigadora fora das aulas), ter uma razoável capacidade de expressão escrita e oral e ter vontade de participar no estudo.

O professor que participou neste estudo foi escolhido pela sua larga experiência de ensino, disponibilidade e interesse manifestados em colaborar neste projecto. Foi ainda factor decisivo na escolha da turma o facto de esta ter iniciado o NPMEB no ano lectivo 2009/2010 e com o mesmo professor. A experiência de leccionar o novo programa motivou também o professor da turma para colaborar na presente investigação.

A partilha da sala de aula entre dois professores de Matemática na minha escola é uma mais-valia que decorre da existência do Plano da Matemática. Este projecto veio permitir o trabalho colaborativo entre os professores de Matemática desta escola, reunidos à terça-feira para planificar e preparar materiais para a sala de aula. Desta forma, o trabalho e as conversas entre mim e o professor da turma de 8.º ano onde se desenvolveu esta experiência já faziam parte do quotidiano escolar desde o ano lectivo transacto. O facto de fazer assessorias a esta turma no ano lectivo anterior, permitiu-me conhecer os alunos (nessa altura, no 7.º ano de escolaridade) e saber que, de um modo geral, têm bom aproveitamento e estão bastante motivados para a aprendizagem. O empenho e o entusiasmo com que realizam os trabalhos propostos na disciplina mostram o seu interesse pela Matemática.

### ***A escola***

Situada na área metropolitana de Lisboa, está inserida num concelho que abrange uma área de 462 Km<sup>2</sup> e onde vivem cerca de 55 000 habitantes.

Devido à sua localização, o concelho revela um aumento demográfico e uma diversificação do tecido socioeconómico, com os sectores secundário e terciário a ganharem cada vez mais destaque.

No que diz respeito ao aproveitamento, e tendo em conta os resultados dos quatro últimos anos, no Ensino Básico, a percentagem de progressão/transição foi sempre superior a 81%. Na turma deste estudo o valor foi superado, dado que todos os alunos transitaram para o 8.º ano.

A escolha da escola prendeu-se com o facto de esta ser a escola onde exerço a minha atividade docente, sendo por isso mais acessível e oportuna para a implementação do projecto.

### ***A turma***

A turma de 8.º ano deste estudo é constituída por 27 alunos, 15 raparigas e 12 rapazes. Este grupo manteve-se semelhante ao do ano lectivo anterior, todos os alunos da turma transitaram no 7.º ano de escolaridade e foram integrados na turma dois novos alunos, uma aluna proveniente de outra turma de 7.º ano e um aluno de 8.º ano de outra turma que ficou retido. Em relação à idade, estes alunos estão todos dentro da escolaridade obrigatória, sete alunos têm 12 anos, dezoito têm 13 anos e dois têm 14

anos, sendo a média de idades 12,8. Dois alunos têm APA (apoio pedagógico acrescido) a Língua Portuguesa e Matemática, dois têm apoio do SPO (serviço de psicologia e orientação), verifica-se ainda a existência de um Plano de Recuperação e de um Plano de Acompanhamento. Os alunos são muito participativos e interessados, apesar de serem conversadores e irrequietos, estão muito motivados e dão grande importância ao sucesso escolar e são bastante competitivos.

Estes alunos são provenientes de famílias em que 52% dos pais e 70% das mães possuem o 12.º ano ou um curso superior e nas quais todos os pais estão empregados, apenas três mães estão desempregadas. Vinte e três destes alunos vivem com os progenitores e vinte e cinco têm casa própria, todos têm computador e internet em casa e apenas cinco partilham o quarto, os restantes vinte e dois têm um quarto próprio. Os alunos moram, de um modo geral, a poucos quilómetros do estabelecimento de ensino e apenas sete utilizam o autocarro como meio de transporte, dos restantes, nove deslocam-se a pé e onze de carro.

Sendo esta uma turma do ensino articulado da música, os alunos têm o dia bastante ocupado com as actividades lectivas na escola, com as aulas de música no Conservatório e com os ensaios da orquestra, da qual muitos fazem parte. Não obstante cumprem, quase todos, com os trabalhos que lhes são solicitados quer em situação de sala de aula quer como trabalho de casa.

No seio familiar as regras parecem ser de um modo geral rigorosas, com o intuito dos alunos cumprirem com as suas obrigações, todos afirmam que se deitam entre as 22h30 e as 23h, treze dizem estudar todos os dias e vinte e três conversam frequentemente com os pais sobre os estudos.

### **3.3. A experiência de ensino e a recolha de dados**

Nesta secção começo por apresentar e descrever a experiência de ensino e, em seguida, exponho e descrevo os procedimentos de recolha de dados e os principais instrumentos utilizados: observação com registo em áudio e vídeo, entrevista, diário de bordo e recolha documental.

### 3.3.1. Experiência de ensino

A experiência de ensino a desenvolver em sala de aula incide sobre o tema da Álgebra. Segundo os objectivos gerais de aprendizagem, no âmbito deste tema, os alunos devem:

- Ser capazes de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos;
- Compreender o conceito de função e ser capazes de o usar em diversas situações, em particular de proporcionalidade directa;
- Ser capazes de interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos;
- Ser capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos (ME-DGIDC, 2007, p. 55).

Neste estudo, esteve presente a preocupação de aplicar uma sequência de tarefas, envolvendo situações reais contextualizadas que permitissem o desenvolvimento de conceitos matemáticos significativos para os alunos.

Ao longo do 7.º ano, acompanhei esta turma em regime de assessoria, os alunos realizaram diversas tarefas apresentadas nas brochuras publicadas pela DGIDC com materiais de apoio ao professor para o tema “Sequências e Funções” sem revelarem dificuldades nestas matérias. Desta forma, eu e o professor considerámos desnecessário começar por relembrar os conteúdos leccionados, considerando que no caso de surgirem algumas dúvidas, seria mais eficaz partilhá-las, nesse momento, com todos os alunos da turma.

#### *As Tarefas*

Em colaboração com o professor da turma, construímos uma sequência de tarefas que, no nosso entender, está de acordo com os objectivos de aprendizagem apresentados no programa. Esta sequência, embora sendo composta por sete tarefas, respeita a planificação da escola e não põe em risco o cumprimento do programa. A necessidade de construir uma sequência de sete tarefas resultou de se pretender que os alunos revisitassem conhecimentos adquiridos no ano lectivo anterior no que respeita às diversas formas de representar uma função. Pretendeu-se também que os alunos

recorressem à representação gráfica e algébrica de situações de proporcionalidade directa, estabelecendo a ligação entre esta e a função linear, em situações reais e nas quais os alunos se pudessem envolver. Era nosso desejo e intenção que fossem os próprios alunos a encontrar um modelo matemático que desse resposta às diversas situações problemáticas apresentadas, seleccionando a informação, interpretando, formulando conjecturas, testando o modelo e, por fim, que verificassem a sua eficácia, reformulando o modelo caso fosse necessário. Daí que a primeira tarefa exigisse a recolha dos dados pelos próprios alunos, numa aula experimental que marcou o início desta unidade temática.

O Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), aprovado em 2007, destaca a importância da diversificação de tarefas e experiências de aprendizagem. As tarefas a realizar devem encaminhar os alunos para a formulação de estratégias próprias e permitir a mobilização de conhecimentos e capacidades anteriormente desenvolvidas. O trabalho desenvolvido pelos alunos na realização de uma sequência de tarefas deve permitir o desenvolvimento e a formalização de novos conceitos e representações (Ponte et al, 2009b).

Um elemento central das trajectórias hipotéticas de aprendizagem consiste na qualidade das tarefas a propor aos alunos em sala de aula. Uma descrição do desenvolvimento dos alunos é fundamental, mas não suficiente, na medida em que nos diz que tipos de pensamento procurar e desencadear mas não nos diz como facilitar o desenvolvimento para o nível seguinte. A trajectória de aprendizagem completa explica os níveis de pensamento, as ideias e acções mentais que devem ser construídas, o processo de gerar essas ideias e acções (por exemplo, promover aprendizagem) e tarefas específicas e estratégias de ensino baseadas nesses processos (Serrazina & Oliveira, 2005).

*Sublinha-se a relação estreita entre uma trajectória hipotética de aprendizagem e as tarefas que são desenhadas, para constituírem a sequência, ou seja, estas dependem das hipóteses que o professor coloca sobre o desenvolvimento conceptual e o percurso de aprendizagem dos alunos. (Serrazina & Oliveira, 2005, p. 47).*

Pretendeu-se com a realização de uma cadeia de tarefas que os alunos, em interacção com os colegas e com o professor, fossem desenvolvendo capacidades que os levassem à apropriação do conhecimento. Para que os alunos dessem significado às propostas de trabalho formuladas nas tarefas, foi dada primordial importância ao contexto, a vários níveis, a começar por aquele no qual os problemas matemáticos propriamente ditos são formulados, não esquecendo também o contexto prático no qual a actividade lectiva se desenvolve. Isto porque as questões descontextualizadas e sem qualquer ligação à realidade e à vivência dos alunos podem comprometer o processo de aprendizagem, dificultando o estabelecimento de conexões com aprendizagens anteriores.

A actividade desenvolvida pelos alunos enquanto procuram um caminho que os leve à solução de determinada questão é uma das condições que permite gerar um desenvolvimento cognitivo. A comunicação matemática efectuada durante a resolução de problemas constitui um meio para que o aluno dê significado às suas aprendizagens.

O novo Programa de Matemática do Ensino Básico define como um dos seus objectivos, que os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas através de diversas *representações*. Isto é, devem ser capazes de:

- Ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação;
- Traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural;
- Elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas;
- Usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais (p. 5).

Pretendeu-se tornar os alunos conscientes dos processos de transformação entre os vários tipos de representação e consciencializá-los para a natureza e valor da representação em Matemática. Para concretizar este objectivo recorreu-se ao computador, em particular, ao software GeoGebra que tornou possível, de forma prática e eficaz, construir, visualizar e alterar, diferentes representações de forma dinâmica.

O recurso ao computador é recomendado e está presente nas planificações propostas pelos professores das turmas piloto do 8.º ano de escolaridade, no ano lectivo de 2008/2009. Os AGD (Ambientes de Geometria Dinâmicos) são aconselhados como instrumentos de trabalho, para além do papel e lápis. Neste trabalho, o computador foi uma ferramenta da maior importância para ajudar os alunos na construção de modelos matemáticos.

As tarefas propostas, para além dos objectivos apresentados anteriormente incluem também oportunidades para o desenvolvimento das três capacidades transversais presentes no PMEB: a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática.

A construção de um modelo, que possibilite dar resposta a determinada problemática, fazendo previsões ou simulações da situação em questão é uma das formas de analisar, investigar e conjecturar e estabelecer uma ligação da Matemática com o mundo real. Pressupõe-se que este trabalho deverá estimular a criatividade dos alunos bem como a sua capacidade de comunicar matematicamente, na medida em que têm que expor as suas ideias e argumentar com os seus pares e com o professor acerca do melhor processo para chegar ao modelo matemático de determinado fenómeno real. Desenvolvem também o espírito crítico e a perseverança pois ao aceitarem ou recusarem um modelo têm que discutir e apresentar razões plausíveis para justificarem a sua decisão. E, no caso de concluírem que o modelo não representa a situação, têm de seguir outro percurso de modo a obterem um novo modelo, que será novamente testado.

### ***Implementação das tarefas***

A aplicação da sequência de tarefas decorreu durante o mês de Janeiro de 2011, ao longo de sete aulas, compreendendo três blocos de noventa minutos e quatro de quarenta e cinco, estes últimos ao abrigo do Plano da Matemática II.

<b>Aula</b>	<b>Tarefa</b>	<b>N.º de Blocos</b>	<b>Tema</b>
<b>1</b>	Experiência – recolha de dados	0,5	Função Linear
<b>2</b>	Tarefa 1 – O volume da água	0,5	
<b>3</b>	Tarefa 2 – Potência de um motor	1	
	Tarefa 3 – Escolha de tarifários		
<b>4</b>	Tarefa 3 – Escolha de tarifários	1	
<b>5</b>	Tarefa 4 – Cestos de compras	0,5	Função Afim
	Tarefa 5 – Festa de final de ano		
<b>6</b>	Tarefa 5 – Festa de final de ano	1	
	Tarefa 6 – Quanto custa ter carro próprio?		
<b>7</b>	Tarefa 7 – Variação dos parâmetros	0,5	
<b>8</b>	Discussão e Síntese	0,5	Função Afim (linear e não linear)
		<b>5,5</b>	<b>Total</b>

Quadro 3. Planificação da experiência de ensino

Na primeira sessão, uma aula do Plano da Matemática que teve lugar no laboratório de Física, os alunos efectuaram uma experiência onde tinham de encher recipientes com água e registar numa tabela, que lhes foi dada para esse efeito, o tempo e o volume da água para um determinado caudal (ocasionado pela menor ou maior abertura da torneira). A experiência foi repetida três vezes fazendo variar o caudal. Cada grupo ficou com os seus dados que seriam utilizados na aula seguinte. Alguns grupos ficaram surpreendidos com o facto de obterem dados diferentes dos outros e ficaram na expectativa, sem saber o que iriam fazer em Matemática com os dados recolhidos.

As sessões seguintes tiveram lugar em salas de informática de modo a permitir aos alunos terem computadores ao seu dispor para desenvolverem o seu trabalho. As

mesas estavam dispostas em U encostadas à parede e cada par de alunos dispunha de um computador. Nestas aulas, o professor chegou sempre antes do toque de entrada para ligar os computadores e verificar se estava tudo operacional.

Na segunda sessão que, à semelhança do que aconteceu na sessão experimental, teve lugar numa aula destinada ao Plano da Matemática. O professor lembrou os alunos do motivo da minha presença na sala, deu algumas informações sobre a organização e funcionamento desta aula e sobre a necessidade desta decorrer numa sala de informática. Em seguida, deu indicações para que os grupos fossem os mesmos da aula experimental pois tinham de utilizar os dados recolhidos nessa aula para resolver a primeira tarefa. Sugeriu a leitura atenta do enunciado que eu ia distribuindo e lembrou que o registo escrito das conclusões era importante, recomendou a justificação dos resultados obtidos e a explicação de como os tinham encontrado. Utilizou o projector para que todos os alunos pudessem visualizar o ambiente do GeoGebra e dar algumas instruções pontuais sobre o seu funcionamento. No decorrer da aula o professor foi orientando e esclarecendo os alunos na realização da tarefa.

De um modo geral, os alunos reagiram muito bem a esta proposta de trabalho, revelaram muito entusiasmo e curiosidade por irem trabalhar com os dados recolhidos por eles próprios, apesar de terem noção de ser um conteúdo novo e da pouca experiência que possuíam na utilização desta ferramenta computacional. Logo no início da aula, ao receber a tarefa, um dos alunos afirmou: “professor, mas ainda não demos isto!”. Mostraram alguma competitividade, procurando terminar primeiro que os colegas e dizendo ao professor os resultados obtidos, tentando captar a atenção do professor para o seu bom desempenho.

Os alunos discutiram com os seus pares e procuraram com frequência que o professor validasse as suas conclusões. Este primeiro contacto dos alunos com o GeoGebra superou todas as expectativas, pois optámos por não entregar nenhum guião de utilização do GeoGebra. Tínhamos acordado que só no caso de os alunos manifestarem dificuldades dar-lhes-íamos algumas informações, à medida que fossem sendo necessárias. Apenas foram dadas algumas indicações pontuais, nomeadamente de como introduzir os dados na *folha de cálculo*, marcar os pontos na *zona gráfica* e, posteriormente, como diferenciar cada uma das rectas, usando cores diferentes.

A terceira aula começa com a apresentação de alguns trabalhos realizados na aula precedente e com a discussão alargada à turma. Nesta aula, o professor dá mais

algumas informações sobre o GeoGebra, nomeadamente sobre como obter a equação reduzida da recta (o GeoGebra apresenta-nos a equação geral) e como mudar a cor, o nome ou a espessura do gráfico.

Nesta aula os alunos estão mais concentrados no trabalho, conseguem rentabilizar o tempo e avançar bastante em termos do trabalho realizado, estão já familiarizados com o software e poucas são as dúvidas colocadas. No final da aula, o professor orientou e promoveu a discussão dos resultados obtidos durante a realização da segunda tarefa, apresentando os ficheiros obtidos no GeoGebra por alguns grupos.

Numa reunião prévia que tive com o professor tínhamos previsto algumas dificuldades que os alunos poderiam revelar, quer na interpretação do enunciado quer na utilização do software. Os percursos seguidos pelos alunos, na sua maioria, também estiveram de acordo com o previsto. Surgiu, no entanto, uma solução diferente e mais original num dos grupos e o professor, utilizando o projector, partilhou essa informação na discussão final com toda a turma.

Na quarta sessão, como de costume, o professor entregou a tarefa e deu algumas indicações sobre o trabalho a desenvolver. Durante a aula, o professor apoiou o trabalho dos alunos, esclareceu algumas dúvidas, em particular, na interpretação do enunciado, questionando-os e incentivando-os a pesquisar. Alguns grupos optaram por usar a calculadora científica para resolver a tarefa, antes de recorrerem ao computador.

Na quinta aula, a tarefa proposta exigia a utilização de dados previamente recolhidos pelos alunos relativamente à altura de uma pilha de cestos (utilizados nos supermercados) fazendo variar o número de cestos existentes na respectiva pilha. Os alunos realizaram a tarefa com bastante desembaraço e de forma autónoma (comparativamente com a segunda aula, em que os alunos tinham recolhido os dados da experiência mas manifestaram alguma hesitação na sua utilização).

Os alunos aproveitaram bem o tempo e alguns conseguiram resolver a tarefa 4 e começar a tarefa 5, verificou-se um trabalho bastante intenso dos pares de alunos. Começou a notar-se alguma competição entre os pares, alguns deles quando terminavam perguntavam como estava a correr o trabalho nos outros grupos, dizendo “nós já conseguimos fazer a tarefa, e vocês?”.

Na sexta aula os alunos resolveram a tarefa 5 (que alguns já tinham iniciado na sessão anterior) e a tarefa 6. Na tarefa 5 os alunos de um dos grupos respondem a algumas questões através de cálculo mental e solicitam a minha aprovação: “professora

esta questão fiz de cabeça. É preciso usar o GeoGebra?”, e também “Nas outras tarefas era mais fácil fazer com o GeoGebra mas esta vê-se logo, nem é preciso fazer contas”. Nesta tarefa, a situação problemática é apresentada através da expressão algébrica e, alguns grupos (em especial os que têm mais facilidade na disciplina) começam de imediato a explorar a expressão, usando cálculo mental ou recorrendo à calculadora científica.

Na sétima aula, com a duração de 45 minutos, os alunos resolvem a última tarefa com o entusiasmo e eficácia que os caracterizou ao longo deste estudo.

### *A Utilização das tecnologias*

O uso das tecnologias, nesta experiência, teve como objectivo colocar à disposição dos alunos um software educativo que, de certa forma, fosse um meio facilitador da construção, representação e exploração de modelos matemáticos.

Foi escolhido, para o efeito, o GeoGebra por ser um software de Matemática dinâmica que permite construir e explorar objectos (geométricos e algébricos) de forma interactiva.

Os alunos já tinham trabalhado com o GeoGebra, no ano lectivo anterior, pelo que não se considerou necessário a realização de uma aula de preparação com tarefas destinadas a um domínio técnico do software. Inicialmente, estava prevista uma tarefa introdutória para que os alunos se familiarizassem com a ferramenta que iam utilizar para desenvolver o estudo da função afim. Após uma reunião com o professor da turma, resolvemos avançar e permitir que os alunos descobrissem, por eles próprios, alguns pormenores específicos do programa enquanto realizavam as tarefas. Não se verificaram quaisquer dificuldades a esse nível, bem pelo contrário, eles manifestaram prazer nas suas descobertas. A interacção dos alunos com este software foi muito positiva. É de realçar que os alunos tinham o GeoGebra ao seu dispor mas não eram obrigados a usar esta ferramenta, tinham total liberdade para escolher a forma de resolver cada uma das tarefas. Algumas alíneas, de uma mesma tarefa, foram resolvidas por uns alunos com o auxílio do GeoGebra e, por outros, apenas com papel e lápis.

Este software permite a construção do modelo de forma expedita e dando também ao aluno informação acerca da expressão algébrica, isto é, aparece em simultâneo o gráfico que se adapta aos pontos marcados no referencial (que foram dados no enunciado do problema ou que tiveram origem em recolhas efectuadas pelos

alunos) e a sua expressão. Para além de facilitar a procura do modelo, o aluno pode experimentar de forma mais célere e encontrar o modelo que achou mais apropriado à situação problemática que lhe foi colocada. Uma outra vantagem a assinalar é que os alunos ficaram libertos de cálculos rotineiros, dado que o mesmo software possui uma folha de cálculo. Os alunos têm também a possibilidade de visualizar, no mesmo ambiente, a zona algébrica, a zona gráfica e a folha de cálculo, e ao “moverem” pontos do gráfico podem constatar as alterações na expressão algébrica (e vice-versa).

Esta ferramenta dá ainda a oportunidade de compreender melhor o raciocínio dos alunos pois cada “passo” efectuado pelos alunos na resolução da tarefa fica registado no GeoGebra, de modo particular. Por exemplo, se os alunos verificam que a estratégia que estão a utilizar não os conduz à solução do problema e resolvem adoptar outra estratégia e começar de novo, ainda assim todos os processos ficam gravados e o professor pode ter acesso a essa informação em “Exibir” e depois escolhendo “Protocolo de construção”.

O objectivo de utilizar a tecnologia na realização das tarefas veio permitir a construção dos modelos matemáticos de forma dinâmica, possibilitando a visualização imediata do gráfico, o deslocamento do gráfico obtido, a sua relação com os dados inseridos na tabela e com a expressão algébrica, bem como possibilitar a reflexão na medida em que os liberta de tarefas mecânicas.

### ***Dinâmica da sala de aula***

Os alunos trabalharam sempre a pares e resolveram cada uma das tarefas propostas com a possibilidade de recorrerem ao GeoGebra, sendo-lhes dada liberdade de utilizar, ou não, este recurso. Deixou-se ao critério dos alunos a utilização do GeoGebra se estes a considerassem vantajosa.

Os alunos trabalhavam sobre cada uma das propostas e cada um discutia com o parceiro, escolhendo o processo que lhes aprouvesse para resolver as questões colocadas. As conclusões finais eram registadas no enunciado da proposta de trabalho, entregue aos alunos no início de cada actividade.

A formação dos grupos de trabalho foi feita de forma espontânea pois a turma mantém sensivelmente a mesma constituição de anos precedentes e, para além disso, os alunos estão habituados a trabalhar em grupo.

Quanto ao tempo destinado para a realização de cada tarefa este foi determinado pelo ritmo de trabalho de cada par, tendo no entanto sido feita uma previsão em conjunto com o professor da turma que já conhecia os alunos do ano anterior. Fomos surpreendidos pela positiva, pois o entusiasmo com que realizaram as tarefas foi contagiante, criando, por vezes, um espírito competitivo entre alguns pares de alunos. Mal terminavam uma tarefa ficavam impacientes, pedindo de imediato ao professor o enunciado da tarefa seguinte.

A organização do trabalho em sala de aula durante esta experiência foi determinante para o sucesso das aprendizagens dos alunos e a realização da sequência de tarefas foi decisiva na dinâmica das aulas. Saliento como pontos importantes promover a comunicação matemática na sala de aula, estimular os alunos a realizarem um trabalho autónomo com a supervisão do professor e terem o controlo da sua própria aprendizagem.

Em suma, os alunos estão envolvidos numa actividade que lhes permite apropriarem-se do conhecimento, o que vai ao encontro dos objectivos gerais do novo PMEB quando é definido que “os alunos devem ser capazes de *fazer* Matemática de modo autónomo” pois “deste modo, poderão sentir-se mais envolvidos na elaboração do seu conhecimento matemático e conseguir uma apropriação mais profunda desse conhecimento” (p. 6).

De acordo com o PMEB (ME-DGIDC, 2007):

*(...) são fundamentais os momentos de reflexão, discussão e análise crítica envolvendo os alunos, pois estes aprendem, não só a partir das actividades que realizam, mas sobretudo da reflexão que efectuam sobre essas actividades.* (p.11)

### **3.3.2. Procedimentos de recolha de dados**

Numa investigação de carácter qualitativo é importante obter informações de diversas fontes, sendo necessário confrontá-los para tornar coerente a sua interpretação, através de um processo de “triangulação” (Erickson, 1986). Os dados provenientes de

diversas fontes permitem uma abordagem a partir de diferentes perspectivas, podendo ser utilizados também para se complementarem.

Neste estudo, foram recolhidos e analisados os trabalhos produzidos pelos alunos (registos escritos, ficheiros elaborados no GeoGebra com possibilidade de acesso ao “*protocolo de construção*” que permite analisar “*passo a passo*” os procedimentos realizados pelos alunos), o registo diário das aulas (diário do investigador), as informações registadas em áudio e vídeo (e respectiva transcrição) e as entrevistas (Bogdan e Biklen, 1994).

Neste trabalho foi realizada uma entrevista ao aluno caso. A entrevista é a técnica mais utilizada no processo de recolha de dados em estudos qualitativos, pois permite que o investigador tenha acesso ao pensamento do entrevistado e a outro tipo de informação fornecida pelos gestos, expressões, etc.

Os dados objectivos podem ser obtidos através de outras fontes, já os dados subjectivos só poderão ser obtidos através da entrevista, pois relacionam-se com as opiniões dos sujeitos entrevistados. Estes dados têm um interesse fundamental, na medida em que podem fornecer ao investigador informações sobre o raciocínio usado pelos alunos aquando da resolução de um problema, sobre a explicação dos métodos e tentativas implementados no percurso e não apenas a resposta final. Nesta situação, o investigador tem possibilidade de compreender e analisar, não apenas o resultado final, mas sim como é que o aluno pensou, que estratégias utilizou e porquê.

A entrevista tem como vantagem a sua elasticidade quanto à duração, permitindo uma cobertura mais profunda sobre determinados assuntos. Além disso, a interacção entre o entrevistador e o entrevistado favorece as respostas espontâneas, o que pode ser útil para a investigação.

No entanto, esta é uma técnica muito exigente para o investigador, que deve ter um guião bem preparado, com questões curtas e directas, o enunciado das questões deve ser claro e perceptível para o entrevistado e deve-se evitar as perguntas orientadas. Quase todos os autores reconhecem que a entrevista ultrapassa os limites da técnica, dependendo em grande parte das qualidades e habilidades do entrevistador, tais como uma boa capacidade de comunicação verbal, aliada a uma boa dose de paciência para ouvir atentamente (Ludke & Andre, 1996). Numa entrevista é necessário começar por criar um clima em que o entrevistado se sinta à vontade e com tempo para responder e criar um clima de cumplicidade.

*Há toda uma gama de gestos, expressões, entoações, sinais não verbais, hesitações, alterações de ritmo, enfim, toda uma comunicação não verbal cuja captação é muito importante para a compreensão e a validação do que foi efectivamente dito (Ludke & Andre, p.36).*

Além destes aspectos a entrevista, pela sua própria natureza, supõe uma interacção entre entrevistado e entrevistador, o que pode levantar a questão de influência da personalidade do entrevistador no decorrer do processo e na objectividade dos resultados.

As entrevistas podem fornecer indicadores significativos sobre as dificuldades dos alunos na realização de tarefas, recorrendo, por exemplo, à resolução efectuada pelo aluno na aula e colocando questões sobre a mesma e/ou colocando novas questões. Assim, pode conseguir-se um melhor conhecimento sobre as formas de pensar do aluno.

Neste estudo optei por realizar uma entrevista semi-estruturada, na medida em que esta permite alterar a sequência inicial das questões e, eventualmente, colocar questões não planeadas motivadas pelas intervenções dos entrevistados (Guimarães, 2003).

Após a realização da sequência de tarefas em sala de aula, foi realizada, uma entrevista semi-estruturada a Pedro, com a duração aproximada de 60 minutos, com a intenção de compreender o raciocínio do aluno, as dificuldades que sentiu e as estratégias a que recorreu. Nesta entrevista foram apresentadas duas questões ao aluno para resolver e explicar as várias etapas do processo de resolução escolhido.

A entrevista realizada teve por base um guião (Anexo 10) e era composta por duas partes distintas. Na primeira parte foram colocadas várias questões com o objectivo de conhecer a relação do aluno com a disciplina de Matemática, o seu percurso escolar e algumas questões relacionadas com a utilização do computador na aula de Matemática. Na segunda parte foi proposta uma tarefa ao aluno, com o objectivo de identificar estratégias privilegiadas e as principais dificuldades surgidas durante a resolução de problemas que envolvem funções lineares, descrever o modo como estas estratégias são aplicadas e a utilização dada ao GeoGebra nesse processo.

Na entrevista tive em conta a análise feita aos trabalhos produzidos pelo aluno a partir da recolha documental e da observação participante, o que ilustra o carácter dinâmico deste estudo. A entrevista foi áudio-gravada e, posteriormente, transcrita na íntegra.

Na sala de aula assumi o papel de observadora participante, procurei adaptar-me ao meio observado, encarando-o como uma fonte de informação, mas também como fonte de aprendizagem e ter uma postura reflexiva perante o observado, tomei notas, registando toda a informação que me pareceu relevante.

Por não ser a professora da turma, embora circulasse pela sala e interagisse com os alunos, tive mais liberdade para tomar notas e filmar excertos das aulas.

Para registar todos os momentos importantes da actividade dos alunos, a gravação em áudio do trabalho realizado por este par de alunos e a sua posterior transcrição, constituiu uma importante fonte de dados. De modo a complementar a informação recolhida através da gravação áudio, filmei alguns excertos das aulas e tentei permanecer na proximidade deste par para ouvir os diálogos destes alunos e de outros pares com quem interagiam procurando perceber o seu raciocínio, as estratégias usadas, as dificuldades surgidas e formas de as ultrapassarem, ao modo como utilizavam o GeoGebra na construção dos modelos matemáticos e na resposta às questões colocadas.

### **3.4. Análise de Dados**

A minha atenção foi dirigida para o estudo dos processos e não para os resultados, o que sugere que a análise dos dados foi feita de uma forma indutiva.

De acordo com Miles & Hubbermann (1994), comecei por proceder à criação de categorias de análise (identificando ideias e palavras-chave) e à definição operacional das mesmas. As categorias, que emergem do quadro conceptual e das questões de investigação, são descritas com a ajuda de códigos, o que facilita a localização da informação.

Em seguida procedi à categorização – codificação que é importante na medida em que nos fornece matéria-prima para procedermos à descrição e explicação dos

dados. A este respeito, Miles & Huberman (1994) referem que os esquemas conceptuais e as questões de investigação são a melhor defesa contra o supérfluo.

A redução ou condensação da informação realizada durante e depois do processo de recolha de dados faz parte da análise, ou seja, é uma operação contínua que segundo Miles & Huberman (1994) vai do momento em que é determinado um campo de observação até à fase em que se decide aplicar um sistema de codificação e proceder a resumos. Estes autores aconselham a que se dê bastante importância à organização dos dados, sendo o recurso a modos de apresentação que reduzem e estruturam os dados uma importante via de aperfeiçoamento da análise dos dados qualitativos.

A representação gráfica dos dados permite mais facilmente dar-lhes um sentido global, detectar/controlar “enviesamentos” e dado que a informação está condensada em poucas folhas e ordenada permite com mais facilidade “seguir” duas ou três variáveis e compreender como estas se relacionam. Por exemplo, a Matriz de Listagem de Variáveis é um formato para representar graficamente os dados, que analisa os dados com base numa variável geral ou num interesse específico.

Segui as seguintes estratégias de análise: notar padrões ou temas; fazer comparações; notar relações entre variáveis; encontrar outras variáveis intervenientes; testar relações do tipo: se isto, então aquilo; avaliar plausibilidade; agrupar; fazer metáforas; contar; criar um todo significativo a partir das partes; seguir surpresas (o que ilustra o carácter dinâmico deste estudo); construir uma sequência lógica de evidências; procurar evidências negativas ou procurar explicações alternativas.

Para representar a “teia” de relações que se estabelecem entre as categorias de análise, para melhor explicar o fenómeno e fazer previsões construí uma Rede Causal. Comecei por seleccionar as categorias de análise mais pertinentes, organizei-as num quadro e estabeleci possíveis relações. Com base na teoria, nas questões iniciais e em análises prévias, selecionei que categorias de análise são pertinentes e escolhi quais podem estar a funcionar como variáveis independentes, dependentes e intermédias.

Miles & Huberman (1994), quando abordam o tema das Redes Causais, defendem a tese segundo a qual o quadro conceptual necessário ao tratamento de determinado problema não é (ou não deve ser) dado a priori, mas define-se progressivamente à medida que os dados são recolhidos e tratados, num processo dinâmico de influências recíprocas. Este processo está no cerne da actividade de

investigação científica. Espero que o meu trabalho o ilustre e me ajude a compreendê-lo melhor.

De acordo com Hubbermann, do diálogo com os dados emergiram categorias padrão, fez-se a análise empírica a partir da transcrição das aulas, do diário de bordo, da transcrição da entrevista, das respostas escritas dos alunos e dos ficheiros realizados no GeoGebra. Depois passou-se à análise dos dados, procurando relações entre as categorias padrão e passando às inferências. De forma a estabelecer um melhor diálogo com os dados, fui construindo os mapas conceptuais a partir das categorias padrão, recorrendo sempre que necessário aos dados empíricos, permitindo que os resultados da investigação contendam os diálogos entre os alunos, entre os alunos e o professor e os documentos produzidos por estes aquando da realização das tarefas.

# **CAPÍTULO IV**

## **O Caso do Pedro**



Neste capítulo apresento e descrevo alguns episódios de sala de aula que mostram o envolvimento do Pedro e do seu colega Diogo (que trabalhavam em par nas aulas de Matemática), na resolução das sete tarefas que foram realizadas ao longo da experiência. Concluo o caso do Pedro com a análise da entrevista realizada a este aluno, após a sequência de tarefas desenvolvidas nas aulas.

## **4.1. Episódios de sala de aula**

A sequência de sete tarefas iniciou-se com: três tarefas sobre a função linear, três sobre a função afim e, por fim, uma última que envolve a exploração da influência da variação dos parâmetros  $a$  e  $b$  na equação  $y = ax + b$ .

O que distingue esta experiência de ensino, do trabalho usualmente realizado em sala de aula, é o facto de se estar a desenvolver um “ensino-aprendizagem exploratório”, na medida em que “a sua característica principal é que o professor não procura explicar tudo mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem” (Ponte, 2005, p. 13).

Para não perder a dinâmica intrínseca à experiência pedagógica no seu conjunto, vou proceder à apresentação das tarefas de maneira sequencial, mas sem as separar completamente.

### **4.1.1. Episódio 1. Actividade experimental em matemática**

Os alunos nunca tinham tido oportunidade de realizar uma actividade experimental no âmbito da disciplina de Matemática. Decidimos por isso envolver estes alunos em duas situações de recolha de dados para serem posteriormente trabalhados na aula de matemática. Assim, a primeira aula de 45 minutos consistiu na realização de uma experiência que teve lugar num laboratório de Físico-Química. Na aula experimental foram realizadas três experiências de enchimento de recipientes com água com o objectivo de recolher dados. Neste dia, excepcionalmente, os alunos trabalharam em grupos de quatro elementos. Cada experiência consistiu em medir a altura da água num copo graduado, estando a torneira aberta num certo caudal, sendo o tempo

cronometrado por um dos alunos do grupo de trabalho e os dados (tempo e volume da água) registados numa tabela (**Anexo 1**) fornecida aos alunos para esse efeito e entregue ao professor no final da aula. Um aluno ficou encarregue de abrir a torneira da água, outro segurava um cronómetro para controlar o tempo, um terceiro segurava o copo graduado e o quarto aluno registava as informações. Os alunos foram rodando pelas quatro tarefas possíveis. Foram feitas quatro experiências, uma primeira de ensaio e três outras para a efectiva recolha de dados.

O objectivo desta actividade foi estudar o volume de água no copo em função do tempo, considerando o caudal da torneira como um parâmetro que variava nas sucessivas experiências. Foram seguidas diferentes estratégias pelos vários grupos de alunos. Uns optaram por, a cada 5 segundos, indicar o volume de água no copo graduado. Outros fizeram de forma diferente, optando por, a cada 200 ml de água introduzidos no copo, dar o tempo decorrido.

As diferentes estratégias fizeram com que os alunos obtivessem diferentes resultados, até porque nem todos tinham a torneira aberta com o mesmo caudal. Os alunos realizaram esta actividade de investigação com enorme entusiasmo e espanto por nunca terem feito algo do género para a disciplina de matemática.



Fotografia 1. Realização da actividade experimental

Atendendo ao sucesso da primeira tarefa e gosto dos alunos pela sua realização, decidimos repetir uma situação experimental noutro momento, mas desta vez fora da escola. Esta sucedeu antes da apresentação da tarefa 4 (a primeira da sequência de tarefas da função afim). Neste caso, foi pedido aos alunos que, quando fossem ao supermercado às compras, medissem a altura de uma pilha de cestos de compras e a partir desses dados procedeu-se à construção de um modelo matemático representativo dessa situação.

Inicialmente, o professor da turma propôs que elaborássemos um guião de utilização do GeoGebra e uma tarefa introdutória com instruções sobre este software. No entanto, como os alunos desta turma são muito interessados e gostam de desafios, decidimos suprimir esta introdução ao GeoGebra e, após a aula experimental, demos início à implementação das tarefas sem uma preparação prévia com o GeoGebra.

As aulas experimentais deste género apresentam, quanto a mim, um grande interesse pedagógico. Além de outros aspectos, estas possuem um carácter iminentemente interdisciplinar e põem em evidência o interesse da Matemática nas suas aplicações tanto científicas como relacionadas com fenómenos da vida corrente.

Passámos à realização da tarefa 1, que teve lugar na aula seguinte do Plano da Matemática, onde cada par utilizou os dados que tinha recolhido.

Nesta aula foram entregues as fichas com o registo da recolha de dados e fornecidas algumas informações sobre a utilização do GeoGebra, nomeadamente indicações sobre como introduzir os dados na folha de cálculo do GeoGebra e de como marcar os pontos na zona gráfica.

Pedimos aos alunos para lerem o enunciado da tarefa e após a leitura o Pedro comentou de imediato:

**Pedro:** Oh setor, a gente ainda não deu isto!

Embora habituados a resolver tarefas com questões e situações problemáticas, os alunos mostram ainda alguma surpresa quando se deparam com novas situações. No entanto, talvez pela oportunidade de estarem a trabalhar com o computador e com um software que nunca tinham usado, os alunos revelaram-se muito entusiasmados com o trabalho, ignorando alguns comentários do professor. Foi notório o desejo de experimentar e de conseguir fazer sem a ajuda do professor, mas solicitavam a sua

presença para que confirmasse se as respostas estavam de acordo com o que era solicitado (se estavam correctas, completas e se a justificação era a pretendida).

#### 4.1.2. Episódio 2. O Volume da Água

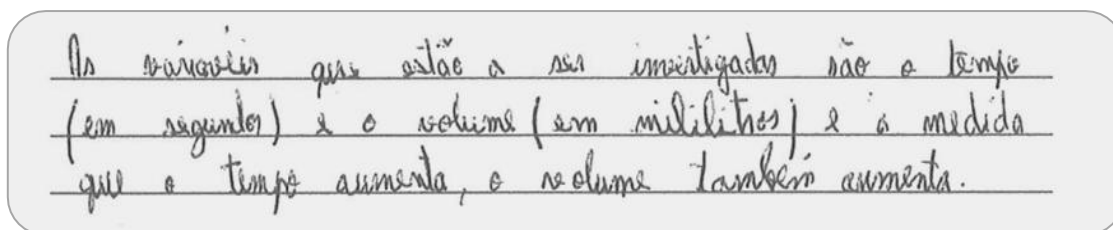
1. Num referencial, que considerem apropriado para o efeito, marquem os dados recolhidos em cada uma das experiências.
2. Descrevam que variáveis estão a ser investigadas e qual a relação entre elas.
3. Escrevam uma equação para cada uma das experiências. Descrevam como o caudal afecta a equação.
4. Que quantidade de água terá o copo ao fim de 15 segundos?
5. Quanto tempo levaria a obter 5 litros de água? E nesse caso, qual seria o caudal que consideram mais conveniente? Justifiquem a vossa resposta.

Com esta tarefa (**Anexo 2**) pretendeu-se que os alunos procedessem à modelação de uma situação por eles vivenciada aquando da realização da experiência laboratorial. Estando a situação problemática proposta integrada num contexto do quotidiano dos alunos, partindo de uma experiência realizada pelos próprios, a realidade é encarada como uma **fonte** para a aprendizagem, o que está de acordo com a teoria da educação matemática realista (RME), na qual está ancorado esta proposta de sequência de tarefas. Esta é também uma das orientações do Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais, considerando que um dos aspectos a desenvolver é “a sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos em que traduzem relações de proporcionalidade directa e inversa” (ME, 2001, p. 67).

Na primeira questão da tarefa, os alunos marcaram os pontos num referencial adequado, utilizando o *software* GeoGebra. Com algumas informações dadas pelo professor os alunos conseguiram resolver a questão sem dificuldade.

Na segunda questão, os alunos tinham que identificar as variáveis envolvidas (tempo e volume) e compreender a relação entre elas. Neste caso, os grupos

responderam e não colocaram nenhuma dúvida ao professor nem solicitaram a sua validação.



As variáveis que estão a ser investigadas são o tempo (em segundos) e o volume (em mililitros) e a medida que o tempo aumenta, o volume também aumenta.

Figura 4. Resposta à questão 2 do par Pedro/Diogo

A questão seguinte pedia a equação representativa de cada uma das experiências e perguntava de que modo o caudal altera a equação. Neste caso os alunos usaram o GeoGebra para tentar obter um modelo matemático que fosse representativo de cada uma das situações. Alguns deles tiveram dificuldade em obter uma recta que passasse por todos os pontos (na recolha de dados nem todos foram meticolosos nas medições e nem sempre fizeram a leitura no cronómetro, em simultâneo, com o volume da água existente no copo graduado). Mas facilmente construíram várias rectas até encontrar aquela que melhor se ajustava aos dados que tinham introduzido inicialmente.

Alguns alunos ficaram surpreendidos com as potencialidades do GeoGebra, ao trabalharem sobre esta questão.

**Pedro:** Olha, também faz a equação!

**Estêvão:** Qual equação?

Descobrem, portanto, que na zona algébrica do GeoGebra está a equação de cada uma das rectas.

Por sugestão do professor, os alunos escolhem cores diferentes para cada recta e tentam perceber qual a influência do caudal na equação. Um dos grupos chama a investigadora pois tem dúvidas na influência do caudal.

**Professora:** Então o caudal foi igual nas três experiências?!

**Pedro:** Não, foi diferente. Como é que eu faço isto?

**Professora:** O que é que achas que mudou?

**Pedro:** O caudal.

**Professora:** E isso teve influência em quê? Olha lá para a recta.

**Pedro:** Ah! Já percebi (e fica a pensar).

**Pedro:** Esta está mais alta.

**Diogo:** Pois isto é para escrever como o caudal afecta a equação.

**Pedro:** Esta vai de quatro em quatro e esta de dois em dois.

**Diogo:** Não percebo.

**Estêvão:** É assim Setôra?

**Professora:** Vejam lá. Da primeira para a segunda experiência, o caudal aumentou ou diminuiu?

**Professora:** Então, quando o caudal aumenta o que é que acontece?

**Pedro:** A recta fica mais inclinada.

**Diogo:** Quando o caudal aumenta a recta fica mais na vertical.

Foi ao estabelecer a relação entre o caudal e a inclinação da recta que os alunos evidenciaram mais dificuldades. É de salientar que não tiveram dificuldades na construção do modelo mas em perceber qual a influência que o caudal provoca no declive da recta.

Na questão 4 perguntava-se qual a quantidade de água existente no copo graduado, ao fim de 15 segundos. Para responder a esta questão, o Pedro e o colega, por iniciativa própria, construíram a recta vertical, de equação  $x = 15$ , determinando depois as coordenadas dos pontos de intersecção com cada um dos modelos. Quando solicitaram a minha presença, pois pensavam tratar-se do volume de água apenas para uma das experiências, apercebo-me de que este par não está a seguir a mesma estratégia que os restantes pares. A maioria partiu da abcissa 15 e marcava um ponto em cima do gráfico com esta abcissa (usando a ferramenta “novo ponto”) e fazia uma leitura aproximada (15,04; 258,87) de qual seria o volume dado através da leitura das coordenadas do ponto na janela algébrica.

**Pedro:** Professora, aqui na 4, falamos de que experiência?

**Diogo** (a falar com o par): Eu queria era fazer assim, tipo uma recta.

**Professora:** O que é que estão a fazer, então?

**Diogo:** Estamos a fazer o ponto de intersecção com as outras rectas.

**Professora:** Ah, muito bem pensado.

**Pedro:** Professora, já descobrimos os pontos de intersecção.

E apontam para o ecrã do computador para me mostrar os pontos que tinham acabado de obter (figura 5).

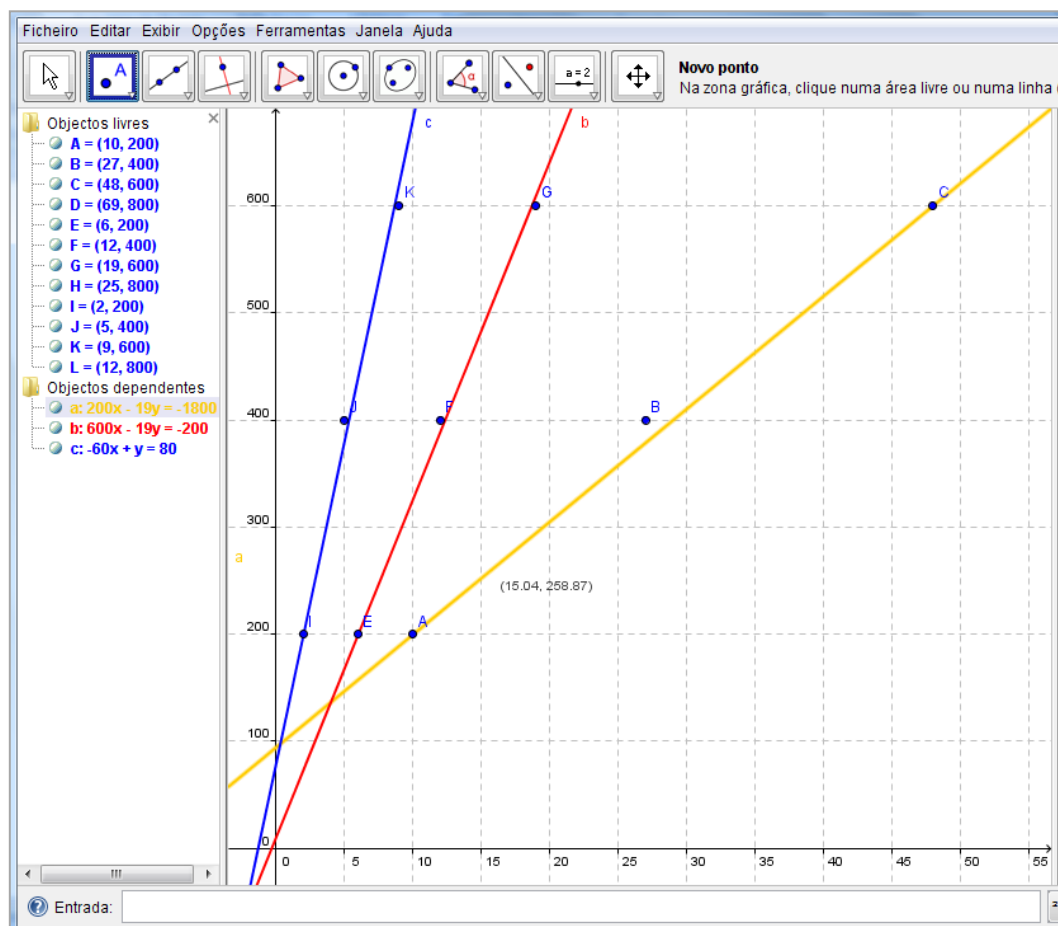


Figura 5. Representações criadas pelo par Pedro/Diogo no GeoGebra

Na última questão os alunos tinham de averiguar quanto tempo era necessário para obter 5 litros de água e qual o caudal mais conveniente (tendo como referência as três experiências realizadas). Seguindo o mesmo raciocínio que usaram para resolver a

questão precedente, os alunos construíram a recta  $y = 5000$  e calcularam o ponto de intersecção com os modelos representativos de cada uma das experiências.

**Pedro:** Setôra, aqui nesta pergunta (apontando para o enunciado). Neste caso qual seria o caudal?

**Diogo:** Encheu mais rapidamente.

**Pedro:** É isso?

**Professora:** Vejam lá. O que é que acham?

Os alunos ficam a pensar na resposta à questão e depois escreveram o seguinte (figura 6):

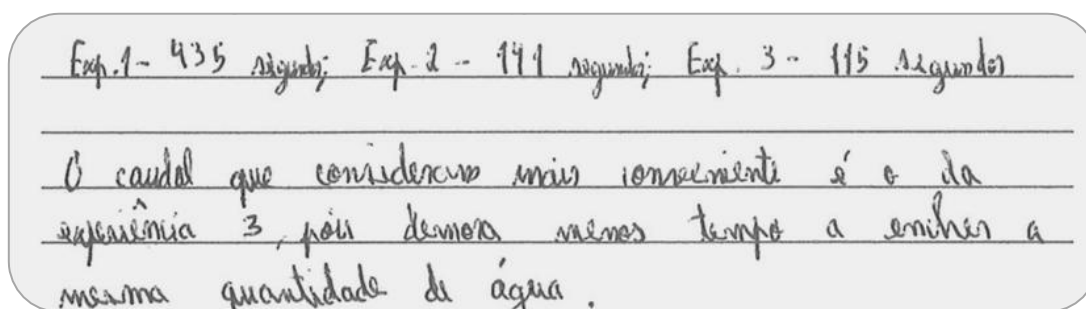


Figura 6. Resposta à questão 5 pelo par Pedro/Diogo

O professor aproveita o facto de este par ter seguido uma estratégia diferente e, na sua opinião, mais rigorosa para lhes pedir para partilharem com a turma a sua estratégia. E, em seguida, recorreu ao QIM (quadro interactivo multimédia) para fazer a síntese das principais ideias.

Nesta tarefa as principais dificuldades dos alunos foram:

1. Compreender o enunciado de algumas questões, nomeadamente em interpretar qual a influência do caudal,
2. Escolher a janela mais conveniente nesta situação,
3. Saber como obter o objecto sendo dada a imagem, no caso de  $y = 5000$ .

Em síntese, saliento a forma como os alunos utilizaram as funcionalidades do GeoGebra para modelarem esta situação, utilizando o conceito de função, considerando

a relação entre o tempo e o volume da água existente no copo num determinado instante. Foi igualmente importante os alunos terem descoberto na *zona algébrica*, que tinham acesso à equação da recta e que podiam recorrer a essa informação para responder a algumas das questões. Interpretaram correctamente o modelo matemático e relacionaram as diferentes inclinações das rectas com os diferentes caudais, verificando que quando a torneira estava mais aberta (isto é, quando o caudal é maior) a inclinação da recta também é maior. A análise crítica do modelo matemático que obtiveram ficou patente quando alguns grupos se mostraram surpreendidos pelo facto da recta não passar pela origem (dado que no instante inicial não havia água no copo).

Merece igualmente destaque, o envolvimento dos alunos com mais dificuldades na disciplina de Matemática na realização desta experiência e na utilização do computador. Estes viram as suas dificuldades esbatidas pela utilização deste *software* e beneficiaram do trabalho realizado a pares.

No final da aula a discussão alargada a toda a turma foi orientada pelo professor e permitiu uma visão das diferentes estratégias utilizadas pelos alunos na realização da tarefa e, conseqüentemente, a obtenção de diferentes modelos pelos diferentes grupos.

#### **4.1.3. Episódio 3: Potência de um Motor**

Na tarefa seguinte (**Anexo 3**) foi apresentado aos alunos um problema que exigia a identificação das variáveis independente e dependente, a construção de um gráfico numa *janela* adequada e a construção de um modelo matemático representativo da situação. Por fim, os alunos tinham de responder à questão 2 usando esse modelo.

A potência de um motor pode ser entendida como a energia gerada por este, durante um determinado intervalo de tempo. São utilizadas várias unidades para medir a potência, como por exemplo, entre outras, quilowatts e cavalos. Nos anúncios sobre automóveis a sua potência costuma ser indicada em cavalos (CV).

Na tabela seguinte estabelece-se uma relação aproximada entre a potência expressa em quilowatts (kW) e a potência expressa em cavalos (CV).

Potência (em kW)	Potência (em CV)
50	68
100	136
150	204
200	272

1. Com o auxílio do GeoGebra construam um gráfico com os valores da tabela e encontrem uma expressão algébrica que possa representar esta situação. Escrevam a expressão e descrevam como a obtiveram.
2. O McLaren  $F_1$ , com 627 cavalos, é considerado, por muitos especialistas, como sendo o carro de estrada mais rápido do mundo. Qual é a potência do seu motor expressa em quilowatts? Expliquem como procederam.

Logo na primeira questão, os alunos revelaram algumas dificuldades, como se pode constatar pelas questões colocadas:

**Pedro:** O x é este aqui, setôra? (apontou para a primeira coluna da tabela apresentada no enunciado e que ele tinha inserido na *folha de cálculo* do GeoGebra).

**Professora:** Sim.

**Pedro:** Ah, enganei-me eu pensava que este aqui era o x (aponta para o computador indicando a segunda coluna da tabela) e este era o y.

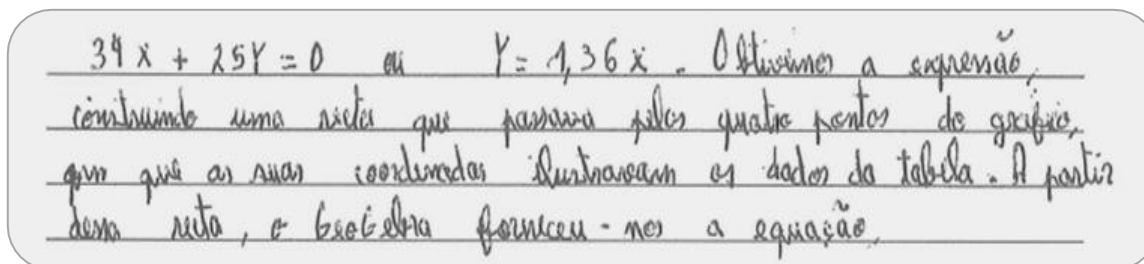
**Pedro:** E como é que a gente explica?

**Professor:** Diz?

**Pedro:** Só fizemos a linha e apareceu escrito.

**Professor:** Tens de dizer como é que fizeste, como é que construístes a recta. Construístes uma recta desta forma e a partir daí...

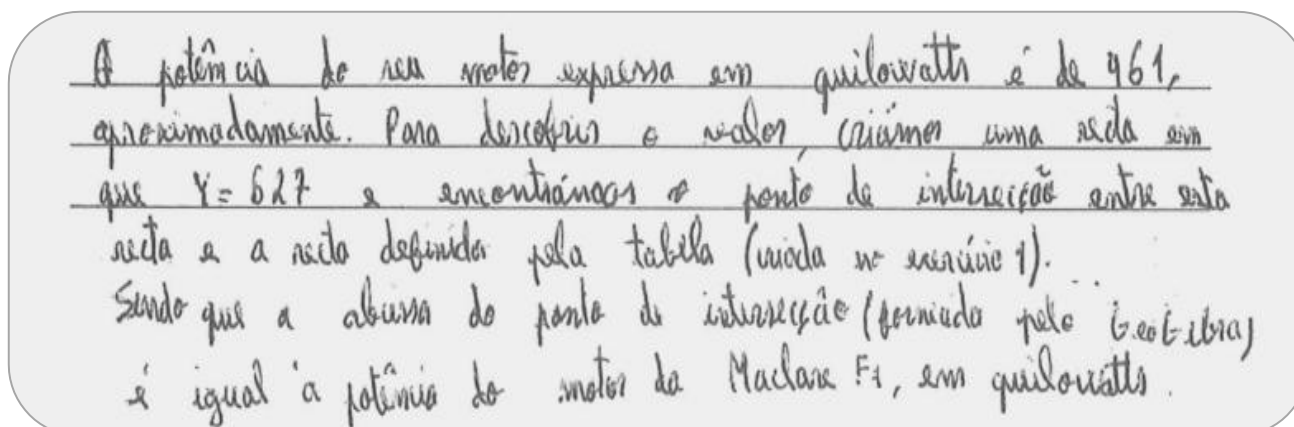
Este par, após um momento de discussão, chega à seguinte conclusão:



$34x + 25Y = 0$  ou  $Y = -1,36x$ . Obtivemos a expressão, construindo uma recta que passava pelos quatro pontos do gráfico, que que as suas coordenadas ilustravam os dados da tabela. A partir desta recta, o GeoGebra forneceu-nos a equação.

Figura 7. Resposta à questão 1 pelo par Pedro/Diogo

Após a obtenção do modelo, na questão anterior, os alunos responderam de imediato à questão dois. Um dos alunos lembra o seu colega: “ainda falta explicar como procedemos”:



A potência do seu motor expressa em quilowatts é de 961, aproximadamente. Para descobrir o valor criámos uma recta em que  $Y = 627$  e encontramos o ponto de intersecção entre esta recta e a recta definida pela tabela (usada no exercício 1). Sendo que a abscissa do ponto de intersecção (fornecido pelo GeoGebra) é igual à potência do motor da Maclara F1, em quilowatts.

Figura 8. Resposta à questão 2 pelo par Pedro/Diogo

As principais dificuldades identificadas foram as seguintes:

1. Identificar a variável independente e a variável dependente;
2. Escrever e justificar as suas respostas.

#### 4.1.4. Episódio 4: Escolha de Tarifários

O André comprou um telemóvel novo da rede Falabarato, mas ficou indeciso na escolha do tarifário: “Tarifário A” ou “Tarifário B”?

Tarifário A	
Destino	Custo por minuto
Rede Falabarato	€ 0,152
Outras redes nacionais	€ 0,599
Tarifário B	
Destino	Custo por minuto
Todas as redes	€ 0,254

1. Qual é o tarifário mais económico, em média, se o André falar o mesmo tempo para a rede Falabarato que para outras redes nacionais? Justifiquem a vossa resposta.
2. Se o André telefonar durante 20 minutos por mês (para ambas as redes, Falabarato e outras redes nacionais), qual é o número mínimo de minutos que terá de falar para a rede Falabarato para que o “Tarifário A” seja mais económico do que o “Tarifário B”? Justifiquem a vossa resposta.

A terceira tarefa (**Anexo 4**) insere-se na óptica do que foi exposto no sobre a Matemática como formação para a cidadania, na medida em que esta ciência é hoje parte integrante do nosso quotidiano. Por outro lado, esta tarefa de natureza investigativa dá, não só continuidade ao trabalho desenvolvido pelos alunos na resolução das tarefas precedentes, como também ao trabalho desenvolvido por estes alunos no ano lectivo anterior, com as tarefas 2 e 3, respectivamente “Tarifários” e “Comparando tarifários”, apresentadas na brochura da DGIDC, *Sequências e Funções*, com materiais de apoio ao professor (Ponte et al., 2009b, p. 57-74).

No caso desta tarefa, apresenta-se precisamente uma hipotética situação da nossa vida diária e pretende-se que os alunos explorem a situação, analisando qual seria a escolha mais vantajosa do tarifário. Os alunos têm de interpretar a informação que lhes é fornecida através de uma tabela e ter em atenção o facto do Tarifário A contemplar duas condições diferentes, conforme se liga para a *Rede Falabarato* ou para *Outras redes nacionais*. Quanto ao Tarifário B pode ser vantajoso, para os alunos, elaborarem uma tabela antes de procederem à elaboração do gráfico.

Para resolver a pergunta 1 desta tarefa, a maioria dos grupos usou a calculadora científica para realizar os cálculos que acharam necessários. E, de forma geral, apresentaram respostas semelhantes à que se segue:

O André comprou um telemóvel novo da rede Falabarato, mas ficou indeciso na escolha do tarifário: "Tarifário A" ou "Tarifário B"?

t	A	B
4	1,508	1,016
6	2,253	1,524
10	3,8	2,54
12	4,506	3,048
14	5,257	3,556
16	6,008	4,064
20		

Tarifário A	
Destino	Custo por minuto
Rede Falabarato	€ 0,152
Outras redes nacionais	€ 0,599

Tarifário B	
Destino	Custo por minuto
Todas as redes	€ 0,254

Handwritten calculations around the tables:

- For Tarifário A:  $0,152 \times 6 = 0,912$ ;  $0,599 \times 6 = 3,594$
- For Tarifário B:  $0,152 \times 2 = 0,304$ ;  $0,599 \times 2 = 1,198$
- For Tarifário A:  $0,152 \times 3 = 0,456$ ;  $0,599 \times 3 = 1,797$
- For Tarifário A:  $0,152 \times 5 = 0,76$ ;  $0,599 \times 5 = 2,995$
- For Tarifário B:  $3,755$
- For Tarifário B:  $0,254 \times 10 = 2,54$
- For Tarifário A:  $0,152 \times 8 = 1,216$ ;  $0,599 \times 8 = 4,792$
- For Tarifário B:  $0,152 \times 7 = 1,064$ ;  $0,599 \times 7 = 4,193$
- For Tarifário B:  $0,254 \times 4 = 1,016$

1. Qual é o tarifário mais económico, em média, se o André falar o mesmo tempo para a rede Falabarato que para outras redes nacionais? Justifiquem a vossa resposta.

O tarifário mais barato é o Tarifário B, porque o tarifário B cresce 25 céntimos por minuto, e o tarifário A cresce 38 céntimos por minuto.

$y = 0,25x$   
 $y = 0,38x$

Figura 9. Resposta à questão 1 por outro par de alunos

No caso deste par, optaram por apresentar a equação da recta, verificaram que as condições de ambos os tarifários A e B representam situações de proporcionalidade directa e interpretaram a constante de proporcionalidade no contexto do problema.

Quanto aos grupos que trabalharam no GeoGebra obtiveram o ficheiro seguinte:

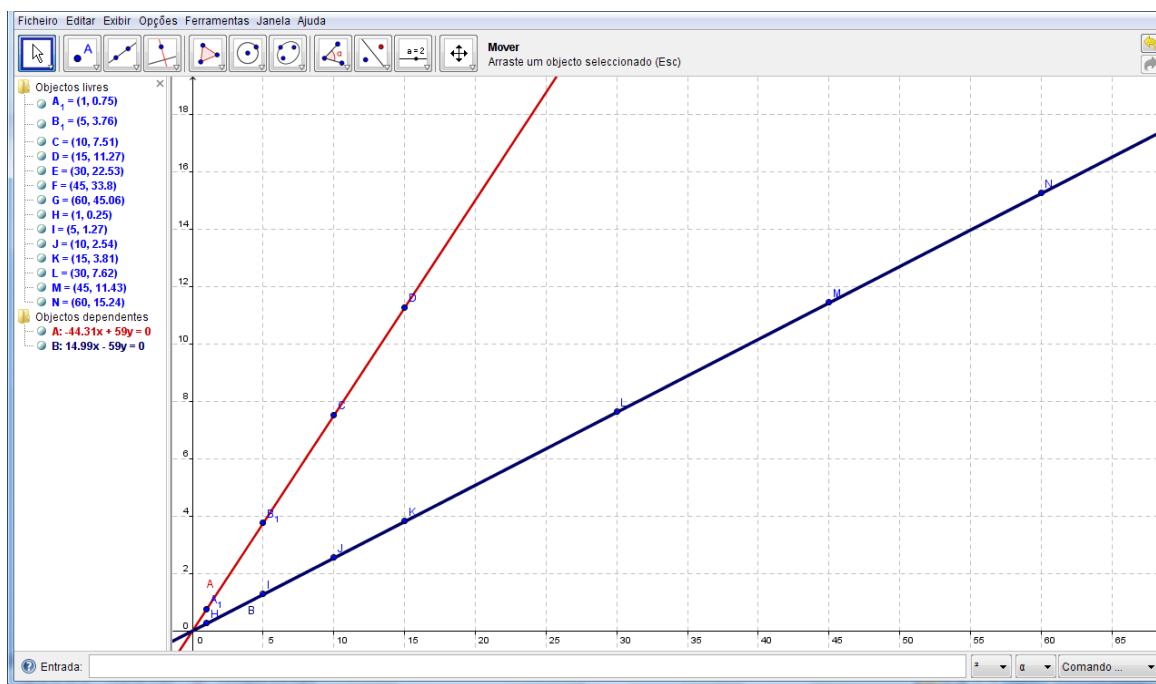


Figura 10. Representações criadas pelo par Pedro/Diogo

E apresentam a resposta seguinte, fundamentada pelo ficheiro precedente:

Se o André falar o mesmo tempo para a rede Fababarato que para outras redes nacionais em média, o tarifário mais económico é o tarifário B, pois podemos observar que das retas obtidas através dos dados inseridos na folha de cálculo do GeoGebra, a recta mais inclinada, é a recta correspondente ao tarifário B.

Figura 11. Resposta à questão 1 pelo par Pedro/Diogo

Neste caso os alunos recorrem à inclinação (declive) da recta para justificar a sua escolha pelo tarifário B.

Na pergunta 2, alguns grupos usaram a folha de cálculo do GeoGebra, como o exemplo seguinte:

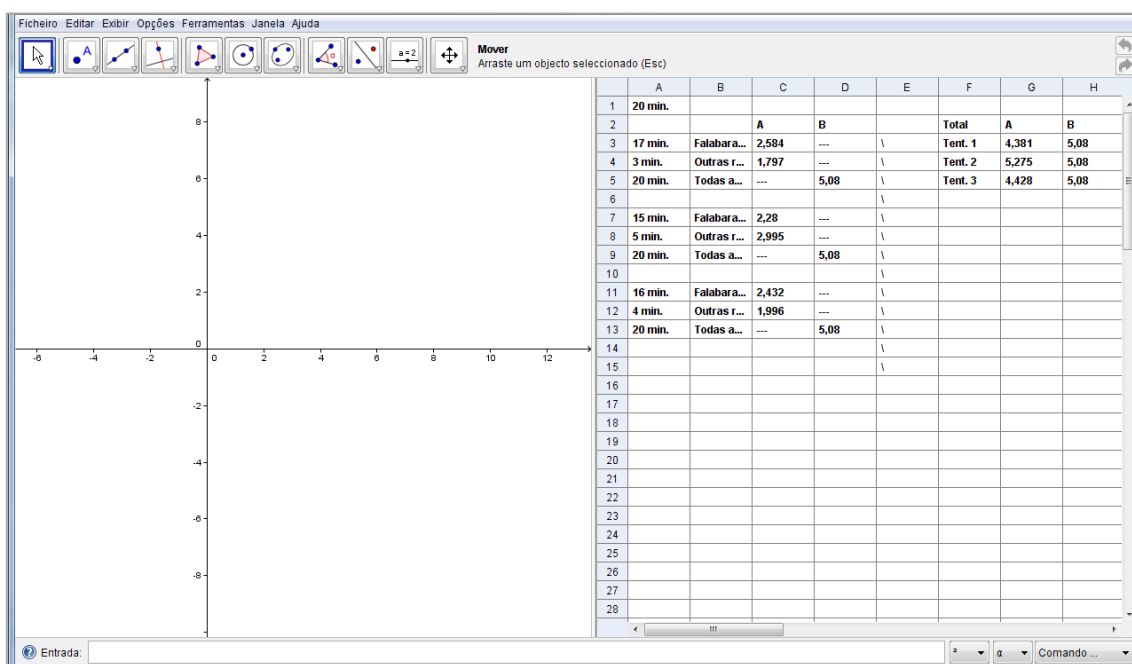


Figura 12. Representações criadas por outro par de alunos no GeoGebra

Para encontrar uma resposta para esta última questão os pares de alunos discutiram bastante até chegarem a um consenso. De um modo geral foram fazendo simulações até encontrarem as possíveis soluções, testaram os valores obtidos até chegarem à conclusão final. Os grupos que usaram a folha de cálculo conseguiram organizar-se melhor e chegaram à solução mais rapidamente.

Apresento a seguir a resposta, de dois grupos que desenvolveram o seu trabalho na *folha de cálculo* do GeoGebra:

O número mínimo de minutos que ~~tem~~ o André terá de falar para a rede Falabarato para que o tarifário A seja mais económico do que o B é 16 minutos. Chegamos a este resultado a partir de tentativas na folha de cálculo do Excel. Verificamos que durante 20 minutos o tarifário B custa 5,08 € e que falando 17 min. para Falabarato e 3 min. para outras redes (9.ª tentativa) o tarifário A custaria 4,387 €. Na 2.ª tentativa tentamos falando 15 min. para Falabarato e 5 min. para outras redes e o A custaria 5,275 €. Na 3.ª tentativa tentamos falando 16 min. para Falabarato e 4 min. para outras redes e assim o A custaria 4,428 €. Verificamos que nesta última tentativa, chegámos ao preço do A mais próximo do preço do B, sem exceder, logo foi na 3.ª tentativa que chegámos à conclusão não referida no início desta resposta.

Figura 13. Resposta à questão 2 pelo par Pedro/Diogo

Tem de falar no mínimo 16 minutos na rede Falabarato para que o tarifário A seja mais económico do que o B. Na folha de cálculo do geogebra efectuei por tentativas a partir de 13 minutos a falar "Falabarato" até 20 minutos e concluí que a partir dos 16 minutos paga-se 4,828 € e a partir daí o preço vai diminuindo à medida que se fala mais no "Falabarato". O tarifário B paga-se 5,08 € se falar 20 minutos. Mas se falar apenas 15 minutos pago mais no tarifário A (5,275 €).

Figura 14. Resposta à questão 2 por outro par de alunos

Ambos os pares fazem explorações, usando o GeoGebra para averiguar quanto pagariam se escolhessem o tarifário A. O segundo par começa a pensar a partir de 13 minutos de conversação na rede Falabarato, 7 minutos para outras redes e vão aumentando o tempo (minuto a minuto) para a rede Falabarato até atingirem os 20

minutos definidos no enunciado e, por consequência, diminuindo o tempo de conversação para as outras redes. Concluem que o preço a pagar no Tarifário A diminui à medida que aumenta o tempo de conversação na rede Falabarato. Tomaram como referência o preço a pagar, por 20 minutos de conversação, no Tarifário B e chegaram à conclusão que o Tarifário A só seria mais económico se as chamadas telefónicas efectuadas para a rede Falabarato perfizessem, pelo menos, 16 minutos. Na resolução desta tarefa as principais dificuldades dos alunos foram:

1. Interpretar o enunciado;
2. Escolher qual a estratégia a adoptar para comparar os tarifários;
3. Escrever e justificar as suas respostas.

Nesta tarefa existiu alguma competitividade entre vários dos pares. Um dos pares considerou que estava um pouco atrasado, pois constataram que outros alunos já tinham terminado a tarefa. Então um dos alunos desse par chamou a investigadora para apresentar uma justificação do seu suposto atraso no trabalho (o aluno apercebeu-se que alguns grupos já estavam a pedir ao professor o enunciado da tarefa seguinte e ficou preocupado).

E passados alguns instantes esse aluno grita: “Tarefa 3, pergunta 2. Já está!”. Logo que terminavam uma tarefa, os alunos pediam o enunciado da tarefa seguinte, sem esperar que o professor fizesse a síntese. Entraram assim numa competição para ver quem terminava primeiro. Este tipo de tarefas revelou-se um desafio para os alunos, entusiasmando-os a trabalharem autonomamente, cada vez mais e com maior espírito crítico.

Em determinado momento um aluno diz para os colegas de outro grupo:

**Estêvão:** Vocês ainda nem chegaram lá.

Este aluno gosta de pôr em evidência as suas capacidades e tenta sempre mostrar que é o melhor. Quando reparou que já tinha feito a tarefa não hesitou em dizer que os outros ainda não tinham efectuado o trabalho e destacar esse facto.

Ao que eu intervim dizendo para não estarem a competir com os outros grupos, que nem todas as pessoas andam à mesma velocidade, por isso nem todos têm de resolver as tarefas no mesmo tempo.

#### 4.1.5. Episódio 5: Cestos de Compras

1. Elaborem um gráfico com os dados recolhidos e registados na tabela.

N.º de Cestos								
Altura (cm)								

2. Descrevam que variáveis estão a ser investigadas e qual a relação entre elas.
3. Procurem um modelo matemático que seja representativo do problema apresentado e que nos dê a altura de uma pilha de cestos de compras em função do número de cestos existentes na pilha.
4. Que altura terá uma pilha de 50 cestos? Expliquem como procederam.

A tarefa 4 (**Anexo 5**) é mais um exemplo da presença da RME na experiência de ensino. Parte de um contexto que envolve uma situação do dia-a-dia dos alunos, a ida ao supermercado, para promover o desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos.

Numa ida ao centro comercial ou ao supermercado com os pais para fazer compras, os alunos procederam à recolha de dados, medindo para o efeito uma pilha de cestos de compras. Começando por medir a altura de um cesto, depois de dois cestos e, assim sucessivamente. À medida que o número de cestos aumentava, os alunos iam registando a altura da pilha numa tabela (que lhes tinha sido dada pelo professor anteriormente) obtendo os dados necessários para a realização desta tarefa.

Como os alunos já tinham organizado a informação numa tabela, procederam à elaboração do gráfico, que lhes era solicitado na primeira questão, de forma natural e sem mostrarem dificuldades. Observemos que os alunos já estavam familiarizados com exercícios fazendo intervir tabelas, em particular porque tinham feito de forma similar a recolha de dados para a tarefa 1 – O volume da água. Os alunos mostravam já um grande à vontade e domínio na manipulação do GeoGebra, usando-o sem hesitação para resolver as questões. De um modo geral, os alunos começavam por utilizar a folha de cálculo e introduzir os dados dispostos na tabela, em seguida marcavam os pontos na zona gráfica obtendo assim a recta. De imediato, tinham acesso à expressão algébrica  $y = 8x + 30$ :

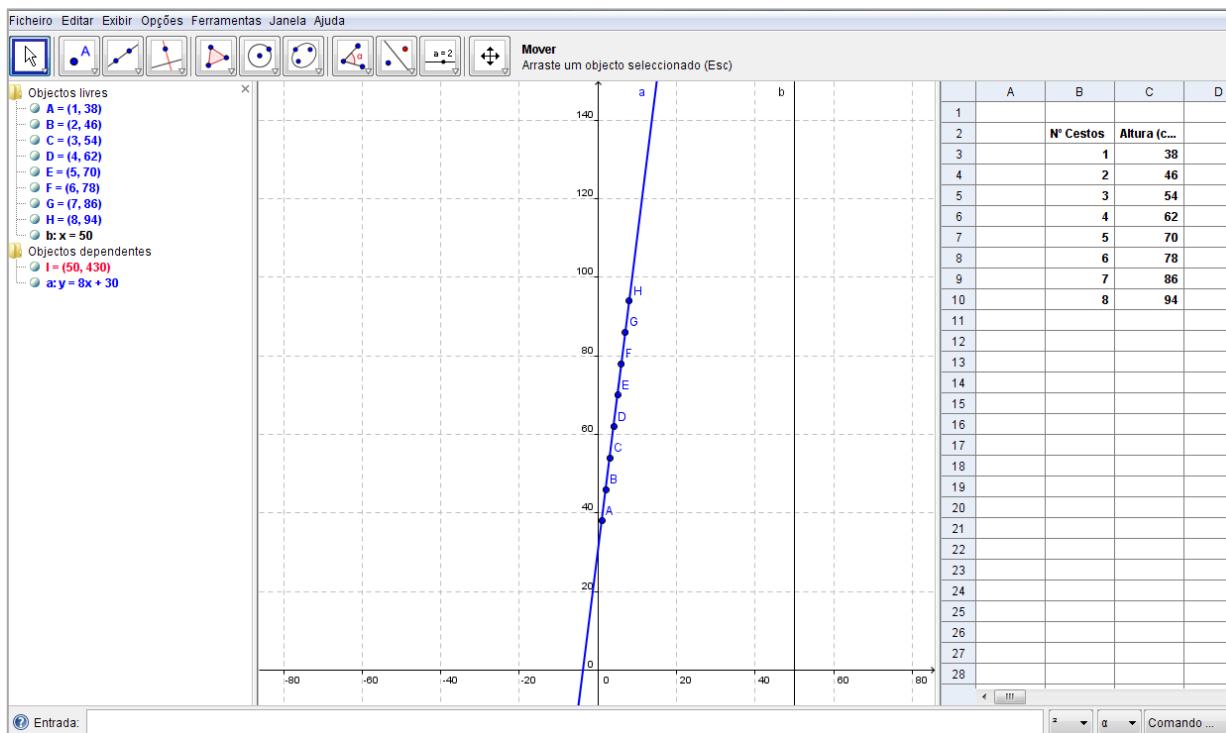


Figura 15. Representações criadas por outro par de alunos

Na segunda questão os alunos trabalharam de forma autónoma, respondendo sem qualquer dificuldade ao que era pedido, como se pode ver no exemplo seguinte:

As variáveis que estão a ser investigadas são o nº de cestos e a altura, em cm. Quanto maior o nº de cestos, maior a altura.

Figura 16. Resposta à questão 2 por outro par de alunos

Alguns alunos manifestaram dúvidas em interpretar o enunciado da questão 3, nomeadamente, sobre o que se entende por modelo matemático. Um dos alunos perguntou à investigadora:

**Pedro:** O que é que a professora quer aqui? O modelo é a expressão?

**Professora:** O modelo pode ser apresentado de muitas maneiras, pela expressão ou pelo gráfico, neste caso...

**Pedro:** E o que é que nós passamos para aqui? A expressão?

Na construção do modelo surgiram algumas dúvidas na identificação da variável independente e da variável dependente no contexto do problema. Por exemplo, quando perguntam:

**Pedro:** Setôra, tenho uma dúvida.

**Professora:** Sim?

**Pedro:** O número de cestos é o  $x$  ou é o  $y$ ?

**Professora:** O que é que achas?

**Pedro:** É o  $x$ ? O que é que vem primeiro aqui (referindo-se à entrada do GeoGebra) é o  $x$ ?

Para responder à última questão desta tarefa foram usados dois processos. Uns pares socorreram-se da expressão analítica que tinham obtido anteriormente e substituíram a variável  $x$  por 50 chegando à solução. Outros pares optaram por trabalhar no GeoGebra e introduzir a recta de equação  $x = 50$  e, em seguida, com a opção *intersectar duas linhas* obtiveram o ponto  $I(50, 430)$ , como se pode constatar na figura seguinte:

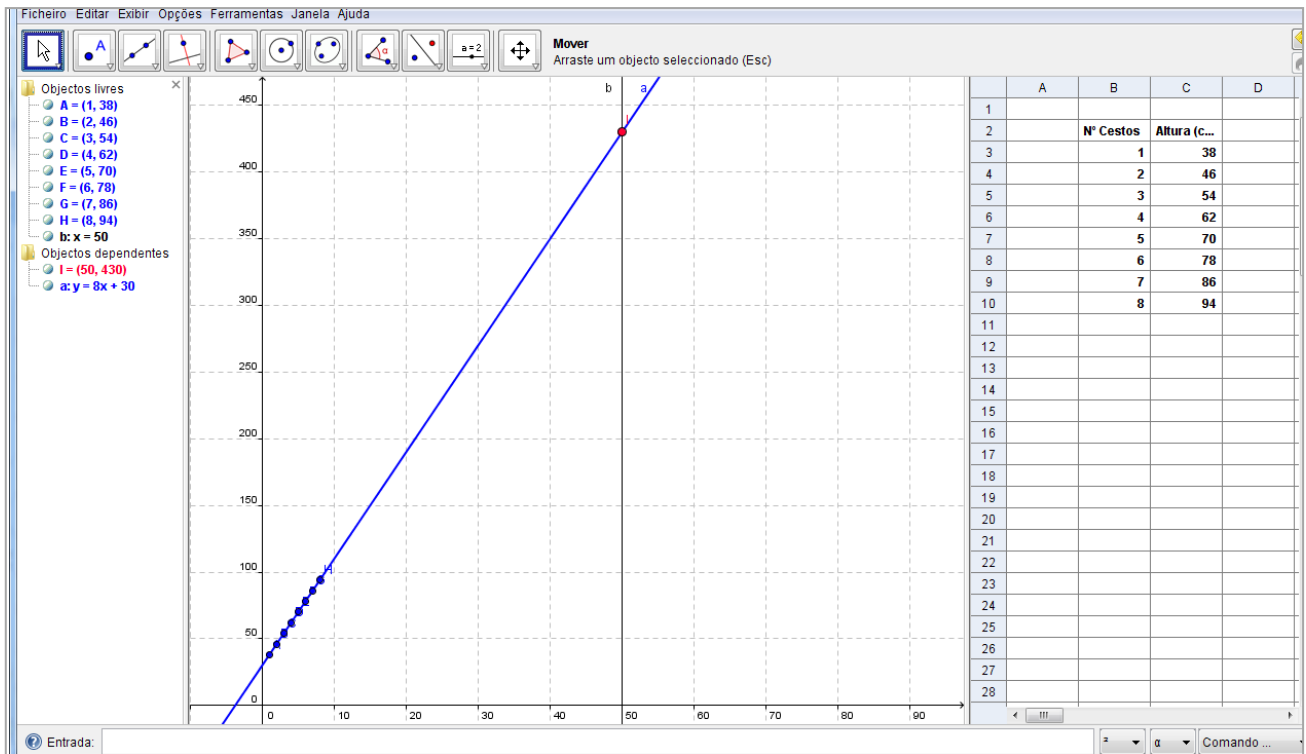


Figura 17. Representações criadas pelo par Pedro/Diogo

A explicação do Pedro, sobre os processos utilizados, foi apresentada à investigadora desta forma:

**Pedro:** Mas a gente também descobriu outra maneira de fazer a equação.

**Professora:** Então como é que fizeram?

**Pedro:** Fizemos (...) então, x era o número de cestos, e como o número de cestos era 50, fizemos 8 vezes 50 mais 30. E deu-nos 430.

**Professora:** Será a altura. E depois como é que viste da outra maneira?

**Pedro:** Da outra maneira (...). Foi assim: traçamos uma recta em que x era igual a 50 e intersectámos com a recta que já tínhamos e deu este ponto aqui que era 430.

Entretanto, foi aproveitada a oportunidade para colocar mais algumas perguntas:

**Professora:** Porque é que esta recta não passa na origem? Este modelo não passa na origem, porquê?

**Pedro:** É uma situação real.

**Professora:** Mas às vezes pode haver uma situação real em que o modelo passe na origem, ou não? O que é que representa isto aqui?

**Pedro:** É a altura dos cestos. Pois não há nenhum cesto com zero cm.

**Professora:** E este  $8x$ ? Este 8, que está atrás do  $x$  o que é que indica? O que é que quer dizer aquele 8?

Os alunos ficam a pensar e não respondem.

**Professora:** O que é que acham? Pensem lá.

**Pedro:** Vai de 8 em 8.

Os alunos fazem a interpretação do significado da ordenada na origem, distinguindo esta situação de outras em que o modelo era uma recta que *passava* na origem. Quando questionados sobre qual o significado do declive os alunos associam esse valor ao acréscimo e a uma taxa de variação constante (“vai de 8 em 8”).

Para analisar como foi construído o modelo matemático recorri ao Protocolo de Construção do GeoGebra (figura 18), onde é possível verificar que, após a introdução dos dados os alunos em nove *passos* (do passo 19 ao 27) marcaram os pontos e obtiveram a recta AH. Para responder à questão quatro apenas usaram dois *passos* (passo 28 e 29), dado que aproveitaram o modelo obtido anteriormente.

Nº	Nome	Definição	Valor
1	Texto B2		B2 = "Nº Cestos"
2	Texto C2		C2 = "Altura (cm)"
3	Número B3		B3 = 1
4	Número C3		C3 = 38
5	Número B4		B4 = 2
6	Número B5		B5 = 3
7	Número B6		B6 = 4
8	Número B7		B7 = 5
9	Número B8		B8 = 6
10	Número B9		B9 = 7
11	Número B10		B10 = 8
12	Número C4		C4 = 46
13	Número C5		C5 = 54
14	Número C6		C6 = 62
15	Número C7		C7 = 70
16	Número C8		C8 = 78
17	Número C9		C9 = 86
18	Número C10		C10 = 94
19	Ponto A		A = (1, 38)
20	Ponto B		B = (2, 46)
21	Ponto C		C = (3, 54)
22	Ponto D		D = (4, 62)
23	Ponto E		E = (5, 70)
24	Ponto F		F = (6, 78)
25	Ponto G		G = (7, 86)
26	Ponto H		H = (8, 94)
27	Recta a	Recta AH	a: $y = 8x + 30$
28	Recta b		b: $x = 50$
29	Ponto I	Ponto de intersecção de a e b	I = (50, 430)

Figura 18. Protocolo de Construção do GeoGebra resultante do trabalho efectuado pelo par Pedro/Diogo

Na resolução desta tarefa os alunos mostraram algumas dificuldades em identificar a variável independente e a variável dependente solicitando ajuda dos professores para verem esclarecidas as suas dúvidas. Os alunos modelaram a situação, utilizando o GeoGebra, usaram o conceito de função e estabeleceram a relação entre o número e a altura da pilha de cestos. Para descobrirem a altura de uma pilha com 50 cestos, alguns usaram a expressão algébrica e substituíram a variável  $x$  por 50, outros optaram por usar um processo geométrico, traçar a recta  $x = 50$  e proceder à sua intersecção com o modelo matemático obtido anteriormente.

Como referi anteriormente, após a resolução de uma tarefa o professor escolhe alguns dos trabalhos realizados para serem apresentados e orienta uma discussão alargada a toda a turma conforme as orientações didácticas presentes no PMEB e noutros documentos oficiais. Ponte (2005) afirma que “os momentos de reflexão,

discussão e análise crítica posteriores à realização de uma actividade prática assumem um papel fundamental” pois, como especifica, “a aprendizagem decorre assim, sobretudo, não de ouvir directamente o professor ou de fazer esta ou aquela actividade prática, mas sim da reflexão realizada pelo aluno a propósito da actividade que realizou” (p.15).

Nesta tarefa as principais dificuldades dos alunos incidiram na:

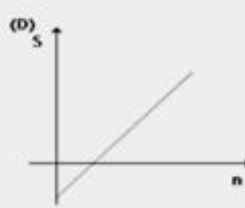
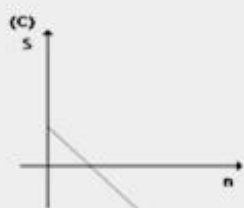
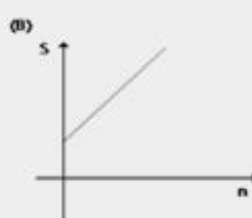
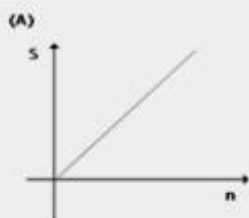
1. Interpretação do enunciado;
2. Escrita e justificação das respostas.

#### 4.1.6. Episódio 6: Festa de Final de Ano

A Associação de Estudantes da Escola Descobrir está a organizar a festa de final de ano, a realizar no ginásio. Vai ser uma festa em grande, já que o ginásio da escola tem capacidade para 400 alunos.

A Associação de Estudantes gastou €500 na decoração e nos equipamentos de som e iluminação e decidiu cobrar €2 por cada bilhete. O João e a Teresa estão encarregados de fazer a análise financeira da festa. Arranjaram uma expressão para calcular o lucro ou prejuízo obtido com a festa ( $S$ ) em função do número de bilhetes vendidos ( $n$ ):  $S = 2n - 500$

1. Qual é o lucro máximo que a Associação pode esperar? Justifiquem a vossa resposta.
2. Expliquem o significado da expressão  $2n$ , no contexto da situação.
3. Determinem quanto irão ganhar se forem vendidos 120 bilhetes. Interpretem o resultado.
4. Qual o número mínimo de bilhetes é necessário vender para que não haja prejuízo? Justifiquem a vossa resposta.
5. Qual dos gráficos poderá representar a relação entre o saldo, ( $S$ ), e o número de bilhetes vendidos, ( $n$ )? Justifiquem a vossa escolha.



Esta tarefa (**Anexo 6**) distingue-se das anteriores porque é formulada inicialmente de maneira abstracta e é apresentado um modelo através do qual, os alunos da associação de estudantes, vão calcular o lucro ou o prejuízo obtido com a festa. Neste caso, os alunos não vão construir um modelo matemático que retrate a situação exposta mas trabalhar com um modelo que lhes é dado. Assim, os alunos dispunham da expressão algébrica e, mais uma vez, podiam optar por escolher qual o processo que pretendiam usar para responder às questões colocadas.

Os alunos começam por ler e interpretar o problema e identificar a variável independente e a variável dependente.

Um dos alunos do par Estêvão/José explica ao parceiro: “ O S (saldo) ou é o lucro ou o prejuízo” e vão discutindo qual o significado das variáveis no contexto do problema.

Entretanto, apesar de saberem resolver as questões, os alunos têm algumas dúvidas em relação à apresentação da resposta e à forma como devem justificar os resultados que obtiveram.

**Pedro:** Nesta (reportando-se à primeira questão) é só fazer aqui ou temos de passar (referindo-se à folha de resposta)?

**Professora:** Façam como quiserem. Se quiserem fazer no GeoGebra façam, se quiserem também podem fazer no papel.

**Pedro:** E como é que nós justificamos? Pela conta?

**Professora:** Sim, mas também podes dizer mais alguma coisa. Ora vê lá o que é que diz a pergunta?

**Pedro:** ...

**Professora:** e porque é que puseste 400?

**Pedro:** Porque é o número máximo de lugares.

Neste momento os alunos continuam a trabalhar autonomamente e vão trocando impressões entre os diferentes pares de trabalho.

**Pedro:** É uma recta.

**José:** É um ponto.

**Pedro:** Não. É uma reta, não é um ponto.

**José:** Então o S é igual a 400 vezes dois menos 500.

**Pedro:** O significado da expressão é  $2n$  é o preço de cada bilhete vezes o número de bilhetes.

**José:** Ya, fizemos  $y = 2x - 500$  e depois fizemos  $x = 400$ , dá duas retas e depois fazes o ponto ... (explicando a um colega de outro grupo como tinham feito para determinar o ponto de intersecção).

Este grupo de trabalho obteve no GeoGebra o ficheiro seguinte:

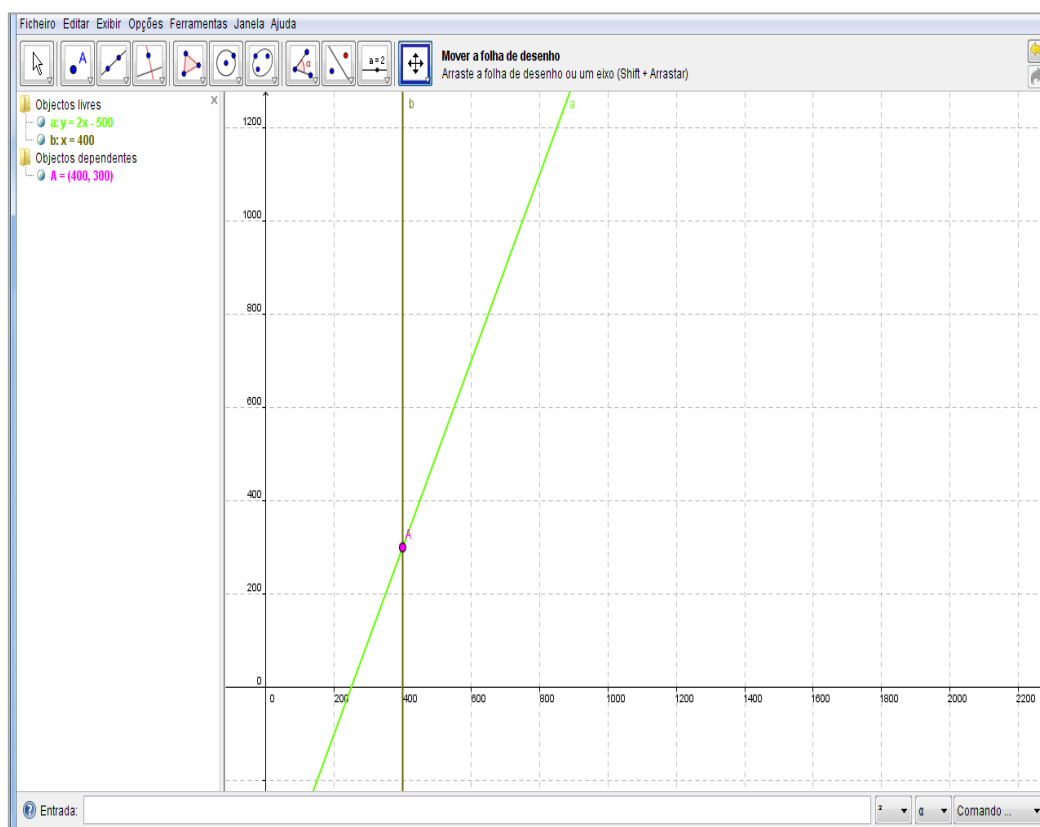


Figura 19. Representações criadas pelo par Pedro/Diogo

Para expor o raciocínio usado pelos alunos para responder à terceira questão apresento alguns diálogos entre um par e as intervenções esporádicas da professora:

**Diogo:** (Começa a ler a pergunta...) Determine quanto iriam ganhar se foram vendidos 120 bilhetes

**Pedro:** Isto aqui é fácil.

**Diogo:** A recta  $a$  é o quê?

**Pedro:** A reta  $a$  é esta expressão.

**Diogo:** E a reta  $b$ ?

**Pedro:** A  $b$  é a reta (...) dizem que o máximo de alunos é 400, o  $N$  neste caso intersecta com esta reta e deu-me o resultado do lucro máximo.

**Diogo:** O número máximo do quê? Dos alunos?

**Pedro:** Ya, 400.

**Diogo:** Determine quanto iriam ganhar se forem vendidos 120 bilhetes, interpretem o resultado. Dois euros por bilhete...

**Pedro:** Eu vou pôr 120 vezes dois.

**Diogo:** Não, espera aí, assim não vão ganhar nada. Se o prejuízo foi de 500. Só venderam 120 bilhetes.

**Pedro:** Não. Eles só estão a perguntar quanto é que vão ganhar.

**Diogo:** Aqui, se forem vendidos 120 bilhetes, se cada bilhete é dois euros será 240 euros mas como o prejuízo foi de 500 euros, ganham menos 260 euros.

**Professora:** Ficam então com ...

**Diogo:** Ficam com um prejuízo de 260 euros.

**Pedro:** Mas temos de pôr quanto irão ganhar...

**Professora:** E fizeste essas contas de cabeça?

**Pedro:** Sim. Eu percebi. Então não irão ganhar nada?

**Diogo:** Pedro acorda, em frente.

**Pedro:** Então, 120 vezes 2 menos 500.

**Diogo:** Então, fazemos a fórmula disto aqui.

**Pedro:** Então metes  $S$  é igual a 2 vezes 120 menos 500.

**Diogo:** 240 menos 500 é igual a -260.

Na pergunta seguinte os alunos concluem que:

$S = 250 \times 2 - 500 \Leftrightarrow S = 0$   
Precisa de vender 250 bilhetes, no mínimo, para  
que não haja prejuízo.  
Também se pode fazer no geogebra.

Figura 20. Resposta à questão 4 por outro par de alunos

**Diogo:** Então têm de vender 250 bilhetes, pelo menos. 250 vezes dois é 500, e 500 menos 500 é zero. Oh Setôra!

**Pedro:** Temos de representar ali, não pode ser só contas de cabeça. Acho eu ...

**Diogo:** O quê? Explica-te (dirigindo-se ao Pedro).

**Diogo:** Setôra, zero já não é prejuízo, é neutro. Não ganham nada nem perdem nada. É pelo menos 250.

**Pedro:** É preciso também pôr no GeoGebra?

**Professora:** Se vocês viram logo... Façam como acharem mais fácil. Pois o Diogo está a fazer tudo de cabeça, não é?

**Diogo:** É. Por acaso agora tenho feito de cabeça. Nas outras tarefas era mais fácil com o GeoGebra.

**Diogo:** Setôra!

**Diogo:** O gráfico que poderá representar a relação entre **S** e **n** é gráfico **D** pois inserimos essa relação (no GeoGebra).

**Pedro:** A equação.

**Diogo:** Não inseriste a equação.

**Pedro:** Já, já! É, é. O **y** é o **S** e o **x** é o **n**.

**Diogo:** Mas tu escreveste isso ali? (apontando para o computador)

**Pedro:** Sim, aqui em baixo e pareceu a reta.

**Diogo:** Ah, ok. Então inserimos a equação que representa essa relação no GeoGebra criando uma reta semelhante à reta em “picotado” do gráfico **D**.

**Professora:** Já fizeram a tarefa 5 toda?

**Diogo:** Toda. Aqui é o **D** porque nós pusemos a equação no GeoGebra e o gráfico é o único que é semelhante.

As principais dificuldades dos alunos foram:

1. Interpretar o enunciado;
2. Interpretar os resultados obtidos no contexto do problema;
3. Escrever e justificar as suas respostas.

#### 4.1.7. Episódio 7: Quanto custa ter carro próprio?

O número de euros que custa possuir um carro é uma função do número de quilómetros percorridos por mês. Com base numa informação publicada no “Time Magazine”, o custo varia linearmente com a distância, e é de 336 euros por mês para uma distância percorrida de 300 km nesse intervalo de tempo e de 510 euros por mês para uma distância percorrida de 1500 km mensais.

1. Qual a equação que exprime o custo **c** em função da distância **d**?
2. Façam uma previsão do custo mensal se percorrer:
  - 2.1. 1000 km por mês
  - 2.2. 2000 km por mês
3. Que distância máxima poderá percorrer num mês, de modo a não exceder um custo mensal de 600 euros? Justifiquem a vossa resposta.
6. Encontrem o ponto de intersecção da recta que representa a função (equação encontrada em 1.) com o eixo **c**. Qual o significado deste ponto?
7. Calculem a intersecção da mesma recta com o eixo **d**. Esse ponto fará sentido no contexto do problema? Porquê?
8. Desenhem o gráfico da função. Usem um domínio que seja adequado à situação.
9. Qual o declive da recta? O que representa este número?

Após a leitura do enunciado (**Anexo 7**) os alunos, com base nos dados fornecidos, recorreram ao GeoGebra para encontrar um modelo que pudesse representar esta situação. Começam por utilizar a folha de cálculo para introduzir os dados fornecidos no enunciado, isto é, o montante pago por mês para a distância percorrida (os

alunos identificam o objecto como a distância e a imagem como o custo). Em seguida, utilizam a “entrada” para marcar os dois pontos resultantes da tabela e pedem a recta definida por dois pontos, na zona gráfica. O GeoGebra permitiu, de forma quase instantânea, que os alunos tivessem acesso ao gráfico da função (recta  $a$ ) e à sua expressão algébrica (figura 21), ficando “livres” da tarefa de deduzir a equação da recta.

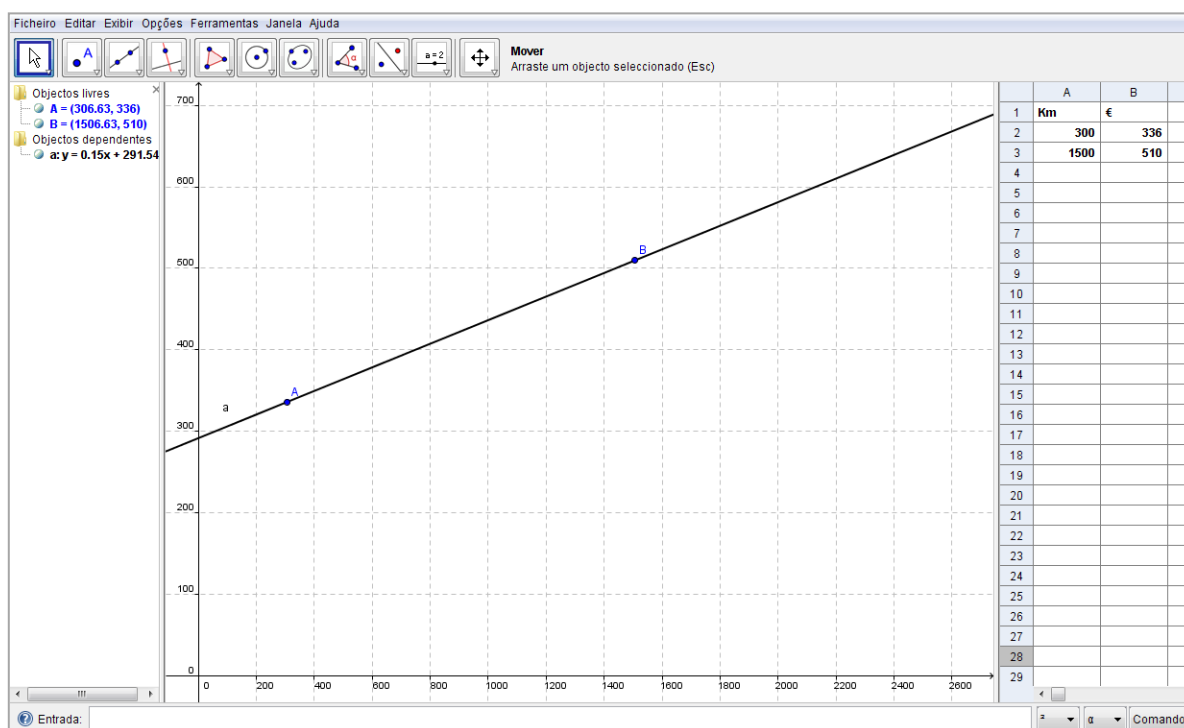


Figura 21. Representações criadas por outro grupo de alunos

Inicialmente, alguns pares revelaram dificuldade em identificar a variável independente e a variável dependente.

**Diogo:** (lendo o enunciado da tarefa 6) Então é trezentos e...

**Pedro:** A distância ...

**Diogo:** Então o custo será o x, não é? Setôra!

**Pedro:** Não, o x é horizontal.

**Diogo:** Então está 336, assim está bem.

**Pedro:** 510 e 1500.

**Professora:** Reparem bem, quando diz no enunciado “o custo em função da distância”. O que é que está em função de? Qual é o objecto

e qual é a imagem? O que é que eu tenho de pôr no eixo dos x, como objecto, e o que é a imagem disso?

**Pedro:** O custo fica nos x e a distância fica no y.

**Diogo:** Não. O custo fica no y.

**Pedro:** Ah, só tens de trocar isto, metes os quilómetros aqui e os euros ali.

**Pedro:** Fizemos a recta e da recta pedimos a equação que nos dá, temos assim a resposta à primeira.

**Diogo:** Ainda não sei se é isso. Então  $0,15x$  mais...

**Pedro:** Quilómetros, tempo.

**Professora:** Para uma certa distância que vão percorrer têm um certo valor a pagar.

**Diogo:** Mas nós temos bem, aqui são os euros e aqui os quilómetros.

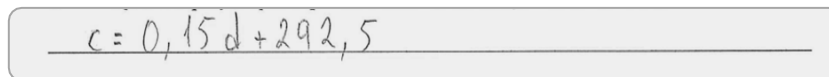
A screenshot of a handwritten equation  $c = 0,15d + 292,5$  written in black ink on a light gray background. The equation is underlined.

Figura 22. Resposta à questão 1 pelo par Pedro/Diogo

Para obterem uma previsão do custo mensal, no caso de o carro percorrer 1000 quilómetros por mês, os alunos introduzem a recta de equação  $x=1000$  e, em seguida, recorrendo ao GeoGebra, determinam o ponto de intersecção C das rectas a e b (figura 23).

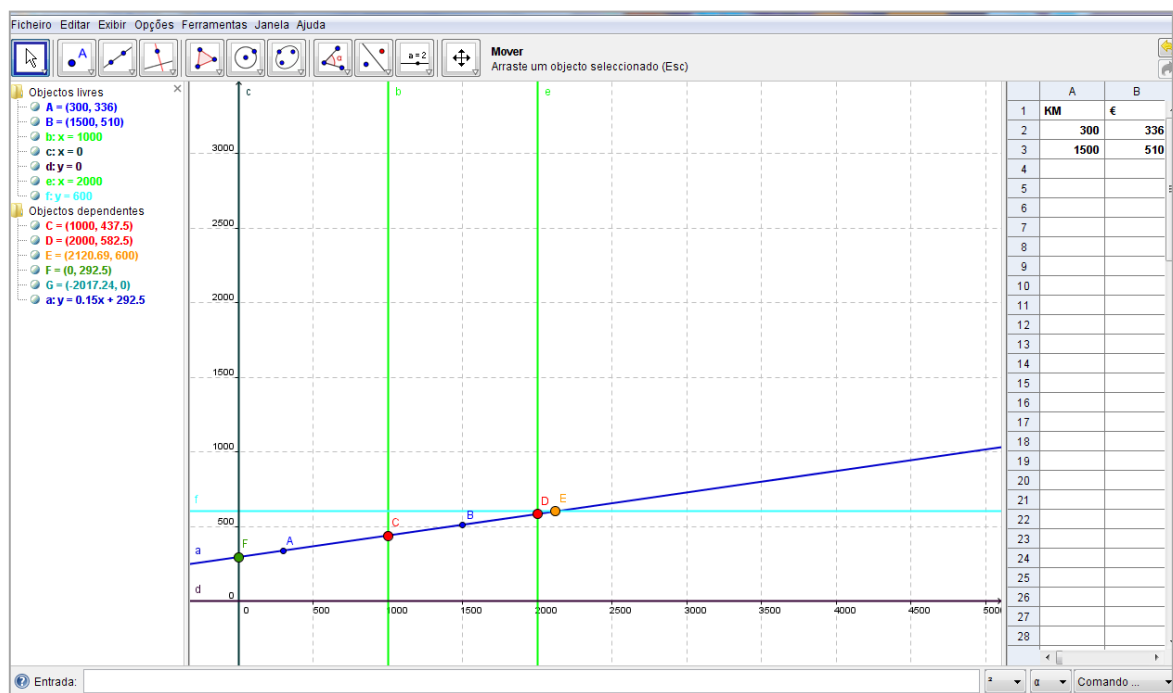


Figura 23. Representações criadas pelo par Pedro/Diogo

Para calcular o valor do custo para uma distância de 2000 quilómetros, o procedimento foi análogo ao anterior, com a obtenção das coordenadas do ponto D (intersecção das rectas *a* e *e*). O recurso ao GeoGebra assume, na resolução destas questões um papel decisivo, pois de outra forma seria necessário recorrer à resolução de equações algébricas.

Na questão 3 pretendia-se determinar a distância máxima a percorrer de forma a não exceder o custo mensal de 600 €. Os alunos concluem que é necessário traçar uma recta horizontal de equação  $y = 600$  (recta *f*) e voltam a pedir o ponto de intersecção como aconteceu nos casos anteriores, obtendo assim a resposta a esta questão com as coordenadas do ponto E (figura 23).

Os alunos fazem ainda a interpretação do significado da ordenada na origem (figura 24) e da abcissa na origem (figura 25) da recta que representa a relação custo-distância, no contexto do problema. Concluem que, mesmo no caso de a viatura estar parada (0 quilómetros percorridos pelo carro), o proprietário tem despesas a pagar (292.5 €).

4. Encontrem o ponto de intersecção da recta que representa a função (equação encontrada em 1.) com o eixo  $c$ . Qual o significado deste ponto?

*O ponto representa o número de euros que custa por mês um carro que anda 0 Km mensais.*

Figura 24. Resposta à questão 4 dada pelo par Pedro/Diogo

Os alunos ficaram bastante surpreendidos com este resultado. Quando encontraram o ponto de intersecção da recta **a** com o eixo **c** (ponto **F**) procuraram que a investigadora validasse a sua descoberta.

**Diogo:** São os impostos, isto é o governo! (em resposta a um colega de outro grupo que está a reclamar pois verifica que mesmo se no carro não andar tem custos).

**Estêvão:** Então não é? Setôra!

**Professora:** O quê? Diz lá.

**Estêvão:** Qual o significado deste valor? Significa que não ando nada mas tenho de pagar no mínimo 292,5 euros.

**Professora:** Sim. E acham isso bem?

**Estêvão:** Mas está certo. Não está?

Verificam que um custo igual a zero é um acontecimento impossível, pois o custo só se anula se o carro percorrer uma distância negativa, o que não tem sentido (figura 25).

5. Calculem a intersecção da mesma recta com o eixo  $d$ . Esse ponto fará sentido no contexto do problema? Porquê?

*Não pois é impossível um carro andar -2077,24 Km mensais. O resultado obtido nos exercícios a partir das coordenadas do ponto de intersecção da recta inicial com o eixo  $d$ .*

Figura 25. Resposta à questão 5 dada pelo par Pedro/Diogo

Os alunos perceberam assim que neste contexto a existência de um zero da função não corresponde à existência de um zero nos custos.

Também em relação à questão 5 os alunos ficam admirados e até brincam:

**Pedro:** É impossível termos números negativos, ou seja, ...

**Diogo:** Então é os quilómetros que ele está a fazer dentro da garagem, está lá no mesmo lugar!

**Pedro:** Ou então mete o carro a andar para a frente e para trás, não anda nada.

**Diogo:** Anda zero.

Por fim, pede-se aos alunos para indicarem o declive da recta. Os alunos, embora tivessem identificado prontamente qual era o declive da recta mostraram dificuldade em perceber o seu significado.

**Pedro:** O que é que a setôra quer dizer com declive? É que não é muito inclinada?

**Professora:** Inclinada, o que quer dizer?

**Diogo:** Qual o declive da reta? O declive da reta é de 0,15 (faltam 15 minutos - diz para o seu par).

**Pedro:** O que é que representa o 0,15?

**Diogo:** Este número...

**Pedro:** É o número que se tem de multiplicar pelos quilómetros.

**Diogo:** Setôra, o que é que representa este número? Então é o declive da recta.

**Professora:** Sim, está bem. Mas nesta situação concreta o que é que quer dizer?

**Pedro:** É o número que tem de se multiplicar pelos quilómetros.

**Professora:** O quê?

**Pedro:** O custo mensal em função dos quilómetros?

**Professora:** Então o  $x$  representa o quê?

**Diogo:** O  $x$  é os quilómetros o  $y$  é os euros.

**Professora:** Então para cada quilómetro a mais, imaginem que andam mais 1 quilómetro, quanto é que eu tenho de pagar?

**Pedro:** É o preço por um quilómetro.

**Diogo:** Ah, 0,15 euros é o preço de um quilómetro.

**Pedro:** Não é não, por 1 quilómetro tinhas de pagar 0,15 mais 292,5 euros.

**Diogo:** É o acréscimo ao preço base, sendo o preço base 292,5 euros.

**Pedro:** Eu já percebi.

**Diogo:** Imaginem que queríamos fazer 10 quilómetros, assim de cabeça, tinha de fazer 0,15 vezes 10 que é 1,5 e mais 292,5 que daria o preço de 10 quilómetros.

**Professora:** E se eu quisesse saber o preço de 11 quilómetros? Já sabia que era o preço...

**Pedro:** anterior mais 0,15.

**Professora:** Exatamente, é o que ele tem de acrescentar.

**Diogo:** É o acréscimo ao preço base.

**Diogo:** Este número ...

**Pedro:** Simplifica lá isso um bocadinho se faz favor.

**Diogo:** Representa o acréscimo ao preço base, 292,5, por cada quilómetro andado.

**Diogo:** Então, tarefa 7.

Os alunos dão a resposta seguinte e revelando assim compreender o significado do declive no contexto do problema (figura 26).

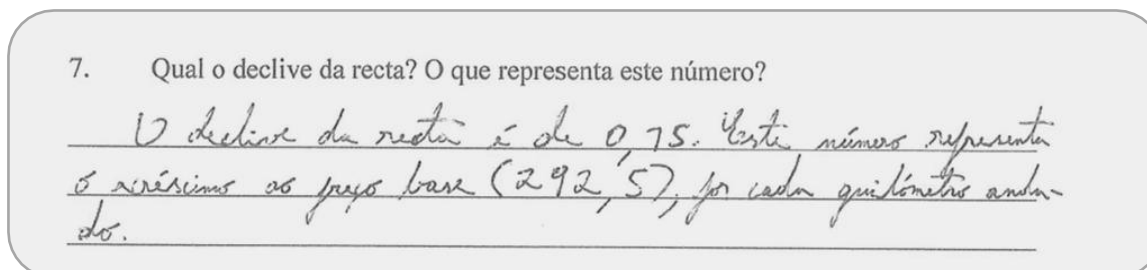


Figura 26. Resposta à questão 7 dada pelo par Pedro/Diogo

No final da resolução da tarefa, os alunos mostram um grande entusiasmo pela execução das tarefas, atitude sempre presente no decorrer da experiência de ensino, e querem iniciar de imediato a tarefa seguinte.

Mais uma vez, durante a realização desta tarefa, notou-se alguma competitividade entre os grupos:

**Estêvão:** Isto é para desenhar no GeoGebra não é para desenhar aqui.

**Pedro:** Aqui (risos)

**Diogo:** Desenhar aqui? Não.

**Estêvão:** Mas vocês fazem as linhas *bué da feias*.

**Diogo:** O que é que foi?

Os *passos* efectuados no GeoGebra para obtenção das respostas estão patentes no Protocolo de Construção.

Nº	Nome	Definição	Valor
1	Número A2		A2 = 300
2	Número A3		A3 = 1500
3	Número B2		B2 = 336
4	Número B3		B3 = 510
5	Ponto A		A = (300, 336)
6	Ponto B		B = (1500, 510)
7	Recta a	Recta AB	a: $y = 0.15x + 292.5$
8	Texto B1		B1 = "€"
9	Texto A1		A1 = "KM"
10	Recta b		b: $x = 1000$
11	Ponto C	Ponto de intersecção de a e b	C = (1000, 437.5)
12	Recta e		e: $x = 2000$
13	Ponto D	Ponto de intersecção de a e e	D = (2000, 582.5)
14	Recta f		f: $y = 600$
15	Ponto E	Ponto de intersecção de a e f	E = (2120.69, 600)
16	Recta c		c: $x = 0$
17	Ponto F	Ponto de intersecção de a e c	F = (0, 292.5)
18	Recta d		d: $y = 0$
19	Ponto G	Ponto de intersecção de a e d	G = (-2017.24, 0)

Figura 27. Protocolo de Construção do GeoGebra resultante do trabalho efectuado pelo par Pedro/Diogo

As principais dificuldades dos alunos foram:

1. Identificar a variável independente e a variável dependente;
2. Escrever e justificar as suas respostas;
3. Reconhecer o significado do declive no contexto do problema.

A utilidade do GeoGebra está bem patente desde o momento inicial. Começa por ser importante para obter um modelo matemático de variação linear e continua a sê-lo ao longo da realização da tarefa como, por exemplo, na determinação do ponto de intersecção de duas rectas.

O papel mediador do GeoGebra no processo de construção e análise do modelo matemático que exprime a relação custo-distância é bastante visível nos processos desenvolvidos pelos dois alunos. No que se refere à natureza do modelo matemático

envolvido, é notório que os alunos têm a noção de que um modelo de variação linear fica completamente determinado a partir do conhecimento de dois pontos. Por outras palavras, os alunos associam um modelo de variação linear a uma recta e sabem que esta fica determinada por dois dos seus pontos.

Assim, o GeoGebra permite avançar directamente para a representação gráfica do modelo a partir do conhecimento de dois pontos, tornando-se saliente o carácter de ferramenta geométrica intrínseco ao software. Os alunos tiram partido desta faceta do GeoGebra, iniciando a sua exploração do modelo de uma forma que consideramos ser eminentemente geométrica. A janela de álgebra do GeoGebra funcionou muito mais como uma janela de *outputs* do que de *inputs*, razão pela qual o tratamento das questões colocadas se desviou da manipulação algébrica e se concentrou na representação e manipulação geométrica dos dados.

Perante a abordagem seguida por este par de alunos, parece razoável afirmar que estes encaram a *recta* como um *modelo para* a descrição da variação linear, no sentido atribuído por Gravemeijer (2005). Portanto, ganha proeminência a representação gráfica sobre a representação algébrica e, concomitantemente, a manipulação geométrica do modelo sobre a sua manipulação algébrica. O gráfico da função custo-distância é identificado com a representação de uma recta num referencial cartesiano de eixos  $d$  (abscissas/distância) e  $c$  (ordenadas/custo), correspondentes à variável independente e à variável dependente no modelo.

A expressão algébrica que representa a variação do custo com a distância é automaticamente gerada pelo GeoGebra na janela de álgebra:  $y = 0,15x + 292,5$ . É evidente que os alunos dão sentido a esta expressão e que reconhecem algumas das suas propriedades mais centrais, designadamente o parâmetro que corresponde ao declive da recta (acréscimo de custo por quilómetro) e o parâmetro que corresponde à ordenada na origem (o preço base). Ao mesmo tempo, são capazes de “interrogar” o modelo e obter respostas a várias questões, usando sistematicamente uma análise “geométrica”. Assim, a questão do custo correspondente a uma distância de 1000 quilómetros é resolvida com a obtenção do ponto de intersecção da recta  $a$  com a recta vertical de abscissa 1000, tal como sucede com o custo para uma distância de 2000 quilómetros. Por outras palavras, concretizar a variável  $x$  com o valor 1000 ou com o valor 2000 é traduzido geometricamente pela obtenção de intersecções de rectas, patenteando a influência da natureza híbrida (geométrica/algébrica) do GeoGebra na forma de actuação dos alunos.

Da mesma maneira, a procura da distância máxima que o carro deveria percorrer para se ter um custo não superior a 600 euros é efectuada geometricamente, isto é, a concretização da variável  $y$  com o valor 600 volta a ser traduzida pela procura de intersecção da recta  $a$  com a recta horizontal de ordenada 600.

É também clara a capacidade que os alunos evidenciam de interligar e de combinar as representações gráficas e algébricas para produzir respostas às questões colocadas. Diremos que o modelo é interpretado e explorado geometricamente com um apoio algébrico de retaguarda. Esta análise do modelo matemático demonstra uma inversão conceptual na forma mais tradicional de trabalhar o estudo de funções (manipulação algébrica com a representação gráfica como apoio de retaguarda).

#### 4.1.8. Episódio 8: Variação dos Parâmetros

1. Utilizando o GeoGebra, visualiza os gráficos das funções:  $a(x) = 2x + 1$ ;  $b(x) = 2x + 5$ ;  $c(x) = 2x - 3$ . Compara os gráficos obtidos. Regista as tuas conclusões.
2. Procede do mesmo modo para as funções:  $d(x) = x + 3$ ;  $e(x) = 2x + 3$ ;  $f(x) = 3x + 3$ ;  $g(x) = -x + 3$ . Neste caso o que te chamou à atenção? Regista as tuas conclusões.
3. Faz um estudo semelhante ao anterior para as funções:  $f(x) = x$ ;  $g(x) = 2x$ ;  $h(x) = 4x$ ;  $i(x) = -2x$ . E agora que conclusões podes tirar?

Esta tarefa (**Anexo 8**) foi retirada do projeto 1001 itens e tinha como objectivo principal que os alunos analisassem a variação do declive e da ordenada na origem. Na exploração de cada uma das situações os alunos deviam verificar a influência da variação do declive na posição do gráfico e o significado da ordenada na origem.

Para responder à primeira pergunta os alunos trabalham no GeoGebra e obtêm este ficheiro:

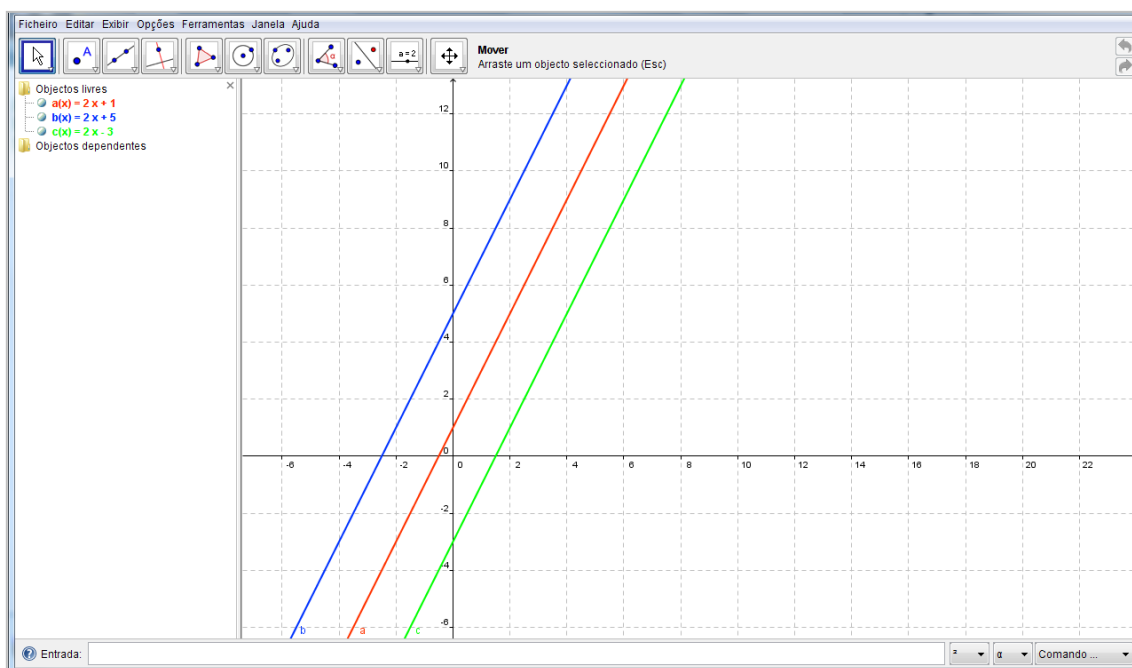


Figura 28. Representações criadas pelo par Pedro/Diogo

E dão a seguinte resposta:

Comparando as retas obtidas, verificamos que as três retas não são paralelas entre si, logo têm todas a mesma declinação.

Figura 29. Resposta à questão 1 dada pelo par Pedro/Diogo

Para a segunda pergunta os alunos também usam o GeoGebra, obtendo a seguinte figura:

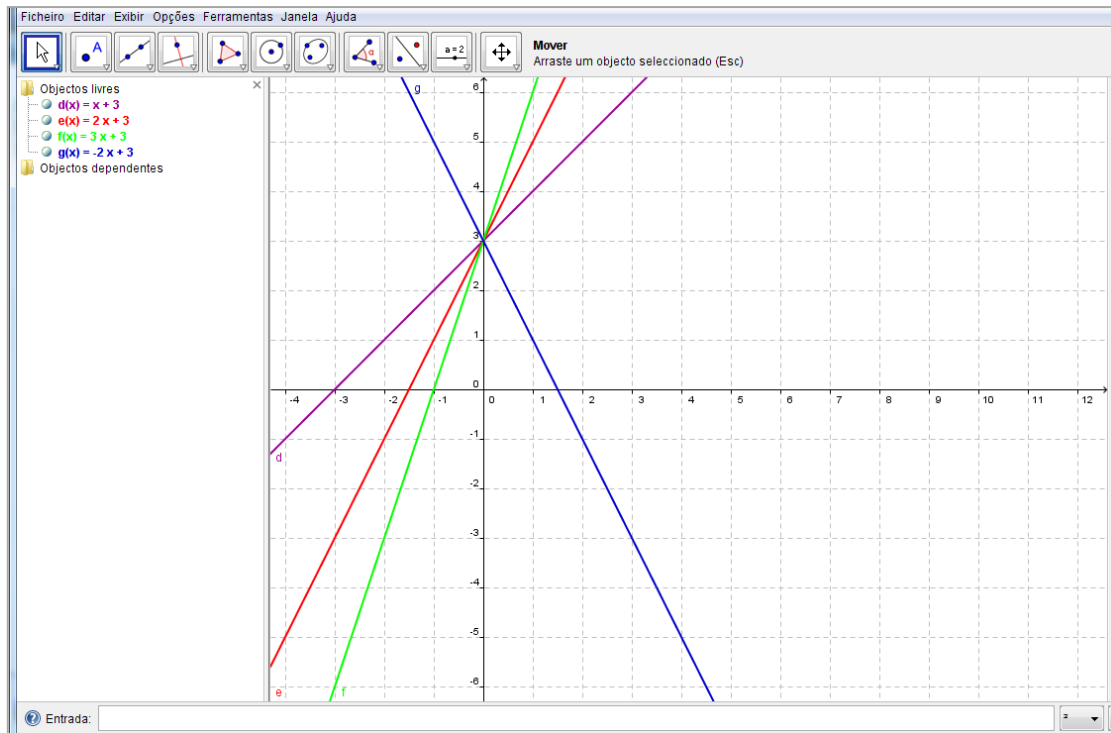


Figura 30. Representações criadas pelo par Pedro/Diogo

E concluem que:

Neste caso, o que chama a atenção é que todas as retas se cruzam num ponto (sendo que esse ponto é de  $x=0$  e de  $Y=3$ ). Também concluímos que as retas não são paralelas entre si nem têm o mesmo...

Figura 31. Resposta à questão 2 dada pelo par Pedro/Diogo

Na resolução da última questão os alunos repetem o procedimento usado anteriormente e obtêm a seguinte figura:

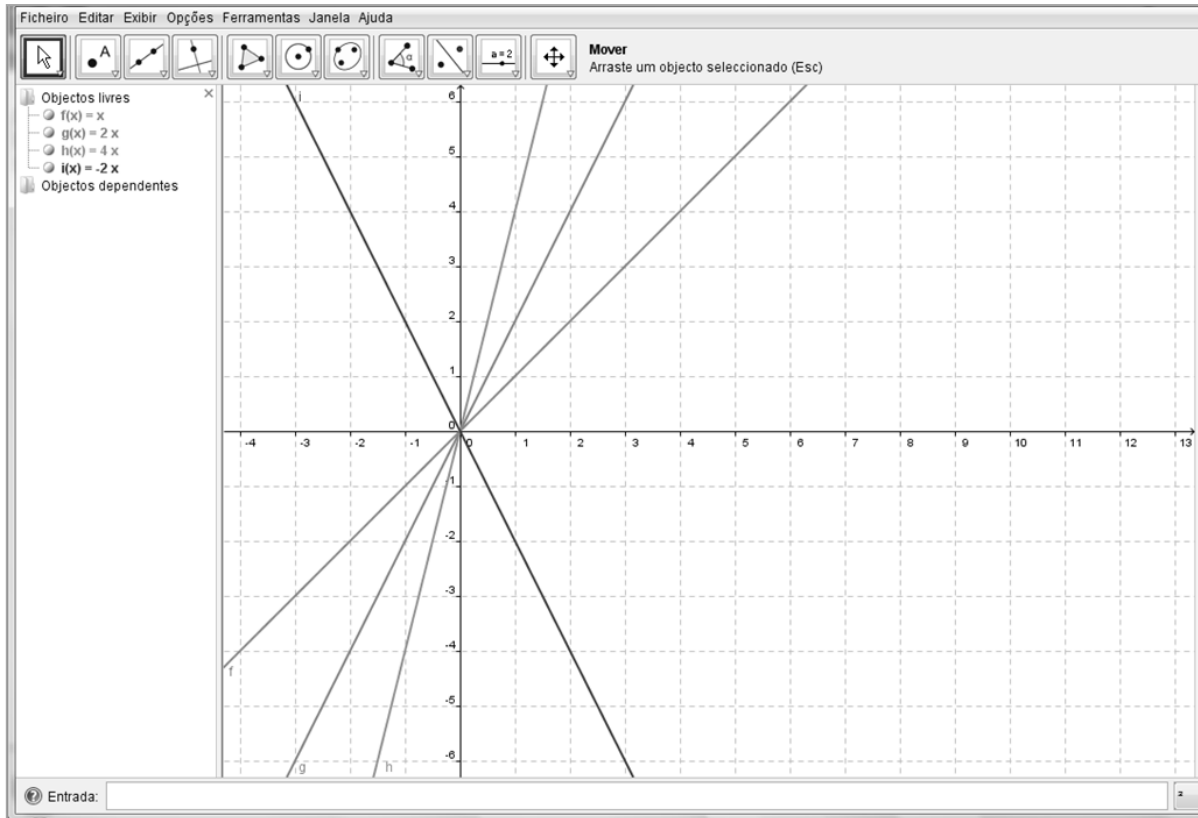


Figura 32. Representações criadas pelo par Pedro/Diogo

E escrevem o seguinte:

Concluímos que, tal como no exercício anterior, as retas não são paralelas entre si nem têm o mesmo declive, mas, neste caso, as retas cruzam-se entre si na origem ( $x=0$  e  $y=0$ )

Figura 33. Resposta à questão 3 dada pelo par Pedro/Diogo

Esta tarefa foi considerada pelos alunos como uma das mais fáceis desta experiência.

**Diogo:** Esta aqui é mais fácil.

**Professora:** Achas esta fácil?

**Diogo:** É mais rápida de se resolver.

Mal terminaram a tarefa um dos alunos, para não perder tempo, diz:

**Pedro:** *Next, Setôra, tarefa 8!*

Em conclusão, ao longo desta experiência de ensino, os alunos mostraram-se sempre entusiasmados na realização do trabalho proposto resolvendo as tarefas com facilidade, solicitando pontualmente o apoio dos professores.

Em termos dos conhecimentos matemáticos não se verificaram dificuldades de maior, isto é, as dificuldades foram ultrapassadas ou no seio do grupo ou através das sugestões dadas pelos professores. É certo que a possibilidade dada aos alunos de usar o GeoGebra na resolução das tarefas trouxe grandes vantagens. Permitiu o acesso a várias formas de representação (tabela, gráfico e expressão algébrica), em simultâneo e de modo simples e rápido. Libertou os alunos de cálculos algébricos e da resolução de equações, possibilitando a construção de modelos matemáticos de forma dinâmica (com a facilidade de se poder deslocar o gráfico por um simples *arrastar do rato* e conseguir ajustar assim o modelo aos dados recolhidos) e quase, por assim dizer, automática. outra vantagem foi a possibilidade de mudar facilmente a janela de visualização, conseguindo visualizar o gráfico para obtenção de valores, quer do objecto quer da imagem e usar o modelo matemático para fazer previsões.

Os alunos foram incentivados, através das perguntas das tarefas, a fazer uma análise crítica dos resultados obtidos e a reflectir sobre a validade do modelo obtido.

Sobressaiu a dificuldade manifestada na produção escrita, quer em explicar as estratégias usadas na resolução das tarefas, quer em apresentar os resultados obtidos e em justificar as suas respostas.

#### **4.1.9. Resultados**

Os resultados que decorrem dos dados analisados permitem destacar dois aspectos fundamentais dos processos de exploração de um modelo de variação linear com recurso ao GeoGebra.

Desde logo, o GeoGebra teve como efeito evidente suscitar uma análise de índole geométrica do modelo matemático, que se sobrepôs inexoravelmente a eventuais procedimentos de natureza algébrica, como seja, a concretização de valores de variáveis numa equação. Neste sentido, a ferramenta computacional contribuiu para deslocar os

processos dos alunos para aspectos conceptuais, ligados ao significado das variáveis e à sua tradução em termos gráficos, obviando hipotéticas dificuldades com o trabalho de cálculo e de manipulação algébrica. Ao mesmo tempo, esta análise geométrica permitiu tornar patentes características essenciais de um modelo de variação linear que os alunos mostraram ser capazes de identificar e compreender: o declive da recta como taxa de variação e a ordenada na origem como valor inicial da variável dependente.

O recurso ao GeoGebra tornou claro que os alunos encaram a representação gráfica de uma recta como um modelo para uma relação de variação linear. Ficou patente que os alunos tinham já adquirido essa noção (isto é, que associavam a variação linear a uma recta), pelo que o GeoGebra desempenhou um papel de amplificador conceptual desta mesma noção. Explorar um modelo linear consistiu, neste caso, em explorar as propriedades e características da representação cartesiana da recta. E o próprio conceito geométrico de recta (uma direcção definida por dois pontos) foi sustentado pela experiência com o GeoGebra, que permite o traçado de uma recta e a obtenção da sua equação a partir de dois pontos cujas coordenadas são conhecidas.

É de sublinhar a eficácia dos alunos na utilização das ferramentas oferecidas pelo software para atingirem os seus objectivos de análise do modelo. Pode concluir-se que o par de alunos observado usou o software como um ambiente intelectual em que foram aproveitadas as possibilidades gráficas e, sobretudo, a simbiose entre diversas formas de representação matemática. Como tem sido observado em diversos estudos é possível uma abordagem diferente à resolução de problemas e, particularmente, à construção e exploração de modelos matemáticos, em situações contextualizadas (Carreira, 1992, 2009; Lingefjard, 2011). No caso específico do estudo da função afim, estamos perante a possibilidade de promover abordagens que não se esgotam no seu tratamento algébrico mas que alargam o seu significado e promovem pontes entre conceitos matemáticos e a compreensão de fenómenos do quotidiano.

## 4.2. A entrevista do Pedro

### 4.2.1. Apresentação

O Pedro tem 13 anos, estatura pequena, pele clara, olhos castanhos e muito vivos. Atento e com bastante interesse em aprender, colabora activamente nos trabalhos propostos e ajuda, por sua iniciativa, os colegas com mais dificuldades. É perfeccionista, esforça-se por apresentar os seus trabalhos o mais completos possível e solicita com frequência que o professor valide as suas respostas. Refere, que os bons resultados escolares (sempre transitou com níveis de 4 e 5) se devem ao facto de ter jeito, ter um bom professor e ao método de estudo. “Fui-me habituando, com os meus pais, a reler as coisas das aulas e, desde o 7.º ano estudo com amigos para trocarmos opiniões e ideias”.

Salienta que, em relação às aulas de matemática, “gosta mais desde o 7.º ano” pois têm de resolver as tarefas em grupo e depois expõem as suas ideias para a turma toda (implementação do novo programa de matemática) e assim “não temos dúvidas e aprendemos melhor”. E explica ainda que “mesmo quando temos alguma dúvida também perguntamos aos outros colegas do grupo”.

Dos conteúdos leccionados na disciplina de Matemática aquele de que mais gostou foi das *equações*, confidenciando que achou o tema muito fácil. Quando foi questionado sobre qual o conteúdo de que menos gostou, após alguma hesitação, disse que foi o tema *triângulos e quadriláteros*.

Os pais do Pedro são enfermeiros e ele pretende frequentar um curso superior na área da saúde. Afirma que a Matemática é muito importante para conseguir prosseguir estudos num curso do seu agrado, “eu sei que preciso muito da Matemática”. Afirma que saber Matemática é fundamental pois “se temos um certo dinheiro para gastar, temos de saber fazer as contas” e também é indispensável “para mais tarde gerir a nossa vida”. Realça que ter conhecimentos de Matemática “ajuda para fazer os cálculos, para a economia mundial e para a gestão dos recursos”.

Em relação à utilização do computador na sala de aula, o aluno diz que só se lembra de ter aulas nas salas de Informática este ano (no ano lectivo precedente o professor utilizou o computador amiúde, no entanto, os alunos só trabalharam esporadicamente com os computadores portáteis), “no ano passado, às vezes, podíamos

fazer as tarefas no computador portátil mas só um aluno (de cada grupo) é que fazia”; com o GeoGebra diz nunca ter trabalhado. Apesar disso, diz que gosta muito de Informática e foi muito fácil fazer os modelos no GeoGebra. Refere também que prefere trabalhar com o computador, mesmo como no ano passado que “só tínhamos um computador para cada grupo”.

#### 4.2.2. A construção de um modelo matemático

Com a construção de modelos matemáticos de situações problemáticas reais possibilitamos aos alunos estabelecer uma ligação entre a teoria e a prática e ainda revelar o poder da Matemática.

Durante a entrevista, o aluno resolveu duas tarefas. Irei agora analisar o seu desempenho na construção dos modelos matemáticos, a forma como os interpretou e utilizou para responder às questões que lhe foram colocadas.

Na tarefa 1 – *Procurando modelos matemáticos* (Anexo 10), era apresentada uma tabela com alguns dados sobre o desempenho de um ciclista (em termos de tempo e distância percorrida). O Pedro começou por ler o enunciado e procurou identificar qual era a variável independente, revelando algumas dúvidas:

**Pedro:** Professora o x pode ser um qualquer deles? Pode ser o tempo ou a distância...

**Professora:** Então pensa lá, do que é que estás a falar?

**Pedro:** Do tempo em função da distância.

**Professora:** E o que é que vai ser o objecto? E a imagem? Para um determinado objecto vais ter uma certa imagem, não é?

**Pedro:** Exacto.

**Professora:** O que é que achas que está em função de...?

**Pedro:** É a distância, quanto mais tempo nós andarmos maior é a distância que percorremos.

**Professora:** Então o que é que vais pôr no eixo dos x?

**Pedro:** O tempo.

Durante este diálogo o aluno foi incentivado a pensar se ambas as variáveis poderiam ser a variável independente, isto é, se não fazia diferença a variável independente ser o tempo ou a distância. Depois como o aluno mostra alguma confusão sobre esta noção a investigadora, através de uma linguagem mais formal, procura que o aluno distinga a relação objecto/ imagem e identifique cada um deles no contexto. Após esta conversa, na qual o aluno foi guiado até chegar à compreensão do conceito, o Pedro dá início ao trabalho de construção do modelo matemático e explica como procedeu:

**Pedro:** Marquei os pontos, que eram dados na tabela, aqui no GeoGebra, sendo o tempo o x e a distância o y e depois uni...

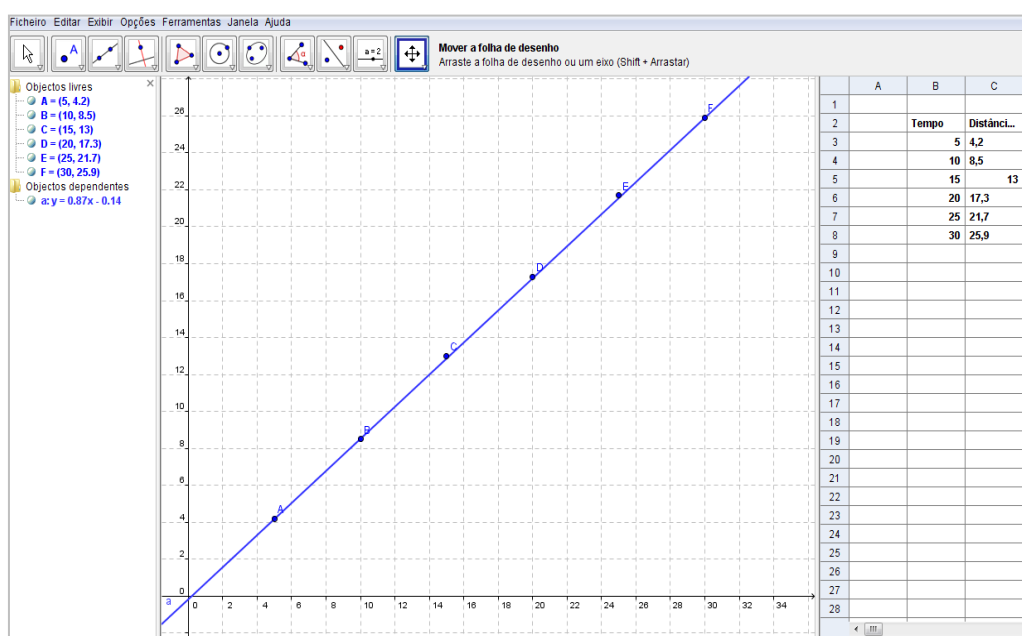


Figura 34. Representações criadas pelo Pedro

Em seguida explica a aceitação do modelo obtido: “pois a recta *passa* em todos os pontos que foram dados na tabela”. Depois relaciona a representação do gráfico da função com a sua expressão algébrica, utilizando o modelo de forma preditiva, para dar resposta à primeira questão:

Será possível prever a distância que o ciclista alcançará ao fim de uma hora?

Sim, Na expressão algébrica que me foi dada pelo GeoGebra sendo ela  $y = 0,87x - 0,14$ , substituíria o  $x$  por 60 minutos.

Figura 35. Resposta à questão 1, da primeira tarefa, dada pelo Pedro

Neste caso o aluno utiliza a expressão algébrica e substitui a variável independente por um valor concreto utilizando para o efeito os seus conhecimentos numéricos e algébricos. No entanto, o aluno refere que também podia ter optado por outra possível estratégia e faz a descrição dos procedimentos a efectuar, de forma clara, precisa e correcta. E diz: “desenhava a recta  $x = 60$  e pedia a intersecção com a primeira recta”. Este aluno gosta sempre de justificar muito bem as suas respostas e, se possível, usando vários processos.

Quando questionado sobre a utilidade do GeoGebra na construção do modelo, o Pedro responde que era mais difícil se não tivesse o GeoGebra pois “primeiro tínhamos de ser nós a construir a recta e isso tudo e depois a partir da recta tentar encontrar a expressão”. Percebe-se assim que o aluno vê a vantagem de ter acesso de imediato à expressão algébrica do modelo geométrico encontrado.

Para responder à segunda pergunta da tarefa, o aluno aponta algumas limitações do modelo encontrado anteriormente:

Este modelo permite-nos calcular qual a distância que o ciclista percorre em função do tempo, mas com algumas limitações que pode ser por exemplo o cansaço do ciclista, o tipo de terreno, etc.

Figura 36. Resposta à questão 2, da primeira tarefa, dada pelo Pedro

Com esta segunda questão pretende-se estimular a reflexão e o espírito crítico. Isto é importante na medida em que, de um modo geral, os alunos têm uma certa tendência para aceitar incondicionalmente os resultados obtidos, especialmente quando estes são determinados através de ferramentas tecnológicas tais como calculadoras,

computadores, etc. Deste modo, pretende-se desenvolver o espírito crítico dos alunos e levá-los a analisar os resultados bem como a sua adequação ao contexto.

### 4.2.3. O conceito de modelo linear

De acordo com as indicações do novo Programa de Matemática para o Ensino Básico deve-se “propor a análise de gráficos que traduzam casos de proporcionalidade directa e inversa em contextos da vida real” (p. 57). Assim, na segunda tarefa (**Anexo 11**) tive em conta essas recomendações. Foi apresentada uma situação problemática, através da representação gráfica de três funções. Para responder às questões colocadas os alunos teriam essencialmente de proceder à análise dos gráficos.

Os alunos podiam recorrer a gráficos usando papel e lápis ou o GeoGebra para responder às questões.

O Pedro optou por construir os gráficos (exibidos no enunciado da tarefa) no GeoGebra, transpondo assim a situação apresentada para um ambiente computacional onde passa a desenvolver o seu trabalho. Explicita depois o seu raciocínio:

**Pedro:** Então construí as rectas, que estão no enunciado, no GeoGebra e depois pedi ao GeoGebra para me dar a equação em  $y$ , até agora foi só. Agora vou fazer uma recta  $y = 520$  e vou intersectar com as rectas para saber quantas palavras é capaz (pausa) quantos minutos é que cada uma leva a escrever 520 palavras.

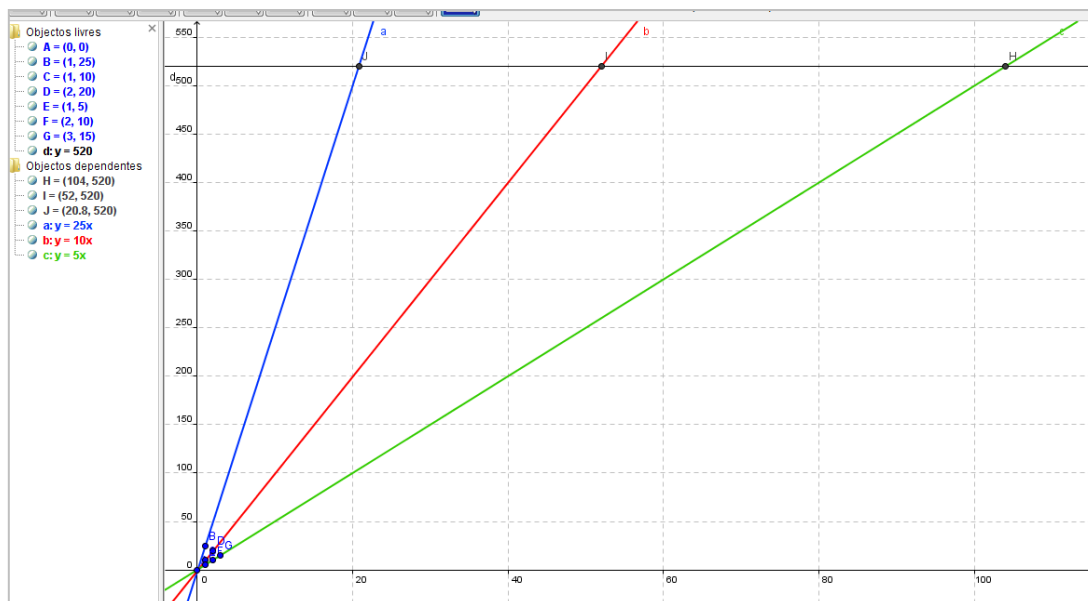


Figura 37. Representações criadas pelo Pedro

Assim, o aluno obtém os pontos de intersecção H, I e J (como se pode ver através da figura anterior) e dá a seguinte resposta:

A Ana leva 20,8 minutos, a Beatriz leva 52 minutos e a Carolina leva 104 minutos.

Figura 38. Resposta à questão 3, da segunda tarefa, dada pelo Pedro

Para averiguar que domínio o aluno tinha deste tema, foi colocada a seguinte pergunta:

**Professora:** Agora diz-me uma coisa, tu escolheste fazer no GeoGebra mas podias ter feito sem o GeoGebra. E se não fizesses com o GeoGebra, o que é que tinhas de fazer?

**Pedro:** Se não fizesse com o GeoGebra... então (pausa) encontrava a expressão.

**Professora:** Encontravas a expressão. Como? Por exemplo, para a Ana qual era a expressão?

**Pedro:** Para a Ana...  $y = 25x$ .

**Professora:** Porquê?

**Pedro:** Pois como é uma recta que passa na origem é do modelo  $y = kx$ . E como 1 é igual a 25 fica  $y = 25x$ .

O aluno mostra que sabe utilizar o modelo construído no GeoGebra e, para além disso, interpreta os gráficos e responde revelando conhecimentos sobre a função linear que lhe permitem passar da representação gráfica para a expressão algébrica. Esta situação evidencia as capacidades desenvolvidas por Pedro, nomeadamente, as que lhe permitem realizar o trabalho em dois sistemas distintos de representação: o geométrico e o algébrico. Esta conclusão vai ao encontro do que refere Carreira (1992) no seu trabalho de investigação: o facto de os alunos iniciarem o seu trabalho numa dada representação não os impede de passar para outra, implicando esta passagem naturalmente a tradução das informações obtidas, o que em si mesmo representa um passo suplementar e positivo no processo de aprendizagem.

**Professora:** E alguma, destas situações, representa uma proporcionalidade directa?

**Pedro:** Todas.

**Professora:** Porquê?

**Pedro:** Porque *cada minuto é o mesmo número de palavras*. Por exemplo, olhando para a recta da Carolina vê-se que num minuto é 5, em dois minutos é 10, em três minutos 15.

**Professora:** E através do gráfico? As rectas têm alguma particularidade?

**Pedro:** Passam todas na origem.

**Professora:** Ah! E a constante de proporcionalidade? Tu já descobriste qual era a constante. Mas o que é que representa a constante, neste contexto? Por exemplo, para uma delas...

**Pedro:** Representa quantas palavras cada uma consegue escrever por minuto. Para a Ana é 25, para a Beatriz é 10 e para a Carolina é 5.

O Pedro identifica várias características da função linear e relaciona-as com os conhecimentos que possui sobre a proporcionalidade directa. Estabelece assim uma *ligação* entre o que já aprendeu sobre situações de proporcionalidade directa e o

problema que lhe foi proposto resolver nesta tarefa, sendo esta uma das condições necessárias para *aprender com compreensão*.

Na última pergunta o Pedro tinha de escrever a equação, e indicar o declive, de cada uma das rectas. Apresenta a seguinte resposta:

The image shows a handwritten response on a light blue background. At the top, there are three equations:  $Ana - Y = 25x$ ,  $Carolina - Y = 5x$ , and  $Beatriz - Y = 10x$ . Below these, a paragraph explains the slopes: "O declive da recta da Ana é de 25, o declive da recta da Beatriz é de 10 e o declive da recta da Carolina é de 5."

Figura 39. Resposta à questão 4, da segunda tarefa, dada pelo Pedro

Quando questionado sobre os valores que indicou para o declive o aluno disse: “são os valores da constante de proporcionalidade, eu já sabia”.

Na parte final da entrevista foi pedido ao aluno que identificasse, de um modo geral, quais as suas dificuldades, ao que ele respondeu:

**Pedro:** Só a maneira como estruturar as respostas, isso de fazer aqui no GeoGebra é fácil.

**Professora:** E o GeoGebra ajudou, ou não, na realização das tarefas? Porquê?

**Pedro:** Ajudou, porque é mais fácil fazer isto e o GeoGebra faz logo o nosso trabalho e dá-nos a equação e tudo o resto. Assim não perdemos muito tempo a fazermos tudo mentalmente.

#### 4.2.4. Resultados

O Pedro manifestou sempre preocupação em apresentar um bom trabalho e, para além disso teve especial cuidado em averiguar se o trabalho que estava a desenvolver correspondia ao que era pretendido pelo professor. No caso de lhe surgirem dúvidas, o que aconteceu pontualmente, solicita de imediato a ajuda do professor.

No que respeita à produção escrita este aluno denotou um grande cuidado em fundamentar as suas respostas, explicando em pormenor quais foram as suas estratégias.

Mostrou igualmente destreza na utilização do GeoGebra tirando partido das capacidades gráficas deste software na resolução de muitas questões. Reconheceu a importância do GeoGebra como auxiliar para a construção dos modelos matemáticos e considerou uma grande vantagem o facto de obter a equação algébrica ao onstruir o gráfico.

Revelou capacidade em analisar tabelas e proceder à conversão dos dados, apresentados nessa forma de representação, para a forma de representação gráfica de modo a construir um modelo computacional que retratasse a problemática apresentada.

Inicialmente mostrou alguma dificuldade em distinguir variável independente e variável dependente, situação posteriormente ultrapassada.

Mostrou compreender as noções de referencial cartesiano, coordenadas de um ponto e de função. Estabeleceu uma analogia entre as diferentes formas de representação de uma função.

Pela visualização de uma certa representação gráfica, o aluno mostrou destreza em reproduzi-la no computador com o auxílio do GeoGebra, tirando partido dessa representação, o que lhe permitiu uma análise geométrica do modelo, ficando deste modo livre de cálculos.

Confrontado com um referencial cartesiano onde estavam patentes diferentes representações gráficas (ver tarefa 2 - Anexo 11) o aluno identifica situações representativas de proporcionalidade directa, determina as constantes de proporcionalidade, relacionando-as com o declive da recta e interpretando qual o seu significado, no contexto concreto da situação problemática apresentada.

Não obstante a exploração dos diversos modelos ter consistido na exploração das propriedades e características da recta, o aluno revelou, no final, uma compreensão dos conceitos e conseguiu, através da análise do gráfico, chegar à expressão algébrica de cada uma das funções. Pedro mostra ter-se apropriado das várias representações de uma função bem como da compreensão de modelo linear.

Para concluir esta análise, surge naturalmente a questão de saber da representatividade do Pedro. Fazendo apelo à minha experiência pedagógica e ao contacto com esta turma, diria que o Pedro entra na categoria dos alunos médios, embora a turma em si mesma se situe relativamente acima da média, sendo considerada na escola onde está inserida, uma das turmas com elevado nível de sucesso.



# **CAPÍTULO V**

## **Considerações finais**



## 5.1. Síntese do estudo

Este trabalho de investigação teve como principal objectivo compreender de que modo a introdução de tarefas centradas na construção e exploração de modelos matemáticos, com recurso ao GeoGebra, contribui para a aprendizagem de um tópico curricular do 8.º ano, do tema da Álgebra: a função afim. A escolha deste tópico foi, entre outras razões, ditada pela importância do tema Funções no currículo de Matemática do ensino básico e pela centralidade que assume a compreensão dos modelos de crescimento linear na resolução de problemas que envolvem situações reais.

Para isso, realizou-se uma experiência de ensino, numa turma de 8.º ano, conduzida pela investigadora e pelo professor da turma. Esta experiência foi desenvolvida em torno da construção e implementação de uma sequência de tarefas, envolvendo a utilização do GeoGebra para a construção e análise de modelos matemáticos que pudessem ser representativos de situações problemáticas realistas. A opção pelas actividades de modelação foi considerada como uma forma de dar significado aos conceitos matemáticos, através da construção e exploração de modelos computacionais, para a resolução de situações da vida real, e como veículo para tornar visível o poder da Matemática na compreensão e interpretação da realidade.

A partir deste contexto foi planeada e efectuada a recolha de dados empíricos, num design de investigação interpretativo e qualitativo, tendo em vista dar resposta às seguintes questões de investigação:

- 4) Que estratégias são usadas pelos alunos para resolver tarefas de construção e exploração de modelos em situações realistas?
- 5) Qual o papel do GeoGebra na construção de modelos matemáticos?
- 6) Como é que a utilização do GeoGebra no contexto da construção e aplicação de modelos matemáticos pode contribuir para o estudo da função afim, com compreensão?

Esta experiência pedagógica envolveu actividades de aplicação, de exploração e de modelação matemática. Pretendi compreender como os alunos utilizavam o GeoGebra na construção de modelos matemáticos representativos das situações problemáticas apresentadas e a forma como posteriormente aplicavam esse

modelo para descrever, prever e investigar determinadas características dos fenómenos reais. Um aspecto que mereceu a minha atenção foi averiguar que análise, crítica e reflexiva, os alunos fizeram dos dados obtidos através dos modelos matemáticos que foram construindo, indicando possíveis limitações do modelo.

Assim, através de actividades de modelação, apoiadas pelo uso do GeoGebra, procurei analisar os processos utilizados pelos alunos na resolução de tarefas delineadas com o propósito de identificar o conhecimento alcançado e as dificuldades surgidas e a forma como recorriam a vários sistemas de representação (optando por aqueles que lhes pareciam mais adequados) para dar resposta às questões colocadas. Prestei especial atenção a possíveis dificuldades na passagem de uma representação a outra, no conjunto dos vários sistemas de representação possíveis, particularmente na alternativa: da representação gráfica para a representação algébrica.

Foi implementada uma sequência de tarefas construídas para o efeito que permitiu aos alunos apropriarem-se do conhecimento sobre a função afim e sobre o crescimento linear, através da interacção com os seus pares, mediante a realização de trabalho autónomo, pela interacção com o software e através da orientação e do apoio do professor. A natureza investigativa das tarefas foi pensada para promover o envolvimento dos alunos na realização das tarefas, para estimular o gosto pela descoberta, o espírito crítico e a autonomia dos alunos.

Este trabalho insere-se, portanto, no quadro teórico da Educação Matemática Realista (RME), assumindo como ideia fulcral que a Matemática deve estar ligada com a realidade e ser relevante para a resolução de problemas contextualizados em situações da vida real, do mundo e da sociedade. A RME baseia-se nos seguintes princípios:

1. Os contextos e situações problemáticas realistas como geradores de uma actividade de matematização para os alunos;
2. A utilização de modelos (materiais, esquemas, diagramas e símbolos) como ferramenta para simbolizar e organizar esses contextos e situações;
3. O papel central das construções e produções dos alunos no ensino e aprendizagem;
4. O papel chave do professor como orientador e guia das aprendizagens dos alunos;

5. A importância da interação, quer dentro de cada grupo quer em toda a turma;
6. A forte inter-relação e integração dos eixos curriculares da Matemática.

Assim, a abordagem matemática dos diversos temas deve ser contextualizada para que os alunos possam *ver* o poder da Matemática e possibilitar que os alunos experienciem um processo de (re)invenção matemática, estruturando e organizando os seus conhecimentos, à medida que são guiados pelo professor. É banida a ideia de começar por apresentar aos alunos a matemática “já pronta” bem como a imposição de modelos abstractos, sem significado para os alunos. A importância da interação entre todos os intervenientes no processo de aprendizagem, dando oportunidade à partilha das descobertas e das estratégias usadas na realização das tarefas é fundamental dado que a Matemática é entendida como uma actividade social. Segundo esta teoria, aprender Matemática implica que os alunos passem por diferentes níveis de entendimento – a passagem ao nível seguinte pode ser proporcionada através da reflexão do trabalho desenvolvido (conforme é descrito no modelo proposto por Gravemeijer, 1994).

## 5.2. Conclusões do estudo

### *Construção de modelos matemáticos*

A construção de modelos matemáticos desenvolveu-se, na maioria dos casos, com o recurso à ferramenta computacional GeoGebra. Os próprios alunos estiveram envolvidos na recolha de dados e, posteriormente, procederam à sua organização em tabelas e à construção de um modelo matemático representativo da situação. Noutros casos, a informação foi apresentada através de uma tabela e os alunos converteram essa informação numa representação gráfica. Durante a experiência, os alunos utilizaram o GeoGebra para modelar situações relacionadas com o seu quotidiano (por exemplo, nas tarefas 1 e 4) o que contribuiu para que eles atribuíssem significado aos conceitos matemáticos.

Verificaram-se, no entanto, casos em que os alunos optaram por construir um modelo e escrevê-lo na forma algébrica, apesar de o GeoGebra fornecer a expressão.

Mesmo quando não era solicitada a expressão, como na primeira questão da tarefa 3, um dos pares opta por escrever a expressão algébrica e fundamenta a resposta a essa pergunta com base na expressão encontrada.

### ***Interpretação e utilização de gráficos***

Os alunos recorrem a uma análise gráfica global, conseguindo relacionar características do gráfico com o seu significado no contexto do problema. Por exemplo, na tarefa 6 os alunos identificam a ordenada na origem e concluem que “mesmo quando o carro está parado temos de pagar”.

Os alunos analisam e interpretam as representações gráficas da função afim (linear ou não linear). Ao construírem o modelo, no computador, os alunos mostram facilidade em adaptar a janela de visualização do gráfico para responder ao que é pedido no contexto da situação (recorrem simplesmente à opção do GeoGebra que permite mover a folha de desenho) e deslocam a folha para obterem a janela que lhes parece ser a mais conveniente.

Os alunos utilizam a representação gráfica dos modelos matemáticos obtidos para, por exemplo, *evitar* a resolução de equações. No caso da questão 5 da tarefa 1, os alunos desenharam, no GeoGebra, a recta  $y = 5000$  e determinam a sua intersecção com o modelo, obtendo assim a resposta à questão. Também se verificou que fazem a intersecção do gráfico com rectas verticais para chegar à resposta a determinadas questões, em vez da utilização da expressão algébrica com a substituição da variável independente por um dado valor e respectivos cálculos.

### ***Interpretação e utilização de expressões***

Os alunos usam a informação que retiram da representação algébrica para realizarem uma interpretação dos valores dos parâmetros e das variáveis no contexto da situação. Por exemplo, na tarefa 4, relacionam o declive da recta  $y = 8x + 30$ , com o acréscimo da altura da pilha de cestos, afirmando que este crescimento “vai de 8 em 8”.

Todos os alunos mostraram compreender a influência dos parâmetros  $k$  e  $b$  nas funções  $y = kx$  e  $y = kx + b$  (ver, por exemplo, a tarefa 7). Identificam as funções do tipo  $y = kx$  com situações de proporcionalidade directa, justificando que

o gráfico passa na origem, utilizando conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente. Também no que respeita à resolução de equações, os alunos voltam a evidenciar os seus conhecimentos matemáticos, manifestando destreza e segurança na obtenção das soluções.

### ***Relação entre representações***

Os alunos associam a tabela à representação gráfica e algébrica e revelam-se hábeis em concretizar a mudança entre os diferentes registos de representação. O carácter dinâmico do processo de representação referido por Duval (2006) está presente nos dados obtidos. Verificaram-se, no entanto, algumas dificuldades na passagem da representação tabular para a representação gráfica, por surgirem dúvidas quanto à identificação da variável independente e da variável dependente. Estas dificuldades parecem-me particularmente interessantes, pois são concordantes com resultados evidenciados por outros estudos. A investigação aponta para a necessidade de desenvolver um esforço pedagógico que leve os alunos a tornarem-se fluentes nas passagens entre os diversos níveis de representações e significados possíveis: discursivos, gráficos, simbólicos (algébricos), etc. Relembro, a este propósito o esquema de Duval (2006), no qual está patente a possibilidade de passar de um registo para o outro e a importância da compreensão em Matemática que supõe a coordenação de, pelo menos, dois registos de representações semióticas.

Dos processos usados pelos alunos para resolverem as tarefas destacam-se:

- a. Processos geométricos: exploração dos modelos através da representação gráfica obtida no computador. Interpretação da recta obtida e sua utilização, por exemplo quando a intersectam com outra recta para obter o ponto de intersecção (optam por este processo em detrimento da resolução de uma equação algébrica, embora reconheçam que se pode fazer pelo processo algébrico). Conexão entre a álgebra e a geometria.
- b. Interpretação e análise dos gráficos, dando uma ênfase especial à visualização dos mesmos, quer obtida com o recurso ao GeoGebra quer pela leitura dos gráficos apresentados nos enunciados de algumas tarefas. Importância da visualização na compreensão das funções.

- c. Tradução dos dados apresentados numa tabela para a sua representação gráfica. A necessidade de proceder a esta *passagem* prende-se, em muitos casos, com a materialização do modelo matemático que descreve determinada situação.

A diversidade de actividades desenvolvidas pelos alunos durante a resolução das tarefas mostrou os diversos aspectos a que temos de estar atentos, enquanto educadores, para estimular o desenvolvimento das diversas capacidades fundamentais na formação dos alunos.

Os alunos beneficiaram, depois da realização de cada tarefa, de uma discussão alargada à turma acerca dos processos usados pelos diversos grupos. Para além disso, no final da experiência pedagógica, o professor da turma explorou, numa aula de síntese, todos os aspectos relevantes deste tópico curricular.

Observemos ainda alguns pontos que, embora de cariz mais particular, me parecem dignos de ser mencionados nesta conclusão.

Durante a realização das tarefas proporcionou-se a possibilidade de serem os alunos a estabelecerem pontes, quer com os conhecimentos matemáticos anteriores quer com os saberes da vida real, permitindo-lhes uma construção de significados e portanto uma aprendizagem rica do ponto de vista da compreensão.

Na opinião dos alunos, o GeoGebra teve um papel facilitador no trabalho realizado, mas não inviabilizou, em certos casos, o recurso a processos algébricos. Pelo contrário, alguns alunos manifestam flexibilidade na aplicação dos seus conhecimentos matemáticos e recorrem a processos analíticos para resolver as questões que lhes são colocadas. Em vários grupos ocorrem diferentes processos de resolução das tarefas, por vezes para confirmar o resultado obtido mas também para retratar as diversas formas de pensar de cada um dos seus elementos (em determinados momentos aconteceu que um dos elementos de um par queria resolver uma questão por meio de uma certa estratégia e o outro por meio de outra).

Os alunos estavam habituados a este tipo de abordagem dos conceitos matemáticos (baseada em sequências de tarefas e no trabalho em pequenos grupos) pois esta vinha a ser implementada na escola, desde o ano lectivo anterior, com o novo PMEB. O factor que constituiu uma novidade foi a utilização do GeoGebra e também a circunstância de as aulas terem decorrido numa sala de informática, o que levou a que tivessem de se organizar para trabalhar a pares e não em grupos de

quatro ou cinco elementos como era habitual. Na resolução das primeiras tarefas os alunos solicitaram com mais frequência o apoio dos professores presentes na aula (professor da turma e investigadora), verificando-se que foram ganhando autonomia ao longo da experiência pedagógica. É de salientar que, muitas vezes, os professores eram solicitados apenas para validar o trabalho realizado pelo grupo e não para prestar ajuda na resolução da tarefa propriamente dita.

Na construção de modelos matemáticos os alunos foram revelando progressivamente mais segurança e habilidade (seja pelo facto de o uso da ferramenta se ter tornado familiar seja pela própria compreensão dos procedimentos a adoptar para a sua construção).

Para a exploração dos modelos matemáticos, os alunos recorreram, na maioria das vezes, a processos geométricos. O GeoGebra permitiu evidenciar a ligação entre as diversas formas de representação de uma função (tabular, geométrica e algébrica).

Os registos escritos foram muito importantes para permitir a comunicação matemática no seio do grupo. No entanto, verificou-se que, depois de terem efectuado as tarefas, os alunos manifestaram alguma dificuldade em escrever, explicar e justificar os processos que tinham adoptado na realização das mesmas. Estes momentos foram realmente decisivos porque obrigaram a uma reflexão e a uma análise dos procedimentos escolhidos, levando-os a explicitar o seu raciocínio, e deram lugar a discussões matemáticas profícuas.

No final da realização de cada uma das tarefas os alunos participaram numa discussão alargada a toda a turma (à semelhança do que era a prática já instituída desde o ano anterior). Além disso, durante a realização das tarefas, verificaram-se algumas ocorrências interessantes no que diz respeito aos conceitos matemáticos utilizados. Por exemplo, é de referir o modo como os alunos converteram pares ordenados  $(x,y)$ , provenientes de uma representação tabular, em pontos no referencial cartesiano, para daí chegarem à representação da recta no referencial. Tendo a representação geométrica da recta, o GeoGebra permite automaticamente o acesso à respectiva equação algébrica, na janela algébrica. Por outro lado, a possibilidade de manipulação da recta na janela gráfica, através das características dinâmicas do software, leva a focar a atenção sobre a posição da recta, nomeadamente, relacionando a sua inclinação com a taxa de variação da função. É

igualmente interessante que os alunos utilizem frequentemente a intersecção do gráfico com rectas horizontais ou verticais para obterem pontos no gráfico, os quais exibem automaticamente as suas coordenadas, dando assim informações relevantes acerca das variáveis, independente e dependente. De um modo bastante consistente, os processos de construção dos modelos matemáticos seguiram o percurso: da tabela para um conjunto de pontos no plano, para um gráfico cartesiano, para o acesso à expressão algébrica.

O par Pedro/Diogo, que foi alvo de uma atenção privilegiada ao longo da experiência, desenvolveu diálogos pertinentes, discutindo diferentes pontos de vista e cada um deles explicando o seu raciocínio ao outro. Mostraram destreza em aproveitar as capacidades do GeoGebra na construção e exploração de modelos matemáticos. Inicialmente, revelaram alguma dificuldade em distinguir as noções de variável independente e dependente, quando a informação foi dada através de uma tabela. Estes alunos conseguiram estabelecer uma relação de co-variação e efectuar a passagem entre as diferentes formas de representação de uma função. Assim, recolheram dados (tarefas 1 e 4), organizaram essa informação numa tabela, posteriormente, elaboraram o gráfico da função correspondente e utilizaram essa representação para chegar a valores, quer da variável independente quer da variável dependente, por construção geométrica de outras rectas e mediante a sua intersecção com o modelo obtido. Verificaram que os modelos matemáticos que surgiram nas diversas situações se traduzem graficamente por rectas e explicaram o significado da inclinação de cada uma delas no contexto do problema.

Revelaram compreender a noção de coordenadas de um ponto e aplicaram esse conhecimento para construir um modelo matemático representativo da situação problemática apresentada. Na tarefa 2, usaram os pontos dados através da tabela para criar a recta que “passava” pelos mesmos. Estabeleceram a ligação entre as diferentes representações de uma função, neste caso a tabular (dada no enunciado), a gráfica (obtida pela construção da recta que contém os pontos) e a analítica quando referem: “Obtivemos a expressão construindo uma recta que passou pelos quatro pontos (...). A partir dessa recta, o GeoGebra forneceu-nos a equação”.

Ligaram, de forma muito evidente, os conceitos de função e equação (por exemplo na tarefa 2). Utilizaram a expressão analítica da função para obterem uma equação numa só variável (substituindo o valor dado na variável dependente) e

resolveram-na igualmente por processos geométricos (obtendo o ponto de intersecção entre duas rectas e reconhecendo que a solução da equação pode ser dada pela abcissa do ponto de intersecção das rectas). Deste modo, mostraram compreender a conexão entre a utilização de processos geométricos e processos algébricos, como se pode verificar na seguinte resposta: “... a abcissa do ponto de intersecção (fornecida pelo GeoGebra) é igual à potência do motor McLaren F<sub>1</sub>, em quilowatts”.

Durante a entrevista, Pedro voltou a analisar a influência do parâmetro  $k$  na equação  $y = kx$ , tanto no que se refere ao seu significado no contexto real como no que respeita à inclinação do gráfico e ao declive da recta. Reconheceu igualmente que este tipo de funções representa situações de proporcionalidade directa, tendo em conta que o gráfico passa na origem do referencial. Relacionou a inclinação da recta com a velocidade quando afirmou “a mais rápida é a Ana”, por perceber que se tratava da recta com maior inclinação, e também enquadrando este facto no contexto do problema, ao reconhecer que aquela é a aluna que escreve mais palavras por minuto.

Relativamente às questões de investigação lembradas acima, referirei, em seguida, as principais conclusões do estudo.

As estratégias usadas pelos alunos na construção de modelos matemáticos que exprimem situações problemáticas realistas basearam-se, fundamentalmente, na utilização de representações tabulares e na transposição dos dados para o computador, com a passagem entre vários sistemas de representações. No que respeita à exploração dos modelos, foram usadas estratégias essencialmente geométricas, tirando partido da visualização do gráfico da função e das potencialidades da ferramenta computacional utilizada, em especial da capacidade de relacionar directamente os elementos das janelas gráfica e algébrica.

O GeoGebra teve um papel fundamental na construção dos modelos, facilitando a sua construção e permitindo ir muito mais longe no estabelecimento de conexões entre conceitos geométricos e algébricos, que seriam muito mais improváveis sem o recurso à tecnologia. O GeoGebra contribuiu para estabelecer relações entre as diferentes formas de representar uma função, proporcionando a visualização de três dessas formas de representação, em simultâneo.

O Geogebra fornece de forma automática a expressão algébrica da função quando se constrói o gráfico, o que se traduziu numa maior facilidade de apropriação do sentido a dar à expressão algébrica, em particular no que se refere ao carácter funcional da equação associada à recta. Da mesma forma, o GeoGebra revelou-se muito importante na compreensão do significado dos parâmetros e das variáveis no modelo matemático da função afim e permitiu explorar de que forma estes influenciam a representação gráfica.

Por fim e, na medida em que o GeoGebra facilitou a passagem entre diferentes representações, houve a tendência para deslocar a actividade do cálculo e da manipulação algébrica para uma aprendizagem de conceitos matemáticos com compreensão. A par do recurso ao GeoGebra, é de salientar igualmente que a implementação de uma sequência de tarefas inspiradas na perspectiva da RME contribuiu para tornar os alunos mais capazes de dar sentido aos conceitos matemáticos e mesmo de adoptarem uma atitude investigativa relativamente à utilização de modelos matemáticos em situações realistas. Assim, devem ser igualmente salientadas, a par das ligações estabelecidas entre representações matemáticas diversas, as permanentes articulações que foram feitas entre as ideias matemáticas e as situações realistas propostas.

### **5.3. Reflexões finais**

Este estudo permitiu chegar a resultados que dão informações válidas sobre o estudo da função afim, por meio de uma abordagem que combina actividades de construção e exploração de modelos matemáticos com o recurso ao GeoGebra.

Os resultados do estudo apontam para o facto da utilização do GeoGebra facilitar a articulação entre as diferentes representações: tabular, gráfica e algébrica. Pelas suas capacidades, este software educativo pode proporcionar a visualização e a experimentação, que têm um papel muito importante na compreensão dos conceitos (Carreira, 2009). Por outro lado, é também propiciado um ambiente de aprendizagem que ajuda na conversão de registos de representação.

Esta investigação destaca a necessidade de trabalhar situações problemáticas do mundo real e do quotidiano dos alunos, no estudo de funções, não excluindo

evidentemente os problemas mais abstractos, pois o exercício da abstracção e o desenvolvimento do raciocínio puramente matemático fazem parte integrante do ensino da Matemática.

Durante a experiência pedagógica procurou-se e mostrou-se essencial estabelecer conexões entre as várias representações, para que os alunos obtivessem uma compreensão mais profunda dos conceitos.

Uma das maiores dificuldades apontadas pelos alunos foi o facto de terem de apresentar por escrito as suas respostas e explicações para as questões, pelo que emerge a necessidade de prestar especial atenção a esta situação e solicitar com regularidade relatórios ou outras produções escritas aos alunos, no sentido de os ajudar a ultrapassar essas dificuldades.

A implementação, na escola, do novo PMEB no ano lectivo precedente, contribuiu grandemente para o bom desenrolar desta experiência de ensino já que houve novas metodologias postas em prática, as quais resultam no desenvolvimento do gosto pela descoberta, do espírito crítico e da autonomia nos alunos. Para Ponte (2005) “o modo de construção do conhecimento tem a ver com o papel que o aluno é chamado a desempenhar” (p.23). Assim, devemos apostar no desenvolvimento de actividades exploratórias e investigativas, permitindo ao aluno descobrir por ele próprio o significado da Matemática, apropriar-se do conhecimento e valorizar os momentos de reflexão e discussão, criando oportunidades que favoreçam a aprendizagem dos alunos.

As aulas foram bastante planeadas, ainda que estruturadas de forma flexível para permitir aos alunos trabalhar ao seu próprio ritmo; a dinâmica da aula foi determinada pelos alunos e pelas interações entre todos os intervenientes. Foi bastante vantajoso o facto de estarem dois professores na sala de aula (o professor da turma e a investigadora), dado existirem na turma 13 grupos de trabalho.

Para terminar, destaco as palavras de Ponte (2006) que refere alguns factores que limitam a validade de um trabalho deste género e que, por consequência, cabem nesta reflexão final. Assim, diz este autor:

*Um estudo de caso não tem de ser meramente descritivo – de um modo geral quando isso acontece o seu valor é muito reduzido. Na verdade, um estudo de caso pode ter um profundo alcance analítico,*

*interrogando a situação, confrontando-a com outras situações já conhecidas e com as teorias existentes. Pode assim ajudar a gerar novas teorias e novas questões para futura investigação (Ponte, 2006, p.8).*

Este trabalho assumiu os contornos de um estudo de caso analítico, baseado numa experiência de ensino, o qual está limitado por circunstâncias de ordem prática evidentes. Por isso, considero que o seu propósito fundamental reside em “proporcionar uma melhor compreensão de um caso específico e ajudar a formular hipóteses de trabalho sobre o grupo ou a situação em causa” (Ponte, 2006).

# Referências bibliográficas

- Amado, N. (2007). *O professor estagiário de Matemática e a integração das tecnologias na sala de aula – Relações de mentoring numa constelação de prática*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: APM.
- Amado, N. & Carreira, S. (2008). Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de matemática – diferenças na prática de sala de aula. In A. P. Canavarro, D. Moreira e M. I. Rocha (Orgs.). *Tecnologias e Educação Matemática*, (pp. 286-299). Lisboa: Secção de Educação Matemática, Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- APM (2009). *Renovação do currículo de Matemática*. Seminário de Vila Nova de Milfontes – 1988. (Edição comemorativa). Lisboa: APM.
- Bassanezi, R. C. (2006). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*, (3.<sup>a</sup> ed.). São Paulo: Contexto.
- Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education*, (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel. (Tradução Portuguesa de José Manuel Varandas, Hélia Oliveira e João Pedro da Ponte).
- Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (5), pp. 412-446.
- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects-state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 37-68.

- Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo*. (Tese de mestrado). Lisboa: APM.
- Carreira, S. (1995). A matematização na natureza e na sociedade: Uma forma de encarar a relação matemática-realidade. In J. F. Matos, I. Amorim, S. Carreira, G. Mota e M. Santos (Eds.), *Matemática e realidade: Que papel na educação e no currículo?*, (pp. 25-70). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.
- Carreira, S. (2009). Matemática e tecnologias – Ao encontro dos “nativos digitais” com os “manipulativos virtuais”. *Quadrante*, Vol. XVIII, n.º 1 e 2, p. 53-85.
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, Vol. 6, n. 2, pp. 81-89.
- Cobb, P.; Yackel, E. & Wood, T. (1989). Young children’s emotional acts while doing mathematical problem solving. In: D. B. McLeod & V. M. Adams, (Eds.). *Affect and mathematical problem solving. A new perspective*. New York: Springer-Verlag.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, pp. 103–131.
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*, (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan.
- Ferri, R. B. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação e Matemática*, n.º 110, pp. 19-25.
- Godoy, A. (1995). Pesquisa qualitativa. Tipos fundamentais, possibilidades. *Revista de Administração de Empresas*, 35 (2), pp. 20-29.
- Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed). *Handbook of International Research in Mathematics Education*, (pp. 178-203). New York, NY: Routledge.

- Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: Freudenthal Institute.
- Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.). *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas*, (pp. 83- 101). Lisboa: APM.
- Guerreiro, L. (2009). *O papel das representações algébricas na aprendizagem das funções*. (Tese de mestrado). Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Guimarães, H. M. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: um estudo com matemáticos e professores de Matemática*. (Tese de doutoramento). Lisboa: APM.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Kieran, C. (2001). Exploring the mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relationship to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics*, 46 (1-3), pp. 187-228.
- Lesh, R. (1990). Computer-based assessment of higher order understandings and processes in elementary mathematics. In G. Kulm (Ed.), *Assessing of higher order thinking in mathematics*, (pp. 81-110). Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.
- Lingefjard, T. (2011). *Students constructing modeling tasks to peers*. Comunicação apresentada no CERME 7, Working Group 6 – Applications and Modeling, Rzeszów, Polónia, Fevereiro de 2011. (Disponível em <http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/6/CERME7-Lingefjaerd.pdf>).
- Lüdke, M. & André, M. (1996). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, Ltda.

- Matos, J. F., Carreira, S., Santos, M. & Amorim, I. (1994). *Ferramentas Computacionais na Modelação Matemática*. Departamento de Educação. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Matos, J. F., Carreira, S. & Santos, M. (1995). *Modelação matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Matos, J. F. & Carreira, S. (1996). *Modelação e Aplicações no Ensino da Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação, Instituto de Inovação Educacional.
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis*. London: Sage Publications.
- Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Lisboa: ME-DEB.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC. (Disponível em <http://sitio.dgicd.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf>).
- Ministério da Educação (2010). *Funções e Equações – 8.º ano. Proposta de conjunto de tarefas para o 3.º ciclo*. Professores das turmas piloto do 8.º ano de escolaridade. Lisboa: ME-DGIDC. (Disponível em [http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais\\_NPMEB/045\\_sequencia\\_funcoeseequacoes\\_TP\\_3C\\_Julho2010.pdf](http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais_NPMEB/045_sequencia_funcoeseequacoes_TP_3C_Julho2010.pdf))
- NCTM. (1985). *Agenda para a Acção: Recomendações para o ensino da Matemática nos anos 80*. Lisboa: APM.
- NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*, (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, pp. 105-132.

- Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A. (2009a). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC. (Disponível em [http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais\\_NPMEB/003\\_Brochura\\_Algebra\\_NPMEB\\_\(Set2009\).pdf](http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais_NPMEB/003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf))
- Ponte, J. P., Matos, A. & Branco, N. (2009b). *Sequências e Funções*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC. (Disponível em [http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais\\_NPMEB/023\\_Sequencia\\_Sequencias\\_e\\_Funcoes\\_NPMEB\\_3c7.pdf](http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais_NPMEB/023_Sequencia_Sequencias_e_Funcoes_NPMEB_3c7.pdf))
- Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática*, (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT.
- Serrazina, L. & Oliveira, I. (2010). Trajectórias de aprendizagem e ensinar para a compreensão. In GTI (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico*, (pp.43-59). Lisboa: APM.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 26, n.º 2, pp. 114-145.
- Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, Vol. 6, n.º 2, pp. 91-104.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 14, pp. 66-91.
- Skovsmose, O. & Valero, P. (2002). Mathematics Education in a World Apart: Where We Are All Together. In P Valero & O. Skovsmose (Eds), *Proceedings of the Third International Mathematics Education and Society Conference*, (p. 1-9). Centre for Research in Learning Mathematics, Helsingør, Denmark.
- Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), pp. 438-445.

- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), pp. 458-477.
- Yin, R. K. (1984). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park, CA: Sage.

# **Anexos**



**Experiência1**

Tempo (seg)	Volume (ml)

**Experiência2**

Tempo (seg)	Volume (ml)

**Experiência3**

Tempo (seg)	Volume (ml)

**O Volume da Água<sup>1</sup>**

1. Num referencial, que considerem apropriado para o efeito, marquem os dados recolhidos em cada uma das experiências.

2. Descrevam que variáveis estão a ser investigadas e qual a relação entre elas.

---

---

---

---

3. Escrevam uma equação para cada uma das experiências. Descrevam como o caudal afecta a equação.

---

---

---

---

---

4. Que quantidade de água terá o copo ao fim de 15 segundos?

---

5. Quanto tempo levaria a obter 5 litros de água? E nesse caso, qual seria o caudal que consideram mais conveniente? Justifiquem a vossa resposta.

---

---

---

---

---

<sup>1</sup> Tarefa construída especialmente para este estudo

## Potência de um Motor<sup>2</sup>

A potência de um motor pode ser entendida como a energia gerada por este, durante um determinado intervalo de tempo. São utilizadas várias unidades para medir a potência, como por exemplo, entre outras, quilowatts e cavalos. Nos anúncios sobre automóveis a sua potência costuma ser indicada em cavalos (CV).

Na tabela seguinte estabelece-se uma relação aproximada entre a potência expressa em quilowatts (kW) e a potência expressa em cavalos (CV).

Potência (em kW)	Potência (em CV)
50	68
100	136
150	204
200	272

- Com o auxílio do GeoGebra construam um gráfico com os valores da tabela e encontrem uma expressão algébrica que possa representar esta situação. Escrevam a expressão e descrevam como a obtiveram.

---



---



---



---

- O Maclaren F<sub>1</sub>, com 627 cavalos, é considerado por muitos especialistas como sendo o carro de estrada mais rápido do mundo. Qual é a potência do seu motor expressa em quilowatts? Expliquem como procederam.

---



---



---

<sup>2</sup> Tarefa adaptada do Projecto 1001 itens

### Escolha de Tarifários<sup>3</sup>

O André comprou um telemóvel novo da rede Falabarato, mas ficou indeciso na escolha do tarifário: “Tarifário A” ou “Tarifário B”?

Tarifário A	
Destino	Custo por minuto
Rede Falabarato	€ 0,152
Outras redes nacionais	€ 0,599
Tarifário B	
Destino	Custo por minuto
Todas as redes	€ 0,254

1. Qual é o tarifário mais económico, em média, se o André falar o mesmo tempo para a rede Falabarato que para outras redes nacionais? Justifiquem a vossa resposta.

---



---



---



---

2. Se o André telefonar durante 20 minutos por mês (para ambas as redes, Falabarato e outras redes nacionais), qual é o número mínimo de minutos que terá de falar para a rede Falabarato para que o “Tarifário A” seja mais económico do que o “Tarifário B”? Justifiquem a vossa resposta.

---



---



---

<sup>3</sup> Tarefa adaptada do projecto 1001 itens

Cestos de compras<sup>4</sup>

1. Elaborem um gráfico com os dados recolhidos e registados na tabela.

N.º de Cestos								
Altura (cm)								

2. Descrevam que variáveis estão a ser investigadas e qual a relação entre elas.

---



---



---

3. Procurem um modelo matemático que seja representativo do problema apresentado e que nos dê a altura de uma pilha de cestos de compras em função do número de cestos existentes na pilha.

---



---



---



---

4. Que altura terá uma pilha de 50 cestos? Expliquem como procederam.

---



---



---



---

<sup>4</sup> Esta tarefa foi adaptada de Ann Shannon – Task context and assessment

### Festa de Final de Ano<sup>5</sup>

A Associação de Estudantes da Escola Descobrir está a organizar a festa de final de ano, a realizar no ginásio. Vai ser uma festa em grande, já que o ginásio da escola tem capacidade para 400 alunos.

A Associação de Estudantes gastou €500 na decoração e nos equipamentos de som e iluminação e decidiu cobrar €2 por cada bilhete. O João e a Teresa estão encarregados de fazer a análise financeira da festa. Arranjaram uma expressão para calcular o lucro ou prejuízo obtido com a festa ( $S$ ) em função do número de bilhetes vendidos ( $n$ ):  $S = 2n - 500$

1. Qual é o lucro máximo que a Associação pode esperar? Justifiquem a vossa resposta.

---



---



---

2. Expliquem o significado da expressão  $2n$ , no contexto da situação.

---



---



---

3. Determinem quanto irão ganhar se forem vendidos 120 bilhetes. Interpretem o resultado.

---



---



---

4. Qual o número mínimo de bilhetes é necessário vender para que não haja prejuízo? Justifiquem a vossa resposta.

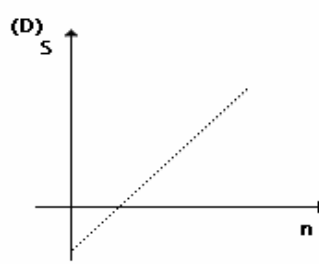
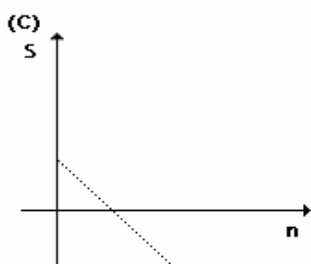
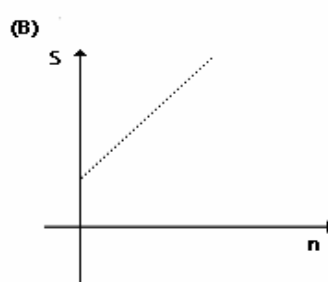
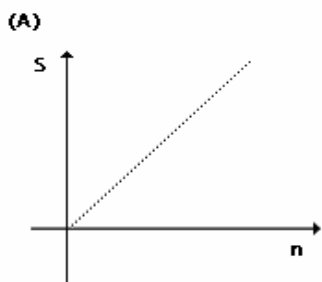
---



---

<sup>5</sup> Tarefa adaptada do Projecto 1001 itens

5. Qual dos gráficos poderá representar a relação entre o saldo, (S), e o número de bilhetes vendidos, (n)? Justifiquem a vossa escolha.



---

---

---

---

---

### Quanto custa ter carro próprio?<sup>6</sup>

O número de euros que custa possuir um carro é uma função do número de quilómetros percorridos por mês. Com base numa informação publicada no “Time Magazine”, o custo varia linearmente com a distância, e é de 336 euros por mês para uma distância percorrida de 300Km nesse intervalo de tempo e de 510 euros por mês para uma distância percorrida de 1500Km mensais.

1. Qual a equação que exprime o custo  $c$  em função da distância  $d$ ?

---



---

2. Façam uma previsão do custo mensal se percorrer:

- 2.1. 1000 Km por mês

---



---

- 2.2. 2000 Km por mês

---



---

3. Que distância máxima poderá percorrer num mês, de modo a não exceder um custo mensal de 600 euros? Justifiquem a vossa resposta.

---



---



---

4. Encontrem o ponto de intersecção da recta que representa a função (equação encontrada em 1.) com o eixo  $c$ . Qual o significado deste ponto?

---



---



---

<sup>6</sup> Tarefa adaptada de Álgebra 2 - Linear Functions as Models

5. Calculem a intersecção da mesma recta com o eixo  $d$ . Esse ponto fará sentido no contexto do problema? Porquê?

---

---

---

6. Desenhem o gráfico da função. Usem um domínio que seja adequado à situação.

7. Qual o declive da recta? O que representa este número?

---

---

---

**Variação dos Parâmetros<sup>7</sup>**

1. Utilizando o GeoGebra, visualiza os gráficos das funções:  $a(x) = 2x + 1$ ;  $b(x) = 2x + 5$ ;  $c(x) = 2x - 3$ . Compara os gráficos obtidos. Regista as tuas conclusões.

---

---

---

---

---

---

---

---

2. Procede do mesmo modo para as funções:  $d(x) = x + 3$ ;  $e(x) = 2x + 3$ ;  $f(x) = 3x + 3$ ;  $g(x) = -x + 3$ . Neste caso o que te chamou à atenção? Regista as tuas conclusões.

---

---

---

---

---

---

---

---

3. Faz um estudo semelhante ao anterior para as funções:  $f(x) = x$ ;  $g(x) = 2x$ ;  $h(x) = 4x$ ;  $i(x) = -2x$ . E agora que conclusões podes tirar?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

<sup>7</sup> Tarefa do Projecto 1001 itens

<b>Estrutura e sequência da aula</b>	
Início	
Desenvolvimento	
Conclusão	
<b>Ambiente</b>	
Tipo de orquestração instrumental	
Grau de envolvimento dos alunos	
<b>Interações a propósito da tecnologia</b>	
Entre alunos e entre alunos e professor	
<b>Papel do aluno</b>	
Tipo de actuação	
Grau e tipo de iniciativa	
Natureza da colaboração e entreajuda entre os alunos	
<b>Actividades em aula</b>	
Origem e iniciativa (professor, alunos)	
Suporte (oral e escrito)	
Grau de estruturação	
Estilo de trabalho (individual, grupo, colectivo)	
Duração	
Natureza (exposição, prática, exploração/investigação, resolução de problemas, modelação/aplicações)	
Conteúdo (carácter problemático, contextualização, ligação com a realidade, utilização de tecnologia)	

Adaptado de Guimarães (2003)

## Guião de Entrevista

**Objectivos gerais:** A realização da entrevista terá por base um guião e tem como objectivos: (i) conhecer as estratégias utilizadas pelos alunos na exploração de situações que envolvem relações funcionais simples, e (ii) compreender o modo como os alunos interpretam as diferentes situações problemáticas apresentadas e constroem o modelo matemático que lhes permitirá responder às questões colocadas.

A entrevista, terá uma tarefa a resolver pelos alunos (entrevista clínica) e procurará identificar estratégias privilegiadas e principais dificuldades dos alunos durante a resolução das tarefas e descrever o modo como estas estratégias são aplicadas, as perguntas, a efectuar, terão em conta a análise prévia feita aos trabalhos produzidos pelos alunos. Neste momento procurarei dar resposta à segunda e à terceira questões do estudo tentando apurar que vantagens/ dificuldades surgiram pela utilização do GeoGebra. As questões colocadas na entrevista, serão formuladas na linguagem do entrevistado e haverá alguma flexibilidade na sequência das questões, de modo a proporcionar a exploração de informações novas e relevantes para os objectivos da entrevista. Poderão assim ser colocadas novas questões mediante as reacções dos alunos e as respostas dadas.

### ENTREVISTA

Data e hora do início da entrevista

#### Questões iniciais:

- Qual é a importância que a Matemática tem para ti? E no mundo actual?
- Como foi o teu percurso escolar?
- No 7.º ano foste um bom aluno a Matemática. Qual é a razão?
- (Atribuições do sucesso: ao professor, a si próprio, aos métodos de estudo, à inteligência (tenho jeito), ao interesse (gosto), à auto estima (para mim é fácil) ou outros factores)
- O que gostaste mais de aprender em Matemática? E menos? (no 7.º ano/ no 8.ºano)

- Os teus professores já tinham usado o computador para ensinar algum conteúdo do programa? Como decorriam as aulas? E gostavas? Porquê?
- E com o GeoGebra, já tinhas trabalhado? Como eram essas aulas?

### Resolução da tarefa 1

Possíveis questões complementares a serem colocadas após o aluno ter terminado a realização da tarefa:

- E se não usasses o GeoGebra esta tarefa teria sido mais fácil ou mais difícil para ti? Porquê?
- Durante a realização da tarefa lembraste-te de algo que não tenhas dito?

### Resolução da tarefa 2

Neste caso os alunos podem optar por realizar esta tarefa com papel e lápis ou com recorrendo ao GeoGebra.

Possíveis questões complementares depois da realização da tarefa:

- Para resolver esta tarefa usaste o GeoGebra (ou papel e lápis) porquê?
- Alguma destas situações representa uma proporcionalidade directa? Porquê?
- Qual a constante de proporcionalidade? O que representa neste contexto?
- O que pensas das tarefas que realizaste na entrevista? Que dificuldades sentiste? Em que perguntas te sentiste mais à vontade?

### Questões finais:

- Nas tarefas realizadas anteriormente que dificuldades tiveste?
- Qual foi a tarefa que achaste mais difícil? Porquê?
- Em que medida o GeoGebra te ajudou, ou não, na realização das tarefas?
- Estiveste à vontade a trabalhar com o GeoGebra ou tiveste alguma dificuldade? Qual?
- Dum modo geral, como é que achas que consegues aprender melhor?

Registo da hora do final da gravação.

**Tarefa 1: Procurando modelos matemáticos**

Um ciclista pretende bater o recorde da distância percorrida numa hora. No decorrer desta tentativa o treinador foi registando as distâncias atingidas de 5 em 5 minutos:

Tempo (min.)	5	10	15	20	25	30
Distância (Km)	4.2	8.5	13.0	17.3	21.7	25.9

Será possível prever a distância que o ciclista alcançará ao fim de uma hora?

---



---



---



---



---



---

Utiliza o GeoGebra para construir um gráfico a partir dos valores indicados na tabela. Fundamenta a tua previsão com base num método geométrico e numa expressão algébrica.

O que fizeste foi criar um modelo matemático da situação apresentada.

Que interesse pode ter esse modelo? E que limitações tem no contexto do problema?

---



---



---



---



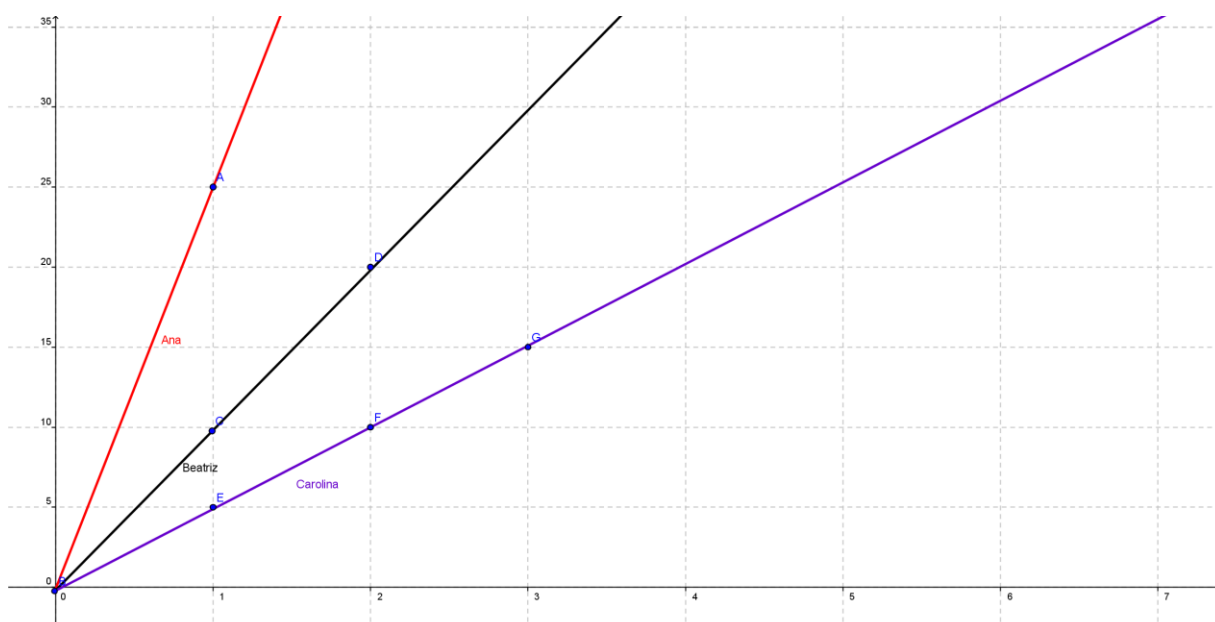
---



---

### Tarefa 2: A aluna mais rápida

A Ana, a Beatriz e a Carolina estão a aprender a escrever um texto no Word. A professora testou as suas velocidades e no mesmo referencial, colocou o tempo (em minutos) e o número de palavras escritas ao fim desse tempo, obteve os seguintes gráficos.



1. Qual a aluna mais rápida?

---



---

2. Quantas palavras consegue, cada uma delas, escrever por minuto?

---



---

3. Determina quanto tempo leva cada uma delas a escrever um certo texto com 520 palavras.

---

---

---

4. Escreve a equação de cada uma das rectas que contêm os pontos dos gráficos e indica o seu declive.

---

---

---

8.º Ano

Matemática

Autorização

Exma. Senhora Directora da Escola Secundária \_\_\_\_\_

Eu, Maria de Fátima Maduro Canário, professora do grupo 500 desta escola, venho por este meio solicitar autorização para concretizar, nesta escola, numa turma de 8.º ano o Projecto de Investigação em Educação intitulado “Aplicação Didáctica das Tecnologias no Estudo da Função Afim. Estudo de Caso”. Este projecto integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação, na área de especialização em Didáctica da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, que estou a desenvolver, e tem como objectivo estudar os processos usados pelos alunos de 8.º ano de escolaridade na resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, quando recorrem a um software educativo, no estudo da função afim (tema do programa da disciplina de Matemática). A recolha de dados será realizada na turma A do 8.º ano através de observação de aulas, diário de bordo, entrevistas a alguns alunos e trabalhos produzidos pelos mesmos.

Será necessário proceder ao registo áudio e/ou vídeo de alguns excertos das aulas, pelo que se procederá à solicitação da autorização aos Encarregados de Educação dos alunos envolvidos. Mais se esclarece que as imagens se destinam unicamente a servir de base de trabalho no âmbito da referida investigação, não estando sujeitas a qualquer tipo de divulgação posterior, garantindo-se o anonimato quer dos alunos quer da escola. De resto a participação neste projecto não acarretará nenhum inconveniente para os alunos, bem ao contrário constitui uma motivação suplementar que os poderá ajudar a melhorar o seu desempenho.

Grata pela colaboração,

\_\_\_\_\_, \_\_\_\_ de Outubro de 2010

Pede Deferimento,

\_\_\_\_\_  
(M<sup>a</sup> de Fátima Canário)

8.º Ano

Matemática

Autorização

Exm.º (a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Maria de Fátima Maduro Canário, professora de Matemática desta escola, estou a desenvolver um projecto de investigação intitulado “Aplicação Didáctica das Tecnologias no Estudo da Função Afim. Estudo de Caso”. Este projecto tem como objectivo estudar os processos usados pelos alunos de 8.º ano de escolaridade na resolução de tarefas de natureza exploratória e investigativa, quando recorrem a um software educativo, no estudo da função afim (tema do programa da disciplina de Matemática). Refiro que a Direcção da Escola já autorizou a realização deste estudo e que o professor de matemática da turma se mostrou disponível para colaborar na implementação do mesmo.

Venho por este meio solicitar autorização para proceder à recolha de dados que envolverá todos os alunos da turma. A recolha será realizada através de observação das aulas desta turma que serão registadas em áudio e/ou vídeo, análise de trabalhos produzidos pelos alunos e entrevistas a alguns deles.

Saliento que as imagens se destinam unicamente a servir de base de trabalho no âmbito da referida investigação, não estando sujeitas a qualquer tipo de divulgação posterior, garantindo-se o anonimato quer dos alunos quer da escola. De resto a participação neste projecto não acarretará nenhum inconveniente para os alunos, bem pelo contrário constitui uma motivação suplementar que os poderá ajudar a melhorar o seu desempenho.

Grata pela colaboração e com os melhores cumprimentos,

\_\_\_\_\_, \_\_\_\_ de Novembro de 2010

A professora

\_\_\_\_\_  
(M<sup>a</sup> de Fátima Canário)