

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM CIÊNCIAS ACTUARIAIS

MODELAÇÃO ESTOCÁSTICA
DE FUNDOS DE PENSÕES

PAULO ALEXANDRE ROSA PEREIRA ANTUNES

Orientação: Doutor Jorge Manuel Afonso Garcia

Júri:

- Presidente: Doutor Onofre Alves Simões, professor auxiliar do Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa;
- Vogais: Doutor Jorge Manuel Afonso Garcia, professor auxiliar do Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa;
Doutor João Miguel Espiguinha Guerra, professor auxiliar do Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa.

Setembro de 2010

RESUMO

Nesta dissertação é apresentado um modelo de análise da evolução de um plano de pensões de benefício definido, baseado na simulação estocástica da evolução dos salários dos participantes, responsabilidades, retorno dos activos e níveis de financiamento. O comportamento das variáveis subjacentes à evolução do modelo, nomeadamente a inflação, taxas de juro e retorno dos diversos activos é modelizado com base nos modelos financeiros de longo prazo de Wilkie e Hibbert. O risco associado às contribuições a efectuar pelo promotor do plano é medido através da dispersão das distribuições empíricas obtidas para o valor da taxa média de contribuição sobre os salários dos participantes. Os resultados obtidos a partir dos dois modelos são comparados graficamente e através da análise de estatísticas relevantes, interpretando-se as diferenças entre os resultados obtidos à luz das características dos modelos utilizados. Adicionalmente, são realizadas análises de sensibilidade dos resultados dos modelos face a variações de alguns dos parâmetros utilizados.

Palavras-chave: fundo de pensões, plano de benefício definido, modelo estocástico de activos financeiros, simulação estocástica, taxa de contribuição

ABSTRACT

This dissertation presents an analytic model of the evolution of a defined benefit pension plan, based on the stochastic simulation of participant's wages, responsibilities, asset returns and funding levels. The behavior of the variables underlying the model, namely inflation, interest rates and asset returns is modeled based on the long term financial models of Wilkie and Hibbert. The risk related to the contributions to be made by the plan's sponsor is measured based on the dispersion of the empirical distributions obtained for the value of the average contribution rate on the participant's wages. The results obtained with the two models are compared graphically and by analysis of relevant statistics, and the differences between the results obtained interpreted considering the characteristics of the models used. Furthermore, sensitivity analyses of the results obtained, given variations of some of the parameters used, are made.

Keywords: pension fund, defined benefit plan, stochastic asset model, stochastic simulation, contribution rate

Índice

Resumo / Abstract	2
Agradecimentos	8
1 – Introdução	9
2 – Apresentação do modelo proposto	12
2.1 – Problema em análise e metodologia utilizada	12
2.2 – Parâmetros e sub-modelos considerados	14
2.2.1 – Parâmetros	14
2.2.2 – Sub-modelos	17
2.3 – Descrição do plano de benefício definido considerado	20
2.4 – Modelização do retorno dos investimentos	21
2.4.1 – Cenário I – Modelo de Wilkie	21
2.4.2 – Cenário II – Modelo de Hibbert	33
2.4.2.1 – O modelo de estrutura a termo	34
2.4.2.2 – O modelo para “equity returns”	47
2.4.3 – Principais diferenças entre os dois modelos	49
2.5 – Modelização dos salários	53
2.5.1 – Cenário I	53
2.5.2 – Cenário II	54
2.6 – Modelização das responsabilidades e financiamento	56
2.7 – Considerações sobre os principais riscos inerentes ao plano de pensões em estudo	59
3 – Parametrização e resultados	66
3.1 – Parametrização	66
3.2 – Resultados obtidos	73

4 – Análises de sensibilidade	85
4.1 – Pressuposto de mortalidade	85
4.2 – Taxa de juro técnica	90
4.3 – Estratégia de alocação de activos	94
5 – Conclusões	99
Bibliografia	105

Lista de quadros

Quadro 1 – Parametrização comum aos dois cenários	66
Quadro 2 – Parametrização do cenário I – Modelo de Wilkie	70
Quadro 3 – Parametrização do cenário II – Modelo de Hibbert	72
Quadro 4 – Principais resultados	73
Quadro 5 – Volatilidades anuais e acumuladas	74
Quadro 6 – Distribuições empíricas das taxas médias de contribuição – Principais estatísticas	76
Quadro 7 – Distribuições empíricas das rendibilidades anuais dos investimentos em acções – Principais estatísticas	80
Quadro 8 – Análise de sensibilidade – Alteração do pressuposto de mortalidade	87
Quadro 9 – Análise de sensibilidade – Alteração da taxa de juro técnica	91
Quadro 10 – Análise de sensibilidade – Alteração da estratégia de alocação de activos	95

Lista de gráficos

Gráfico 1 – Distribuições empíricas das taxas médias de contribuição	76
Gráfico 2 – Funções de distribuição empíricas das taxas médias de contribuição	77
Gráfico 3 – Distribuição empírica da rentabilidade anual dos investimentos em acções - Cenário I	79
Gráfico 4 – Distribuição empírica da rentabilidade anual dos investimentos em acções - Cenário II	79
Gráfico 5 – Distribuição empírica da rentabilidade acumulada dos investimentos em acções -Cenário I	82
Gráfico 6 – Distribuição empírica da rentabilidade acumulada dos investimentos em acções -Cenário II	82
Gráfico 7 – Efeito da alteração do pressuposto de mortalidade sobre a distribuição empírica da taxa média de contribuição – Cenário I	88
Gráfico 8 – Efeito da alteração do pressuposto de mortalidade sobre a distribuição empírica da taxa média de contribuição – Cenário II	88
Gráfico 9 – Efeito da alteração do pressuposto de mortalidade sobre a função de distribuição empírica – Cenário I	89
Gráfico 10 – Efeito da alteração do pressuposto de mortalidade sobre a função de distribuição empírica – Cenário II	89
Gráfico 11 – Efeito da alteração da taxa de juro técnica sobre a distribuição empírica da taxa média de contribuição – Cenário I	92
Gráfico 12 – Efeito da alteração da taxa de juro técnica sobre a distribuição empírica da taxa média de contribuição – Cenário II	92
Gráfico 13 – Efeito da alteração da taxa de juro técnica sobre a função de distribuição empírica – Cenário I	93

Gráfico 14 – Efeito da alteração da taxa de juro técnica sobre a função de distribuição empírica – Cenário II	93
Gráfico 15 – Efeito da alteração da estratégia de alocação de activos sobre a distribuição empírica da taxa média de contribuição – Cenário I	96
Gráfico 16 – Efeito da alteração da estratégia de alocação de activos sobre a distribuição empírica da taxa média de contribuição – Cenário II	96
Gráfico 17 – Efeito da alteração da estratégia de alocação de activos sobre a função de distribuição empírica – Cenário I	97
Gráfico 18 – Efeito da alteração da estratégia de alocação de activos sobre a função de distribuição empírica – Cenário II	97

AGRADECIMENTOS

No momento em que concluo esta dissertação, gostaria de agradecer o apoio de todos aqueles que me auxiliaram ou foram importantes na sua realização, desde logo o Afonso e a Claudia que me acompanharam durante a sua elaboração e os meus pais, que sempre me apoiaram incondicionalmente em tudo o que ao longo da vida me propus realizar. Uma palavra de apreço também para os meus amigos, restantes familiares e colegas de trabalho e de estudo, cujo apoio foi e é fundamental neste como noutros aspectos da vida.

Agradeço também ao Professor Jorge Garcia, cujo rigor, entusiasmo e interesse pelas matérias em estudo serviram de incentivo à decisão de realizar esta dissertação e constituíram sempre um sólido apoio para o seu progresso.

Finalmente, gostaria de agradecer aos restantes professores do Mestrado em Ciências Actuariais, cujo interesse pelos alunos, rigor e exigência foram uma ajuda decisiva na tarefa, nem sempre fácil, de voltar a encarar os diversos assuntos numa perspectiva académica, depois de vários anos exclusivamente dedicados à vida profissional.

1 – INTRODUÇÃO

A evolução recente das sociedades desenvolvidas e a crise financeira de 2008, cujas consequências não se encontram a esta data ainda totalmente conhecidas, acentuaram a importância do desenvolvimento de mecanismos que permitam garantir à generalidade da população a manutenção de um nível de vida adequado no período pós vida activa.

Com efeito, é desde há muito conhecido o problema da insustentabilidade dos regimes públicos de segurança social da generalidade dos países da Europa ocidental, originado essencialmente pelas decisões de política social dos diversos estados, que nalguns casos proporcionaram o pagamento às gerações já reformadas de benefícios superiores aos que resultariam da pura capitalização das contribuições efectivamente realizadas, e também pela redução da natalidade e pelo aumento generalizado da esperança média de vida da população e portanto do período pós-reforma.

Adicionalmente, e ainda que as contribuições realizadas pelas gerações já reformadas tivessem sido suficientes para financiar os respectivos benefícios, o simples facto de não existir capitalização na maioria dos regimes públicos deixa sempre às gerações vindouras o encargo com os reformados, uma vez que as contribuições por estes realizadas ao longo da sua vida activa já foram utilizadas para o pagamento dos benefícios aos seus antecessores e em certos casos para suportar outros gastos do Estado.

A estes problemas vieram agora juntar-se os constrangimentos resultantes da delicada situação orçamental em que se encontra a generalidade dos países ocidentais, os quais deverão colocar, pelo menos durante as próximas décadas, fortes restrições ao crescimento, ou até à manutenção nos níveis actuais, dos gastos dos estados com políticas sociais.

Neste contexto, em que existe alguma incerteza sobre o valor dos benefícios que poderão ser proporcionados no futuro pelos regimes públicos de segurança social aos trabalhadores actualmente na vida activa, ganham importância acrescida os mecanismos complementares de poupança para a reforma, quer os promovidos pelas entidades patronais quer os de iniciativa individual.

O presente trabalho procurou desenvolver um modelo de análise da evolução de um plano de pensões de benefício definido, tendo como principal objectivo construir e aplicar na prática uma metodologia de medição do risco associado às contribuições a efectuar pelo promotor do plano de pensões, efectuando-se a simulação estocástica da evolução dos salários, responsabilidades, retorno dos diversos activos e níveis de financiamento, com a finalidade de obter uma distribuição empírica para a taxa média de contribuição sobre os salários a efectuar ao longo da vida activa de modo a assegurar o benefício pretendido.

Embora a análise se tenha centrado num plano de benefício definido, a metodologia proposta pode ser facilmente adaptada ao desenho de um seguro de capitalização ou de outro mecanismo de poupança individual, substituindo-se as condições do plano de benefício definido pelos objectivos de poupança inerentes à subscrição do produto.

No segundo capítulo desta dissertação apresenta-se a metodologia adoptada, as variáveis e parâmetros incluídos e a revisão da literatura relativa aos modelos utilizados para efectuar a simulação da evolução dos activos do plano, salários e responsabilidades. Descreve-se ainda o funcionamento destes modelos e apresentam-se as equações relevantes para o presente trabalho. No terceiro capítulo apresentam-se as parametrizações adoptadas e os resultados obtidos. No quarto capítulo são apresentados os resultados das análises de sensibilidade efectuadas sobre vários dos parâmetros do modelo, nomeadamente os pressupostos de mortalidade, a taxa de juro técnica e as escolhas efectuadas no que se refere à alocação de activos. As conclusões são apresentadas no capítulo cinco.

2 – APRESENTAÇÃO DO MODELO PROPOSTO

2.1 – Problema em análise e metodologia utilizada

O presente trabalho teve por finalidade desenvolver e aplicar na prática uma metodologia de análise do esforço de financiamento necessário à concretização de um plano de benefício definido. Para este efeito, construiu-se um modelo que permite obter a distribuição empírica do montante das contribuições a efectuar pelo promotor e também da taxa média de contribuição sobre os salários a auferir pelo trabalhador ao longo do período contributivo, obtendo-se também medidas para o risco associado a estas variáveis.

A metodologia utilizada foi a simulação estocástica, que consiste na geração de um elevado número de cenários para as variáveis que se pretendem estudar, condicionados naturalmente pelos pressupostos assumidos relativamente ao comportamento das variáveis e aos parâmetros do modelo.

Os cenários acima referidos permitem determinar a distribuição empírica das variáveis objectivo em estudo, a partir da qual é possível definir medidas do risco associado às mesmas. Caso o nível de risco calculado seja considerado demasiado elevado, deverão introduzir-se correcções ao plano, por exemplo ao nível da estratégia de alocação de activos, de modo a reduzir o risco até ao limite considerado tolerável.

Desta forma, o modelo proposto realiza, de forma independente para cada um dos cenários, e ao longo do período compreendido entre a data de início das contribuições e a data de passagem à reforma, os seguintes passos:

- a) Modelização do comportamento da inflação, taxas de juro e retorno das diversas categorias de activos, efectuada de acordo com o sub-modelo escolhido para a projecção do comportamento destas variáveis;
- b) Modelização da evolução dos salários ao longo da duração do plano, efectuada com base no sub-modelo escolhido para a projecção salarial;
- c) Cálculo do valor acumulado do fundo de pensões no final de cada exercício, atendendo à estratégia de alocação de activos escolhida e às rentabilidades de cada tipo de activos determinadas através do sub-modelo acima referido;
- d) Determinação do benefício anual, do respectivo capital de cobertura à idade de reforma, do valor actual do benefício total no final de cada exercício e do correspondente valor do fundo normal, baseados na projecção efectuada para os salários, nos benefícios previstos pelo plano de pensões em estudo e nos restantes pressupostos assumidos;
- e) Cálculo da contribuição a efectuar pelo promotor e do nível de financiamento atingido no final de cada exercício, atendendo ao valor do fundo normal, ao valor acumulado do fundo de pensões e às regras de financiamento definidas;
- f) Cálculo do valor actual das contribuições a efectuar pelo promotor ao longo da duração do plano e do valor actual dos salários futuros, ambos reportados à data de início do plano e utilizando uma taxa de actualização de 4%, e da taxa média de contribuição, que corresponde ao quociente entre estes dois valores.

2.2 – Parâmetros e sub-modelos considerados

Descrevem-se em seguida os principais parâmetros e sub-modelos considerados na construção do modelo proposto:

2.2.1 - Parâmetros

a) Duração do plano e idade de reforma

O esquema apresentado tem subjacente um período contributivo de 35 anos, pressupondo que o plano tem início quando o participante tem 30 anos e que a reforma ocorre aos 65 anos. Como é evidente, a alteração destes parâmetros não implica quaisquer mudanças substanciais ao modelo proposto, embora a natureza dos benefícios a atribuir determine que a um maior período contributivo corresponda um benefício superior. Por outro lado, de um ponto de vista teórico, uma maior duração do plano deverá permitir reduzir o risco de obtenção de resultados extremos.

b) Benefícios atribuídos

Conforme explicado na secção 2.3, o plano de pensões considerado corresponde a um plano sobre o salário final, estando o benefício a atribuir indexado ao valor do salário final e ao número de anos de serviço à data da reforma. O modelo utilizado pode ser facilmente adaptado a outro tipo de plano ou produto de benefício definido.

c) Estratégia de alocação de activos

O modelo proposto prevê o investimento do património do fundo de pensões em diversas classes de activos, nomeadamente obrigações de taxa fixa, obrigações de taxa indexada, liquidez, acções e imobiliário, as quais apresentam naturalmente diferentes rentabilidades esperadas e níveis de risco.

Desta forma, a escolha da estratégia de alocação de activos tem consequências importantes sobre as rentabilidades obtidas, sobre o valor esperado das contribuições a efectuar pelo promotor e sobre o nível de risco a que este ficará sujeito.

No cenário base do presente trabalho foi considerada uma alocação de activos correspondente a um perfil de risco moderado, que se manteve constante ao longo da duração do plano.

Contudo, tendo em conta as características do plano considerado, pode ser defensável proceder a uma redução gradual do risco médio dos activos do fundo à medida que se aproxima a idade de reforma, com a finalidade de reduzir o risco de que o registo de rentabilidades baixas ou negativas de alguns activos nos últimos anos do plano possa ter como consequência obrigar o promotor a efectuar contribuições superiores às previstas, não compensáveis nos anos seguintes.

Este problema é abordado no capítulo 4, no âmbito das análises de sensibilidade realizadas.

d) Pressupostos de mortalidade

A esperança média de vida nas sociedades desenvolvidas tende a acompanhar a evolução da sociedade, crescendo em paralelo com a melhoria do nível de vida, com o acesso generalizado a melhores cuidados de saúde e com o próprio progresso da medicina.

Neste sentido, não é difícil prever que esta tendência se mantenha no futuro próximo, com uma evolução mais moderada nos países onde o indicador é já hoje muito elevado, e com uma maior progressão nos países mais atrasados, realizada à medida que o respectivo nível de vida converge com o dos países mais avançados.

Pelos motivos expostos, o estabelecimento de um plano de pensões de benefício definido ou de qualquer produto com garantias similares deve implicar uma análise cuidada do risco de longevidade associado.

No modelo proposto, o valor acumulado do fundo de pensões na data da passagem à reforma é utilizado na aquisição de uma renda vitalícia que garante a partir desse momento o pagamento dos benefícios atribuídos. Existe portanto o risco de o custo desta renda vitalícia, que depende essencialmente dos pressupostos de mortalidade e da taxa de juro utilizados pela respectiva entidade vendedora, ser superior ao valor previsto no modelo, circunstância que obrigaria, visto tratar-se de um plano de benefício definido, à realização pelo promotor de uma contribuição adicional destinada a fazer face ao desvio verificado.

Este modelo aconselha portanto à utilização de pressupostos de mortalidade conservadores, que incorporem as expectativas sobre os ganhos de longevidade que previsivelmente se irão verificar durante o decorrer do plano.

No cenário base do presente trabalho optámos por calcular o capital de cobertura da renda à data da reforma com base na tábua de mortalidade TV 88/90, de utilização corrente no mercado Português.

No capítulo 4, no âmbito das análises de sensibilidade realizadas, é analisado o impacto sobre o valor das contribuições a efectuar pelo promotor, de eventuais variações dos pressupostos de mortalidade utilizados.

2.2.2 – Sub-modelos

a) Retorno dos activos

Os modelos utilizados para projectar o retorno dos activos constituem a peça central do modelo proposto, na medida em que os seus resultados vão determinar a rentabilidade dos investimentos do fundo de pensões e consequentemente a evolução do valor dos seus activos, e por outro lado, através da projecção da inflação, vão influenciar a evolução salarial e portanto a evolução das responsabilidades do fundo.

No presente trabalho são apresentados dois cenários, o primeiro baseado no Modelo de Wilkie, na sua versão de 1995 e o segundo no Modelo de Hibbert, Mowbray and Turnbull, apresentado em 2001.

No modelo de Wilkie, a taxa de inflação é gerada através de um processo auto-regressivo de primeira ordem, constituindo a variável central do modelo. As equações que determinam as restantes variáveis, nomeadamente as taxas de juro de longo e de curto prazo, o retorno dos investimentos em acções, imobiliário e obrigações de taxa indexada e o crescimento salarial incorporam na determinação destas variáveis a projecção efectuada para a taxa de inflação.

No modelo de Hibbert, as taxas de juro reais e as taxas de inflação são determinadas através do modelo de dois factores de Hull-White, no qual a taxa de curto prazo converge para um valor médio, que é ele próprio uma variável aleatória que converge para a média de longo prazo. Através destes modelos é determinada a estrutura a termo da taxa de juro real e da taxa de inflação, as quais permitem determinar a rentabilidade dos investimentos em activos cuja remuneração tem características de juro.

A rentabilidade dos investimentos em acções é modelizada através de um processo de Markov com dois estados, que procuram reproduzir os diferentes estados da conjuntura económica. O primeiro estado tem uma rentabilidade esperada positiva com variância reduzida e o segundo estado apresenta uma rentabilidade esperada negativa com variância elevada. As probabilidades de transição entre os dois estados implicam que o estado predominante seja normalmente o primeiro.

Os principais aspectos destes dois modelos e as equações utilizadas no presente trabalho são apresentados na secção 2.4.

b) Evolução salarial

No cenário I a evolução salarial foi modelizada com base na correspondente equação do modelo de Wilkie, na medida em que a taxa de crescimento salarial constitui uma das variáveis deste modelo.

No cenário II foi utilizada uma linha salarial, através da qual o crescimento salarial está indexado à taxa de inflação determinada pelo modelo, acrescida de uma taxa de crescimento real.

Os principais aspectos destes dois modelos e as equações utilizadas no presente trabalho são apresentados na secção 2.5.

2.3 – Descrição do plano de benefício definido considerado

O plano de benefício definido escolhido para a realização do presente trabalho corresponde a um plano sobre o salário final. Desta forma, o montante da pensão de reforma a atribuir ao participante resulta da aplicação ao salário final de uma fórmula de cálculo do benefício estabelecida à partida. Esta fórmula é a seguinte:

$$P = n^{\circ} \text{ de anos de serviço} * 1\% * SF$$

Sendo:

P – Pensão anual;

SF – Salário final anual.

Tendo em conta que a idade de reforma constitui um parâmetro do modelo proposto, a única componente de aleatoriedade resulta da indexação do benefício ao salário final, cujo valor é determinado pelo modelo utilizado para o crescimento salarial, o qual depende normalmente da evolução da inflação, acrescida de uma regra ou mecanismo de crescimento real.

A extensão do modelo a outro tipo de benefícios, nomeadamente sobre salários de carreira, é relativamente simples, uma vez que os salários vão sendo conhecidos à medida que as simulações anuais vão ocorrendo.

2.4 – Modelização do retorno dos investimentos

Nesta secção são apresentados os aspectos fundamentais dos modelos de retorno dos investimentos utilizados bem como as equações relevantes para o presente trabalho.

2.4.1 – Cenário I – Modelo de Wilkie

A versão original do modelo de Wilkie foi publicada em 1986. Em 1995 foi apresentada no British Actuarial Journal uma versão revista, contendo modelos para uma série de variáveis anteriormente não contempladas – Wilkie (1995).

Esta versão do modelo apresenta equações destinadas à modelização da inflação, salários, rendimentos, dividendos e preços das acções, taxas de juro de longo prazo, taxas de juro de curto prazo, imobiliário, obrigações de taxa indexada e taxa de câmbio. Neste trabalho foram utilizados todos os modelos com excepção do cambial, na medida em que assumimos que todos os investimentos são efectuados na moeda em que estão expressas as responsabilidades.

a) Inflação

A taxa de inflação verificada durante o ano t (taxa de crescimento do índice de Preços entre os anos $t-1$ e t) é modelizada como um processo autoregressivo de primeira ordem, através da seguinte equação:

$$I(t) = QMU + QA * [I(t - 1) - QMU] + QE(t),$$

$$QE(t) = QSD * QZ(t),$$

$$QZ(t) \sim iid N(0,1).$$

Sendo:

QMU – Taxa de inflação média;

QA – Parâmetro autoregressivo para a taxa de inflação;

QE(t) – Resíduo aleatório;

QSD – Desvio padrão do resíduo aleatório;

QZ(t) – Sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal estandardizada.

O racional desta equação pode ser descrito como: a taxa de inflação observada em cada ano é igual à sua média de longo prazo, acrescida de QA do desvio em relação à média verificado no ano anterior e ainda de um resíduo aleatório com distribuição normal, de média zero e desvio padrão QSD.

b) Salários

O modelo de Wilkie para o crescimento salarial é apresentado na secção 2.5.1 abaixo.

c) Acções

A rentabilidade dos investimentos em acções é calculada a partir dos resultados das equações que determinam a Dividend Yield (“Share dividend yields”), $Y(t)$, e o índice de dividendos das acções (“Share dividends”), $D(t)$.

i) Dividend Yield

A dividend yield é modelizada através da seguinte equação:

$$Y(t) = \exp\{YW * I(t) + \ln YMU + YN(t)\} \Leftrightarrow$$

$$\ln Y(t) = YW * I(t) + \ln YMU + YN(t),$$

$$YN(t) = YA * YN(t - 1) + YE(t),$$

$$YE(t) = YSD * YZ(t),$$

$$YZ(t) \sim iid N(0,1).$$

Sendo:

YW – Factor para a inflação do período corrente;

YMU – Média da dividend yield;

YA – Parâmetro autoregressivo para o desvio em relação à média do logaritmo do dividend yield do período anterior;

$YE(t)$ – Resíduo aleatório;

YSD – Desvio padrão do resíduo aleatório;

$YZ(t)$ – Sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal estandardizada.

O racional desta equação pode ser descrito como: o logaritmo da dividend yield observado em cada período é igual ao seu valor médio ($\ln YMU$), acrescido de YA do seu desvio face à média observado no período anterior, de YW da inflação do período e ainda de um resíduo aleatório com distribuição normal, de média zero e desvio padrão YSD .

ii) Dividendos

A evolução do índice dos dividendos das acções, $D(t)$, é modelizada através da seguinte equação:

$$D(t) = D(t - 1) \\ * \exp\{DW * DM(t) + (1 - DW) * I(t) + DMU + DY * YE(t - 1) \\ + DB * DE(t - 1) + DE(t)\},$$

$$DM(t) = DD * I(t) + (1 - DD) * DM(t - 1),$$

$$DE(t) = DSD * DZ(t),$$

$$DZ(t) \sim iid N(0,1).$$

Podendo definir-se a sua variação anual em logaritmos como:

$$K(t) = \ln D(t) - \ln D(t - 1),$$

e portanto,

$$K(t) = DW * DM(t) + (1 - DW) * I(t) + DMU + DY * YE(t - 1) + DB \\ * DE(t - 1) + DE(t).$$

Sendo:

DW – Factor para a inflação;

DD – Factor de desfasamento da inflação;

DMU – Média do crescimento real dos dividendos das acções;

DY – Factor de ligação ao resíduo da dividend yield do ano anterior;

DB – Factor de ligação ao resíduo dos dividendos das acções do ano anterior;

DE(t) – Resíduo aleatório;

DSD – Desvio padrão do resíduo aleatório;

DZ(t) – Sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal estandardizada.

O racional desta equação pode ser descrito como: a variação anual do índice dos dividendos das acções, em logaritmo, é explicada através de uma função dos valores presentes e passados da inflação, acrescida da taxa média de crescimento real, de uma influência do resíduo aleatório da equação da dividend yield do ano anterior, de uma influência do resíduo aleatório da equação dos dividendos das acções do ano anterior, e ainda de um resíduo aleatório com distribuição normal, de média zero e desvio padrão DSD.

iii) Preço e retorno total das acções

O preço das acções, $P(t)$, é calculado a partir dos resultados das equações anteriores, através da seguinte relação:

$$P(t) = \frac{D(t)}{Y(t)} \Leftrightarrow Y(t) = \frac{D(t)}{P(t)}$$

Finalmente, o retorno total do investimento em acções no ano t , que é composto pela variação do preço do activo e pelos dividendos recebidos, é calculado da seguinte forma:

$$RT P(t) = \frac{[P(t) + D(t)]}{P(t-1)} - 1$$

d) Taxas de juro de longo prazo

O tratamento das taxas de juro de longo prazo no Modelo de Wilkie é efectuado através da equação que determina a taxa de rentabilidade das obrigações de taxa fixa de longo prazo, emitidas pelo Estado (no caso concreto foram utilizadas obrigações perpétuas).

Esta equação é a seguinte:

$$C(t) = \text{Max}[CW * CM(t) + CMU * \exp\{CN(t)\}; CMIN],$$

$$CM(t) = CD * I(t) + (1 - CD) * CM(t - 1),$$

$$CN(t) = CA * CN(t - 1) + CY * YE(t) + CE(t),$$

$$CE(t) = CSD * CZ(t),$$

$$CZ(t) \sim iid N(0,1).$$

Sendo:

CW – Factor para a inflação;

CMU – Média da taxa de juro real;

CMIN – Valor mínimo para a taxa de juro de longo prazo;

CD – Factor de desfasamento da inflação;

CA – Parâmetro autoregressivo da taxa de juro de longo prazo;

CY – Factor de ligação ao resíduo aleatório do dividend yield;

CE(t) – Resíduo aleatório;

CSD – Desvio padrão do resíduo aleatório;

CZ(t) – Sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal estandardizada.

O racional desta equação pode ser descrito como: a taxa de rentabilidade das obrigações de taxa fixa de longo prazo pode ser decomposta em duas componentes, nomeadamente a inflação esperada e o retorno real. A inflação esperada é baseada numa média móvel dos valores da inflação passada. O logaritmo do retorno real é igual ao seu valor médio (ln CMU) acrescido de CA do desvio em relação à média verificado no período anterior, de uma influência do resíduo aleatório da equação do dividend yield das acções do período corrente e ainda de um resíduo aleatório com distribuição normal, de média zero e desvio padrão CSD.

O parâmetro CMIN não faz parte do modelo apresentado por Wilkie, tendo sido introduzido com a finalidade de condicionar os resultados do modelo, servindo essencialmente para evitar a geração de valores negativos para a taxa de juro de longo prazo.

O retorno total das obrigações de taxa fixa é obtido a partir da variação da sua taxa de rendimento anual, com base na seguinte fórmula:

$$RT C(t) = \left\{ 1 + \frac{1}{C(t)} \right\} * C(t - 1) - 1$$

e) Taxas de juro de curto prazo

Considerando que a evolução das taxas de juro de curto prazo está claramente ligada à evolução das taxas de longo prazo, o autor do modelo optou por modelizar as taxas de curto prazo com base no logaritmo do rácio entre estas duas taxas, ou seja:

$$\ln C(t) - \ln B(t) = -\ln\left(\frac{B(t)}{C(t)}\right)$$

Esta metodologia baseia-se no pressuposto, considerado plausível pelo autor, de que o spread entre as taxas de longo prazo e as taxas de curto prazo é proporcionalmente constante ao longo do tempo, em vez de simplesmente constante.

O logaritmo da taxa de juro de curto prazo é modelizado através da seguinte equação:

$$\ln B(t) = \ln C(t) - BMU - BN(t),$$

$$BN(t) = BA * BN(t - 1) + BE(t),$$

$$BE(t) = BSD * BZ(t),$$

$$BZ(t) \sim iid N(0,1).$$

Sendo:

BMU – Média do logaritmo do rácio entre as taxas de juro de longo prazo e de curto prazo;

BA – Parâmetro autoregressivo da taxa de juro de curto prazo;

BE(t) – Resíduo aleatório;

BSD – Desvio padrão do resíduo aleatório;

BZ(t) – Sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal standardizada.

O racional desta equação pode ser descrito como: o logaritmo da taxa de juro de curto prazo é igual ao logaritmo da taxa de juro de longo prazo, deduzido do valor médio do spread entre as taxas de longo e de curto prazo e acrescido de BA do desvio em relação à média do período anterior e ainda de um resíduo aleatório com distribuição normal, de média zero e desvio padrão BSD.

f) Imobiliário

O modelo para a determinação do retorno dos investimentos em imobiliário é análogo ao das acções. Desta forma, a rentabilidade dos investimentos em activos imobiliários é calculada a partir de equações que determinam a taxa de rentabilidade do imobiliário (“Property yield”), $Z(t)$, e os rendimentos imobiliários (“Property income”), $E(t)$.

i) Taxa de rendibilidade do imobiliário

A taxa de rendibilidade do imobiliário é modelizada através da seguinte equação:

$$\ln Z(t) = \ln ZMU + ZA * [\ln Z(t - 1) - \ln ZMU] + ZE(t),$$

$$ZE(t) = ZSD * ZZ(t),$$

$$ZZ(t) \sim iid N(0,1).$$

Sendo:

ZMU – Média da taxa de rendimento do imobiliário;

ZA – Parâmetro autoregressivo da taxa de rendimento do imobiliário;

ZE(t) – Resíduo aleatório;

ZSD – Desvio padrão do resíduo aleatório;

ZZ(t) – Sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal estandardizada.

O racional desta equação pode ser descrito como: o logaritmo da taxa de rendibilidade do imobiliário observado em cada período é igual ao seu valor médio ($\ln ZMU$), acrescido de ZA do seu desvio face à média observado no período anterior e ainda de um resíduo aleatório com distribuição normal, de média zero e desvio padrão ZSD .

ii) Rendimentos imobiliários

A evolução do índice dos rendimentos imobiliários, $E(t)$, é modelizada através da seguinte equação:

$$E(t) = E(t - 1) * \exp\{EM(t) + EMU + EBZ * ZE(t) + EE(t)\},$$

$$EM(t) = ED * I(t) + (1 - ED) * EM(t - 1),$$

$$EE(t) = ESD * EZ(t),$$

$$EZ(t) \sim iid N(0,1).$$

Sendo:

EMU – Média dos rendimentos imobiliários;

EBZ – Factor de ligação ao resíduo da taxa de rendimento do imobiliário;

ED – Factor de média móvel da inflação;

EE(t) – Resíduo aleatório;

ESD – Desvio padrão do resíduo aleatório;

EZ(t) – Sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal estandardizada.

O racional desta equação pode ser descrito como: o rendimento dos investimentos imobiliários observado em cada período é igual ao seu valor médio (EMU), acrescido de uma função dos valores presentes e passados da inflação, de uma influência do resíduo aleatório da taxa de rentabilidade do imobiliário do período corrente e ainda de um resíduo aleatório com distribuição normal, de média zero e desvio padrão ESD.

iii) Preço e retorno total do investimento em imobiliário

O preço dos investimentos em imobiliário, $A(t)$, é calculado a partir dos resultados das equações anteriores, através da seguinte relação:

$$A(t) = \frac{E(t)}{Z(t)} \Leftrightarrow Z(t) = \frac{E(t)}{A(t)}$$

Finalmente, o retorno total do investimento em imobiliário no ano t , que é composto pela variação do preço do activo e pelos rendimentos recebidos, é calculado da seguinte forma:

$$RT A(t) = \frac{[A(t) + E(t)]}{A(t-1)} - 1$$

g) Obrigações de taxa indexada

A taxa de rentabilidade real das obrigações de taxa indexada é determinada através da seguinte equação:

$$\ln R(t) = \ln RMU + RA * [\ln R(t-1) - \ln RMU] + RBC * CE(t) + RE(t),$$

$$RE(t) = RSD * RZ(t),$$

$$RZ(t) \sim iid N(0,1).$$

Sendo:

RMU – Média da taxa de rendimento real das obrigações de taxa indexada;

RA – Parâmetro autoregressivo da taxa de rendimento real das obrigações de taxa indexada;

RBC – Factor de ligação ao resíduo aleatório das taxas de juro de longo prazo;

RE(t) – Resíduo aleatório;

RSD – Desvio padrão do resíduo aleatório;

RZ(t) – Sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal standardizada.

O racional desta equação pode ser descrito como: o logaritmo da taxa de rendimento real das obrigações de taxa indexada é igual ao seu valor médio, acrescido de RA do seu desvio em relação à média observado no período anterior, de uma influência do resíduo aleatório das taxas de juro de longo prazo do período corrente e ainda de um resíduo aleatório com distribuição normal, de média zero e desvio padrão RSD.

O retorno total das obrigações de taxa indexada é obtido a partir da variação da sua taxa de rendimento real anual, corrigida pelo efeito da inflação, com base na seguinte fórmula:

$$RT R(t) = \left[\left\{ 1 + \frac{1}{R(t)} \right\} * R(t - 1) \right] * [exp\{I(t)\}] - 1$$

2.4.2 – Cenário II – Modelo de Hibbert

O Modelo de Hibbert, Mowbray and Turnbull foi apresentado em 2001 – Hibbert, Mowbray and Turnbull (2001) e pode ser dividido em duas componentes fundamentais:

- i) O modelo de estrutura a termo das taxas de juro, que permite gerar estruturas a termo completas e consistentes para as taxas de juro reais, taxas de inflação e taxas de juro nominais. A rentabilidade dos investimentos em liquidez, obrigações de taxa fixa e obrigações de taxa indexada é calculada a partir das taxas de juro produzidas por este modelo.

- ii) O modelo para “equity returns”, baseado num processo de Markov com dois estados, que representam os diferentes estados da conjuntura económica, foi concebido de modo a permitir gerar distribuições com assimetria negativa e Kurtosis elevado, propriedades comuns das distribuições reais dos rendimentos deste tipo de instrumentos. Adicionalmente, a formulação deste modelo não incorpora qualquer componente de reversão para a média, opção que o autor considera aconselhável face às características deste tipo de activo.

Um modelo semelhante para a rendibilidade dos “equity returns” é apresentado por Ahlgrim, D’Arcy and Gorrivett (2004).

Em seguida apresentam-se os principais aspectos de cada uma destas componentes e as equações subjacentes.

2.4.2.1 – O modelo de estrutura a termo

Tendo em conta a forte ligação existente entre a taxa de inflação e as taxas de juro nominais, o autor optou por construir o modelo para as taxas de juro nominais a partir de duas componentes separadas, um modelo para a estrutura a termo das taxas de juro reais e um modelo para a estrutura a termo das taxas de inflação, as quais são combinadas para obter a estrutura a termo das taxas de juro nominais.

a) Taxas de juro reais

O modelo utilizado pelos autores para a estrutura a termo das taxas de juro reais é um caso particular do modelo de dois factores de Hull & White (1994), o qual é uma extensão do modelo de Vasicek (1977).

De acordo com este modelo, a taxa de juro de curto prazo segue um processo estocástico de reversão para a média em tempo contínuo, que determina a evolução futura esperada da taxa de juro de curto prazo, a partir da qual se determinam as taxas forward e as taxas spot para as várias maturidades, permitindo obter a estrutura a termo da taxa de juro.

A adição do segundo factor estocástico faz com que o nível de reversão para a média da taxa de juro de curto prazo deixe de ser um parâmetro e passe, também ele, a seguir um processo estocástico de reversão para a média.

A evolução das taxas de juro reais é modelizada através das seguintes equações:

$$dr_1(t) = \alpha_{r_1}(r_2(t) - r_1(t))dt + \sigma_{r_1}dZ_{r_1}(t)$$

$$dr_2(t) = \alpha_{r_2}(\mu_r - r_2(t))dt + \sigma_{r_2}dZ_{r_2}(t)$$

Sendo:

$r_1(t)$ – Taxa de juro real de curto prazo no momento t ;

$r_2(t)$ – Nível de reversão para a média da taxa de juro real de curto prazo no momento t ;

α_{r_1} – Parâmetro autoregressivo para o processo da taxa de juro real de curto prazo;

α_{r_2} – Parâmetro autoregressivo para o processo de reversão para a média da taxa de juro real de curto prazo;

σ_{r_1} – Volatilidade anualizada (desvio padrão) da taxa de juro real de curto prazo;

σ_{r_2} – Volatilidade anualizada (desvio padrão) do nível de reversão para a média da taxa de juro real de curto prazo;

μ_r – Nível de reversão para a média de $r_2(t)$;

$dZ_{r_1}(t)$ – Incremento aleatório do processo da taxa de juro real de curto prazo, que tem distribuição $N(0, dt)$;

$dZ_{r_2}(t)$ – Incremento aleatório do processo de reversão para a média da taxa de juro real de curto prazo, que tem distribuição $N(0, dt)$;

g_r – Parâmetro de controlo do prémio de risco embutido no preço das obrigações reais.

Adicionalmente, são incorporadas as seguintes restrições:

b_{r_1} – Limite mínimo para a taxa de juro real de curto prazo, $r_1(t)$;

b_{r_2} – Limite mínimo para o nível de reversão para a média da taxa de juro real de curto prazo, $r_2(t)$.

As duas equações apresentadas definem o comportamento da taxa de juro real de curto prazo, sendo o equivalente em tempo contínuo a dois processos autoregressivos de primeira ordem. De acordo com este modelo, a variação da taxa de juro real de curto prazo, $dr_1(t)$, é igual a α_{r1} vezes a diferença entre o nível de reversão para a média da taxa de juro real no momento t , $r_2(t)$, que pode ser visto como o valor da taxa de juro real de longo prazo, e o valor da taxa de juro real de curto prazo no momento t , $r_1(t)$, acrescido de um resíduo aleatório com distribuição normal.

Por sua vez, a variação no nível de reversão para a média da taxa de juro real de curto prazo, $dr_2(t)$, é igual a α_{r2} vezes a diferença entre o nível de reversão para a média de $r_2(t)$ e o valor de r_2 no momento t , $r_2(t)$, acrescido de um resíduo aleatório com distribuição normal.

O parâmetro g_r define o prémio de risco de longo prazo, ou seja o excesso de rendimento das obrigações reais de longo prazo face às taxas de juro reais de curto prazo.

As equações apresentadas assumem que as taxas de juro reais têm distribuição normal, tornando admissível a existência de taxas de juro reais negativas. Esta possibilidade, que é normalmente vista como um inconveniente, pode ser considerada aceitável, dado tratar-se de um modelo para taxas de juro reais.

Estas equações determinam implicitamente a totalidade da estrutura a termo das taxas de juro reais, na medida em que permitem calcular a trajectória futura esperada das taxas de juro reais de curto prazo. Estas taxas podem ser equiparadas às taxas forward em vigor no período corrente, a partir das quais é possível calcular as taxas spot para os vários horizontes temporais.

O modelo apresentado pode ser aplicado em tempo discreto. Quando conhecidos os valores correntes de $r_1(t)$ e $r_2(t)$, os valores esperados e variâncias destas variáveis para quaisquer incrementos temporais podem ser calculados através das seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 E(r_1(T)|r_1(t), r_2(t)) &= \mu_r + e^{-\alpha_{r1}(T-t)}(r_1(t) - \mu_r) \\
 &+ \frac{\alpha_{r1}}{\alpha_{r1} - \alpha_{r2}}(e^{-\alpha_{r2}(T-t)} - e^{-\alpha_{r1}(T-t)})(r_2(t) - \mu_r)
 \end{aligned}$$

$$E(r_2(T)|r_2(t)) = \mu_r + e^{-\alpha_{r2}(T-t)}(r_2(t) - \mu_r)$$

$$\begin{aligned}
 Var(r_1(T)|r_1(t), r_2(t)) &= \frac{\sigma_{r1}^2}{2\alpha_{r1}}(1 - e^{-2\alpha_{r1}(T-t)}) + \sigma_{r2}^2 * \left(\frac{\alpha_{r1}}{\alpha_{r1} - \alpha_{r2}}\right)^2 \\
 &* \left(\frac{1}{2\alpha_{r1}}(1 - e^{-2\alpha_{r1}(T-t)}) + \frac{1}{2\alpha_{r2}}(1 - e^{-2\alpha_{r2}(T-t)})\right. \\
 &\left. - \frac{2}{\alpha_{r1} - \alpha_{r2}}(1 - e^{-(\alpha_{r1} + \alpha_{r2})(T-t)})\right)
 \end{aligned}$$

$$Var(r_2(T)|r_2(t)) = \frac{\sigma_{r2}^2}{2\alpha_{r2}}(1 - e^{-2\alpha_{r2}(T-t)})$$

Conhecidos os momentos acima apresentados, e sabendo que $r_1(t)$ e $r_2(t)$ têm distribuição normal, podemos obter possíveis trajectórias esperadas para estas variáveis, utilizando as seguintes equações:

$$r_1(T) = E(r_1(T)|r_1(t), r_2(t)) + \sqrt{\text{Var}(r_1(T)|r_1(t), r_2(t))} * (Z_1(T) + g_r \sqrt{T-t})$$

$$r_2(T) = E(r_2(T)|r_2(t)) + \sqrt{\text{Var}(r_2(T)|r_2(t))} * (Z_2(T) + g_r \sqrt{T-t})$$

em que $Z_1(t)$ e $Z_2(t)$ são resíduos aleatórios independentes com distribuição normal.

Os resultados das equações acima podem ser utilizados para obter o preço de uma obrigação real de cupão zero no momento t , que paga uma unidade no momento T , através da seguinte equação:

$$P_{real}(t, T) = \exp[A(T-t) - B_1(T-t) * r_1(t) - B_2(T-t) * r_2(t)]$$

Sendo:

$$B_1(s) = \left[\frac{1 - e^{-\alpha_{r1}^s}}{\alpha_{r1}} \right]$$

$$B_2(s) = \frac{\alpha_{r1}}{\alpha_{r1} - \alpha_{r2}} \left[\frac{1 - e^{-\alpha_{r2}^s}}{\alpha_{r2}} - \frac{1 - e^{-\alpha_{r1}^s}}{\alpha_{r1}} \right]$$

$$A(s) = (B_1(s) - s) \left(\mu - \frac{\sigma_{r1}^2}{2\alpha_{r1}^2} \right) + B_2(s) \mu - \frac{\sigma_{r1}^2 B_1(s)^2}{4\alpha_{r1}} \\ + \frac{\sigma_{r2}^2}{2} \left[\frac{s}{\alpha_{r2}^2} - 2 \frac{(B_2(s) + B_1(s))}{\alpha_{r2}^2} + \frac{1}{(\alpha_{r1} - \alpha_{r2})^2} \frac{(1 - e^{-2\alpha_{r1}^s})}{2\alpha_{r1}} \right. \\ \left. - \frac{2\alpha_{r1}}{\alpha_{r2}(\alpha_{r1} - \alpha_{r2})^2} \frac{(1 - e^{-(\alpha_{r1} + \alpha_{r2})^s})}{(\alpha_{r1} + \alpha_{r2})} + \frac{\alpha_{r1}^2}{\alpha_{r2}^2(\alpha_{r1} - \alpha_{r2})^2} \frac{(1 - e^{-2\alpha_{r2}^s})}{2\alpha_{r2}} \right]$$

Conhecido o preço da obrigação de cupão zero, é possível calcular a taxa de rentabilidade continuamente composta, no momento t para a maturidade T , a qual é dada pela seguinte equação:

$$R_1(t, T) = - \frac{\log\{P_{real}(t, T)\}}{(T - t)}$$

b) Taxas de inflação

O modelo utilizado para a taxa de inflação tem uma estrutura exactamente igual ao modelo utilizado para as taxas de juro reais, permitindo desta forma gerar uma estrutura a termo para as expectativas inflacionistas.

Desta forma, o comportamento da taxa de inflação instantânea é definido pelas seguintes equações:

$$dq_1(t) = \alpha_{q_1}(q_2(t) - q_1(t))dt + \sigma_{q_1}dZ_{q_1}(t)$$

$$dq_2(t) = \alpha_{q_2}(\mu_q - q_2(t))dt + \sigma_{q_2}dZ_{q_2}(t)$$

Sendo:

$q_1(t)$ – Taxa de inflação instantânea no momento t ;

$q_2(t)$ – Nível de reversão para a média da taxa de inflação instantânea no momento t ;

α_{q_1} – Parâmetro autoregressivo para o processo da taxa de inflação;

α_{q_2} – Parâmetro autoregressivo para o processo de reversão para a média da taxa de inflação;

σ_{q_1} – Volatilidade anualizada (desvio padrão) da taxa de inflação instantânea;

σ_{q_2} – Volatilidade anualizada (desvio padrão) do nível de reversão para a média da taxa de inflação;

μ_q – Nível de reversão para a média de $q_2(t)$;

$dZ_{q_1}(t)$ – Incremento aleatório do processo da taxa de inflação, que tem distribuição $N(gq.dt, dt)$;

$dZ_{q_2}(t)$ – Incremento aleatório do processo de reversão para a média da taxa de inflação, que tem distribuição $N(gq.dt, dt)$;

g_q – Parâmetro de controlo do prémio de risco da inflação em obrigações nominais relativamente a obrigações indexadas.

Adicionalmente, são incorporadas as seguintes restrições:

b_{q_1} – Limite mínimo para a taxa de inflação instantânea, $q_1(t)$;

b_{q_2} – Limite mínimo para o nível de reversão para a média da taxa de inflação instantânea, $q_2(t)$.

Desta forma, o modelo pressupõe que a taxa de inflação instantânea segue um processo estocástico de reversão para a média com dois factores. A utilização de um modelo de dois factores permite incorporar diferenças entre as expectativas de inflação para os diferentes prazos, ou seja, a taxa de inflação instantânea e as expectativas de longo prazo para a inflação não têm necessariamente de mover-se em simultâneo.

A estrutura a termo das expectativas de inflação é determinada a partir dos valores correntes de $q_1(t)$ e $q_2(t)$, com base em equações semelhantes às anteriormente apresentadas para as taxas de juro reais, após substituição das respectivas variáveis e parâmetros.

O parâmetro g_q representa o prêmio de risco de longo prazo da inflação, em teoria exigido pelos investidores para a aquisição de obrigações nominais em detrimento de obrigações indexadas à inflação.

Após conhecida a estrutura a termo, pode calcular-se o preço no momento t da obrigação de cupão zero que paga uma unidade no momento T , sendo descontada apenas com base nas expectativas de inflação. Este preço é dado pela seguinte equação:

$$P_{inf}(t, T) = \exp[A(T - t) - B_1(T - t) * q_1(t) - B_2(T - t) * q_2(t)],$$

na qual as expressões $A(T - t)$, $B_1(T - t)$ e $B_2(T - t)$ são equivalentes às utilizadas para as taxas de juro reais, após substituição dos respectivos parâmetros.

A taxa de rentabilidade continuamente composta, no momento t para a maturidade T , das obrigações de cupão zero indexadas à inflação é dada pela seguinte equação:

$$R_q(t, T) = - \frac{\log\{P_{inf}(t, T)\}}{(T - t)}$$

c) Taxas de juro nominais

A estrutura a termo das taxas de juro nominais é obtida através da combinação das estruturas a termo das taxas de juro reais e das expectativas de inflação.

No pressuposto de independência entre os movimentos das taxas de juro reais e das taxas de inflação, as taxas de juro spot em termos nominais resultam da soma das taxas de juro spot em termos reais com a expectativa de inflação para o período relevante.

Adicionalmente, o preço de uma obrigação nominal de cupão zero é obtido a partir do produto dos preços da obrigação real de cupão zero e da obrigação de cupão zero indexada à inflação:

$$P_{nom}(t, T) = P_{real}(t, T) * P_{inf}(t, T)$$

Neste trabalho iremos utilizar o pressuposto de independência acima referido. Contudo, os autores do modelo admitem a possibilidade da existência de correlação, embora de dimensão reduzida, entre os incrementos das taxas de juro reais e das taxas de inflação. Neste caso pode ser introduzido na equação do preço da obrigação nominal de cupão zero um termo adicional de covariância. A expressão da equação seria então:

$$P_{nom}(t, T) = P_{real}(t, T) * P_{inf}(t, T) + \rho * \text{sqrt}[\text{Var}(\exp\{-R_1(t, T)\}) * \text{Var}(\exp\{-R_q(t, T)\})]$$

Sendo:

ρ – Coeficiente de correlação entre os incrementos aleatórios dos processos da taxa de juro real de curto prazo e da taxa de inflação instantânea, $dZ_{r1}(t)$ e $dZ_{q1}(t)$;

$$R_1(t, T) = \int_t^T r_1(s) ds$$

$$R_q(t, T) = \int_t^T q_1(s) ds$$

d) Retorno dos activos

O conhecimento das estruturas a termo das taxas de juro reais, expectativas de inflação e taxas de juro nominais permite calcular as taxas de rendibilidade da generalidade dos activos cuja remuneração tem características de juro. A metodologia utilizada é apresentada em seguida – Ferreira (2004):

i) Liquidez

O retorno dos investimentos em liquidez foi calculado a partir da taxa de rendibilidade das obrigações nominais de cupão zero com maturidade a um ano, tendo em conta que o intervalo temporal que decorre entre cada actualização das variáveis estocásticas do modelo utilizado no presente trabalho foi de um ano. O retorno anual dos investimentos em liquidez é calculado de acordo com a equação seguinte:

$$RTN(t) = -\log\{P_{nom}(t, t + 1)\}$$

ii) Obrigações de taxa fixa

O retorno total dos investimentos em obrigações de taxa fixa em determinado período é calculado a partir da variação do preço desse instrumento financeiro durante esse período, acrescida do valor do cupão recebido.

Para calcular o preço da obrigação com referência a determinada data, t , é necessário dispor das estruturas a termo das taxas de juro reais, taxas de inflação e taxas de juro nominais anteriormente referidas. Depois, a partir dos valores assumidos nesse período pelas variáveis $r1(t)$, $r2(t)$, $q1(t)$ e $q2(t)$, podemos obter os preços nesse momento t , das obrigações nominais de cupão zero para cada um dos prazos relevantes.

Com base nesta informação, basta reproduzir o fluxo de cash-flows gerado pela obrigação, ou seja os cupões periódicos e o valor nominal a receber no final, e valorizar cada um desses cash-flows como se se tratasse de uma obrigação de cupão zero. O preço da obrigação no momento t corresponde ao somatório dos preços obtidos para cada um destes cash-flows, sendo determinado através da seguinte equação:

$$POC_{nom}(t, t + j) = \sum_{K=1}^j P_{nom}(t, t + k) * CF_k$$

expressão na qual CF_k representa a sucessão de cash-flows produzidos pela obrigação. O respectivo valor é igual ao cupão, para $k = 1, \dots, j-1$, e ao cupão acrescido do valor nominal, para $k = j$.

O retorno total da obrigação durante o período t pode ser calculado com base nos preços da obrigação em $t-1$ e em t , de acordo com a seguinte equação:

$$RT_{OTF}(t) = \frac{POC_{nom}(t, t + k) + cn}{POC_{nom}(t - 1, t + k)} - 1$$

expressão na qual k representa o número de períodos até ao vencimento da obrigação e cn a taxa de cupão.

No presente trabalho, o cálculo do retorno dos investimentos em obrigações de taxa fixa foi efectuado considerando uma obrigação com maturidade igual à das responsabilidades, ou seja 35 anos. Na realidade é difícil encontrar no mercado obrigações com maturidade tão longa, pelo que seria necessário escolher de início um portfolio de obrigações com a maturidade que se julgasse conveniente e ir posteriormente ajustando este portfolio. O impacto destas alterações não seria significativo desde que os ajustamentos fossem efectuados a preços de mercado e que a maturidade do portfolio não divergisse significativamente da considerada no presente trabalho.

No desenho da obrigação acima referida foi considerada uma taxa de cupão de 4%. Esta taxa não tem qualquer efeito sobre os retornos calculados, na medida em que o seu valor é considerado no cálculo do preço inicial das obrigações e na sua actualização subsequente.

iii) Obrigações de taxa indexada

A metodologia utilizada para o cálculo do retorno total dos investimentos em obrigações de taxa indexada à inflação é equivalente à utilizada para as obrigações de taxa fixa, com as adaptações decorrentes de o rendimento das obrigações indexadas à inflação ser composto por uma componente real correspondente à taxa de cupão real previamente definida, acrescida da taxa de inflação.

O preço da obrigação indexada à inflação no momento t é determinado através da seguinte equação:

$$POC_{real}(t, t + j) = \sum_{k=1}^j P_{real}(t, t + k) * CF_k$$

expressão na qual CF_k representa o cupão real pago pela obrigação, para $k = 1, \dots, j-1$, e o cupão real acrescido do valor nominal, para $k = j$.

O retorno total da obrigação durante o período t é composto pelo retorno real, que pode ser calculado com base nos preços da obrigação em $t-1$ e em t , acrescido da inflação verificada no período, sendo calculado de acordo com a seguinte equação:

$$RT\ OTI(t) = q_1(t) + \frac{POC_{real}(t, t + k) + cr}{POC_{real}(t - 1, t + k)} - 1$$

expressão na qual $q_1(t)$ representa a taxa de inflação anual no ano t , k o número de períodos até ao vencimento da obrigação e cr a taxa real de cupão.

2.4.2.2 – O modelo para “equity returns”

O retorno dos investimentos em instrumentos de capital é modelizado através de uma cadeia de Markov em tempo discreto, com dois estados (“Markov regime-switching model”). Neste tipo de modelo as rentabilidades são geradas a partir de duas distribuições distintas que se encontram associadas a cada um dos estados do processo, assumindo-se que a distribuição do retorno destes activos oscila ao longo do tempo entre estes dois estados. As probabilidades de transição entre os dois estados são definidas pela matriz de probabilidades de transição associada ao processo.

Esta metodologia é utilizada para modelizar o excesso de rentabilidade dos instrumentos de capital face à rentabilidade dos activos sem risco. Esta é definida como a taxa de rentabilidade implícita numa obrigação nominal de cupão zero, sem risco de default e com maturidade igual ao período temporal que decorre entre cada actualização das variáveis estocásticas do modelo. Nesta dissertação foram utilizados períodos anuais, pelo que a taxa de juro sem risco utilizada corresponde à taxa de rentabilidade anual do activo liquidez.

Desta forma, o retorno total dos investimentos em instrumentos de capital, $E(t)$, ao longo de um determinado período de tempo, Δt , é dado pela seguinte equação:

$$E(t) = \ln \left\{ \frac{1}{P_{nom}(t - \Delta t, t)} \right\} + X(t)$$

Sendo:

$P_{nom}(t - \Delta t, t)$ – Preço de uma obrigação nominal de cupão zero para o prazo considerado;

$X(t)$ – Excesso de rendibilidade dos instrumentos de capital face aos activos sem risco.

Esta variável tem distribuição normal, com:

i) Média $\mu_{E,1}$ e variância σ_{E1}^2 se o modelo está no Estado 1;

ii) Média $\mu_{E,2}$ e variância σ_{E2}^2 se o modelo está no Estado 2.

A matriz de probabilidades de transição a um passo, que determina a forma como o modelo oscila entre os dois estados é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & 1 - P_{11} \\ 1 - P_{22} & P_{22} \end{bmatrix}$$

Onde:

P_{11} – Probabilidade de o modelo estar no Estado 1 no período t , dado que se encontrava neste estado no período imediatamente anterior.

P_{22} - Probabilidade de o modelo estar no Estado 2 no período t , dado que se encontrava neste estado no período imediatamente anterior.

As calibrações deste modelo apresentam normalmente um Estado em que os retornos apresentam média positiva e volatilidade reduzida e outro Estado em que os retornos têm média mais baixa ou mesmo negativa e volatilidade elevada. A maior parte dos períodos são passados no primeiro estado, mas existem períodos de elevada volatilidade causados pela passagem pelo segundo estado.

2.4.3 – Principais diferenças entre os dois modelos

O modelo de Wilkie é essencialmente um modelo de séries temporais, que estuda o comportamento de longo prazo de um conjunto de variáveis, definindo as relações entre elas a partir da análise das respectivas séries históricas. Os preços de mercado dos activos e as respectivas rendibilidades são inferidos a partir da evolução destas variáveis.

O modelo de Hibbert analisa o comportamento das taxas de juro reais, taxas de inflação e excesso de retorno dos investimentos em “equity instruments” face ao retorno dos activos sem risco, procurando assegurar a consistência entre o comportamento dos diversos activos.

As principais diferenças entre os dois modelos são apresentadas em seguida:

a) Reversão para a média do retorno dos “equity instruments”

Os processos estocásticos subjacentes às equações do modelo de Wilkie são processos de reversão para a média, o que significa que as variáveis modelizadas apresentam uma tendência para regressar ao seu valor de longo prazo, ou seja à sua média incondicional. Esta característica sugere que as rentabilidades futuras dos diversos activos não são imprevisíveis e que é possível reduzir o risco simplesmente aumentando o prazo do investimento.

No modelo de Hibbert o excesso de rendibilidade dos investimentos em “equity instruments” sobre o retorno de um activo sem risco é modelizado através de um processo de Markov com dois estados, não incorporando assim qualquer componente de reversão para a média.

A principal consequência destas diferenças é que o modelo de Wilkie atribui aos investimentos de longo prazo em “equity instruments” um risco significativamente inferior ao atribuído pelo modelo de Hibbert, gerando distribuições da rendibilidade destes investimentos com dispersões bastante mais reduzidas.

O risco de longo prazo atribuído aos “equity instruments” no modelo de Wilkie poderá sempre ser aumentado, bastando para isso fazer variar os parâmetros que definem a volatilidade de curto prazo destes activos. Contudo, esta alteração tem como consequência o aumento da volatilidade de curto prazo para níveis incoerentes com a realidade.

b) Estrutura a termo das taxas de juro e taxas de inflação

O modelo de Hibbert permite gerar, com referência a cada momento temporal localizado ao longo do horizonte de projecção, uma estrutura a termo completa e consistente para as taxas de juro reais, taxas de inflação e taxas de juro nominais.

Esta característica do modelo permite assegurar que as trajectórias geradas pelo modelo para a evolução da inflação e das taxas de juro de longo prazo são sempre consistentes, o que nem sempre acontece no modelo de Wilkie.

Com efeito, Hibbert (2001) mostra que o modelo de Wilkie gera com frequência cenários que combinam baixas taxas de inflação com elevadas taxas de juro nominais, bem como outros cenários com a situação inversa. Estes resultados não são consistentes com os dados reais sobre o comportamento destas duas variáveis, que mostram que a evolução das taxas de inflação e das taxas de juro nominais estão em geral fortemente relacionadas.

c) Consistência entre o comportamento dos diversos activos

Na medida em que a rendibilidade dos investimentos em “equity instruments” é determinada através da modelização do seu excesso de retorno face aos activos sem risco, o modelo de Hibbert permite estabelecer uma relação directa entre o nível das taxas de juro nominais e a rendibilidade esperada dos investimentos em “equity instruments”.

No modelo de Wilkie, o retorno dos “equity instruments” e as taxas de juro de curto prazo são modelizados de forma individualizada, embora ambas as variáveis sejam directa ou indirectamente influenciadas pela evolução da taxa de inflação. Contudo, podem ser gerados cenários em que baixas taxas de juro reais coincidem com elevadas rendibilidades dos investimentos em “equity instruments”.

d) Número de factores estocásticos

No modelo de Hibbert as taxas de juro reais e as taxas de inflação são modelizadas através de processos autoregressivos de reversão para a média com dois factores estocásticos.

A utilização de modelos com dois factores estocásticos tem a vantagem de permitir distinguir entre a variação das taxas de curto prazo e a variação do seu nível de reversão para a média, possibilitando uma maior flexibilidade na modelização destas variáveis e a obtenção de distribuições distintas para o respectivo comportamento no curto e no longo prazo.

Esta metodologia permite assim obter distribuições para o comportamento das variáveis no longo prazo com volatilidade suficientemente elevada sem que seja necessário introduzir volatilidade excessiva nas distribuições de curto prazo.

2.5 – Modelização dos salários

2.5.1 – Cenário I

A evolução salarial foi simulada através do modelo de Wilkie, dado ter sido este o referencial utilizado neste cenário para modelizar a evolução da inflação e as taxas de rentabilidade dos activos.

Wilkie apresenta diversos modelos alternativos para a previsão da evolução salarial. Destes, aquele que produz melhores resultados parece ser o modelo em que a taxa de crescimento salarial no ano t , $J(t)$, está dependente dos valores da taxa de inflação observados no período corrente e no período imediatamente anterior, de uma taxa média de crescimento real e ainda de um resíduo aleatório de distribuição normal. Desta forma, a evolução salarial é dada pela seguinte equação:

$$J(t) = WW1 * I(t) + WW2 * I(t - 1) + WMU + WE(t),$$

$$WE(t) = WSD * WZ(t),$$

$$WZ(t) \sim iid N(0,1).$$

Sendo:

WW1 – Factor para a inflação do ano t ;

WW2 – Factor para a inflação do ano anterior;

WMU – Taxa média de crescimento real dos salários;

WE(t) – Resíduo aleatório;

WSD – Desvio padrão do resíduo aleatório;

WZ(t) – Sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma distribuição normal estandardizada.

O racional do modelo pode ser descrito como: a taxa de crescimento salarial no ano t é igual a WW1 da inflação do período, acrescido de WW2 da inflação do período imediatamente anterior, da taxa média de crescimento real dos salários e ainda de um resíduo aleatório com distribuição normal, de média zero e desvio padrão WSD.

2.5.2 – Cenário II

Neste cenário e tendo em conta que o modelo de Hibbert, que foi utilizado para modelizar as taxas de inflação, taxas de juro reais e rentabilidade dos activos não apresenta um sub-modelo destinado a prever a evolução salarial, optou-se pela utilização de uma linha salarial.

De acordo com a modelização adoptada, o crescimento nominal dos salários está indexado à evolução da taxa de inflação, acrescida de um crescimento real constante de 1% ao ano. Este valor poderá parecer elevado, mas deverá ter-se em consideração que o mesmo deverá ser suficiente para incorporar não só o crescimento real dos salários médios, mas também o crescimento dos salários pensionáveis resultante da progressão na carreira dos participantes do plano, estando portanto dependente da profissão, sector de actividade e expectativas existentes sobre a evolução salarial dos participantes do plano.

Chama-se portanto a atenção para que uma eventual utilização deste modelo pressupõe a adequação deste pressuposto aos participantes do plano e às expectativas sobre a sua evolução salarial, bem como a posterior calibração do mesmo, efectuada nos anos seguintes com base na análise dos desvios verificados.

2.6 – Modelização das responsabilidades e financiamento

Conforme explicado na descrição do plano de pensões, o benefício final a atribuir ao participante foi calculado sobre o respectivo salário final, através da aplicação da seguinte fórmula:

$$B_{IR} = n^{\circ} \text{ anos de serviço} * 1\% * SF,$$

na qual o salário final corresponde ao salário anual do participante, projectado para a respectiva data de reforma, de acordo com o modelo adoptado para a evolução salarial.

A evolução das responsabilidades do plano foi modelizada através do cálculo, com referência ao final de cada ano, do valor actual dos benefícios totais com referência a essa data, tendo sido utilizados os seguintes pressupostos e bases técnicas:

- i) Aquisição, na data de reforma, de uma renda vitalícia calculada com base numa taxa técnica de 4% e na tábua de mortalidade TV 88/90;
- ii) Não existência de saídas antes da idade de reforma, quer por morte quer por “turn over”;
- iii) Actualização financeira das responsabilidades também com base numa taxa técnica de 4%.

O valor actual dos benefícios totais num determinado ano corresponde portanto ao resultado da seguinte expressão – Garcia & Simões (2010):

$$VABT_x = \left(\frac{1}{1+i} \right)^{(IR-x)} B_{IR} a_{IR}$$

na qual o benefício à idade de reforma foi determinado conforme anteriormente exposto e o custo da anuidade foi calculado de acordo com as bases técnicas acima referidas.

Para determinar o financiamento requerido foi utilizado o método “Unit Credit Projectado”, tendo-se calculado o Fundo Normal no final de cada exercício da seguinte forma:

$$FN_x = VABT_x * \frac{(x - a)}{N}$$

expressão na qual a representa a idade do participante no início do plano e N representa o total de anos com contribuições, ou seja $IR - a$.

De acordo com este método de financiamento, a contribuição a efectuar em cada ano é normalmente igual a:

$$C_x = \frac{VABT_x}{N}$$

Contudo, optámos por utilizar esta contribuição normal apenas para o ano de arranque do plano, tendo a partir daí utilizado uma metodologia de reposição do nível de financiamento em 100% do Fundo Normal. De acordo com este método, as contribuições efectuadas a partir do início do segundo ano correspondem à diferença, quando positiva, entre o valor do Fundo Normal e o valor dos activos efectivamente existentes valorizados a preços de mercado, ou são nulas, sempre que o valor destes activos é igual ou superior ao Fundo Normal.

Deve acentuar-se que na prática, o reconhecimento destas contribuições, pelo menos para efeitos contabilísticos, pode ser efectuado de forma a diminuir a volatilidade que o modelo utilizado naturalmente provoca. Contudo, tal não obsta a que para efeitos de financiamento seja definida uma regra mais exigente, que assegure que o nível de financiamento não desça abaixo de uma determinada percentagem do Fundo Normal, que pode ser de 100%, ou outra que se entenda suficientemente prudente.

Adicionalmente, o impacto sobre os resultados finais do modelo que resulta da escolha dos instantes temporais em que são entregues as contribuições é mitigado pelo facto de o apuramento dos custos finais ser efectuado com base nos valores actuais das contribuições efectuadas.

2.7 – Considerações sobre os principais riscos inerentes ao plano de pensões em estudo

a) Risco de crédito

O risco de crédito corresponde ao risco da ocorrência de impactos negativos sobre o património do fundo de pensões devido à incapacidade dos emissores dos instrumentos financeiros detidos pelo fundo para efectuarem, no todo ou em parte, o pagamento dos cash-flows contratuais.

No plano de pensões em estudo, a exposição ao risco de crédito resulta essencialmente dos investimentos efectuados em obrigações e também em liquidez, sendo que a projecção de taxas de rentabilidade superiores à taxa de juro sem risco tem implícita a existência de exposição a risco de crédito.

Uma adequada gestão deste risco, no contexto de um fundo de pensões, passa por garantir que a exposição ao risco específico de cada emissor, ou aos riscos de conjuntos de emissores fortemente correlacionados entre si não seja relevante para o património do fundo de pensões. Este objectivo pode ser atingido através da diversificação, caso o fundo tenha dimensão para tal, ou através do investimento em instrumentos que permitam ao investidor assumir exposição a riscos de crédito diversificados, como por exemplo fundos de investimento em obrigações.

b) Risco de mercado

O risco de mercado corresponde ao risco de variação do justo valor ou dos fluxos de caixa dos instrumentos financeiros detidos pelo fundo de pensões em resultado de alterações nos preços de mercado, incluindo os seguintes riscos: taxa de juro, cambial e de preço.

i) Risco de taxa de juro

O risco de taxa de juro corresponde ao risco do justo valor ou dos fluxos de caixa associados aos instrumentos financeiros detidos pelo fundo de pensões se alterar em resultado de uma alteração das taxas de juro de mercado.

Ao nível dos activos, a exposição do plano de pensões ao risco de taxa de juro resulta essencialmente dos investimentos em obrigações de taxa fixa. Este risco deverá ser assumido no que se refere à percentagem do património do fundo que se encontra alocada a este tipo de activo. Caso se pretendesse eliminar esta exposição seria necessário substituir as obrigações de taxa fixa por activos com remuneração indexada às taxas de curto prazo, ou alternativamente efectuar a cobertura do risco recorrendo a instrumentos financeiros derivados.

Ao nível dos passivos, deve tomar-se em consideração que conforme explicado no capítulo dedicado à modelização das responsabilidades, a evolução dos passivos no presente modelo está a ser estimada com base na taxa técnica escolhida. Desta forma, esta evolução não reflecte as alterações no justo valor dos passivos que resultam da oscilação das taxas de juro de mercado correspondentes ao prazo residual das responsabilidades do plano de pensões, nem o risco de taxa de juro associado.

Uma análise integral da exposição do plano de pensões ao risco de taxa de juro facilmente concluiria pela existência de uma elevada exposição proveniente da componente do passivo, com o valor actual das responsabilidades a variar inversamente em resposta a oscilações das taxas de juro de longo prazo. A cobertura integral deste risco poderia ser garantida através do investimento dos recursos do fundo de pensões em obrigações de taxa fixa de duração aproximada à das responsabilidades. Esta política teria contudo o inconveniente de inviabilizar o investimento nouro tipo de activos. Alternativamente, o risco de taxa de juro poderia ser coberto através de swaps de taxa de juro.

De referir ainda que no modelo designado como Cenário II, em que o retorno dos activos foi modelizado com base no modelo de Hibbert, o retorno dos investimentos em obrigações foi determinado a partir do cálculo da evolução do preço de obrigações com maturidade igual à das responsabilidades. Este procedimento tem implícita a manutenção, durante o decorrer do plano de pensões, de uma carteira de obrigações com maturidade residual igual à das responsabilidades, a qual asseguraria a cobertura parcial do risco de taxa de juro relativamente à parcela das responsabilidades que se encontra coberta por obrigações de taxa fixa.

ii) Risco cambial

O risco cambial corresponde ao risco do justo valor ou dos fluxos de caixa associados aos instrumentos financeiros detidos pelo fundo de pensões se alterar em resultado de uma alteração das taxas de câmbio das moedas em que se encontram expressos esses instrumentos financeiros.

Este risco poderá ser considerado menos relevante para o plano de pensões em análise, cujas responsabilidades se encontram expressas em Euros, tendo em conta a reduzida necessidade de realizar investimentos noutras moedas, dada a grande variedade de instrumentos financeiros emitidos em Euros que se encontram disponíveis, bem como a facilidade com que podem ser contratados derivados para cobertura do risco cambial, caso se pretenda efectivamente realizar investimentos noutras moedas.

iii) Risco de preço

A exposição do plano de pensões em análise ao risco de preço resulta essencialmente dos investimentos efectuados em acções.

c) Risco de liquidez

O risco de liquidez corresponde ao risco de o fundo de pensões ter dificuldades na mobilização de recursos, nomeadamente através da alienação de activos, para fazer face aos compromissos assumidos.

Dado ter sido estabelecido como pressuposto a não existência de pagamentos por saídas antecipadas, a gestão do risco de liquidez resume-se à necessidade de garantir a disponibilidade de fundos para fazer face ao pagamento, na data da passagem à reforma, do custo de aquisição da renda vitalícia. Neste contexto, não existe incerteza sobre a data de ocorrência dos cash-flows a pagar pelo fundo de pensões, sendo possível investir em activos com maturidade elevada sem aumentar o risco de liquidez.

Caso o plano de pensões previsse a existência de pagamentos associados a saídas antecipadas, a gestão do risco de liquidez seria mais complexa, face à necessidade de garantir a cada momento a disponibilidade dos fundos necessários para fazer face aos pagamentos por saída antecipada. Neste âmbito, e caso fosse relevante, poderia proceder-se à modelização do valor dos resgates antecipados, permitindo determinar para o nível de confiança que fosse definido, o saldo de liquidez necessário para assegurar a não ocorrência de roturas de tesouraria.

d) Risco de longevidade

Corresponde ao risco da ocorrência de variações positivas nos cash flows a pagar pelo fundo de pensões em resultado de aumentos não previstos da longevidade dos participantes.

No plano de pensões em análise, que prevê a utilização do valor acumulado do fundo na data de reforma do participante para a aquisição de uma renda vitalícia, este risco materializa-se na eventual desadequação da tábua de mortalidade utilizada na avaliação das responsabilidades face às tábuas de mortalidade que serão praticadas no mercado segurador na data de reforma dos participantes, quando será necessário proceder à aquisição das rendas vitalícias.

e) Risco operacional

Corresponde ao risco de ocorrência de impactos negativos sobre o património do fundo de pensões resultantes de falhas na análise, processamento ou liquidação das operações, de fraudes internas e externas, da existência de recursos humanos insuficientes ou inadequados ou da inoperacionalidade das infra-estruturas. Neste trabalho assumimos que o risco operacional associado à actividade do fundo de pensões é imputável à sua entidade gestora, pressuposto que podemos considerar razoável no contexto de uma actividade regulamentada e supervisionada.

f) Tratamento dos riscos na modelação estocástica de fundos de pensões

Os resultados da modelação estocástica de um fundo de pensões de benefício definido podem ser utilizados para a tomada de diversas decisões com impacto na evolução futura do fundo e no património do seu promotor e participantes, como sejam por exemplo decisões relativas à estratégia de alocação de activos, aos níveis de exposição ao risco considerados aceitáveis e à política de financiamento do fundo. Por este motivo, uma percepção incorrecta sobre algum ou alguns dos riscos a que o fundo se encontra exposto poderá afectar a qualidade das decisões tomadas, prejudicando o promotor e os participantes.

Neste sentido, no desenho e implementação deste tipo de modelo devem ser adequadamente ponderados todos os fenómenos relevantes que influenciam ou colocam restrições à evolução das principais variáveis de interesse, – Mowbray (2009) e Barrie, Turnbull and McCulloch (2005), devendo tomar-se em atenção que:

- i) Os modelos implementados devem incorporar todos os factores de risco com impacto material sobre os resultados do modelo, incluindo os riscos de taxa de juro, de crédito e de preço dos investimentos em “equity instruments” e também, quando aplicáveis, os riscos de liquidez, de inflação salarial e de longevidade;
- ii) Na análise da exposição global ao risco devem ser ponderados os efeitos combinados dos riscos inerentes aos diversos activos e passivos, atendendo aos efeitos de diversificação que podem eventualmente resultar da sua detenção simultânea;
- iii) Os cenários produzidos pelos modelos devem abranger a totalidade dos resultados possíveis, incluindo eventos de baixa frequência e grande magnitude, e atribuir à ocorrência destes eventos extremos probabilidades que possam ser consideradas razoáveis com base nos dados históricos disponíveis e nos valores correntes de cada variável.

Após ter sido implementado e testado de forma satisfatória, os resultados do modelo estocástico podem ser utilizados para ajudar a definir os níveis de exposição aos diversos riscos que melhor servem os interesses e objectivos do promotor e dos participantes do plano de pensões.

3 – PARAMETRIZAÇÃO E RESULTADOS

3.1 – Parametrização

Apresenta-se em seguida o resumo da parametrização utilizada no presente trabalho:

a) Parametrização comum aos dois cenários

Mantiveram-se constantes entre os dois cenários os parâmetros relativos ao desenho do plano e natureza dos benefícios atribuídos, estratégia de alocação de activos, encargos de gestão anuais e bases técnicas utilizadas na avaliação das responsabilidades, os quais são apresentados no quadro 1 abaixo:

Quadro 1 - Parametrização comum aos dois cenários

Desenho do plano:

Idade de início	30
Idade de reforma	65
Salário inicial	1000
Nº de meses por ano	14
Benefício atribuído:	
Pensão anual = 1% * nº de anos de serviço * SF	

Gestão de activos:

Estratégia de alocação:	
- Obrigações de taxa fixa	30%
- Obrigações de taxa indexada	35%
- Acções	30%
- Imobiliário	0%
- Liquidez	5%
Encargos de gestão anuais	1%

Bases técnicas:

Método actuarial - Unit Credit Projectado	
Tábua de mortalidade	TV 88/90
Taxa de juro técnica	4%
Renda fraccionada aos 65 anos	13,096
Turnover	nulo
Mortalidade de activos	nulo

Taxa de juro para actualização das contribuições totais e salários totais	4%
---	----

Com a finalidade de facilitar a comparação entre os resultados dos dois cenários, optámos por não incluir o activo imobiliário na estratégia de alocação seleccionada, uma vez que o modelo de Hibbert não inclui equações destinadas à modelização deste activo.

Os encargos de gestão do fundo de pensões são calculados com base numa taxa fixa que incide sobre o valor acumulado do fundo e são calculados e cobrados no final de cada período anual.

Caso a estrutura de comissionamento previsse a existência de comissões de performance, o respectivo cálculo poderia ser incorporado no modelo de forma relativamente simples, bastando para tal operacionalizar o cálculo da comissão no final de cada exercício como função da rendibilidade atingida pelo fundo de pensões. No entanto, o impacto deste tipo de comissionamento sobre a rendibilidade líquida dos investimentos e sobre a distribuição das taxas médias de contribuição poderia ser significativo, em particular no caso de as comissões de performance devidas nos anos de alta rendibilidade coexistirem com comissões fixas significativas nos anos de menor rendibilidade.

b) Parametrização do cenário I - Modelo de Wilkie

Foi utilizada a parametrização mais recente que se encontrava disponível, publicada em 2008 em “Revisiting the Wilkie Investment Model” por Sahin, Cairns, Kleinow and Wilkie. Neste trabalho, os autores actualizam e estimam os parâmetros das equações do modelo de Wilkie para a inflação, rendimentos, dividendos e preço das acções, taxas de juro de longo prazo e taxas de juro de curto prazo, com base em dados históricos do Reino Unido para o período de 1923 a 2007 - Sahin, Cairns, Kleinow and Wilkie (2008).

Relativamente às equações para os salários, obrigações de taxa indexada e rendimentos do imobiliário, cujos parâmetros não foram actualizados no âmbito do trabalho acima referido, foram utilizados os parâmetros publicados em 1995, baseados nos dados recolhidos para o período de 1923 a 1994.

As excepções ao procedimento acima descrito correspondem a alguns parâmetros representativos de médias de longo prazo, para os quais procurámos utilizar valores mais consistentes com as expectativas actuais sobre a evolução das variáveis em causa.

Estes parâmetros são os seguintes:

QMU – Taxa de inflação média – Tendo em conta o controlo mais rigoroso sobre o nível da inflação actualmente exercido pela generalidade dos bancos centrais dos países desenvolvidos, foi utilizada uma taxa de 2%, consistente com a inflação média verificada na zona Euro no período de Janeiro de 2000 a Abril de 2010.

WMU – Taxa média de crescimento real dos salários – Foi utilizada uma taxa de 1%, consistente com o pressuposto utilizado no cenário II, reflectindo uma previsão mais modesta para a evolução real dos salários dos participantes no plano.

CMU – Média da taxa de juro real – Foi utilizada uma taxa de 2,3%, correspondente à média das yields das obrigações de dívida pública a 10 anos da zona Euro, observada no período de Janeiro de 2000 a Abril de 2010, deduzida da taxa média de inflação utilizada.

RMU – Média da taxa de rendimento real das obrigações de taxa indexada – Foi utilizada uma taxa de 2%, de modo a produzir uma taxa média de rentabilidade mais conservadora.

ZMU – Média da taxa de rendimento do imobiliário e EMU – Média dos rendimentos imobiliários – Foram utilizados valores inferiores aos apresentados no modelo de Wilkie, de modo a produzir uma taxa média de rentabilidade mais conservadora.

No que se refere às condições iniciais, optámos pela utilização de condições iniciais neutras, ou seja, o ponto de partida das variáveis do modelo corresponde aos respectivos valores esperados não condicionados. Em alternativa, numa aplicação real, poderia optar-se por utilizar como ponto de partida os valores observados de cada variável na data de início do plano.

A parametrização e as condições iniciais utilizadas encontram-se resumidas no quadro 2

abaixo:

Quadro 2 - Parametrização do cenário I - Modelo de Wilkie

Inflação		Acções - Dividend yield	
QMU	0,0200	YW	1,6473
QA	0,5794	YA	0,6354
QSD	0,0396	YMU	0,0364
I(0)	0,0200	YSD	0,1529
		YN (0)	0,0000
Salários		Y (0)	0,0376
WW1	0,6021	YE (0)	0,0000
WW2	0,2671		
WMU	0,0100	Acções - Dividendos	
WSD	0,0233	DW	0,5779
		DD	0,1441
Taxas de juro de longo prazo		DMU	0,0142
CW	1,0000	DY	-0,1507
CD	0,0450	DB	0,6070
CMU	0,0230	DSD	0,0654
CA	0,8954	DM (0)	0,0200
CY	0,4690	D (0)	1,0000
CSD	0,2568	DE (0)	0,0000
CMIN	0,0050		
CM (0)	0,0200	Imobiliário - Taxa de rentabilidade	
CN (0)	0,0000	ZMU	0,0400
C (0)	0,0430	ZA	0,9115
		ZSD	0,1177
Taxas de juro de curto prazo		Z(0)	0,0400
BMU	0,1695		
BA	0,7275	Imobiliário - Rendimentos	
BSD	0,1824	ED	0,1289
B (0)	0,0363	EMU	-0,0100
BN (0)	0,0000	EBZ	0,2363
		ESD	0,0599
Obrigações de taxa indexada		EM (0)	0,0200
RMU	0,0200	E (0)	1,0000
RA	0,5686		
RBC	0,2234		
RSD	0,0518		
R (0)	0,0200		

c) Parametrização do cenário II - Modelo de Hibbert

A parametrização utilizada corresponde à apresentada pelos autores no seu estudo original, com excepção dos parâmetros u_r e u_q , que foram alterados com a finalidade de permitir ao modelo gerar valores médios das taxas de juro reais de curto prazo e das taxas de inflação semelhantes às médias dos valores observados na zona Euro durante os últimos 10 anos.

Os valores utilizados para estes dois parâmetros são superiores às médias de longo prazo das variáveis relevantes, dado ter havido necessidade de compensar os efeitos que resultam da presença no modelo de limites mínimos para as variáveis $r_1(t)$, $r_2(t)$, $q_1(t)$ e $q_2(t)$, os quais foram introduzidos com a finalidade de evitar a geração de taxas de juro nominais com valores negativos.

As condições iniciais utilizadas para a taxa de inflação e para a taxa de juro real correspondem respectivamente aos valores médios da taxa de inflação e das yields reais das obrigações de dívida pública a 10 anos da zona Euro observados no período de Janeiro de 2000 a Abril de 2010.

Os valores utilizados para os parâmetros e condições iniciais encontram-se resumidos no quadro 3 abaixo:

Quadro 3 - Parametrização do cenário II - Modelo de Hibbert

Taxa de juro real		Taxa de inflação	
α_{r1}	0,25	α_{q1}	0,3
α_{r2}	0,05	α_{q2}	0,1
σ_{r1}	0,005	σ_{q1}	0,008
σ_{r2}	0,01	σ_{q2}	0,012
u_r	0,0475	u_q	0,034
g_r	-0,125	g_q	-0,125
$r1(0)$	0,023	$q1(0)$	0,02
$r2(0)$	0,023	$q2(0)$	0,02
b_{r1}	-0,05	b_{q1}	-0,05
b_{r2}	0	b_{q2}	0
Equity returns			
μ_{e1}	0,118		
σ_{e1}	0,098		
μ_{e2}	-0,136		
σ_{e2}	0,244		
$\rho(1,1)$	0,929		
$\rho(2,2)$	0,879		

3.2 – Resultados obtidos

Os resultados obtidos após a realização de 1000 simulações, considerando um horizonte temporal de 35 anos, e com base nas parametrizações e condições iniciais acima descritas para cada um dos cenários são apresentados no quadro 4 abaixo:

Quadro 4 - Principais resultados

	Cenário I		Cenário II	
	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão
Inflação	2,08%	4,81%	1,99%	1,22%
Crescimento salarial	2,82%	4,41%	n.a.	n.a.
Rendibilidade dos investimentos:				
- Ações	9,43%	20,97%	8,29%	19,80%
- Obrigações de taxa fixa	6,31%	18,99%	5,44%	7,82%
- Obrigações de taxa indexada	4,66%	10,24%	5,09%	7,75%
- Liquidez	4,11%	2,06%	4,40%	1,61%
- Imobiliário	5,94%	11,81%	n.a.	n.a.
Rendibilidade bruta do fundo de pensões	6,56%	10,66%	6,12%	7,63%
Salário final	38.816	18.558	38.754	7.964
Benefício anual	13.586	6.495	13.564	2.788
Capital de cobertura	177.919	85.060	177.632	36.506
Valor final do fundo de pensões	202.871	112.537	188.485	50.106
Valor actual das contribuições totais	36.001	12.436	41.191	16.338
Valor actual dos salários totais	403.589	100.952	402.492	38.257
Taxa de contribuição:				
- Taxa média de contribuição	8,93%	2,25%	10,21%	3,80%
- Percentil 75	10,37%		12,58%	
- Percentil 95	12,73%		17,71%	

As volatilidades apresentadas relativamente à inflação, crescimento salarial, rendibilidade dos diversos activos e rendibilidade do fundo de pensões correspondem ao desvio padrão das taxas de crescimento / rendibilidades anuais observadas ao longo do período de projecção.

No quadro 5 abaixo apresenta-se agora uma coluna adicional (Desvio padrão II) contendo as volatilidades das taxas de crescimento / rendibilidades acumuladas no final do período de projecção, calculadas com base na média geométrica das respectivas taxas anuais:

Quadro 5 - Volatilidades anuais e acumuladas

	Cenário I			Cenário II		
	Média	Desvio padrão I	Desvio padrão II	Média	Desvio padrão I	Desvio padrão II
Inflação	2,08%	4,81%	1,52%	1,99%	1,22%	0,60%
Rendibilidade dos investimentos:						
- Acções	9,43%	20,97%	2,59%	8,29%	19,80%	7,19%
- Obrigações de taxa fixa	6,31%	18,99%	1,41%	5,44%	7,82%	0,50%
- Obrigações de taxa indexada	4,66%	10,24%	1,61%	5,09%	7,75%	0,63%
- Liquidez	4,11%	2,06%	1,18%	4,40%	1,61%	0,95%
Rendibilidade do fundo de pensões	6,56%	10,66%	1,21%	6,12%	7,63%	1,99%

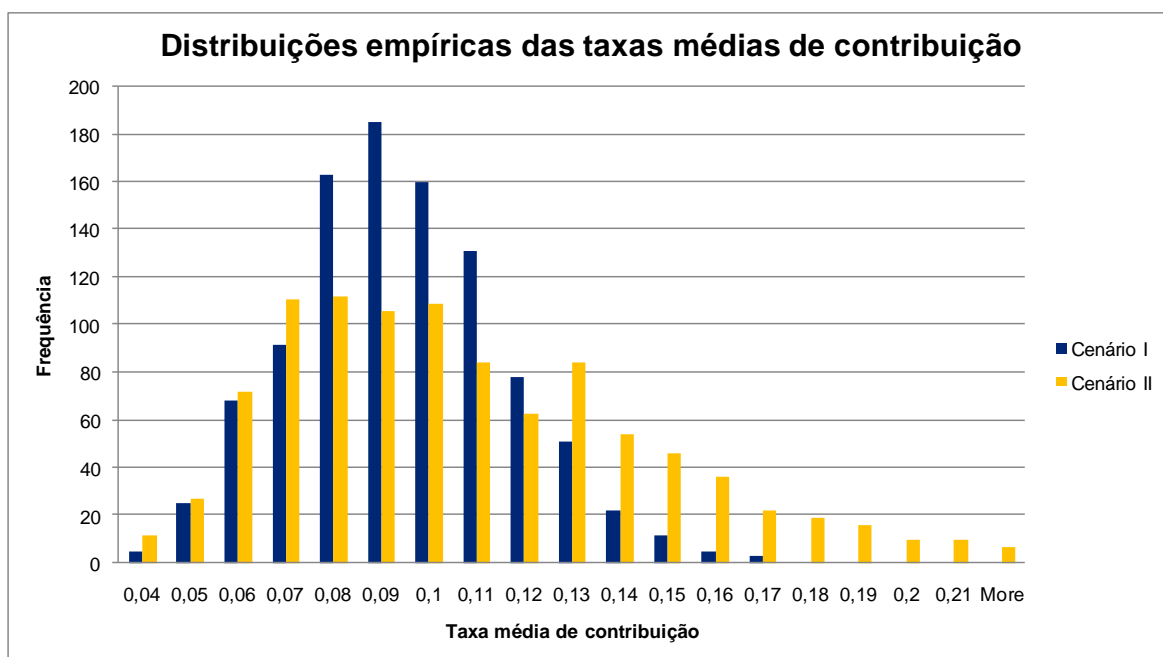
Dos resultados apresentados devem ser realçados os seguintes aspectos:

- i) As diferenças entre as rendibilidades médias dos diversos activos resultam essencialmente das parametrizações escolhidas para cada um dos cenários, não devendo daí retirar-se especiais ilações sobre os modelos;
 - ii) As volatilidades de curto prazo observadas no cenário I são em geral superiores às do cenário II, essencialmente como resultado da parametrização utilizada.
- Conforme referido na secção 2.4.3 acima, a propósito das diferenças entre os modelos utilizados para simular a rendibilidade dos activos, o modelo de Wilkie, utilizado no cenário I, obriga por vezes a aceitar volatilidades algo elevadas no curto prazo, com a finalidade de obter volatilidades mais realistas para a evolução de longo prazo das respectivas variáveis;

- iii) A elevada volatilidade de curto prazo dos investimentos em obrigações de taxa fixa apresentada no cenário I resulta directamente do elevado valor do parâmetro CSD disponibilizado no estudo de 2008 que utilizámos no presente trabalho (0,2568). Caso fosse utilizado o valor apresentado no paper de 1995 (0,1853) ou o sugerido por Hibbert, Mowbray and Turnbull na comparação que efectuaram com os resultados do modelo de Wilkie (0,14), obter-se-ia de imediato uma volatilidade significativamente mais baixa.
- iv) A partir dos dados apresentados no quadro 5 pode verificar-se que a volatilidade de longo prazo da rendibilidade dos investimentos em acções é muito superior no cenário II, fazendo com que a volatilidade da rendibilidade do fundo de pensões seja também superior. Esta circunstância resulta das diferenças entre os modelos utilizados para simular a evolução dos activos, que assumem a existência de reversão para a média na rendibilidade de longo prazo dos investimentos em acções, no caso do modelo de Wilkie, e excluem esta componente, no caso do modelo de Hibbert, conforme explicado na secção 2.4.3 acima.
- v) A maior volatilidade de longo prazo do rendimento das acções e da rendibilidade do fundo de pensões obtida no cenário II faz com que as distribuições empíricas para o valor actual das contribuições totais e para a taxa média de contribuição apresentem uma dispersão bastante superior neste cenário, tornando os respectivos resultados mais conservadores.

Esta circunstância é evidenciada pelos histogramas e pelas principais estatísticas das distribuições empíricas das taxas médias de contribuição, os quais são apresentados respectivamente no gráfico 1 e no quadro 6 abaixo:

Gráfico 1 – Distribuições empíricas das taxas médias de contribuição



Quadro 6 - Distribuições empíricas das taxas médias de contribuição - Principais estatísticas

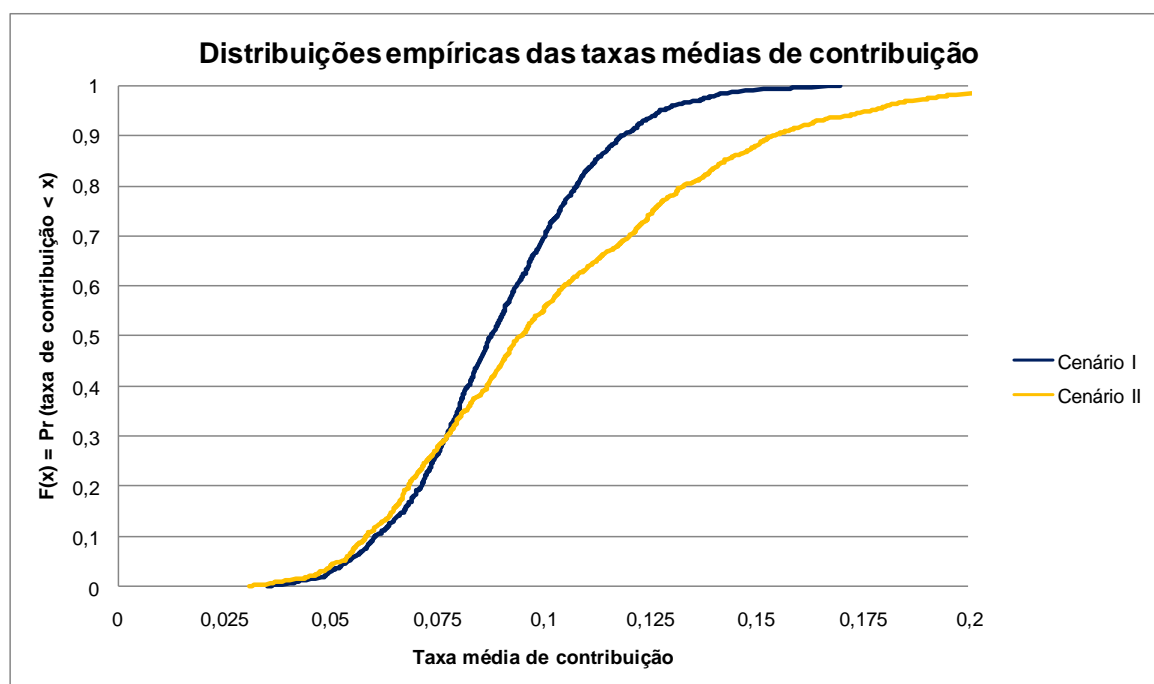
	<u>Cenário I</u>	<u>Cenário II</u>
Média	8,93%	10,21%
Desvio padrão	2,25%	3,80%
Coefficiente de assimetria	0,3622	0,7280
Kurtosis	3,1823	3,1218
Percentil 75	10,37%	12,58%
Percentil 90	11,82%	15,41%
Percentil 95	12,73%	17,71%
Percentil 96	13,03%	18,09%
Percentil 97	13,56%	18,56%
Percentil 98	14,00%	19,51%
Percentil 99	14,76%	20,76%

Os dados apresentados permitem verificar que não obstante ambas as distribuições apresentarem assimetria positiva, esta característica é mais acentuada na distribuição do cenário II, a qual atribui maior probabilidade à possibilidade de ocorrência de valores significativamente superiores à média da distribuição.

Este comportamento da distribuição do cenário II é visível na cauda direita bastante pronunciada apresentada pelo respectivo histograma e no comportamento dos últimos percentis das distribuições, que são também muito superiores no cenário II.

No gráfico 2 abaixo apresenta-se também o comportamento das funções de distribuição empíricas das taxas médias de contribuição:

Gráfico 2 – Funções de distribuição empíricas das taxas médias de contribuição



Conforme se pode verificar, as duas curvas afastam-se à medida que aumenta o nível de confiança requerido, o que significa que o modelo utilizado no cenário II será muito mais exigente, caso se pretenda trabalhar com um nível de confiança elevado. Por exemplo para um nível de confiança de 90%, a taxa média de contribuição a respeitar seria de 11,82% ou de 15,41%, consoante fossem utilizados respectivamente os modelos do cenário I ou do cenário II.

- vi) Conforme acima referido, as diferenças entre as distribuições empíricas das taxas de contribuição geradas para os dois cenários têm origem essencialmente nas diferenças existentes entre os modelos utilizados para simular a evolução das rendibilidades dos investimentos em “equity instruments”.

Nos gráficos 3 e 4 abaixo são apresentadas as distribuições empíricas das rendibilidades anuais dos investimentos em “equity instruments” geradas para os dois cenários. As principais estatísticas destas distribuições são apresentadas no quadro 7.

Gráfico 3 – Distribuição empírica da rentabilidade anual dos investimentos em acções – Cenário I

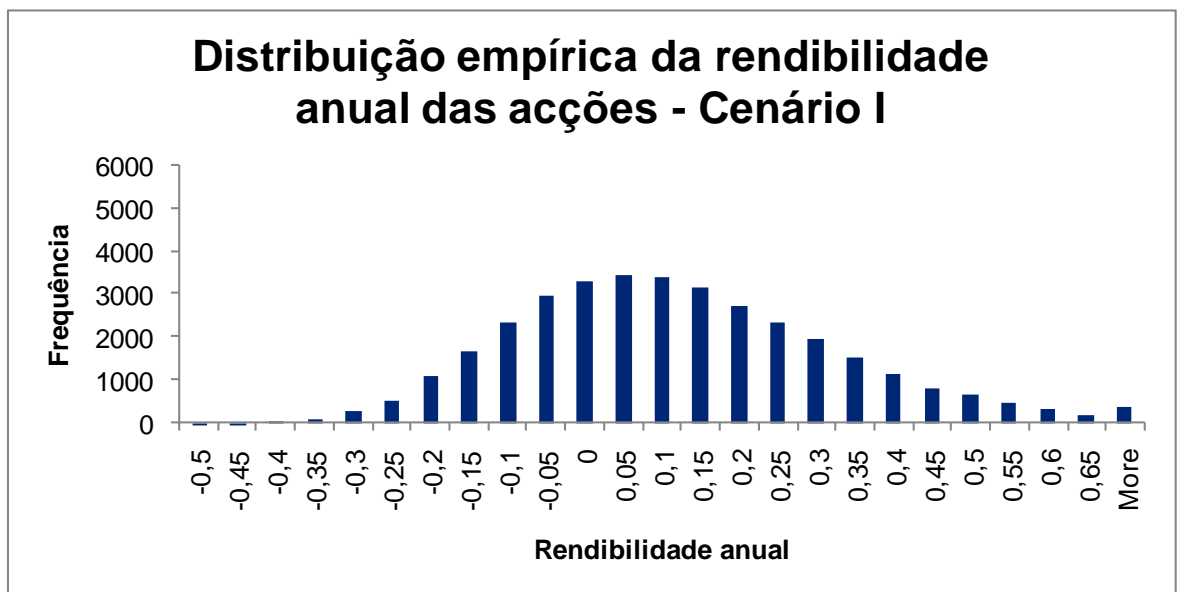
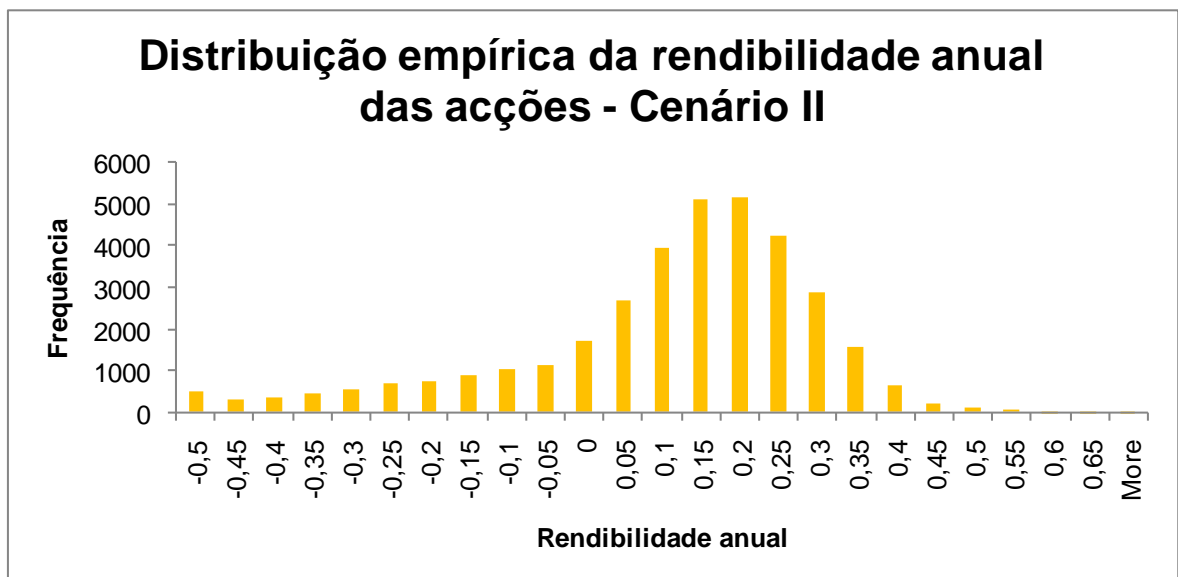


Gráfico 4 – Distribuição empírica da rentabilidade anual dos investimentos em acções – Cenário II



Quadro 7 - Distribuições empíricas das rendibilidades anuais dos investimentos em acções - Principais estatísticas

	<u>Cenário I</u>	<u>Cenário II</u>
Média	9,43%	8,29%
Desvio padrão	20,97%	19,80%
Coeficiente de assimetria	0,5828	-1,2093
Kurtosis	3,5513	4,8064
Percentil 1	-30,75%	-53,99%
Percentil 2	-26,83%	-46,41%
Percentil 3	-24,58%	-41,34%
Percentil 4	-22,93%	-36,94%
Percentil 5	-21,28%	-33,54%
Percentil 10	-15,68%	-20,41%
Percentil 25	-5,50%	0,94%

A partir dos dados apresentados pode verificar-se que as diferenças entre as duas distribuições são muito significativas, desde logo porque a distribuição do cenário I apresenta assimetria positiva, contrastando com a pronunciada assimetria negativa da distribuição do cenário II.

Adicionalmente, esta última apresenta um excesso de kurtosis bastante mais elevado, que se materializa na espessura pronunciada da cauda esquerda da distribuição, evidenciada pelo respectivo histograma.

A análise dos percentis mais baixos das duas distribuições empíricas permite verificar também que a distribuição do cenário II atribui uma maior probabilidade à possibilidade de ocorrência de perdas de elevada dimensão no horizonte temporal de um ano considerado nesta análise. Por exemplo se nos centrarmos no percentil cinco podemos verificar que a distribuição do cenário II atribui uma probabilidade de 5% à possibilidade de ocorrência de perdas iguais ou superiores a 33,54%. Na distribuição do cenário I este valor é de apenas 21,28%, o qual podemos considerar baixo atendendo ao historial dos mercados de acções, cujas crises graves são relativamente frequentes.

- vii) As diferenças entre os modelos utilizados para simular a rendibilidade dos investimentos em acções têm impacto também a longo prazo. Com efeito, a existência de reversão para a média no modelo do cenário I exclui na prática a possibilidade de registo de retornos negativos no longo prazo, enquanto o modelo do cenário II atribui uma probabilidade significativa ao registo de rendibilidades médias negativas destes investimentos no final da fase de acumulação do plano de pensões.

Nos gráficos 5 e 6 abaixo são apresentados os histogramas das distribuições empíricas das rendibilidades acumuladas dos investimentos em “equity instruments” no final da fase de acumulação do plano de pensões, calculadas com base na média geométrica das rendibilidades anuais.

Gráfico 5 – Distribuição empírica da rentabilidade acumulada dos investimentos em ações – Cenário I

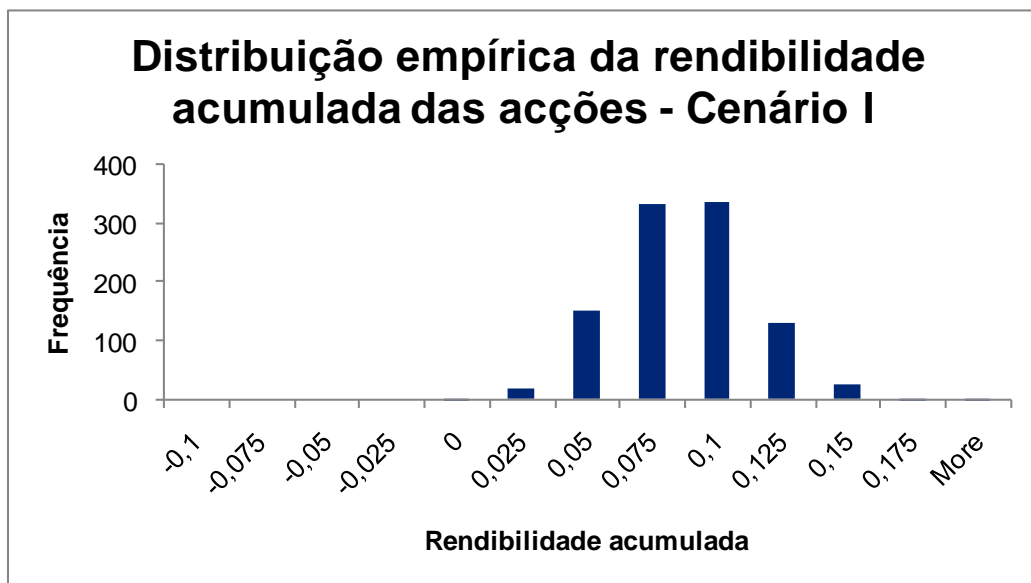
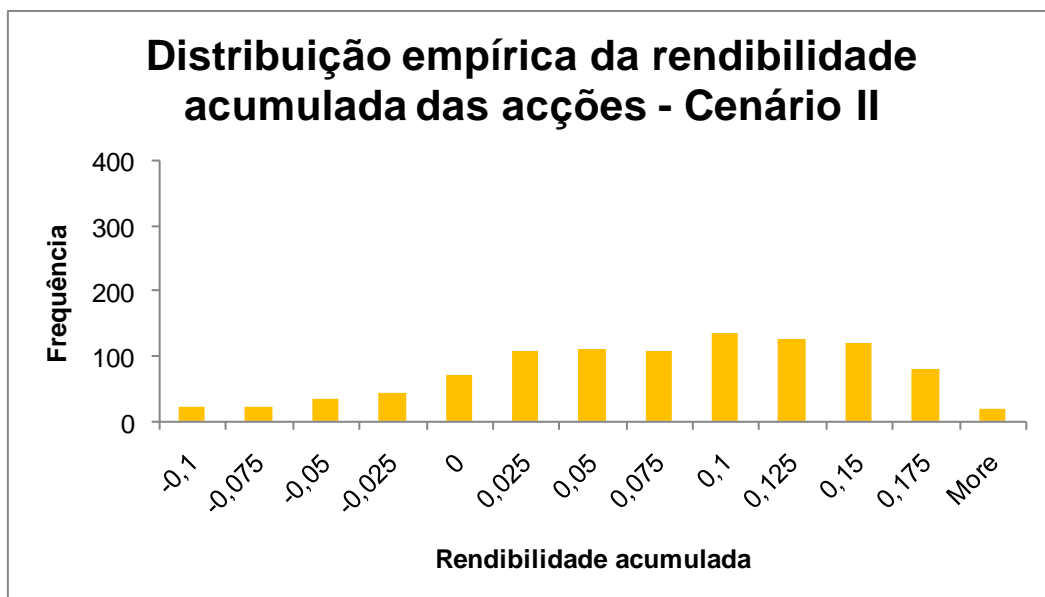


Gráfico 6 – Distribuição empírica da rentabilidade acumulada dos investimentos em ações – Cenário II



- viii) A volatilidade do salário final, sobre o qual é calculado o valor do benefício a atribuir, é bastante superior no cenário I, como resultado das diferenças entre os modelos salariais utilizados. Com efeito, o modelo de Wilkie para o crescimento salarial, utilizado no cenário I introduz uma perturbação aleatória sobre a evolução desta variável que não está presente no cenário II, no qual é utilizada uma linha salarial indexada à evolução da inflação.
- ix) O saldo do fundo de pensões no final da fase de acumulação do plano tem um valor médio superior ao do capital de cobertura da renda vitalícia a adquirir pelo plano de pensões. Esta circunstância resulta exclusivamente do método de financiamento utilizado ser bastante defensivo, na medida em que obriga o promotor do plano a financiar integralmente os deficits eventualmente existentes no final de cada exercício.

Este problema poderia ser facilmente atenuado através da adopção de um método de financiamento anual baseado no custo normal do exercício, complementado com a realização de uma contribuição final no caso de o valor final do fundo de pensões se revelar nessa altura insuficiente. Este método tem contudo a desvantagem de poder produzir situações de deficit, aumentando a exposição do fundo de pensões ao risco de insolvência do respectivo promotor, o qual não deve ser negligenciado, em particular quando se trata de um plano com um horizonte temporal tão alargado.

4 – ANÁLISES DE SENSIBILIDADE

Parte da parametrização geral apresentada na alínea a) da secção 3.1 acima equivale a um conjunto de pressupostos sobre o comportamento da realidade cuja não concretização poderá afectar de forma significativa os resultados do modelo.

Com a finalidade de analisar o impacto de eventuais variações desses pressupostos sobre os resultados obtidos foi realizado um conjunto de análises de sensibilidade. Para este efeito foram seleccionados o pressuposto de mortalidade e a taxa de juro técnica utilizados no cálculo da renda vitalícia, dado o impacto que a sua alteração pode ter sobre o valor das responsabilidades, e ainda a estratégia de alocação de activos, face à importância que esta pode ter na redução do risco global a que o fundo de pensões se encontra exposto.

Os resultados destas análises são apresentados nas secções seguintes:

4.1 – Pressuposto de mortalidade

De acordo com o estudo “A evolução da mortalidade das pessoas seguras e dos pensionistas dos fundos de pensões”, publicado na edição de 2008 do “Relatório do sector segurador e fundos de pensões”, do Instituto de Seguros de Portugal – ISP (2008), a mortalidade dos pensionistas dos fundos de pensões Portugueses observada no período de 2004 a 2007 é razoavelmente aproximada pela tábua TV-73/77 rejuvenescida de um ano, no caso dos homens, e pela tábua TV-88/90, no caso das mulheres.

Caso a mortalidade dos participantes do plano de pensões em análise se comportasse de acordo com esta tendência, a tábua utilizada poderia considerar-se adequada ou mesmo conservadora. Contudo, conforme referido na alínea d) da secção 2.2.1 acima, o aumento da esperança média de vida dos participantes do fundo de pensões ao longo da respectiva fase de acumulação, cuja duração prevista é de 35 anos, poderá ter um impacto significativo sobre o valor das responsabilidades assumidas, na medida em que poderá obrigar à alteração da tábua de mortalidade a utilizar no cálculo do capital de cobertura da renda vitalícia a adquirir pelo fundo de pensões na data da passagem à reforma dos respectivos participantes.

De acordo com o estudo acima referido, a mortalidade dos pensionistas dos fundos de pensões em Portugal tem confirmado a tendência para a redução da força de mortalidade, embora com uma intensidade mais moderada nos anos mais recentes. Com base no trabalho efectuado, os autores deste estudo consideram razoável admitir que a esperança média de vida aos 65 anos venha a sofrer em média um aumento aproximado de 1 ano em cada 14 anos decorridos.

Estes aumentos da longevidade são também visíveis nas tábuas de mortalidade para Portugal publicadas pelo Instituto Nacional de Estatística, verificando-se que a esperança média de vida aos 65 anos para ambos os sexos passou de 17,89 anos em 2006 para 18,13 anos em 2008.

Tendo em conta a circunstância de estarmos a trabalhar com um plano a longo prazo, cuja fase de acumulação tem uma duração prevista de 35 anos, e atendendo às informações acima referidas sobre o comportamento da mortalidade actual e sobre as tendências de evolução da esperança média de vida, optámos por utilizar na análise de sensibilidade o pressuposto de mortalidade correspondente à tábua TV-88/90 rejuvenescida em três anos. Os resultados obtidos, mediante a realização de novas simulações, são apresentados no quadro 8 abaixo:

Quadro 8 - Análise de sensibilidade - Alteração do pressuposto de mortalidade

	Cenário I			Cenário II		
	Cenário base	Cenário alternativo	Impacto	Cenário base	Cenário alternativo	Impacto
Capital de cobertura do benefício atribuído	177.919	192.415	14.496 8,1%	177.632	192.435	14.803 8,3%
Valor actual das contribuições totais	36.001	38.962	2.961 8,2%	41.191	44.601	3.410 8,3%
Taxa de contribuição:						
- Taxa média de contribuição	8,93%	9,67%	0,75%	10,21%	11,05%	0,84%
- Percentil 75	10,37%	11,23%	0,86%	12,58%	13,63%	1,05%
- Percentil 95	12,73%	13,79%	1,07%	17,71%	19,18%	1,47%

Conforme se pode constatar, a alteração implementada ao nível do pressuposto de mortalidade fez aumentar o valor estimado do capital de cobertura da renda vitalícia em 8,1% no cenário I e em 8,3% no cenário II. O valor actual das contribuições a efectuar pelo promotor do plano sofre aumentos percentuais semelhantes.

A taxa média de contribuição sobre os salários varia 0,75% no cenário I e 0,84% no cenário II.

Os impactos da alteração do pressuposto de mortalidade sobre as distribuições empíricas das taxas médias de contribuição são visíveis nos respectivos histogramas, apresentados nos gráficos 7 e 8 abaixo:

Gráfico 7 – Efeito da alteração do pressuposto de mortalidade sobre a distribuição empírica da taxa média de contribuição – Cenário I

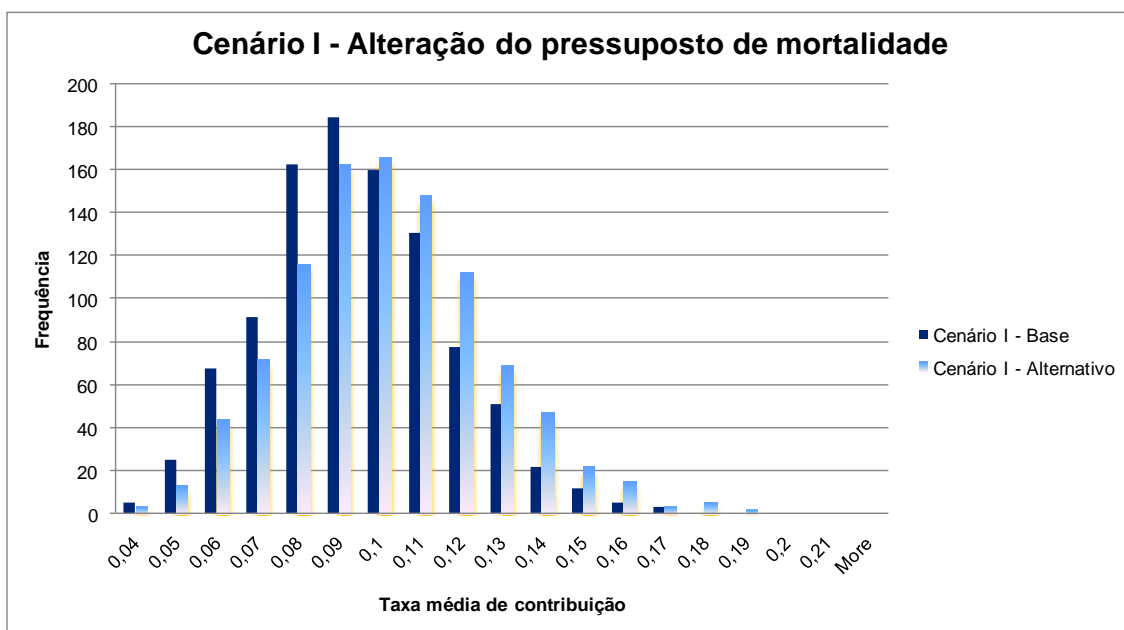
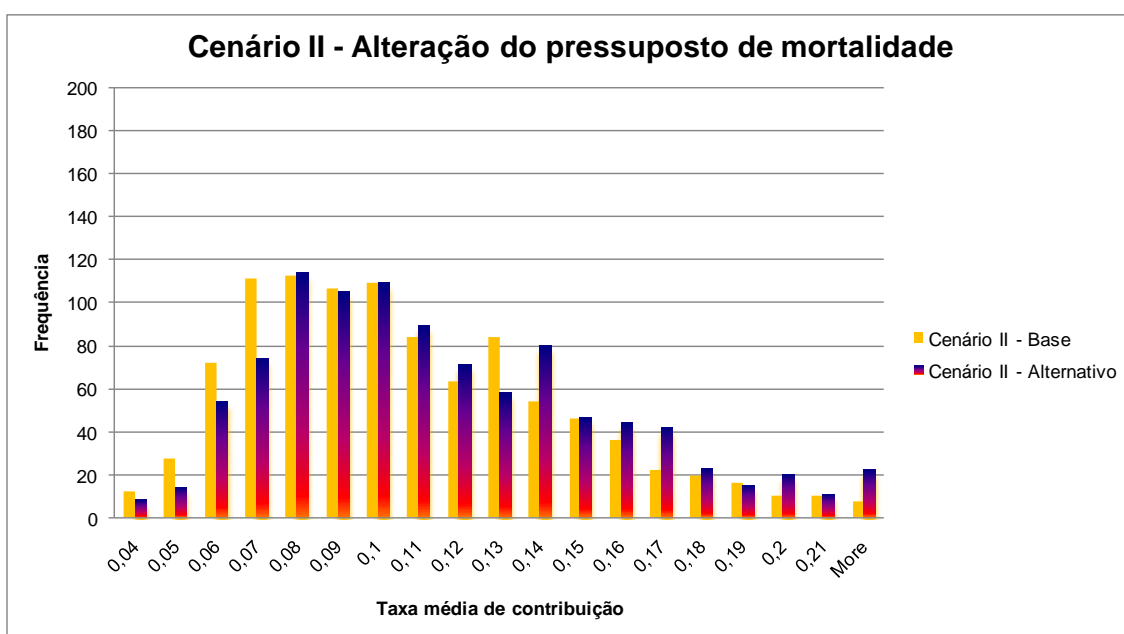


Gráfico 8 – Efeito da alteração do pressuposto de mortalidade sobre a distribuição empírica da taxa média de contribuição – Cenário II



Os efeitos desta alteração nas correspondentes funções de distribuição empíricas são apresentados nos gráficos 9 e 10 abaixo:

Gráfico 9 – Efeito da alteração do pressuposto de mortalidade sobre a função de distribuição empírica – Cenário I

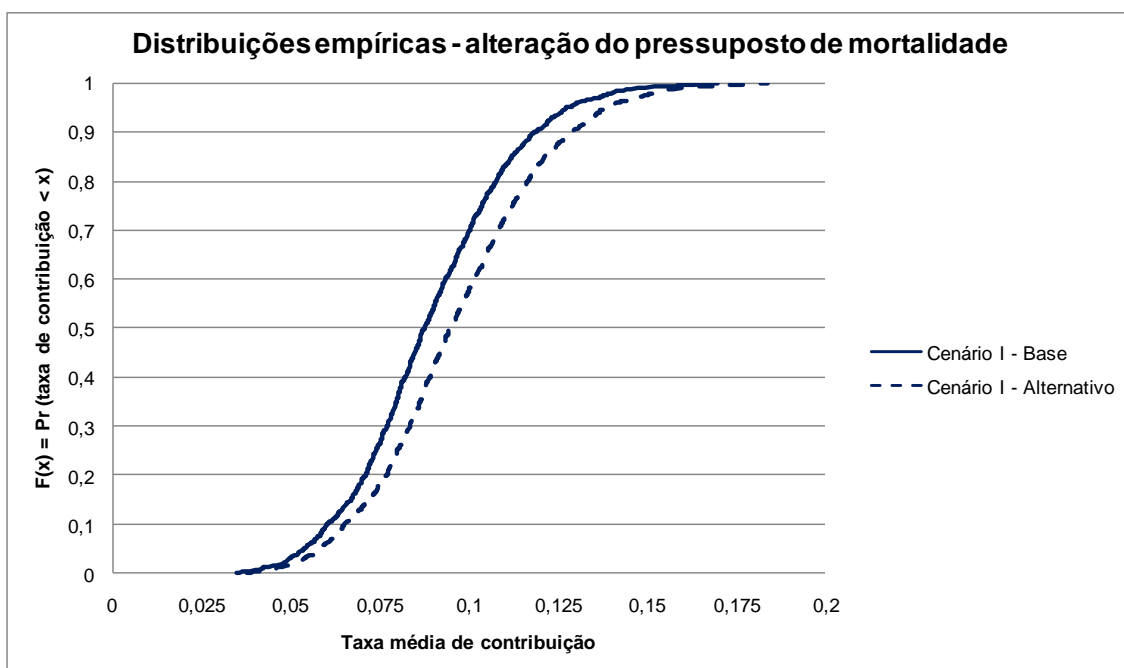
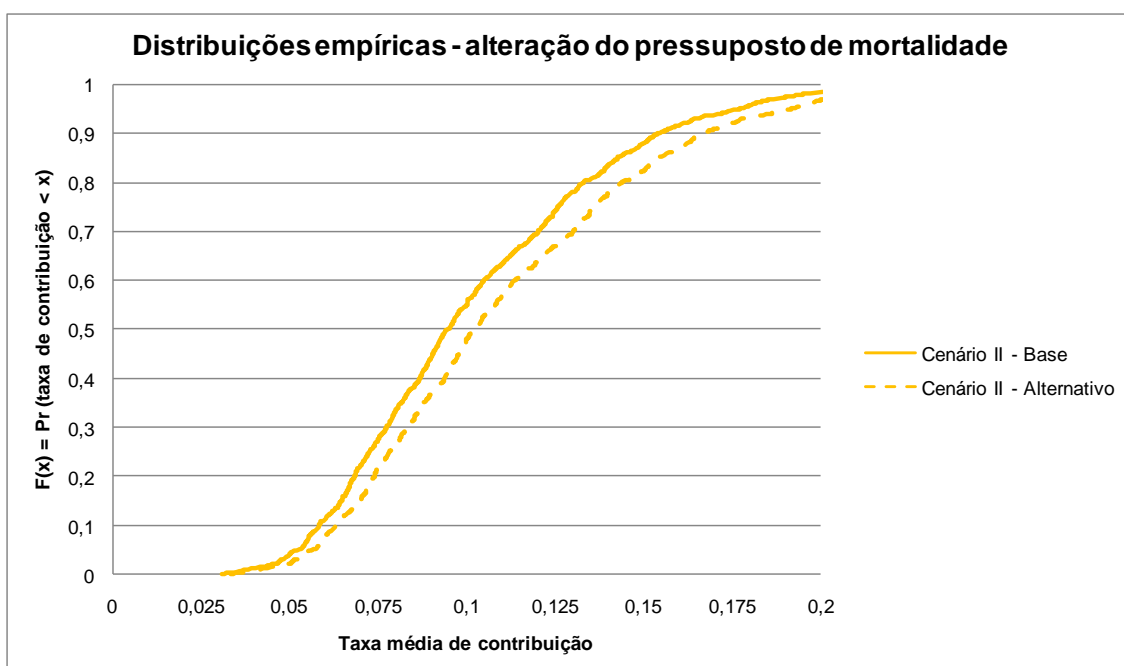


Gráfico 10 – Efeito da alteração do pressuposto de mortalidade sobre a função de distribuição empírica – Cenário II



Conforme se pode verificar, as funções de distribuição empíricas apresentam um deslocamento para a direita, reflectindo o custo acrescido dos benefícios a atribuir, o qual faz aumentar o volume das contribuições requeridas para cada nível de confiança.

4.2 – Taxa de juro técnica

O valor da taxa de juro técnica a utilizar no cálculo do capital de cobertura da renda vitalícia a adquirir pelo fundo de pensões tem impacto directo no valor das responsabilidades assumidas.

Embora a natureza desta taxa sugira que a sua evolução deveria acompanhar os movimentos das taxas de juro de longo prazo, verifica-se que a mesma reflecte também a política comercial das entidades comercializadoras deste tipo de produto, pelo que a evolução em baixa registada ao longo das últimas décadas parece reflectir uma cada vez menor apetência das seguradoras pela aceitação dos riscos de taxa de juro e de longevidade incorporados neste produto.

Na presente análise foram estimados os impactos sobre os resultados dos dois cenários que seriam provocados por uma redução de 1% na taxa de juro técnica utilizada no cálculo do custo da renda vitalícia. Com a finalidade de preservar a comparabilidade face aos cenários iniciais, a taxa de desconto utilizada para o cálculo dos valores actuais das contribuições totais e dos salários totais foi mantida inalterada em 4%. Os resultados obtidos, mediante a realização de novas simulações, são apresentados no quadro 9 abaixo:

Quadro 9 - Análise de sensibilidade - Alteração da taxa de juro técnica

	Cenário I			Cenário II		
	Cenário base	Cenário alternativo	Impacto	Cenário base	Cenário alternativo	Impacto
Capital de cobertura do benefício atribuído	177.919	194.992	17.073 9,6%	177.632	195.012	17.381 9,8%
Valor actual das contribuições totais	36.001	40.260	4.258 11,8%	41.191	46.279	5.088 12,4%
Taxa de contribuição:						
- Taxa média de contribuição	8,93%	10,01%	1,08%	10,21%	11,46%	1,26%
- Percentil 75	10,37%	11,72%	1,35%	12,58%	14,16%	1,58%
- Percentil 95	12,73%	14,45%	1,72%	17,71%	20,12%	2,41%

A alteração efectuada produziu um aumento do custo da renda vitalícia de 9,6% no cenário I e de 9,8% no cenário II. O valor actual das contribuições totais aumenta 11,8% no cenário I e 12,4% no cenário II.

A taxa média de contribuição sobre os salários aumenta em 1,08% no cenário I e 1,26% no cenário II.

Os impactos da alteração da taxa de juro técnica sobre as distribuições empíricas das taxas médias de contribuição são visíveis nos respectivos histogramas, apresentados nos gráficos 11 e 12 abaixo:

Gráfico 11 – Efeito da alteração da taxa de juro técnica sobre a distribuição empírica da taxa média de contribuição – Cenário I

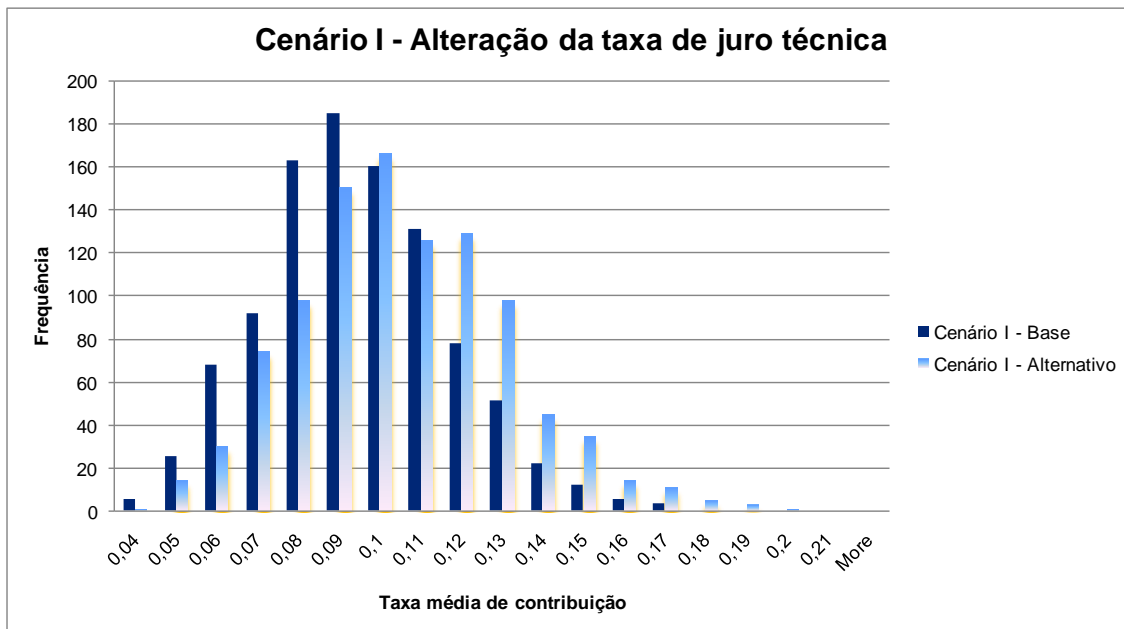
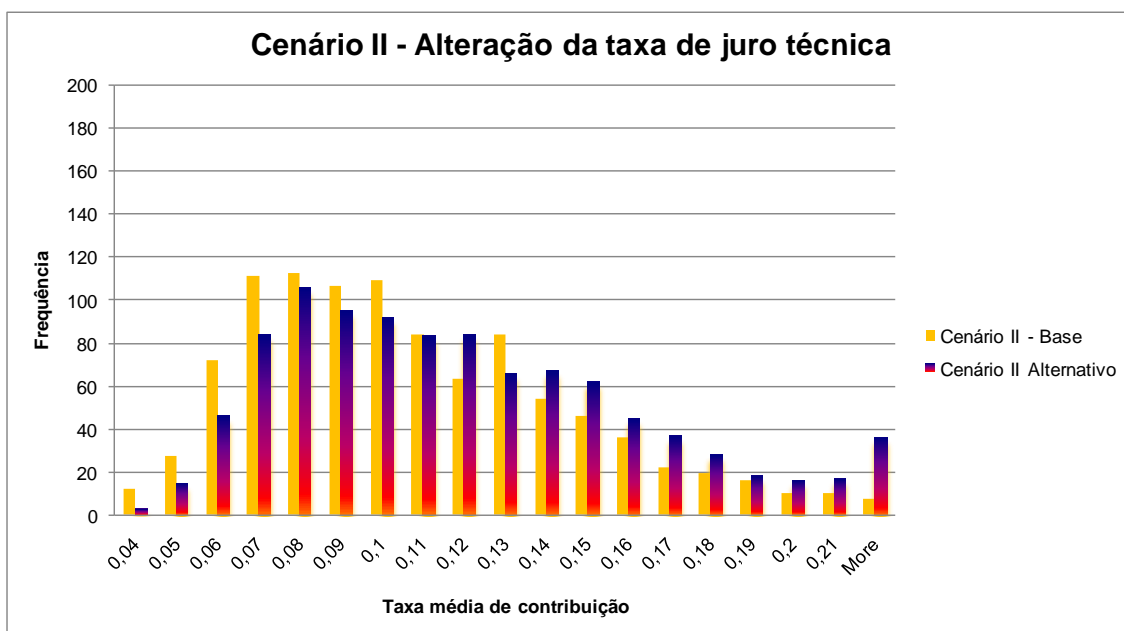


Gráfico 12 – Efeito da alteração da taxa de juro técnica sobre a distribuição empírica da taxa média de contribuição – Cenário II



Os efeitos desta alteração nas correspondentes funções de distribuição empíricas são apresentados nos gráficos 13 e 14 abaixo:

Gráfico 13 – Efeito da alteração da taxa de juro técnica sobre a função de distribuição empírica – Cenário I

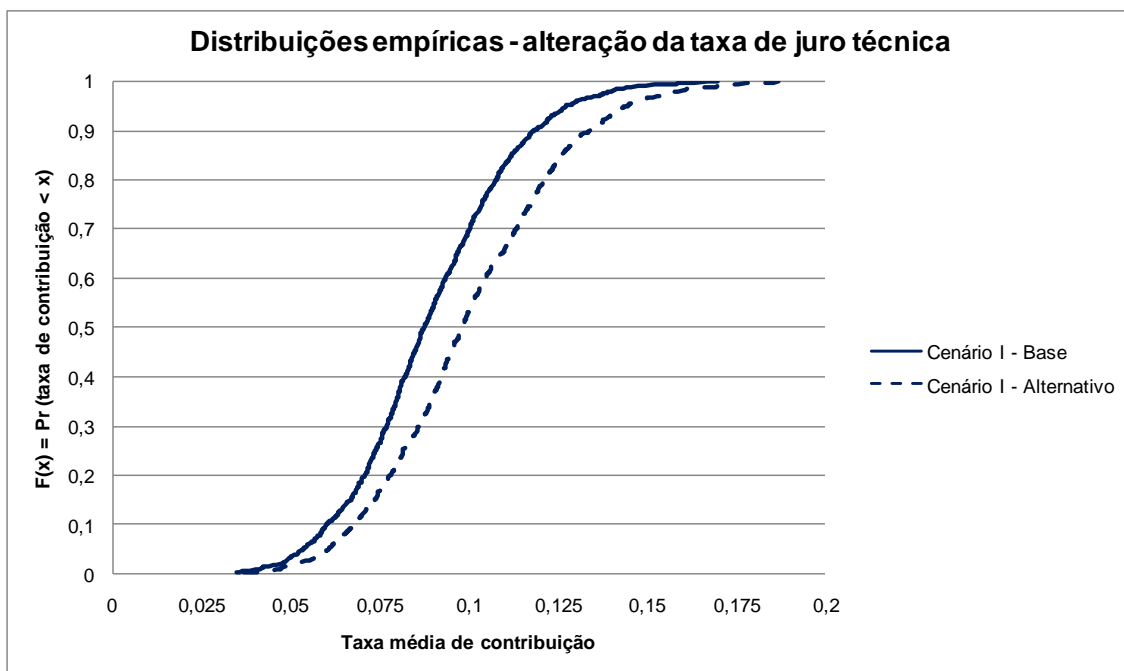
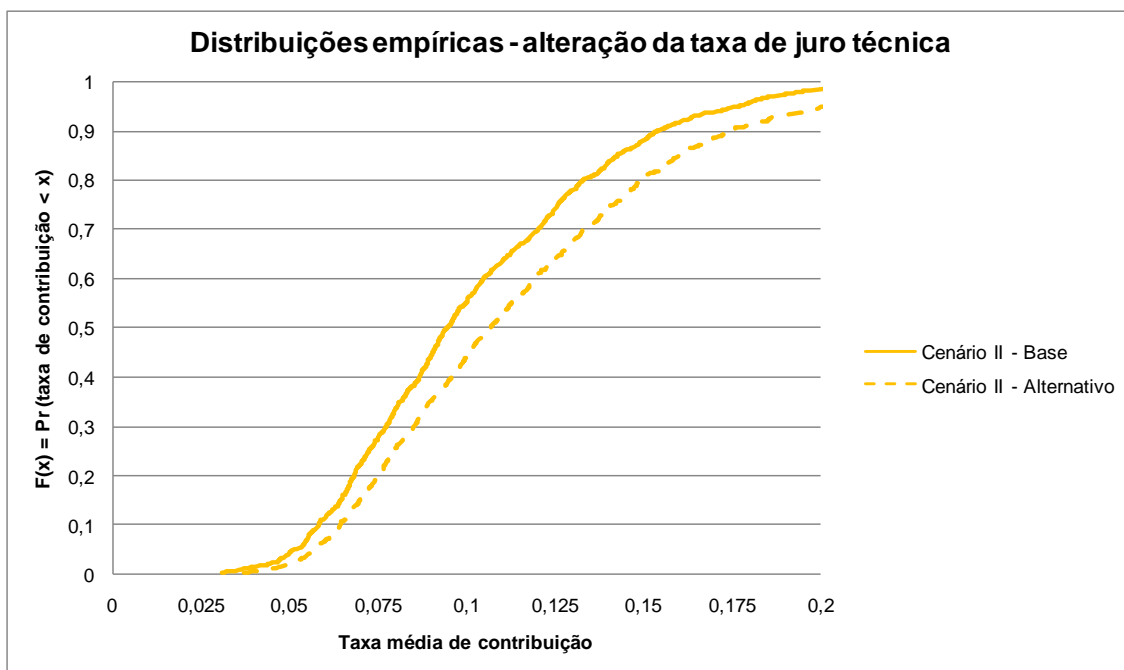


Gráfico 14 – Efeito da alteração da taxa de juro técnica sobre a função de distribuição empírica – Cenário II



Como se pode verificar, o efeito sobre as funções de distribuição empíricas é semelhante ao produzido pela alteração do pressuposto de mortalidade, na medida em que a um maior custo do benefício a atribuir corresponde um maior volume de contribuições para cada nível de confiança e conseqüentemente um deslocamento da função de distribuição empírica para a direita.

4.3 – Estratégia de alocação de activos

No cenário central dos modelos apresentados nesta dissertação foi utilizada uma estratégia de alocação de activos correspondente a um perfil de risco médio. Esta alocação de activos, que prevê o investimento em “equity instruments” de 30% do património do fundo de pensões foi mantida constante ao longo de toda a duração do plano.

Existem contudo estratégias de investimento com horizontes pré-determinados, que efectuam uma redução progressiva da parcela do património investida em activos de risco elevado. Estas estratégias têm como finalidade combinar uma maior rentabilidade esperada durante os primeiros anos, proporcionada por uma exposição acrescida a activos de risco elevado, com a redução de risco que resulta da progressiva transferência do património do fundo para activos de menor risco.

No quadro 10 abaixo são apresentados os resultados, obtidos mediante a realização de novas simulações, utilizando uma estratégia de investimento alternativa que consiste na alocação a “equity instruments” de 60% do património do fundo de pensões durante os primeiros 15 anos da fase de acumulação, a que se segue durante os 20 anos seguintes uma redução gradual de 3% ao ano, cujo capital é transferido para activos com menor risco:

Quadro 10 - Análise de sensibilidade - Alteração da estratégia de alocação de activos

	Cenário I			Cenário II		
	Cenário base	Cenário alternativo	Impacto	Cenário base	Cenário alternativo	Impacto
Valor actual das contribuições totais	36.001	34.119	(1.883) -5,2%	41.191	39.666	(1.524) -3,7%
Rendibilidade do fundo de pensões	6,56%	7,11%	0,56%	6,12%	6,55%	0,43%
Taxa de contribuição:						
- Taxa média de contribuição	8,93%	8,50%	-0,43%	10,21%	9,83%	-0,38%
- Percentil 75	10,37%	9,97%	-0,40%	12,58%	12,52%	-0,07%
- Percentil 95	12,73%	12,53%	-0,20%	17,71%	17,81%	0,10%

Os resultados obtidos mostram que a rendibilidade esperada do fundo de pensões no final da fase de acumulação cresceu 0,56% no cenário I e 0,43% no cenário II. Estes ganhos de rendibilidade permitem baixar o valor actual das contribuições totais a efectuar pelo promotor em 5,2% no cenário I e 3,7% no cenário II, reduzindo assim as correspondentes taxas médias de contribuição.

Nos gráficos 15 e 16 abaixo são apresentados os impactos da alteração da estratégia de alocação de activos sobre as distribuições empíricas das taxas médias de contribuição:

Gráfico 15 – Efeito da alteração da estratégia de alocação de activos sobre a distribuição empírica da taxa média de contribuição – Cenário I

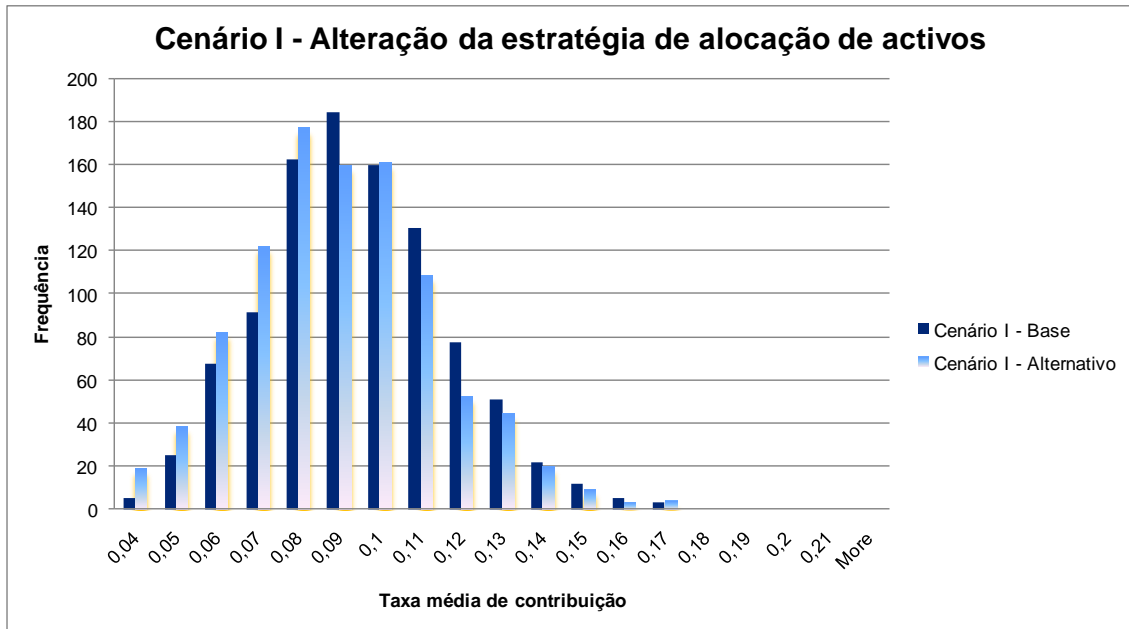
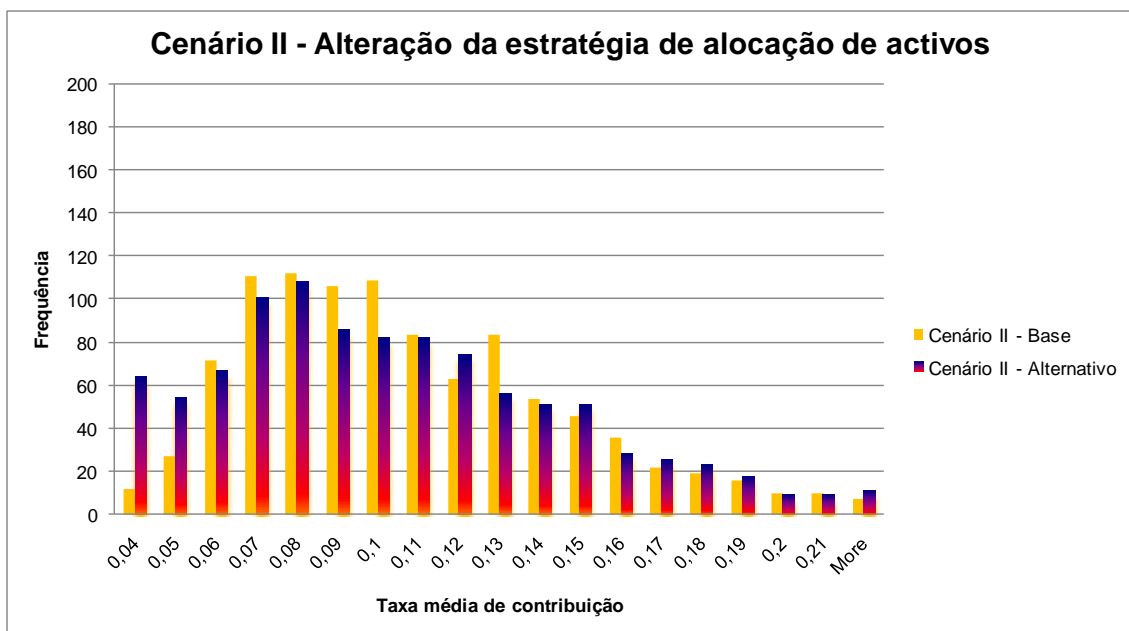


Gráfico 16 – Efeito da alteração da estratégia de alocação de activos sobre a distribuição empírica da taxa média de contribuição – Cenário II



Os efeitos desta alteração nas correspondentes funções de distribuição empíricas são apresentados nos gráficos 17 e 18 abaixo:

Gráfico 17 – Efeito da alteração da estratégia de alocação de activos sobre a função de distribuição empírica – Cenário I

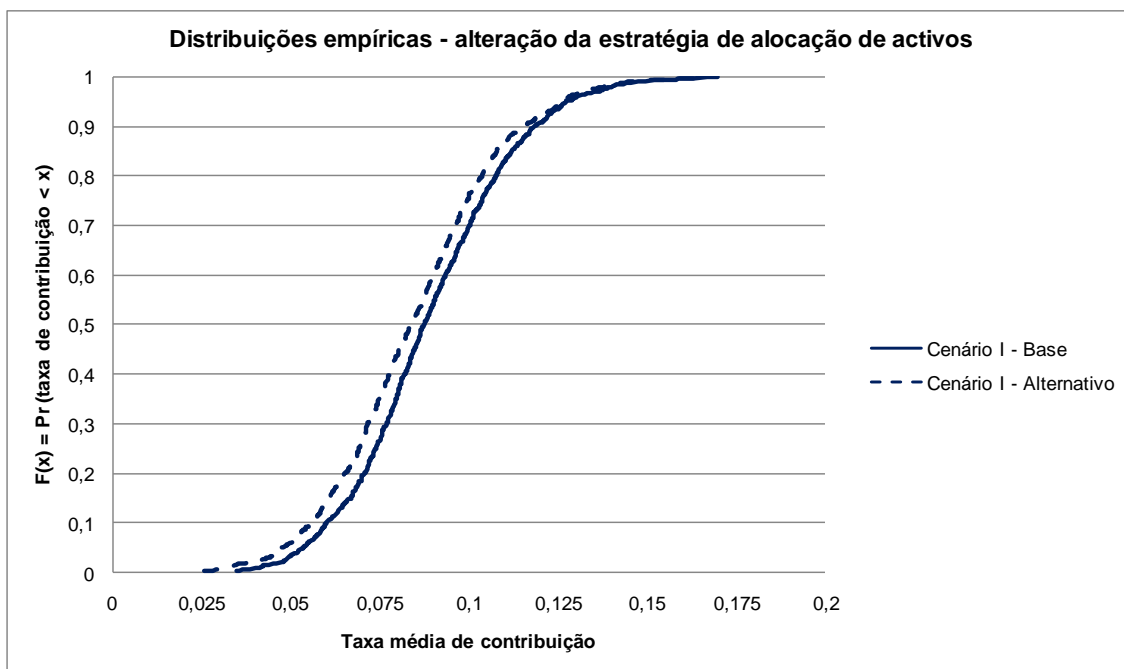
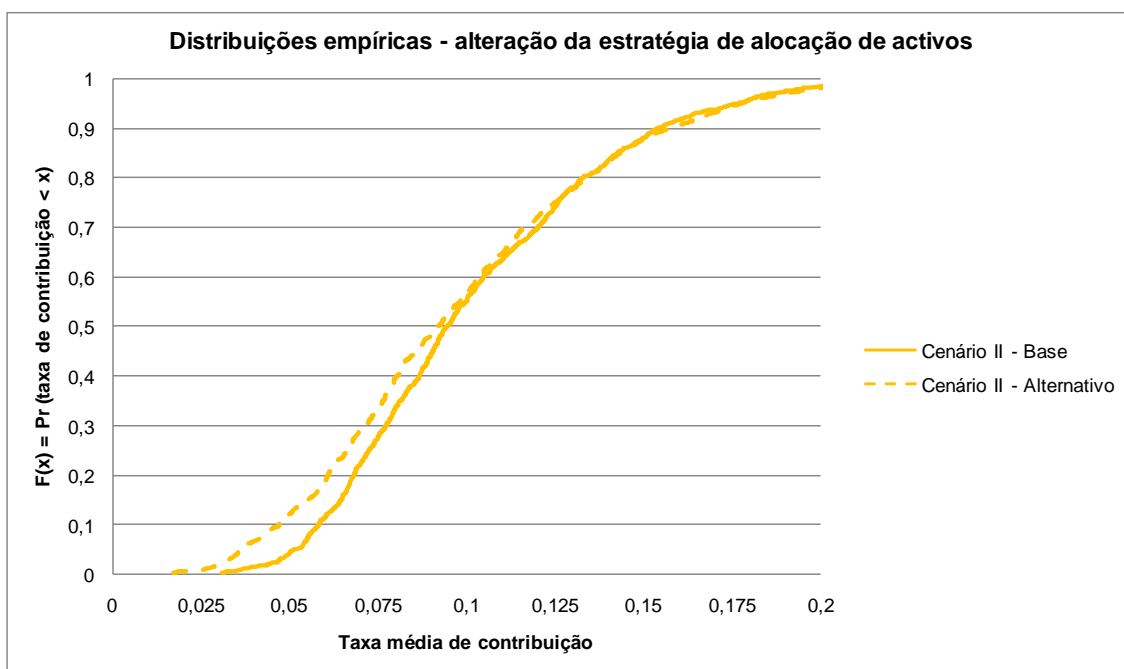


Gráfico 18 – Efeito da alteração da estratégia de alocação de activos sobre a função de distribuição empírica – Cenário II



As funções de distribuição empíricas apresentam um deslocamento para a esquerda, reflectindo o menor valor das contribuições requeridas para cada nível de confiança, o qual foi tornado possível pelo aumento da rendibilidade média dos investimentos do fundo de pensões.

No cenário II verifica-se contudo que o aumento da volatilidade provocado pelo acréscimo de investimentos em “equity instruments” faz aumentar o risco do plano de pensões, esbatendo o efeito anterior e não permitindo baixar a taxa média de contribuição para os níveis de confiança mais elevados.

5 – CONCLUSÕES

A utilização de modelos financeiros de longo prazo na modelização de fundos de pensões de benefício definido ou de outros produtos de poupança a longo prazo pode ser extremamente importante para os seus promotores na medida em que proporciona a estes um melhor conhecimento do esforço financeiro necessário para assegurar a cobertura dos benefícios atribuídos, bem como do risco de variabilidade associado a este esforço financeiro, contribuindo também para melhorar a análise e o conhecimento sobre os restantes riscos inerentes ao plano de pensões.

De facto, os modelos estocásticos utilizados para simular a evolução das taxas de juro, taxas de inflação e rendibilidade dos activos permitem aos seus utilizadores conhecer não só os valores esperados das variáveis de interesse, mas também as distribuições dos diversos resultados possíveis, possibilitando um melhor conhecimento dos riscos associados bem como a sua medição.

Uma adequada utilização destes modelos financeiros implica contudo ter em conta os pressupostos em que estes se baseiam bem como as limitações inerentes, requerendo uma monitorização regular dos resultados alcançados e a tomada atempada de medidas correctivas, sempre que tal se revele necessário.

A escolha do modelo a utilizar deverá atender às características do plano de pensões ou produto a estudar, à finalidade da modelização e também às convicções do utilizador e ao seu nível de conforto com os pressupostos assumidos, sendo necessário adquirir um conhecimento adequado sobre as características e as limitações de cada modelo antes de decidir pela sua aplicação em cada circunstância específica.

Com efeito, e de acordo com o discutido ao longo desta dissertação a propósito da comparação entre os modelos utilizados, quando o objectivo for o de estudar um plano de pensões ou outro produto de longo prazo, em que se consiga eliminar o risco de o desinvestimento ter de ser realizado numa fase baixa do ciclo dos mercados de acções ou em que seja possível operar uma redução progressiva do risco do portfolio de investimentos à medida que o plano se aproxima do seu termo, e desde que o utilizador se sinta confortável com os pressupostos adoptados quanto ao comportamento de longo prazo das principais variáveis do modelo e quanto à hipótese da sua reversão para a média, a utilização de um modelo de longo prazo como o modelo de Wilkie poderá ser adequada.

Nos casos em que não se encontrem reunidas as condições acima enunciadas e em que exista uma preocupação acrescida com a volatilidade dos investimentos e com os seus possíveis efeitos sobre o plano de pensões, será aconselhável a utilização de um modelo que introduza maior dispersão nas distribuições da rentabilidade dos activos de risco, tornando mais prudente a informação produzida pelo modelo global e melhorando a percepção pelos promotores dos riscos que estão a enfrentar.

Adicionalmente, mesmo nas situações em que os resultados de curto prazo sejam considerados pouco relevantes para os objectivos do utilizador, deverá sempre assegurar-se que a probabilidade atribuída à ocorrência de eventos extremos, tais como por exemplo a crise financeira de 2008, reflecte de uma forma razoável a frequência com que esses acontecimentos se verificam efectivamente na realidade. Com efeito, a ocorrência de eventos de grande magnitude, principalmente se forem adversos, pode destruir a credibilidade de um modelo, quando se verifica posteriormente que a probabilidade de ocorrência que lhes estava atribuída era demasiado baixa.

Na implementação deste género de modelos é fundamental atender-se também aos seguintes aspectos:

- a) Os pressupostos adoptados quanto ao comportamento de longo prazo das principais variáveis dos modelos resultam das convicções dos utilizadores, formadas a partir da observação dos dados históricos verificados em períodos mais ou menos longos. O contexto económico, social e político em que se irá desenvolver a fase de acumulação do plano de pensões será de certeza distinto daquele que vigorava quando se observaram os dados históricos, podendo originar, ou não, desvios significativos dos valores reais face aos pressupostos assumidos. Esta circunstância aconselha à utilização de prudência na escolha dos pressupostos, os quais deverão ser conservadores, ainda que por vezes o histórico das variáveis de interesse permitisse defender a utilização de valores mais agressivos.

- b) Os modelos utilizados para simular a rendibilidade dos activos do plano foram desenvolvidos tomando como referência activos genéricos com comportamentos consistentes com a média do mercado e transaccionados em mercados eficientes e com elevada liquidez. Os modelos não incorporam portanto os riscos específicos de cada activo, tais como o risco de crédito e o risco de preço, nem o risco de liquidez.

A utilização destes modelos tem portanto como pressuposto que os investimentos efectuados apresentam um nível de diversificação suficiente para eliminar ou reduzir a um nível aceitável todos os riscos específicos. Este objectivo pode ser conseguido através da realização de investimentos directos, quando a dimensão dos activos geridos é suficiente, ou alternativamente através de investimentos indirectos, por exemplo em fundos de investimento mobiliário com património diversificado.

A realização de investimentos fora das condições de diversificação acima referidas, ou em instrumentos financeiros com características diferentes dos considerados na elaboração dos modelos apresentados pode colocar em causa a validade das conclusões obtidas a partir destes modelos, tornando necessária a utilização de ferramentas adicionais para a gestão dos respectivos riscos.

- c) Conforme se verificou nos capítulos 3 e 4 desta dissertação, os resultados obtidos relativamente ao esforço financeiro necessário para assegurar a cobertura dos benefícios atribuídos estão também muito dependentes do pressuposto de mortalidade e da taxa de juro técnica utilizados no cálculo do capital de cobertura da renda vitalícia que em princípio será necessário adquirir no momento da passagem à situação de reforma.

No caso da mortalidade, a adequacidade do pressuposto está dependente da evolução da esperança de vida que se venha a verificar durante a fase de acumulação do plano de pensões. No caso da taxa de juro considerada, a sua adequacidade depende em parte do nível assumido pelas taxas de juro de longo prazo no momento da passagem à reforma, mas o principal factor será a evolução da política comercial das entidades comercializadoras deste tipo de produto. Alternativamente, o fundo poderia optar pelo pagamento directo das pensões, caso em que a simulação poderia ser também estendida ao período passivo.

Estes factores de incerteza aconselham também à utilização de pressupostos conservadores, devendo assegurar-se a sua monitorização regular de modo a que eventuais alterações possam ser reflectidas logo que se tornem aconselháveis.

Os modelos apresentados no presente trabalho e em particular os sub-modelos utilizados para simular o comportamento da inflação, taxas de juro e rendibilidade dos activos constituem uma das ferramentas base para a realização de análises de “Asset liability management”, cujo interesse neste caso é porem limitado pela simplicidade do plano de pensões utilizado, cujos cash-flows têm timing conhecido à partida e montante apenas dependente da evolução salarial.

Caso se pretendesse aumentar a complexidade da componente de passivo, prescindindo de algumas das hipóteses simplificadoras agora utilizadas e introduzindo mais factores de incerteza, poderia desenvolver-se uma extensão do modelo destinada a gerir o ALM do plano de pensões. Neste sentido, as possibilidades de desenvolvimento futuro incluem:

- a) Aumento das alternativas disponíveis para a evolução da componente do passivo, prevendo a possibilidade de o fundo assegurar directamente o pagamento de pensões aos reformados e de gerir os seus activos e responsabilidades até à extinção destas últimas, introduzindo factores de incerteza adicionais através da modelização da mortalidade e eventualmente de outras saídas;
- b) Modelização do risco de taxa de juro na componente do passivo, através da substituição da taxa de juro técnica determinística por uma taxa de juro estocástica;
- c) Análise da evolução previsível de activos e passivos e dos parâmetros utilizados nos modelos, atendendo aos aspectos relacionados com a liquidez e a exposição ao risco de taxa de juro, e desenvolvimento de outputs específicos para a sua apresentação; e
- d) Calibração dos modelos e adaptação dos mesmos ao ambiente económico pretendido, através da estimação dos respectivos parâmetros com base nos dados relevantes para Portugal, União Europeia, ou para o conjunto dos mercados considerados.

Bibliografia

Ahlgrim, D'Arcy and Gorvett (2004), Modeling of Economic Series Coordinated with Interest Rate Scenarios, Research sponsored by the Casualty Actuarial Society and the Society of Actuaries

Barrie, Turnbull and McCulloch (2005), Defined benefit pension funds: Identifying, quantifying and managing asset-liability risks, Barrie & Hibbert Limited

Ferreira, João Carlos Marques (2004), Desenho Estocástico de Planos de Contribuição Definida, Tese de Mestrado, ISEG, Universidade Técnica de Lisboa

Garcia, Jorge Afonso e Simões, Onofre Alves (2010), Matemática Actuarial Vida e Pensões, Almedina

Hibbert, Mowbray and Turnbull (2001), A Stochastic Asset Model & Calibration for Long-Term Financial Planning Purposes, Barrie & Hibbert Limited

Hull & White (1994), Numerical procedures for implementing term structure models II: Two-Factor models, Journal of derivatives, Vol 2, pg. 37-48

Mowbray, Philip (2009), Stochastic Modelling in Wealth Management: Did We Spot a Black Swan?, Barrie & Hibbert Limited

Rambaruth, Ganeshwarsing (2003), A Comparison of Wilkie-Type Stochastic Investment Models

Relatório do sector segurador e fundos de pensões 2008, Instituto de Seguros de Portugal, A evolução da mortalidade das pessoas seguras e dos pensionistas dos fundos de pensões

Sahin, Cairns, Kleinow and Wilkie (2008), Revisiting the Wilkie Investment Model

Wilkie, A. D. (1995), More on a Stochastic Asset Model for Actuarial Use, British Actuarial Journal, pg. 777-964