

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL



**MODELOS ENVOLVENDO VARIÁVEIS COM DEPENDÊNCIAS
TEMPORAIS PARA PROBLEMAS DE ROTEAMENTO**

Maria Teresa Godinho

DOUTORAMENTO EM ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL
Especialidade: Optimização

2011

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL



**MODELOS ENVOLVENDO VARIÁVEIS COM DEPENDÊNCIAS
TEMPORAIS PARA PROBLEMAS DE ROTEAMENTO**

Maria Teresa Godinho

Tese orientada por: Professor Doutor Luís Eduardo Neves Gouveia

DOUTORAMENTO EM ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL
Especialidade: Optimização

2011

Resumo e *Abstract*

Resumo

Nesta tese propomos modelos compactos em Programação Linear Inteira envolvendo variáveis com dependências temporais para o Problema da Determinação de Rotas Óptimas de Veículos com Restrições de Capacidade na variante de Procura Unitária. O trabalho apresentado compreende duas vertentes:

1. uma vertente de natureza teórica, em que comparamos os novos modelos entre si e com outros conhecidos da literatura, apresentamos desigualdades obtidas por projecção do conjunto das soluções admissíveis das respectivas relaxações em Programação Linear quer no espaço definido pelas variáveis naturais quer no espaço definido pelas variáveis estendidas;
2. uma vertente de natureza computacional, em que avaliamos a qualidade dos limites inferiores produzidos pelas respectivas relaxações em Programação Linear e onde analisamos o efeito da adição de algumas desigualdades válidas aos mesmos.

Os resultados discutidos permitem concluir que o melhor dos modelos propostos não é dominado por nenhum dos restantes modelos compactos publicados para o problema.

Palavras chave: Programação Linear Inteira; Modelos com variáveis com dependências temporais; Reformulações.

Abstract

In this thesis, we introduce some new Time-Dependent Integer Linear Programming formulations for the (Unit-Demand) Vehicle Routing Problem. The new models are then studied from both a theoretical and a computational point of view. In particular, we:

1. Explore several dominance relationships among the new models as well as between the new models and others from the literature and produce some inequalities which result from projecting the feasible Linear Programming set of the new models into the space of flow and design variables;
2. Perform a computational study to assess the strength of the linear programming relaxation of the new models and to evaluate the efficacy of adding new valid inequalities to those models.

Our results allow us to conclude that the stronger of the models models presented in this thesis is not dominated by any of the other compact models known from the literature.

Keywords: Integer Linear Programming; Time-Dependent Models; Reformulations.

Dedicatória

À minha Mãe.

À memória do meu Pai.

Agradecimentos

Ao Professor Luís Gouveia, que me introduziu e conduziu num mundo que se me afigurou fascinante, logo nas primeiras aulas de Mestrado. E, também, por me ter deixado criar e ter ideias que ouviu e discutiu sempre com interesse sem preconceito.

Aos Professores Thomas Magnanti, Pierre Pesneau e José Manuel Pires, co-autores de alguns dos artigos resultantes deste trabalho, por toda a colaboração dispensada.

Ao Centro de Investigação Operacional, pelo apoio à participação em conferências nacionais e internacionais e à frequência de algumas acções de formação. Agradeço também o material informático disponibilizado.

À minha família, por tudo o que me proporciona e que eu nunca conseguiria enumerar.

A todos os meus colegas e amigos que contribuíram de uma forma ou doutra para a realização deste trabalho. Não posso deixar de manifestar um reconhecimento especial à Ana Catarina, à Cecília, à Manuela, à Marta, ao Nuno e ao Pedro pela ajuda inestimável quanto aos meus inúmeros, improváveis e sempre urgentíssimos problemas, das mais variadas naturezas.

Finalmente agradeço a todos a compreensão e a humanidade com que foram aceitando falhas, omissões e a incapacidade de dar resposta atempada a tudo o que era suposto. Mas, afinal, a vida é um Knapsack!

Ia e vinha

E a cada coisa perguntava

que nome tinha.

Sophia M. B. Andersen - *Coral*.

Conteúdo

Resumo e <i>Abstract</i>	iii
Resumo	iii
<i>Abstract</i>	v
Dedicatória	vii
Agradecimentos	ix
1 Introdução	1
2 Conceitos Base	9
2.1 Fundamentação teórica	9
2.2 O Problema do Roteamento de Veículos com Restrições de Capacidade e Procura Unitária	16
2.2.1 Definição do PRVC-PU	17
2.2.2 Complexidade do PRVC-PU	19
2.2.3 Instâncias do PRVC-PU	19
2.3 Formulações em PLI para o PRVC-PU: Revisão da Literatura	20
2.3.1 Formulação Esquema	20
2.3.2 Formulações Naturais	21
2.3.3 Formulações de Fluxos	24
2.3.3.1 Formulações de Fluxo Agregado	24
2.3.3.2 Formulações de Fluxo Desagregado	30
2.3.4 Outras formulações	37

2.3.5	Conclusões e notas finais	41
3	Formulações em PLI envolvendo variáveis com dependências temporais puras para o PRVC-PU	45
3.1	Formulação de Picard e Queyranne Modificada	46
3.2	Comparação com a Formulação Forte de Fluxo Agregado	50
3.2.1	Desigualdades no espaço das variáveis naturais e de fluxo agregado implicadas pela relaxação em PL da Formulação de Picard e Queyranne Modificada	54
3.2.2	Formulação Forte de Fluxo Agregado II	59
3.3	Comparação com outras formulações	59
3.3.1	Comparação com a Formulação de Fluxo Desagregado	59
3.3.2	Comparação com a Formulação Corte	63
3.4	Resultados computacionais	65
3.5	Conclusões e notas finais	69
4	Formulações em PLI envolvendo variáveis de fluxo desagregado com dependências temporais para o PRVC-PU	71
4.1	Formulações de Caminho	72
4.1.1	Formulação Caminho	73
4.1.2	Formulação Forte de Caminho	75
4.2	Formulações de Circuito	79
4.2.1	Formulação Circuito	80
4.2.2	Formulação Forte de Circuito	82
4.3	Comparação entre as formulações de Caminho e de Circuito	87
4.4	Formulação de Circuitos Combinados	90
4.4.1	Comparação com a formulação de Picard e Queyranne Modificada	93
4.4.1.1	Desigualdades implicadas no espaço das variáveis com dependências temporais pela relaxação em PL da Formulação de Circuitos Combinados	97
4.4.1.2	Formulação de Picard e Queyranne Modificada II	101
4.4.2	Comparação com outras formulações	102

4.5	Resultados computacionais	103
4.6	Conclusões e notas finais	106
5	Formulações em PLI envolvendo restrições de circuito e de capacidade para o PRVC-PU	109
5.1	Restrições de Capacidade e de Roteamento	109
5.2	Formulação de Circuito e Capacidade	110
5.3	Formulação Forte de Circuito e Capacidade	115
5.4	Comparação com a Formulação de Corte	118
5.5	Resultados computacionais	120
5.6	Conclusões e notas finais	121
6	Conclusões e Trabalho Futuro	125
A	Demonstrações de resultados relativos à Formulação de Picard e Queyranne Modificada	127
B	Demonstrações de resultados relativos à Formulação de Circuitos Combinados	137
C	Resultados Computacionais	139
	Referências Bibliográficas	150

Lista de Tabelas

2.1	Valores das variáveis y_{ij}^k associadas à solução representada na Fig. 2.2	35
3.1	Valores das variáveis y_{ij}^k associadas à solução representada na Fig. 3.4	60
3.2	Valores das variáveis z_{ij}^h associadas à solução representada na Fig. 3.5	61
3.3	Resultados computacionais relativos às formulações compactas apresentadas no Capítulo 3	68
3.4	Resultados computacionais relativos às versões restrita e completa do algoritmo de Lysgaard et al. (2004) I	68
4.1	Valores das variáveis $w1_{ij}^{hk}$ e $w2_{ij}^{hk}$ associadas à solução representada na Fig. 3.5	102
4.2	Resultados computacionais relativos às formulações compactas apresentadas no Capítulo 4	106
4.3	Resultados computacionais relativos às versões restrita e completa do algoritmo de Lysgaard et al. (2004) II	107
5.1	Valores das variáveis $w1_{ij}^{hk}$ e $w2_{ij}^{hk}$ associadas à solução representada na Fig. 5.2	120
5.2	Resultados computacionais relativos às formulações compactas apresentadas no Capítulo 5.	122
5.3	Resultados computacionais relativos às versões restrita e completa do algoritmo de Lysgaard et al. (2004) III	122
C.1	Características das instâncias	140
C.2	Características das instâncias (cont.)	141

C.3	Resultados detalhados para as instâncias com $n = 21$ e $Q = 3$	142
C.4	Resultados detalhados para as instâncias com $n = 21$ e $Q = 3$ (cont.)	143
C.5	Resultados detalhados para as instâncias com $n = 21$ e $Q = 5$	144
C.6	Resultados detalhados para as instâncias com $n = 21$ e $Q = 5$ (cont.)	145
C.7	Resultados detalhados para as instâncias com $n = 41$ e $Q = 3$	146
C.8	Resultados detalhados para as instâncias com $n = 41$ e $Q = 3$ (cont.)	147
C.9	Resultados detalhados para as instâncias com $n = 41$ e $Q = 5$	148
C.10	Resultados detalhados para as instâncias com $n = 41$ e $Q = 5$ (cont.)	149

Lista de Figuras

2.1	Solução admissível do PRVC-PU para uma instância com $n = 7$ e $Q = 3$	18
2.2	Solução admissível de $FFDesagregado_L$ para uma instância do PRVC-PU com $n = 7$ e $Q = 3$	35
2.3	Relações de dominância entre as formulações $FCorte$, $FFAgregado$, $FFAgregado^+$ e $FFDesagregado$	42
3.1	Representação de uma solução do PRVC-PU num grafo expandido	47
3.2	Relação valor do fluxo - posição do arco numa solução admissível do PRVC-PU	51
3.3	Representação esquemática da actuação das restrições de limite superior ao valor do fluxo num arco numa solução admissível do PRVC-PU	57
3.4	Solução admissível de $FFDesagregado_L$ para uma instância do PRVC-PU com $n = 7$ e $Q = 3$	60
3.5	Solução admissível de $FPQM_L$ para uma instância do PRVC-PU com $n = 7$ e $Q = 3$	61
3.6	Relações de dominância demonstradas nos capítulos 2 e 3	69
4.1	Representação de um caminho cliente-depósito num grafo expandido	76
4.2	Representação de um circuito depósito-cliente-depósito num grafo expandido	83
4.3	Representação de um conjunto de circuitos depósito-cliente-depósito num grafo expandido	91
4.4	Representação esquemática da actuação das restrições (4.47) numa solução admissível do PRVC-PU	100

4.5	Relações de dominância demonstradas nos capítulos 2, 3 e 4	108
5.1	Relação posição do arco - número de vértices na rota que o inclui numa solução admissível do PRVC-PU	117
5.2	Solução admissível de $FCircCap_L^+$ para uma instância do PRVC-PU com $n = 7$ e $Q = 3$	119
5.3	Relações de dominância demonstradas neste trabalho	123

Capítulo 1

Introdução

The paper is concerned with the optimum routing of a fleet of gasoline delivery trucks between a bulk terminal and a large number of service stations supplied by the terminal. The shortest routes between any two points in the system are given and a demand for one or several products is specified for a number of stations within the distribution system. It is desired to find a way to assign stations to trucks in such a manner that station demands are satisfied and total mileage covered by the fleet is a minimum. A procedure based on a linear programming formulation is given for obtaining a near optimal solution. The calculations may be readily performed by hand or by an automatic digital computing machine. No practical applications of the method have been made as yet. A number of trial problems have been calculated, however.

G. B. Dantzig and J. H. Ramser, *The Truck Dispatching Problem*, 1959.

É desta forma que Dantzig e Ramser (1959) introduzem o Problema do Roteamento de Veículos (PRV) num artigo clássico, no qual o PRV é definido formalmente pela primeira vez. Os autores consideram uma frota ilimitada de veículos idênticos, estacionados num depósito, e um conjunto de clientes com procura conhecida. Nessas condições, pretendem encontrar um conjunto de rotas (uma rota corresponde a uma viagem de um veículo) que permite satisfazer a procura dos clientes com custo total mínimo. As rotas têm início e fim no depósito e devem ser tais que a soma das procuras dos clientes visitados não ultrapasse a capacidade do veículo. Os custos são

identificados com as distâncias físicas percorridas pelos veículos.

Desde então têm sido propostas e estudadas um grande número de variantes do problema original, de tal forma que hoje o acrónimo PRV designa não um mas uma família de problemas que têm como objectivo comum o desenho de rotas óptimas em problemas de distribuição/recolha e que se diferenciam pelo tipo de restrições ou de estrutura de custos envolvidas. As diferenças entre as várias variantes são motivadas pelas especificidades das aplicações práticas do problema. A título indicativo referimos, por exemplo, a possibilidade de considerar a existência de mais de um depósito, a imposição de um limite à dimensão da frota e/ou à duração das rotas, a utilização de frotas heterogéneas, a existência de janelas temporais ou de restrições de precedência associadas aos clientes, a existência de penalidades pelo atravessamento de determinados troços, etc. Para uma revisão dessas variantes que inclua métodos exactos e heurísticos propostos para a sua abordagem e o seu impacto nos sistemas económicos consultem-se, por exemplo, os livros editados por Toth e Vigo em 2002b ou por Golden et al. em 2008.

A variante que tratamos nesta tese é um caso particular da versão original do problema, em que se assume que a procura é unitária. Designamos essa variante por Problema do Roteamento de Veículos com Restrições de Capacidade e Procura Unitária, PRVC-PU. Estamos também interessados na variante com procuras generalizadas e limite à dimensão da frota, que denotamos por PRVC.

Como apontado por Ghiani et al. (2006) o PRVC-PU é um caso particular de um problema do desenho de rotas em aviação onde, para além restrição usual ao comprimento total de cada rota, se impõe um limite máximo ao número de descolagens e aterragens entre cada duas visitas ao centro de manutenção. O PRVC-PU modela o caso em que as distâncias entre aeroportos são pequenas e, como tal, é possível relaxar a primeira restrição. Bourgeois et al. (2003) apresentam heurísticas para a resolução deste problema (designado na bibliografia como *Black and White TSP*) enquanto que Ghiani et al. (2006) o abordam do ponto de vista dos métodos exactos, introduzindo

um algoritmo de *branch and cut* para a sua resolução.

No entanto, como sugerem Naddef e Rinaldi (2002), o principal motivo de interesse associado ao estudo do PRVC-PU não reside nas suas aplicações práticas, mas sim no facto desta variante constituir um veículo para a obtenção de resultados interessantes para problemas mais complexos, nomeadamente para o PRVC, problema com um vasto leque de aplicações e com grande impacto económico.

É comum introduzir o PRVC como uma extensão do Problema do Caixeiro Viajante (PCV). Com efeito, no PCV pretendemos determinar a rota de custo mínimo que visita cada cliente uma e uma só vez, o que corresponde a considerar uma instância do PRVC com um único veículo de capacidade suficientemente grande. Assim, muitos dos métodos desenvolvidos para o PRVC são herdeiros dos métodos desenhados para o PCV e é usual estabelecer comparações entre os resultados obtidos para os dois problemas. Quanto a este ponto, é unanimemente reconhecido que o PRVC é muito mais difícil de resolver que o PCV – por exemplo, conhecem-se algoritmos de *branch and cut* que resolvem instâncias com milhares de nodos para o PCV (Aplegate et al. (2006)), enquanto que, para o PRVC, a dimensão da maior instância resolvida até à optimalidade por um esquema desta natureza é 135 (Laporte, 2007).

A eficiência dos algoritmos de *branch and cut* e de *branch and cut and price*, apontados por Naddef e Rinaldi (2002) e por Laporte (2007) como os esquemas de maior sucesso na abordagem exacta do PRVC, depende, em grande medida, do conhecimento de desigualdades válidas fortes, idealmente definidoras de facetos do envolvente convexo do conjunto das soluções admissíveis do problema em estudo.

O PCV é um dos dos problemas de Optimização Combinatória mais estudados, tendo-se um conhecimento que podemos considerar extenso do seu envolvente convexo. O mesmo não acontece quanto ao PRVC: a dimensão do poliedro correspondente depende de forma intrincada dos parâmetros do problema, o que torna particularmente difíceis as provas de facetos. Naddef e Rinaldi (2002) apontam como possível saída

para este dilema o uso de informação associada a estudos poliédricos relativos a relaxações do PRVC, a qual, devidamente adaptada, pode ser útil no desenvolvimento daquele tipo de esquemas. Com efeito, apesar de se saber que desigualdades fortes ou mesmo desigualdades definidoras de facetas para relaxações de um problema podem não funcionar bem para o problema original, a prática tem mostrado que esse não é o caso do PRVC. No mesmo artigo, Naddef e Rinaldi referem alguns trabalhos realizados nesse âmbito, a saber: os trabalhos de Cornuéjols e Harche (1993), de Naddef e Rinaldi publicados em 1991 e em 1993 e o de Araque et al. (1990). Este último debruça-se precisamente sobre a variante do PRVC aqui estudada, o PRVC-PU.

Em contraponto, gostaríamos de frisar a importância de se poder dispor de métodos alternativos aos algoritmos de *branch and cut* e de *branch and cut and price* para a obtenção de limites inferiores para um problema. Com efeito, aqueles são algoritmos sofisticados e de difícil implementação, o que não favorece a obtenção rápida e ágil de limites inferiores, tão necessários ao desenvolvimento de heurísticas e, conseqüentemente, ao desenvolvimento de esquemas para a resolução de situações reais. Também neste campo, o trabalho desenvolvido para o PRVC-PU/PRVC está muito aquém do produzido para o PCV. Publicações recentes comparam famílias de formulações compactas em Programação Linear Inteira (PLI) do PCV e apresentam resultados computacionais que indicam que algumas delas produzem, em média, *gaps* lineares da ordem de 1-2%, mesmo para os grupos de instâncias mais difíceis da literatura (ver, por exemplo, Ocan e Laporte (2009)). Desconhecemos a existência na bibliografia de trabalhos para qualquer um dos dois problemas em estudo com características similares. Sabemos, no entanto, que os *gaps* associados às formulações compactas disponíveis para o PRVC-PU/PRVC são, em média, consideravelmente superiores àquele valor, porquanto o desenvolvimento e comparação de formulações compactas em PLI para o PRVC-PU/PRVC se afigura como um campo de investigação com interesse próprio, para além de constituir uma via para a obtenção de desigualdades válidas fortes para aqueles problemas.

Este conjunto de observações motivou, em grande medida, a direcção escolhida

para este trabalho que assenta na idealização, comparação e análise de formulações em PLI para o PRVC-PU. As formulações introduzidas são formulações envolvendo variáveis com dependências temporais. A opção por este tipo de modelos nasceu da conjugação de duas observações: i) trabalhos anteriores indicavam que modelos com dependências temporais produziam bons limites inferiores para problemas relacionados com o PRVC-PU; ii) não encontramos registo na literatura de formulações para o PRVC-PU (ou para o PRVC) que seguissem aquela abordagem. Os modelos que apresentamos e estudamos neste trabalho são, por conseguinte, modelos onde exploramos as relações referidas em i).

Os modelos propostos são analisados de acordo com vários aspectos:

Numa primeira fase, avaliamos-los quanto à qualidade dos limites inferiores associados. Para o efeito, realizamos uma comparação de formulações e procedemos a um conjunto de testes computacionais. A comparação de formulações permitiu posicionar os novos modelos entre si e relativamente a outros já publicados. Os testes computacionais permitiram ter uma medida das distâncias entre os vários modelos, nessa hierarquia. Nos testes computacionais usamos famílias de instâncias com características diferentes para que pudéssemos identificar casos de especial adequabilidade entre modelos e alguns tipos de instâncias.

Numa segunda fase, dirigimos o trabalho para um conjunto de tópicos relacionados com estudos poliédricos. Usando técnicas de projecção obtivemos conjuntos de restrições implicadas pelas relaxações em Programação Linear (PL) dos modelos propostos em determinados espaços de interesse. Conhecendo as desigualdades projectadas podemos examinar, no mesmo espaço, grupos de restrições de formulações diferentes, o que facilitou a identificação de diferenças e pontos comuns nas formulações. Poder fazê-lo foi essencial para perceber como e em que extensão as novas abordagens usadas na construção de modelos para o PRVC-PU condicionam os resultados teóricos e computacionais obtidos. A partir das desigualdades projectadas podemos, ainda, inferir sobre outras, mais apertadas, conseguidas por aplicação de técnicas como as de

Chvátal–Gommory ou de *lifting*, ou através de uma simples análise empírica, baseada na observação das desigualdades e no conhecimento que temos do problema.

O trabalho que sumariamente acabámos de descrever está organizado como se segue:

O Capítulo 2 versa sobre um conjunto de tópicos que constituem as bases do trabalho apresentado nos capítulos subsequentes: na Secção 2.1 apresentamos um breve sumário de alguns conceitos teóricos; na Secção 2.2 definimos o PRVC-PU, referimos a sua complexidade e descrevemos o conjunto de instâncias deste problema usadas neste trabalho; finalmente, na Secção 2.3, apresentamos e comparamos alguns dos modelos publicados na literatura para o PRVC-PU. Nesta secção, introduzimos alguns resultados que permitem comparar teoricamente esses mesmos modelos.

No Capítulo 3 introduzimos uma formulação nova em PLI para o PRVC-PU baseada na conhecida formulação de Picard e Queyranne (1978) para uma variante do PCV, o Problema do Caixeiro Viajante com Custos Temporais (*v.* Secção 3.1), e comparamo-la com as formulações apresentadas na Secção 2.3 do capítulo anterior (*v.* Secções 3.2 e 3.3). Na Subsecção 3.2.1 apresentamos e estudamos um conjunto de desigualdades obtidas por projecção do conjunto das soluções admissíveis da relaxação em PL da nova formulação num dado espaço de interesse e estudamos o efeito da sua adição a um modelo definido nesse espaço. Na Secção 3.4, apresentamos um conjunto de resultados computacionais que permite avaliar e comparar a qualidade dos limites inferiores produzidos pelas formulações introduzidas. Finalmente, na Secção 3.5 apresentamos as principais conclusões deste capítulo.

No Capítulo 4 apresentamos um conjunto de formulações em PLI para o PRVC-PU baseadas na decomposição daquele problema em sub-problemas. Mais concretamente, propomos e discutimos vários modelos que usam como sub-problema o problema do caminho mais curto entre dois determinados vértices de um grafo com uma restrição adicional ao número de arcos (Secção 4.1) e que usam como sub-problema o problema

do circuito mais curto que visita dois determinados vértices de um grafo com uma restrição adicional ao número de arcos (Secção 4.2). Nos dois casos, apresentamos formulações que modelam de forma exacta os problemas descritos. Na Secção 4.3, comparamos as formulações obtidas e na Secção 4.4 propomos um conjunto de desigualdades válidas que adicionamos ao mais forte dos modelos introduzidos. O modelo fortalecido é comparado com os restantes modelos apresentados neste trabalho nas subsecções 4.4.1 e 4.4.2. Mostramos que o modelo em estudo domina o modelo apresentado no capítulo anterior e, no seguimento desse resultado, introduzimos, na Subsecção 4.4.1.1, um conjunto de desigualdades projectadas a partir da relaxação em PL do primeiro no espaço definido pelas variáveis do segundo. Na Subsecção 4.4.1.2 introduzimos a formulação fortalecida obtida por adição das referidas desigualdades ao modelo dominado. Concluimos o capítulo apresentando um novo conjunto de resultados computacionais e apresentando um resumo do trabalho apresentado (secções 4.5 e 4.6).

No Capítulo 5 identificamos, nalguns modelos de interesse, características que os distinguem e introduzimos um terceiro e último conjunto de formulações novas para o PRVC-PU que unifica as abordagens usadas na sua obtenção. Mostramos que a formulação assim obtida domina todos os modelos compactos apresentados neste trabalho (secções 5.1 e 5.2). Na Secção 5.3 apresentamos um conjunto de desigualdades válidas que permite fortalecer a nova formulação e na Secção 5.5 realizamos uma comparação computacional entre os modelos apresentados neste capítulo e uma selecção dos modelos apresentados nos capítulos anteriores.

Finalmente, no Capítulo 6 sumariamos as principais conclusões deste trabalho e apontamos novas direcções para investigação.

Capítulo 2

Conceitos Base

Neste capítulo debruçamo-nos sobre um conjunto de tópicos de natureza variada que têm em comum o facto de sustentarem o trabalho que apresentamos nos capítulos seguintes.

2.1 Fundamentação teórica

Nesta secção apresentamos uma resenha dos conceitos teóricos que suportam o nosso trabalho. Na sua preparação seguimos de perto um número de referências clássicas no estudo da Optimização Combinatória, Estudos Poliédricos, Programação Linear, Programação Linear Inteira e suas relações, nomeadamente: Pulleyblank (1989), Nemhauser e Wolsey (1988) e Lawler et al. (1985). De modo a não "pesar" o texto, optámos por evitar a citação constante das referências. Reservámos a excepção para duas situações: i) quando apresentarmos definições e/ou resultados usados nos capítulos subsequentes; ii) quando quisermos referir a autoria ou a origem histórica de um determinado método.

Os problemas de Optimização Combinatória (OC) incidem sobre objectos discretos. Em geral, consideramos um conjunto X de objectos e uma família de subconjuntos de X definida por uma propriedade. Procuramos, então, identificar o melhor dos membros da família face a um determinado critério. Para tal, atribuímos

pesos aos objectos em X e definimos uma aplicação que associa um *valor* a cada um dos sub-conjuntos/membros da família em função dos pesos dos seus elementos. O membro procurado é, por conseguinte, o de melhor valor entre os membros da família. Designamos os membros da família por *soluções admissíveis* e o melhor dos seus membros por *solução ótima*.

No que se segue, e por ser esse o caso do problema que estudamos neste trabalho, consideramos um problema de OC com um número finito de soluções. Assumimos que os pesos associados aos objectos são não negativos e que a aplicação definida, doravante designada por função objectivo, é uma aplicação linear que pretendemos minimizar. Em concordância com o tipo de função objectivo, passamos a designar os pesos por custos.

Para codificar as soluções usamos vectores 0-1, indexados aos objectos de X , que designamos por *vectores de incidência* das soluções do problema. Num vector de incidência, x , o valor de x_j indica se o $j^{\text{ésimo}}$ objecto está, ou não, na solução associada a x , para $j = 1, \dots, \dim(x) = n$ ($\dim(x)$ denota a dimensão de x).

Usando esta notação, o problema genérico que acabámos de descrever (designemo-lo por problema \mathbf{G}) é $\min \{c^T x : x \in V_G\}$ onde c é um vector de custos de dimensão adequada, x o vector das incógnitas e V_G o conjunto dos vectores de incidência das soluções do problema.

Sabemos que \mathbf{G} é equivalente a $\min \{c^T x : x \in Co(V_G)\}$ onde $Co(V_G)$ denota o *envolvente convexo* do conjunto V_G , que é, por consequência da sua definição, o menor dos poliedros que contêm V_G .

Recordamos que um *poliedro* é um subconjunto de \mathbb{R}^n que satisfaz um número finito de desigualdades lineares. Notamos que um sistema de equações $Dx = c$ pode ser escrito como $Dx \leq c$, $-Dx \leq -c$, pelo que $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, Dx = c\}$ é um poliedro (A e D (b e c) são matrizes (vectores) de dimensão adequada, que

assumimos racionais). Do sistema $Ax \leq b, Dx = c$ dizemos que é *completo* para P e se, adicionalmente, $Ax \leq b$ não contém equações implícitas e se da eliminação de uma qualquer desigualdade ou equação resultar um poliedro diferente de P , dizemos que $Ax \leq b, Dx = c$ é um sistema *completo e não redundante* para P .

Estamos, então, interessados em determinar um sistema de desigualdades lineares completo e não redundante (pretendemos encontrar uma representação minimal) para $Co(V_G)$. Observamos que conhecendo uma tal descrição de $Co(V_G)$, resolver \mathbf{G} resume-se a resolver um problema de Programação Linear (PL) que é, como se sabe, bem resolvido.

Dizemos que $Ax \leq b, Dx = c$ é um sistema completo e não redundante para $Co(V_G)$ se e só se: i) o conjunto de equações $Dx = c$ for minimal; ii) o sistema $Ax \leq b$ não contiver equações implícitas nem desigualdades equivalentes e iii) cada uma das igualdades de $Ax \leq b$ definir uma faceta de $Co(V_G)$.

É sabido que identificar o conjunto de todas as facetas de um poliedro não trivial é um problema difícil, pelo que é pouco provável encontrar um sistema com as características descritas para problemas da classe NP. Este resultado negativo não implica que a abordagem poliédrica seja abandonada. Com efeito, os métodos poliédricos têm provado ser de grande importância no ataque a problemas combinatorios difíceis. Em termos gerais, neste tipo de metodologia, parte-se de um poliedro que contém $Co(V_G)$ sobre o qual se aplica um algoritmo que se pretende que convirja para a solução ótima de \mathbf{G} . A eficácia/eficiência desses métodos depende em grande medida da existência de descrições parciais, ou de boas aproximações, de $Co(V_G)$. A obtenção de aproximações de $Co(V_G)$ para problemas difíceis é um dos objectivos de estudo do *desenvolvimento e comparação de formulações*, tópico a que se dedica nosso trabalho.

Considere-se um poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $P \cap \{0, 1\}^n = V_G$, dizemos que $\min \{c^T x : x \in P, x \in \{0, 1\}^n\}$ é uma *formulação* ou *modelo* em Programação Linear Inteira (PLI) de \mathbf{G} . Denotamos a referida formulação por FP e representamos o valor da sua

solução óptima por $v(FP)$. Decorre da definição de formulação que $v(FP) = v(\mathbf{G})$. Neste contexto, designamos cada uma das desigualdades do sistema associado a P por *restrição*.

Naturalmente, é possível escrever mais de uma formulação do mesmo problema. Para comparar formulações recorreremos à noção de *relaxação em Programação Linear*.

Obtemos a *relaxação em Programação Linear* de uma formulação FP , que denotamos por FP_L , substituindo as condições de integralidade das incógnitas x por $0 \leq x \leq 1$. Representamos o conjunto das soluções admissíveis de FP_L por P_L e o valor da sua solução óptima por $v(FP_L)$.

Observamos que $V_G \subseteq Co(V_G) \subseteq P_L$. Consequentemente, $v(FP_L) \leq v(FP) = v(\mathbf{G})$ e dizemos que $v(FP_L)$ é um *limite inferior* para o valor óptimo de \mathbf{G} . Se $V_G \subseteq Co(V_G) = P_L$ dizemos que FP é uma *formulação exacta* para \mathbf{G} e temos $v(FP_L) = v(FP) = v(\mathbf{G})$ para qualquer vector de custos, c .

Consideremos, novamente, uma formulação FP de \mathbf{G} e a sua relaxação em PL, FP_L . Para cada instância, calculamos o *gap linear relativo* de FP (doravante designado por *gap linear*) determinando $(v(FP) - v(FP_L))/v(FP)$.

Em geral, a qualidade de uma formulação é avaliada em função dos *gap lineares* produzidos resolvendo a correspondente relaxação em PL. Ou seja, uma formulação diz-se uma *formulação forte* se está associada a *gaps lineares* reduzidos. Esta observação está na base do critério que usamos para comparar formulações.

Considerem-se duas formulações de \mathbf{G} , FP_i e FP_j (com $i \neq j$). Então,

- i) se $P_{iL} \subseteq P_{jL}$ temos $v((FP_j)_L) \leq v((FP_i)_L)$ para todo o vector de custos c e dizemos que FP_i domina (ou é *mais forte que*) FP_j ;
- ii) se $P_{iL} \subseteq P_{jL}$ e $P_{jL} \subseteq P_{iL}$ temos $v((FP_j)_L) = v((FP_i)_L)$ para todo o vector de

custos c e dizemos que FP_i e FP_j são equivalentes e

- ii) se $P_{iL} \not\subseteq P_{jL}$ e $P_{jL} \not\subseteq P_{iL}$, dizemos que não há relação de dominância entre FP_i e FP_j .

Observamos que é consequência directa da definição anterior que dadas três formulações FP_i , FP_j e FP_k , tais que FP_i domina FP_j e FP_j domina FP_k , então FP_i domina FP_k .

Estamos, naturalmente, interessados no desenvolvimento de formulações fortes. Uma das formas de fortalecer uma determinada formulação consiste em adicionar-lhe conjuntos de desigualdades adequadamente seleccionados.

Recordamos que uma desigualdade $a^T x \leq b_0$ diz-se *válida* para um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se $a^T x \leq b_0$, para todo $x \in X$. Então, neste contexto, uma desigualdade será interessante para uma formulação FP se for válida para $Co(G)$ mas não for válida para P_L . Designamos uma desigualdade com estas características por *corte* e representamos por FP^+ a formulação fortalecida que se obtém adicionando uma família de cortes a FP . Naturalmente, $P_L^+ \subseteq P_L$ e dizemos que FP^+ domina FP .

Escrever formulações ou desigualdades válidas de boa qualidade para problemas difíceis não é trivial. Este procedimento pode tornar-se mais simples se introduzirmos conjuntos de variáveis adicionais no modelo. As novas variáveis, se adequadamente escolhidas, agregam mais informação do que as variáveis originais o que torna mais simples explicitar algebricamente as restrições do problema. Designamos por formulações *estendidas* as formulações que usam mais de um conjunto de variáveis para modelar o problema, por contraposição com as formulações ditas *naturais* que contêm uma e apenas uma variável (variável natural) associada a cada elemento da solução. De um modo geral, as formulações estendidas incluem um número polinomial de variáveis e de restrições, enquanto que as formulações naturais requerem um número exponencial de restrições. Designamos uma formulação com um número polinomial de variáveis e de restrições por *formulação compacta*.

Por projecção no *espaço natural* (espaço das variáveis naturais) do conjunto das soluções admissíveis da relaxação em PL de uma formulação estendida obtemos uma formulação natural equivalente. Recordamos que dado um poliedro $Q \subseteq (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$ a projecção de Q no subespaço \mathbb{R}^n , denotada por $proj_x(Q)$, é definida como $proj_x(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{existe } y \in \mathbb{R}^p \text{ tal que } (x, y) \in Q\}$.

O conceito de projecção permite estender o critério para a comparação de formulações a formulações definidas em espaços diferentes.

Assim, dadas duas formulações $FP_1 = \min\{cx : (x, y) \in P_1 \subseteq (Z^n \times \mathbb{R}^n)\}$ e $FP_2 = \min\{cx : (x, y, z) \in P_2 \subseteq (Z^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q)\}$ comparamos $proj_{(x,y)}(P_{2L})$ com P_{1L} para concluir acerca das relações de dominância entre FP_1 e FP_2 .

Notas

1. Entre os métodos propostos para resolver problemas em PLI referimos os de *Planos de Corte*, *Branch and Bound* e *Branch and Cut*, o primeiro pela sua importância histórica, o segundo porque é o método que está na base do *solver* disponibilizado pelo pacote de *software* que usámos para resolver modelos em PLI no nosso trabalho e o último pelo seu impacto nos trabalhos mais recentes sobre métodos exactos em PLI.

Tanto quanto sabemos, o primeiro método sistematizado e de aplicação geral delineado de acordo com este tipo de estratégia foi sugerido por Gomory em 1958 e desenvolvido numa série de outros trabalhos do mesmo autor. Na sua versão base, o método de Gomory consiste na adição sucessiva de cortes à relaxação em PL de uma formulação do problema até seja obtida uma solução inteira. Os cortes adicionados são desigualdades construídas em torno de uma variável básica com valor não inteiro na solução do problema relaxado (ver, por exemplo, Wolsey (1998) para uma descrição bastante completa destas famílias

de cortes). Gomory mostra em 1963 que este método converge num número finito de passos se os cortes forem escolhidos de forma adequada.

O método de *branch and bound*, proposto em Land e Doig (1960), parte, também, da relaxação em PL de uma formulação do problema, mas segue, depois, uma abordagem diferente. Em cada iteração são gerados dois sub-problemas do modelo corrente, num esquema em árvore. Cada um dos sub-problemas é obtido adicionando ao problema "pai" uma restrição que envolve uma variável básica com valor não inteiro na sua solução. No caso dos problemas binários, caso que temos vindo a considerar, as restrições adicionais fixam o valor da variável seleccionada em 0, gerando um dos "filhos", e em 1, gerando o outro. Cada um dos "filhos" explora uma zona restrita do espaço admissível. Então, o valor da sua solução óptima constitui um limite superior ou inferior para o óptimo do problema, consoante aquela for, ou não, inteira. Se se verificar o segundo caso e se o valor da solução for dominado por algum dos limites superiores já conhecidos, o sub-problema é eliminado do estudo. O método pára quando a análise dos limites inferiores e superiores disponíveis permite concluir acerca do valor óptimo do problema.

O método de *branch and cut* combina as duas abordagens introduzindo cortes (na maior parte dos casos, cortes desenhados especialmente para o problema em estudo) nos sub-problemas obtidos por ramificação.

A finalizar referimos que actualmente são incorporadas outro tipo de técnicas nos procedimentos descritos, embora a linha dorsal se mantenha como referido. Por exemplo, é comum a utilização de heurísticas para obtenção de limites superiores, de outro tipo de relaxações (nomeadamente relaxações Lagrangeanas) para a obtenção de limites inferiores, *etc.* Letchford e Lodi (2002) revêm de forma bastante exaustiva os vários tipos de algoritmos de planos de corte propostos nos últimos anos e discutem a sua aplicação no âmbito dos algoritmos

de *branch and cut*.

2. Para definir *formulação* seguimos Nemhauser e Wolsey (1988). De acordo com a definição apresentada, FP é uma formulação de \mathbf{G} se o conjunto das soluções admissíveis de FP é uma descrição do conjunto das soluções admissíveis de \mathbf{G} . Refira-se, no entanto, que é usual aceitar uma forma menos restritiva da definição onde se admite que o conjunto das soluções admissíveis de FP pode conter soluções não admissíveis para \mathbf{G} , desde que a estrutura de custos de \mathbf{G} permita excluir essas mesmas soluções não admissíveis do conjunto de candidatos à solução óptima.
3. Conhecemos, da literatura, resultados que permitem concluir sobre se uma determinada formulação, FP , é exacta. Por exemplo, sabemos que se A e D (b e c) são matrizes (vectors) de inteiros, então $P_L = Co(V_G)$ se e só se $[\frac{A}{D}]$ é uma matriz *totalmente unimodular* Nemhauser e Wolsey (1988). Recordamos que uma matriz M diz-se *totalmente unimodular* se qualquer submatriz quadrada de M tiver determinante $+1, -1$ ou 0 .

Este resultado é importante no contexto do nosso estudo porque será usado para mostrar alguns resultados de integralidade associados a sub-problemas dos modelos introduzidos nos capítulos seguintes.

2.2 O Problema do Roteamento de Veículos com Restrições de Capacidade e Procura Unitária

Nesta secção caracterizamos o PRVC-PU sob vários aspectos: definimos o problema; referimos a sua complexidade e, a finalizar, apresentamos o conjunto de instâncias do PRVC-PU usadas neste trabalho.

2.2.1 Definição do PRVC-PU

Nesta subsecção descrevemos o PRVC-PU como um problema de Teoria de Grafos. Com esse intuito, revemos alguns conceitos elementares da Teoria de Grafos (ver, por exemplo, Gondran e Minoux (1984)).

Seja $G = (V, A)$ um grafo orientado, em que $V = \{1, 2, \dots, n\}$ é o conjunto dos vértices e $A = \{(i, j) : i, j \in V, i \neq j\}$ o conjunto dos arcos. Assumimos que a cada arco $(i, j) \in A$ está associado um custo, c_{ij} . Se $c_{ij} = c_{ji}$ para todo o $(i, j) \in A$ dizemos que a estrutura de custos de G é *simétrica*, caso contrário dizemos que é *assimétrica*.

Num grafo orientado, G , definimos *caminho* como uma sequência de arcos na forma $\{(i_1, j_1), \dots, (i_q, j_q)\}$ tal que $j_k = i_{k+1}$, para $k = 1, \dots, q - 1$ e *circuito* como um caminho fechado, *i.e.* um caminho tal que $j_q = i_1$. Dos vértices i_1, \dots, i_q dizemos que são *visitados* pelo caminho (circuito) e dos arcos $(i_1, j_1), \dots, (i_q, j_q)$ dizemos que são *usados* no caminho (circuito). Designamos o primeiro vértice do caminho por vértice *origem* e o último por vértice *destino*.

Um *caminho (circuito) elementar* é um caminho (circuito) que não repete vértices. Denotamos por *caminho (elementar) $i - k$* o caminho (elementar) de i a k e por *circuito (elementar) $i - k - i$* o circuito (elementar) com início e fim em i e que visita k uma e uma só vez, para $i, k \in V, i \neq k$.

Finalmente, designamos por *custo do caminho (circuito)* a soma dos custos dos arcos usados no caminho (circuito).

No Capítulo 1 introduzimos o PRVC-PU como um problema de OC. Para modelar o PRVC-PU como um problema de Teoria de Grafos admitimos, agora, que o conjunto de objectos discretos sobre os quais incide o problema é o conjunto dos arcos de um grafo orientado, $G = (V, A)$, e que uma solução admissível do PRVC-PU é um sub-conjunto de arcos que representa uma colecção de rotas com início e fim no depósito, com dimensão compatível com a capacidade dos veículos e desenhadas de

forma a que cada cliente seja visitado uma e uma só vez.

Formalizando, para modelar o PRVC-PU num grafo orientado $G=(V,A)$, associamos o depósito a um determinado vértice $i \in V$, por exemplo, e sem perda de generalidade, ao vértice 1; os clientes aos restantes vértices, $i \in V' = V - \{1\}$; as ligações entre clientes e entre clientes e depósito aos arcos $(i,j) \in A$ e o custo de percorrer a ligação modelada por (i,j) a c_{ij} , para todo o $(i,j) \in A$.

Neste contexto, *rota* é um circuito com início e fim no depósito e *comprimento da rota* é o número de elementos de V' visitados pela rota. Associando um inteiro positivo, Q , à capacidade dos veículos, podemos definir *rota admissível* como uma rota elementar de comprimento não superior a Q . Dizemos de uma rota admissível que é *completa* se tem comprimento Q , caso contrário, dizemos que é *incompleta*.

Finalmente, dizemos que uma *solução admissível* do PRVC-PU é um conjunto de rotas admissíveis em G , tal que cada vértice $i \in V'$ é visitado por uma e uma só rota.

No PRVC-PU pretendemos encontrar a solução admissível de menor custo total em G .

A Figura 2.1 ilustra uma solução do PRVC-PU para uma instância com $n=7$ e $Q = 3$.

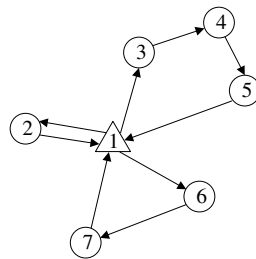


Figura 2.1: Solução admissível do PRVC-PU para uma instância com $n = 7$ e $Q = 3$. A solução inclui três rotas admissíveis com comprimentos 1, 2 e 3.

2.2.2 Complexidade do PRVC-PU

Nesta subsecção classificamos o PRVC-PU quanto à sua complexidade.

Resultados da teoria da complexidade indicam que dados dois problemas PX e PZ tais que PZ é um caso particular de PX , se PZ é NP-difícil então PX é NP-difícil (sobre este assunto, ver, por exemplo, Garey e Johnson (1979)).

Como observado por Araque et al. (1990), para $Q \geq n$ e c_{1j} , $j = 2, \dots, n$, suficientemente grande o PRVC-PU reduz-se ao PCV que Papadimitriou mostrou ser NP-difícil em 1977. Então, pela observação anterior, concluimos que o PRVC-PU é NP-difícil.

2.2.3 Instâncias do PRVC-PU

As instâncias do PRVC-PU usadas neste trabalho foram obtidas a partir de outras, geradas para o Problema da Árvore de Suporte de Custo Mínimo com Restrições de Salto (PASCMS) por Gouveia e Requejo (2001). Gouveia e Requejo consideram quatro famílias de instâncias, duas euclidianas e duas aleatórias.

As instâncias euclidianas distinguem-se entre si pelo posicionamento do depósito relativamente aos restantes vértices. O depósito pode estar no centro (instâncias TC) ou no canto (instâncias TE) de uma grelha quadrada onde são distribuídos os restantes vértices, segundo uma distribuição uniforme. O custo associado a cada par de arcos (i, j) e (j, i) do grafo induzido pelos n vértices é calculado tomando a parte inteira da distância euclidiana entre i e j .

Por seu turno, as instâncias aleatórias distinguem-se entre si pelo facto de serem assimétricas (instâncias TRA) ou simétricas (instâncias TRS). Nas instâncias TRA os custos dos arcos são variáveis aleatórias seguindo uma distribuição uniforme de intervalo $[0, 100]$. As instâncias TRS são construídas a partir das instâncias TRA

impondo $c_{ji} = c_{ij}$ para os arcos $(i, j) \in A$ com $j > i$.

Usámos estas famílias de instâncias para $Q = 3$ e $Q = 5$ para comparar as formulações compactas focadas neste trabalho. Considerámos 5 testes para cada combinação possível, caracterizados com detalhe nas Tabelas C.1 e C.2 do Apêndice C quanto à: tipologia (euclidianas ou aleatórias, simétricas ou assimétricas), localização do depósito (centro ou canto), dimensão (n e $|A|$), capacidade do veículo (Q) e valor da solução óptima (val. óptimo). Este último foi obtido resolvendo uma das formulações propostas no Capítulo 3, formulação *FPQM*, através do *branch and bound solver* disponibilizado pelo pacote de *software* CPLEX, na versão 11.2, num computador pessoal com um processador INTEL Core2Duo a 1,33GHz com 8Gb de RAM.

2.3 Formulações em PLI para o PRVC-PU: Revisão da Literatura

Nesta secção revemos algumas formulações em PLI para o PRVC-PU. Começamos por apresentar uma formulação esquemática (*FEsquema*) para o problema. De seguida, nas Subsecções 2.3.2 e 2.3.3, apresentamos, com detalhe, três formulações da literatura que seguem *FEsquema* para modelar o PRVC e adaptamo-las ao PRVC-PU. A selecção dessas formulações está relacionada com a sua relevância para a análise e compreensão dos capítulos seguintes. Na Subsecção 2.3.4, revemos de forma breve duas outras formulações, marginais ao estudo apresentado nesta tese, mas com impacto no trabalho desenvolvido no âmbito do nosso problema. A finalizar, na Subsecção 2.3.5 apresentamos um resumo das relações de dominância apresentadas ao longo da secção.

2.3.1 Formulação Esquema

Considerem-se variáveis binárias x_{ij} , que designamos por variáveis naturais ou topológicas, definidas como se segue:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i, j) \text{ pertence à solução} \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}, (i, j) \in A.$$

Usando este conjunto de variáveis podemos modelar em PLI o PRVC-PU da seguinte forma:

F ESQUEMA

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad j \in V' \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1 \quad i \in V' \quad (2.3)$$

$$\{(i, j) \in A : x_{ij} = 1\} \text{ não contém rotas de comprimento superior a } Q \quad (2.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A. \quad (2.5)$$

As restrições (2.2) e (2.3) – que designamos por restrições de afectação – garantem que um e um só arco incide em cada vértice e que um e um só arco diverge de cada vértice, respectivamente; a restrição (2.4) garante que são observadas as restrições ao comprimento das rotas e as restrições (2.5) definem o domínio das variáveis do modelo.

Os trabalhos que revemos nas próximas subsecções seguem a formulação apresentada, distinguindo-se pelo modo como explicitam (2.4).

2.3.2 Formulações Naturais

Nesta subsecção apresentamos duas formulações naturais para o PRVC-PU baseadas na formulação de Dantzig et al. (1954) para o PCV. A sua adaptação para o PRV deve-se, segundo Laporte (2007), a Laporte et al. (1985) num trabalho sobre o PRVC. As restrições usadas por Laporte et al. para modelar (2.4) são as seguintes:

$$\sum_{i \notin S, j \in S} x_{ij} \geq r(S) \quad S \subseteq V', S \neq \emptyset \quad (2.6)$$

onde $r(S)$ representa o número mínimo de veículos necessários para servir S , $S \subseteq V'$, $S \neq \emptyset$.

É usual designar as desigualdades (2.6) por *Desigualdades de Corte Generalizadas*. Este conjunto de desigualdades assegura que a solução é conexa ao garantir, para cada $S \subseteq V'$, a presença de arcos do corte $[V - S, S]$ na solução. Por outro lado, como o número de arcos de $[V - S, S]$ na solução indica o número de veículos que entram em S , ao impor que esse número seja, pelo menos, $r(S)$ o mesmo conjunto de desigualdades garante as restrições de capacidade.

No caso em que temos procuras generalizadas, determinar $r(S)$ implica resolver um problema de *bin packing* para cada $S \subseteq V'$. No entanto, no caso do PRVC-PU, determinar $r(S)$ é trivial, verificando-se $r(S) = \lceil |S| / Q \rceil$. Assim, podemos escrever a formulação que designamos por Formulação Corte (*FCorte*):

F Corte

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1 \quad i \in V' \quad (2.2)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad j \in V' \quad (2.3)$$

$$\sum_{i \notin S, j \in S} x_{ij} \geq \left\lceil \frac{|S|}{Q} \right\rceil \quad S \subseteq V', S \neq \emptyset \quad (2.7)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A. \quad (2.5)$$

Podemos, também, escrever uma formulação alternativa a *FCorte* em que as restrições (2.7) são substituídas pelas *Desigualdades de Sub-Circuito Generalizadas* (ver, por exemplo, Toth e Vigo (2002a)):

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - \left\lceil \frac{|S|}{Q} \right\rceil \quad S \subseteq V', S \neq \emptyset \quad (2.8)$$

Araque et al. (1990) mostram que algumas das desigualdades (2.8) escritas para o caso não-orientado definem facetas do poliedro associado ao envolvente convexo do conjunto dos vectores de incidência das soluções do PRVC-PU no espaço natural associado.

Na presença de (2.2) e de (2.3) as restrições (2.7) podem converter-se em (2.8) e vice-versa, pelo que a nova formulação, que designamos por Formulação de Sub-Circuito ($FSub$) e a formulação $FCorte$ são equivalentes. Seja, então, $FSub$ tal que:

$$\mathbf{F\ Sub} : \min\left\{ \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}x_{ij} : (2.2), (2.3), (2.8), (2.5) \right\}$$

Resultado 2.3.1

$FCorte$ e $FSub$ são equivalentes.

$FCorte$ ou ($FSub$) incluem $\mathcal{O}(n^2)$ variáveis e um número exponencial de restrições. O número elevado de restrições (e a dificuldade em explicitá-las) faz com que seja difícil resolver $FCorte$ ($FSub$) recorrendo aos pacotes de *branch and bound* disponíveis comercialmente. Sabemos, no entanto, que as duas formulações são fortes, estando na base da maioria dos esquemas de *branch and cut* propostos para o PRVC. Augerat et al. (1995) (citado por Naddef e Rinaldi (2002)) e Lysgaard et al. (2004) propõem algoritmos deste tipo que resolvem instâncias até 135 vértices (que é, tanto quanto sabemos, a dimensão da maior instância do PRVC resolvida até à optimalidade). Em ambos os casos são incorporadas outras famílias de desigualdades válidas. Lysgaard et al. introduz algumas desigualdades de aplicação geral como os *mixed integer cuts* de Gomory (1960) mas a maioria das desigualdades consideradas são adaptações de desigualdades introduzidas para o PCV. Naddef e Rinaldi (2002) e Letchford e Salazar-Gonzalez (2006) inventariam e comparam um longo conjunto de famílias de desigualdades desta natureza, focando os problemas de separação associados.

2.3.3 Formulações de Fluxos

Nesta subsecção revemos duas famílias de formulações compactas da literatura nas quais a restrição (2.4) é modelada como um (sub-)problema de fluxos em rede. Em ambos os casos consideramos que o depósito envia $n - 1$ unidades de fluxo para a rede e que cada um dos vértices $i \in V'$ recebe uma unidade de fluxo. Na primeira família de formulações admitimos que o fluxo é indiferenciado, *i.e.* que cada vértice $i \in V'$ pode receber indistintamente uma das $n - 1$ unidades de fluxo enviadas pelo depósito; na segunda família de formulações consideramos que cada uma das $n - 1$ unidades de fluxo enviadas pelo depósito é destinada a um vértice específico. Destas duas abordagens resultam modelos diferentes, sendo que a segunda permite a obtenção de formulações mais fortes do que a primeira, como veremos.

2.3.3.1 Formulações de Fluxo Agregado

O conjunto de formulações apresentadas nesta subsecção baseia-se no trabalho de Gavish e Graves (1979) para o PCV. No referido trabalho, Gavish e Graves propõem duas novas formulações para o PCV e mostram como adaptá-las a um conjunto de problemas de transportes e de escalonamento onde não estão, porém, incluídos nem o PRVC-PU nem o PRVC. Num trabalho de 1983, Gavish retoma este conjunto de formulações apresentando numa versão fortalecida das mesmas, escrita para o Problema da Árvore de Suporte de Custo Mínimo com Restrições de Capacidade (PASC MC).

Os modelos que apresentamos de seguida foram propostos em Gouveia (1995). Naquele trabalho, Gouveia adapta os modelos de Gavish e Graves ao PRVC e apresenta projecções completas no espaço natural do conjunto de soluções da relaxação em PL dos modelos assim obtidos.

Formulação FFAgregado :

Considerem-se, então, variáveis contínuas, não negativas, f_{ij} , definidas para $(i, j) \in A$, $j \neq 1$, que indicam a quantidade de fluxo enviada pelo depósito que atravessa o

arco (i, j) . Na primeira das formulações apresentadas em Gouveia (1995) as variáveis f_{ij} são usadas para modelar (2.4) como se segue (a adaptação do PRVC para o PRVC-PU é trivial):

$$\sum_{j \in V'} f_{1j} = n - 1 \quad (2.9)$$

$$\sum_{i \in V} f_{ij} - \sum_{i \in V'} f_{ji} = 1 \quad j \in V' \quad (2.10)$$

$$f_{ij} \leq Qx_{ij} \quad (i, j) \in A, j \neq 1 \quad (2.11)$$

$$f_{ij} \geq 0 \quad (i, j) \in A, j \neq 1. \quad (2.12)$$

As restrições (2.9) garantem que o depósito envia $n - 1$ unidades de fluxo. As restrições (2.10) garantem que cada vértice $j \in V'$ retém uma e uma só unidade de fluxo. As restrições (2.11) ligam as variáveis garantindo que um arco que transporte fluxo está na solução e impõem um limite superior de valor Q à quantidade de fluxo transportado em cada arco.

Observamos que adicionando para $j \in V'$ as restrições (2.10) obtemos as restrições (2.9). No entanto, mantemos estas últimas na formulação por facilitarem a leitura e interpretação da mesma.

Substituindo a restrição (2.4) de *FEsquema* pelo sistema de restrições (2.9)–(2.12) obtemos a formulação que designamos por Formulação de Fluxo Agregado (*FFAgregado*):

$$\mathbf{F \text{ F}Agregado} : \min \left\{ \sum_{i,j \in V} c_{ij} x_{ij} : (2.2), (2.3), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), (2.5) \right\}$$

Repare-se que a presença de rotas não admissíveis na solução é impedida acção conjunta das restrições (2.10), (2.11), (2.2) e (2.3):

Considere-se um arco com origem no depósito. Pelas restrições, (2.11) um tal arco é atravessado, no máximo, por Q unidades de fluxo. Por seu turno, (2.10) garante

que é recolhida uma unidade de fluxo em cada vértice visitado, pelo que um arco com origem no depósito pertence a uma componente conexa, descrita nas variáveis f_{ij} , com, no máximo, Q vértices. Como, por (2.11), um arco atravessado por fluxo está na solução, temos, também, uma descrição da mesma componente nas variáveis x_{ij} . Finalmente, (2.2) e (2.3) impõem que em cada vértice de V' incide um e um só arco e que de cada vértice diverge um e um só arco, donde as referidas componentes são sub-circuitos elementares de comprimento não superior a Q , *i.e.*, são rotas admissíveis.

Considere-se, agora, o seguinte conjunto de desigualdades que designamos por *Desigualdades de Subcircuito Fraccionárias*:

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - \frac{|S|}{Q} \quad S \subseteq V', S \neq \emptyset \quad (2.13)$$

Gouveia (1995) mostrou que a projecção do conjunto das soluções admissíveis da relaxação em PL de *FFAgregado* no espaço das variáveis x_{ij} é completamente descrita pelas restrições (2.2), (2.3), (2.13) e pelas restrições de não negatividade das variáveis x_{ij} .

Resultado 2.3.2 (*Gouveia (1995)*)

Seja FFAgregado_L o conjunto das soluções admissíveis de FFAgregado_L. Então, Proj_x(FFAgregado_L) = {x ∈ ℝ₊ⁿ : (2.2), (2.3), (2.13)}.

Observamos que as Desigualdades de Sub-Circuito Generalizadas, desigualdades (2.8) (v. Subsecção 2.3.2):

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - \left\lceil \frac{|S|}{Q} \right\rceil \quad S \subseteq V', S \neq \emptyset \quad (2.8)$$

são uma versão fortalecida das restrições (2.13). Esta observação, em conjunto com os resultados 2.3.1 e 2.3.2, permite-nos escrever o resultado seguinte:

Resultado 2.3.3

A formulação FSub(FCorte) domina a formulação FFAgregado.

Formulação $FFAgregado^+$:

A formulação que introduzimos de seguida é obtida substituindo em $FFAgregado$ as restrições (2.11) pelo conjunto de restrições:

$$x_{1j} \leq f_{1j} \leq Qx_{1j} \quad (1, j) \in A \quad (2.14)$$

$$x_{ij} \leq f_{ij} \leq (Q - 1)x_{ij} \quad (i, j) \in A, i, j \neq 1 \quad (2.15)$$

Este conjunto de restrições garante que o valor do fluxo que atravessa um arco na solução é não inferior a 1 e não superior a Q , ou a $Q - 1$, consoante se trate, ou não, de um arco com origem no depósito.

Seja, então, Formulação Forte de Fluxo Agregado ($FFAgregado^+$) a formulação:

$$\mathbf{F FAggregado}^+ : \min \left\{ \sum_{i,j \in V} c_{ij} x_{ij} : (2.2), (2.3), (2.9), (2.10), (2.14), (2.15), (2.12), (2.5) \right\}$$

Claramente, o conjunto das restrições (2.11) de $FFAgregado$ é implicado pelo sistema de restrições (2.14) e (2.15) de $FFAgregado^+$. Se, adicionalmente, observarmos que as restantes restrições de $FFAgregado$ e $FFAgregado^+$ são comuns às duas formulações, ficamos em condições de enunciar o resultado que apresentamos de seguida:

Resultado 2.3.4

A formulação $FFAgregado^+$ domina a formulação $FFAgregado$.

Gouveia (1995) apresenta uma descrição completa da projecção do conjunto das soluções admissíveis da relaxação em PL de $FFAgregado^+$ no espaço das variáveis topológicas. A referida descrição inclui as conhecidas *Desigualdades Multistar*:

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} + \frac{\sum_{i \in S, j \in S^c} (x_{ij} + x_{ji})}{Q} \leq |S| - \frac{|S|}{Q} \quad S \subseteq V', S \neq \emptyset, S \cup S^c = V' \quad (2.16)$$

introduzidas por Araque et al. (1990). Naquele trabalho, os autores mostram que um subconjunto das desigualdades *Multistar* definem facetas do poliedro associado ao

conjunto dos vectores de incidência das soluções da versão não orientada do PRVC-PU no espaço natural.

Enunciamos, de seguida, o resultado de Gouveia (1995):

Resultado 2.3.5 (*Gouveia (1995)*)

Seja $FAgregado_L^+$ o conjunto das soluções admissíveis de $FFAgregado_L$. Então, $Proj_x(FAgregado_L^+) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : (2.2), (2.3), (2.16)\}$.

É interessante comparar os modelos obtidos por projecção das formulações $FFAgregado$ e $FAgregado^+$ no espaço das variáveis x_{ij} .

Analisando as restrições:

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - \frac{|S|}{Q} \quad S \subseteq V', S \neq \emptyset \quad (2.13)$$

e

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} + \frac{\sum_{i \in S, j \in S^c} (x_{ij} + x_{ji})}{Q} \leq |S| - \frac{|S|}{Q} \quad S \subseteq V', S \neq \emptyset, S \cup S^c = V' \quad (2.16)$$

verificamos que as últimas diferem das primeiras pela presença de um termo adicional no membro da esquerda. Repare-se que o novo termo, $(\sum_{i \in S, j \in S^c} (x_{ij} + x_{ji}))/Q$, incide sobre os arcos com dos extremos em S e o outro em S^c . Como $S \cup S^c = V'$, concluímos que o novo termo incide precisamente sobre os arcos internos traduzindo, assim, em termos das variáveis x_{ij} , a restrição imposta na variáveis y_{ij} ao valor do fluxo naqueles arcos e que distingue $FFAgregado$ de $FAgregado^+$.

Por outro lado, a comparação das desigualdades de Sub-Circuito Fraccionárias, restrições (2.13) com as desigualdades *Multistar*, (2.16), e de Sub-Circuito Generalizadas, (2.8), permite, também, identificar as duas últimas como o resultado da aplicação às primeiras de técnicas conhecidas da literatura (*lifting* e Chvátal–Gommory,

respectivamente) para o fortalecimento de desigualdades.

Este conjunto de observações identifica, assim, duas vias distintas para a obtenção de modelos fortes: a idealização de modelos estendidos aos quais aplicamos técnicas de projecção para obter conjuntos de desigualdades noutros espaços de interesse e a aplicação de técnicas conhecidas da literatura para o fortalecimento de desigualdades, ilustrando o que afirmámos na Secção 2.1 e no Capítulo 1 acerca deste tópico. Ambas são exploradas no nosso trabalho.

Notamos, agora, que como apontado por Gouveia (1995), não é possível estabelecer uma relação de dominância entre as desigualdades *Multistar* e as desigualdades de Sub-Circuito Generalizadas, válida para qualquer subconjunto $S \subseteq V'$. Conjugando esta observação com os Resultados 2.3.5 e 2.3.1, concluímos que não há relação de dominância entre as formulações $FFAgregado^+$ e $FSub$ ($FCorte$):

Resultado 2.3.6

Não há relação de dominância entre as formulações $FFAgregado^+$ e $FSub$ ($FCorte$).

Tal como as desigualdades de Sub-Circuito Generalizadas, as desigualdades *Multistar* têm sido de grande importância no desenvolvimento de algoritmos de *branch and cut*. Araque et al. (1994) apresentam um algoritmo de *branch and cut* baseado nas desigualdades *Multistar* que resolve instâncias do PRVC-PU até 60 vértices. Estas desigualdades e algumas das suas variantes (listadas e comparadas em Araque et al. (1990) e em Letchford et al. (2002)) são também usadas no esquema proposto por Lysgaard et al. (2004) para o PRVC, já referenciado na subsecção anterior. Os autores apresentam um estudo que indica que o uso destas desigualdades contribui de forma significativa para a qualidade do limite inferior produzido, especialmente para instâncias onde o número de veículos é elevado.

A formulação $FFAgregado^+$ é uma formulação compacta com $\mathcal{O}(n^2)$ variáveis e

$\mathcal{O}(n^2)$ restrições. Ainda assim, esta formulação é difícil de usar para resolver instâncias de média (ou grande) dimensão recorrendo aos algoritmos comerciais de *branch and bound* disponíveis. No entanto, o facto desta formulação conter uma descrição polinomial das desigualdades *Multistar* pode torná-la atractiva como ponto de partida para a aplicação de esquemas de *branch and cut*. O trabalho de Baldacci et al. (2004) pode ser apresentado como exemplo da sua utilidade neste contexto. Com efeito, Baldacci et al. apresentam um esquema de *branch and cut* para o PRVC desenvolvido a partir de uma formulação equivalente a *FFAgregado*⁺. A formulação introduzida por Baldacci et al. é uma adaptação da formulação de dois fluxos proposta em Finke et al. (1984) para o PCV. Uma prova formal da equivalência de *FFAgregado*⁺ e da formulação de dois fluxos de Baldacci et al. (2004) pode ser encontrada em Letchford e Salazar-Gonzalez (2006). Os resultados produzidos pelo algoritmo de Baldacci et al. (2004) são comparáveis aos dos esquemas referenciados na subsecção anterior.

No Capítulo 3 mostramos como fortalecer *FFAgregado*⁺, apresentando um novo conjunto de desigualdades nas variáveis x_{ij} e $f_{i,j}$ que relacionam o valor do fluxo num determinado arco $(i, j) \in A$ com a sua posição na rota.

2.3.3.2 Formulações de Fluxo Desagregado

Mais uma vez, a formulação que revemos nesta subsecção tem as suas raízes no trabalho desenvolvido para o PCV, mais precisamente nos trabalhos de Wong (1980) e de Claus (1984). Neste tipo de formulações usamos um conjunto de variáveis binárias, y_{ij}^k , definidas para cada $k \in V'$ e $(i, j) \in A$, $i \neq k$, $j \neq 1$, como segue:

$$y_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j) \text{ é atravessado por fluxo destinado a } k. \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Usamos as variáveis assim definidas para modelar as restrições (2.4) de *FEsquema* da seguinte forma:

$$\sum_{j \in V'} y_{1j}^k = 1 \quad k \in V' \quad (2.17)$$

$$\sum_{i \in V} y_{ij}^k - \sum_{i \in V'} y_{ji}^k = 0 \quad j, k \in V', j \neq k \quad (2.18)$$

$$\sum_{i \in V} y_{ik}^k = 1 \quad k \in V' \quad (2.19)$$

$$\sum_{k \in V'} y_{1j}^k \leq Qx_{1j} \quad (1, j) \in A \quad (2.20)$$

$$\sum_{k \in V'} y_{ij}^k \leq (Q - 1)x_{ij} \quad (i, j) \in A, i, j \neq 1 \quad (2.21)$$

$$y_{ij}^k \leq x_{ij} \quad (i, j) \in A, j \neq 1, k \in V' \quad (2.22)$$

$$y_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A, j \neq 1, k \in V'. \quad (2.23)$$

As restrições (2.17) – (2.19) asseguram que é enviada uma unidade de fluxo do vértice 1 para cada um dos vértices $k \in V'$. As restrições (2.22) ligam as variáveis garantindo que os arcos usados para transportar fluxo estão na solução e as restrições (2.20) e (2.21) impõem que a quantidade total de fluxo que atravessa um arco não excede Q , no caso de arcos com origem no depósito, nem $Q-1$, no caso dos restantes arcos. Finalmente, as restrições (2.23) definem o domínio das variáveis do modelo.

Usando o sistema (2.17) – (2.23) em lugar de (2.4) em *FEsquema*, obtemos a formulação que designamos por Formulação de Fluxo Desagregado (*FFDesagregado*):

$$\mathbf{F FDesagregado} : \min \left\{ \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} : (2.2), (2.3), (2.17), (2.18), (2.19), (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (2.5) \right\}$$

A formulação *FFDesagregado* é uma formulação compacta com $\mathcal{O}(n^3)$ variáveis e $\mathcal{O}(n^3)$ restrições.

As restrições de capacidade são garantidas em *FFDesagregado* pela acção conjunta de (2.2) – (2.3), (2.17) – (2.19), (2.20) e (2.22). Para entender esta afirmação

observe-se, em primeiro lugar, que por (2.19) é enviada uma unidade de fluxo do depósito para cada vértice $k \in V'$. Então, como, por (2.20), um arco com origem no depósito é atravessado por, no máximo, Q unidades de fluxo, concluímos que um tal arco é usado para fazer chegar fluxo a, no máximo, Q vértices, ou seja, que um tal arco pertence uma componente, definida na variáveis y_{ij}^k , com, no máximo, Q vértices. Por outro lado, a restrição (2.22) garante que temos uma descrição dessa mesma componente nas variáveis x_{ij} , o que conjugando com o sistema (2.17) – (2.19), (2.2) e (2.3) permite concluir que cada componente com origem no vértice 1 é uma rota admissível.

Observamos também que as restrições (2.19) (ou, de modo equivalente, (2.17)) são redundantes na relaxação em PL do modelo, pois podem ser obtidas usando (2.17) ((2.19)) e (2.18). Porém, consideramos que a sua presença facilita a leitura da formulação, pelo que as mantemos no modelo.

Não se conhece a descrição completa da projecção do conjunto das soluções admissíveis de $FFDesagregado_L$ (que denotamos por $FFDesagregado_L$) no espaço natural, sendo este um tópico interessante para investigação futura. No entanto, não é difícil concluir acerca de alguns resultados de projecção que se descrevem de seguida.

Assim, começamos por notar que usando (2.19), (2.3), (2.22) e as restrições de não negatividade das variáveis y_{ij}^k obtemos $x_{ij} = y_{ij}^j$, para todo $(i, j) \in A$, $j \neq 1$ e $k \in V'$. Então, podemos adicionar $x_{ij} = y_{ij}^j$ ao modelo $FFDesagregado$ sem alterar o valor do limite inferior produzido resolvendo a correspondente relaxação em PL.

Considere-se, agora, o modelo aumentado. As novas igualdades em conjunto com (2.20) e (2.21) implicam as desigualdades (observamos que $\sum_{k \in V'} y_{ij}^k = y_{ij}^j + \sum_{k \in V', k \neq j} y_{ij}^k = x_{ij} + \sum_{k \in V', k \neq j} y_{ij}^k$, $(i, j) \in A$, e $k \in V'$):

$$x_{1j} \leq \sum_{k \in V'} y_{1j}^k \leq Qx_{1j} \quad (1, j) \in A \quad (2.24)$$

$$x_{ij} \leq \sum_{k \in V'} y_{ij}^k \leq (Q-1)x_{ij} \quad (i, j) \in A, i, j \neq 1 \quad (2.25)$$

Observamos, também, que as variáveis f_{ij} de *FFAgregado* e y_{ij}^k de *FFDesagregado* podem ser relacionadas através da seguinte transformação linear:

$$f_{ij} = \sum_{k \in V'} y_{ij}^k \quad (i, j) \in A, j \neq 1 \quad (2.26)$$

Então, podemos reescrever (2.24) e (2.25) em termos das variáveis f_{ij} como:

$$\begin{aligned} x_{1j} &\leq f_{1j} \leq Qx_{1j} & (1, j) \in A \\ x_{ij} &\leq f_{ij} \leq (Q-1)x_{ij} & (i, j) \in A, i, j \neq 1 \end{aligned}$$

Repare-se que as desigualdades obtidas são, precisamente, as restrições de capacidade de *FFAgregado*⁺, restrições (2.14) e (2.15). Da mesma forma, considerando o sistema (2.17) – (2.19) associado a cada $j \in V'$, adicionando no índice k , para $k \in V'$, as equações consideradas e usando (2.26) nas igualdades resultantes, obtemos as restrições de conservação de fluxo de *FFAgregado*⁺, restrições (2.9) e (2.10). Conjugando estas duas observações, podemos enunciar o resultado seguinte:

Resultado 2.3.7

A formulação FFDesagregado domina a formulação FFAgregado⁺.

O resultado anterior conjuntamente com o Resultado 2.3.5, permite-nos concluir, então, que as desigualdades *Multistar* estão são implicadas pela relaxação em PL de *FFDesagregado*:

Resultado 2.3.8

Seja S um sub-conjunto não vazio de V' e seja S^c tal que S ∪ S^c = V'.

As desigualdades

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} + \frac{\sum_{i \in S, j \in S^c} (x_{ij} + x_{ji})}{Q} \leq |S| - \frac{|S|}{Q} \quad S \subseteq V', S \neq \emptyset, S \cup S^c = V' \quad (2.16)$$

são implicadas pela relaxação em Programação Linear da formulação FFDesagregado.

Por outro lado, partindo do trabalho de Wong (1980) para o PCV, sabemos que as *Desigualdades de Sub-Circuito* de Dantzig et al. (1954):

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad S \subseteq V', S \neq \emptyset \quad (2.27)$$

são implicadas pelo sistema de restrições constituído por (2.17) – (2.19), (2.22), pelas restrições de afectação e pelas restrições de não-negatividade das variáveis x_{ij} e y_{ij}^k . Esta observação permite-nos escrever o resultado que apresentamos de seguida:

Resultado 2.3.9

Seja S um sub-conjunto não vazio de V' . As desigualdades

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad (2.27)$$

são implicadas pela relaxação em Programação Linear da formulação FFDesagregado.

Comparamos, agora, (2.27) e (2.16). Para tal, escrevemos (2.16) na forma:

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} + \frac{\sum_{i \in S, j \in S^c} (x_{ij} + x_{ji})}{Q} \leq |S| - \frac{|S|}{Q} = |S| - 1 + \left(\frac{Q - |S|}{Q} \right)$$

Observamos que não é possível estabelecer uma relação entre $\sum_{i \in S, j \in S^c} (x_{ij} + x_{ji})$ e $(Q - |S|)$, válida para todo $S \subseteq V', S \neq \emptyset$. Então, concluímos que não existe relação de dominância entre os dois conjuntos de desigualdades.

Observamos, também, que as desigualdades (2.27) são um caso particular das desigualdades de Sub-Circuito Generalizadas, desigualdades (2.8) (caso em que $|S| \leq Q$):

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - \left\lceil \frac{|S|}{Q} \right\rceil \quad S \subseteq V' S \neq \emptyset \quad (2.8)$$

No entanto, sabemos que a projecção de $FFDesagregado_L$ no espaço natural não inclui estas últimas restrições. De facto, na Figura 2.2 apresentamos uma solução admissível para $FFDesagregado_L$ que é cortada por uma das desigualdades (2.8). Com base nesse exemplo e nos Resultados 2.3.1, 2.3.6 e 2.3.7 introduzimos, então, o resultado que nos permite comparar $FFDesagregado$ com $FSub$ ($FCorte$).

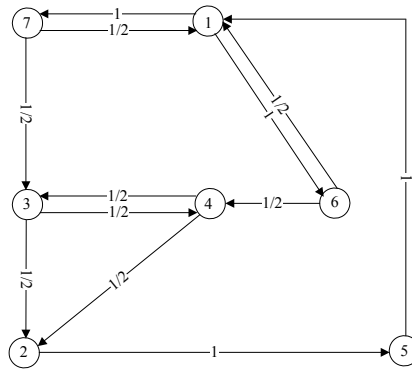


Figura 2.2: Solução admissível para $FFDesagregado_L$ para uma instância do PRVC-PU com $n = 7$ e $Q = 3$. As etiquetas associadas aos arcos indicam o valor das variáveis topológicas x_{ij} . Os valores das variáveis y_{ij}^k encontram-se na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Valores das variáveis y_{ij}^k associadas à solução representada na Fig. 2.2

Arco (i, j)	k						
	2	3	4	5	6	7	
(1,6)	1/2	1/2	1/2	1/2	1		
(1,7)	1/2	1/2	1/2	1/2		1	
(2,5)				1			
(3,2)	1/2			1/2			
(3,4)			1/2				
(4,2)	1/2			1/2			
(4,3)		1/2					
(6,4)	1/2	1/2	1/2	1/2			
(7,3)	1/2	1/2	1/2	1/2			

Os valores não apresentados são nulos.

Resultado 2.3.10

Não há relação de dominância entre as formulações $FFDesagregado$ e $FSub$ ($FCorte$).

Demonstração:

O resultado é consequência das proposições enunciadas em 1. e 2.

Sejam $FDesagregado_L$ e Sub_L o conjunto das soluções admissíveis de $FDesagregado_L$ e $FSub_L$, respectivamente.

1. $Proj_x(FDesagregado_L) \not\subseteq Sub_L$

Provamos que a proposição é verdadeira exibindo $x \in Proj_x(FDesagregado_L)$ tal que $x \notin Sub_L$.

Seja x a solução apresentada na Figura 2.2 e considere-se a desigualdade (2.7) escrita para $S = \{2, 3, 4, 7\}$:

$$x_{23} + x_{24} + x_{27} + x_{32} + x_{34} + x_{37} + x_{42} + x_{43} + x_{47} + x_{72} + x_{73} + x_{74} \leq 4 - \lceil \frac{4}{3} \rceil$$

Substituindo as variáveis pelos seus valores, facilmente constatamos que a desigualdade não é verificada, pelo que x prova a proposição.

2. $Sub_L \not\subseteq Proj_x(FDesagregado_L^+)$

Admitamos que $Sub_L \subseteq Proj_x(FDesagregado_L)$.

Então, pelo resultado 2.3.7, $Sub_L \subseteq Proj_x(FAgregado_L^+)$, o que contraria o resultado 2.3.6.

■

Desconhecemos qualquer algoritmo de *branch and cut* realizado com base em $FFDesagregado$. Sabemos, no entanto, que, segundo Letchford e Salazar-Gonzalez (2006), este tipo de formulação foi abordada no contexto do PRVC por Laporte e Nobert (1987) e por Baldacci et al. (2004). A formulação de Baldacci et al. difere da que aqui apresentamos por apresentar versões agregadas, e portanto enfraquecidas,

das restrições de capacidade, restrições (2.20) e (2.21).

No Capítulo 5 apresentamos um conjunto de modelos que domina *FFDesagregado*.

Observação 2.1 *Notamos que as formulações do PCV congêneres a FSub e FF-Desagregado são equivalentes (Wong (1980)), o que significa que conhecemos uma descrição polinomial das desigualdades (2.27), ao contrário do que acontece com as restrições (2.8). Esta diferença evidencia a dificuldade acrescida dos problemas que incluem restrições de capacidade face aos problemas que só tratam a questão do roteamento, referida, entre outros, por Araque et al. (1990). Segundo os autores, esta constatação motivou o trabalho desenvolvido em Araque et al. (1990) onde se procura explorar a relação do PRVC-PU com outros problemas com restrições de capacidade para derivar um conjunto de novas desigualdades válidas, em detrimento da abordagem clássica, que consistia em explorar a ligação ao PCV. Na Secção 5.1 do Capítulo 5 voltaremos a este assunto.*

2.3.4 Outras formulações

Nesta subsecção referimos, de forma breve, outros conjuntos de formulações para o PRVC-PU. Apesar dessas formulações não serem focadas nos capítulos seguintes, dedicamos-lhe este espaço por ilustrarem abordagens diferentes na construção de modelos para o nosso problema.

Formulações baseadas na restrições de Miller Tucker Zemlin:

A formulação de Miller et al. (1960) é uma formulação estendida que segue *FES-queima* incluindo, assim, para além das restrições de afectação, (2.2) e (2.3), e de definição das variáveis topológicas, (2.5), um terceiro conjunto de restrições que garantem a restrição ao comprimento das rotas. Para escrever o referido conjunto de restrições, Miller et al. usam as variáveis x_{ij} e um novo conjunto de variáveis contínuas, variáveis u_i , definidas para $i \in V'$, que indicam a posição do vértice i na rota:

$$u_i - u_j + Qx_{ij} \leq Q - 1 \quad i, j \in V' \quad (2.28)$$

$$u_i \in \mathbb{R} \quad i \in V' \quad (2.29)$$

As novas restrições impõem que dados dois vértices $i, j \in V'$, $u_i - u_j \leq Q - 1$ se $x_{ij} = 0$. Então, em qualquer rota, as posições de dois vértices não consecutivos diferem, no máximo, $Q - 1$ unidades, pelo que aquela não pode visitar mais de Q vértices. Desta forma, numa visão de alto nível, podemos dizer que neste modelo as restrições de capacidade são garantidas impondo um limite superior ao afastamento entre cada par de vértices, enquanto que nos modelos de fluxos, para garantir as mesmas restrições, impomos que todos os vértices visitados por uma mesma rota são alimentados por fluxo distribuído a partir de um arco com origem no depósito, que limitamos superiormente a um valor tal que permita servir, apenas, um número de vértices compatível com o comprimento máximo da rota.

A partir de um resultado análogo, proposto para o PCV por Padberg e Sung (1991), não é difícil mostrar que a projecção completa no conjunto das soluções admissíveis da relaxação em PL da formulação de Miller et al. no espaço das variáveis x_{ij} é descrita pelas restrições (2.2), (2.3), pelas restrições de não-negatividade das variáveis x_{ij} e pelas *Desigualdades Fracas de Sub-Circuito* (ver Grötschel e Padberg (1985)):

$$\sum_{(i,j) \in C} x_{ij} \leq |C| - \frac{|C|}{Q} \quad C \in G_{V'} \quad (2.30)$$

onde $G_{V'}$ é o grafo completo induzido pelo conjunto de vértices em V' e C é um qualquer conjunto de arcos tal que C define um circuito elementar em V' .

Observamos que para cada $C \in G_{V'}$, a desigualdade (2.30) que lhe está associada é implicada pela desigualdade (2.13) associada ao conjunto dos vértices visitados por C . Conjugando esta observação e o resultado 2.3.2 notamos que a formulação de Miller et al. é dominada por *FF Agregado*.

As restrições de Miller et al. foram fortalecidas por Desrochers e Laporte (1991). As desigualdades de Desrochers e Laporte (1991), adaptadas ao PRVC-PU, são como se segue (ver, também, Kara et al. (2004)):

$$u_i - u_j + Qx_{ij} + (Q - 2)x_{ji} \leq Q - 1 \quad i, j \in V' \quad (2.31)$$

$$u_i \geq 1 + \sum_{j \in V'} x_{ji} \quad i \in V' \quad (2.32)$$

$$u_i \leq Q - (Q - 2)x_{1i} - \sum_{j \in V'} x_{ij} \quad i \in V' \quad (2.33)$$

Desrochers e Laporte (1991) apresentam resultados computacionais que permitem comparar o efeito dos melhoramentos introduzidos relativamente à formulação original, para várias variantes do PRV. No caso do PRVC, a adição das novas desigualdades resultou em reduções médias do valor do *gap* linear da ordem dos 10 a 15%, para os testes relativos a instâncias com estruturas de custos simétricas e de 3% no caso dos testes assimétricos.

Recordamos que a formulação Miller et al. é dominada pela de *FF Agregado* que por seu turno, é a mais fraca das formulações estudadas anteriormente. Assim, o interesse do estudo deste conjunto de formulações é sobretudo teórico, na medida em que ilustra, como já foi referido, uma forma diferente para a construção de modelos para o PRVC-PU.

A concluir, observamos que as desigualdades (2.28) têm servido de base a uma série de trabalhos onde se apresentam modelos obtidos por fortalecimento daquelas restrições. Para além da formulação de Desrochers e Laporte, podemos citar os trabalhos de Gouveia e Pires (1999) e (2001) ou o de Sherali e Driscoll (2002). Os trabalhos citados foram realizados no âmbito do PCV e desconhecemos qualquer adaptação dos modelos propostos a outros problemas de roteamento. Dado que as formulações apresentadas por ambos mostram produzir bons limites inferiores, o seu estudo no contexto do PRVC-PU consiste um tópico interessante para trabalho futuro.

Formulação de Partição:

A formulação que descrevemos nesta subsecção segue uma abordagem totalmente

à margem das restantes formulações apresentadas neste trabalho.

Consideremos, então, o conjunto das rotas admissíveis (devorante designadas por rotas) em $G = (V, A)$ e seja R o conjunto dos índices que lhe está associado. Designemos por c_r o custo da rota r , para todo $r \in R$. Consideremos, também, um parâmetro binário, a_{ir} , que toma o valor 1 se o vértice i é visitado pela rota r , para todo $i \in V'$ e para todo o $r \in R$. Usando variáveis binárias z_r definidas como:

$$z_r = \begin{cases} 1, & \text{se a rota } r \text{ pertence à solução} \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}, r \in R.$$

é possível modelar o PRVC-PU como se segue (Balinski e Quandt (1964)):

F Partição

$$\min \sum_{r \in R} c_r z_r \quad (2.34)$$

$$\sum_{r \in R} a_{ir} z_r = 1 \quad i \in V' \quad (2.35)$$

$$z_r \in \{0, 1\} \quad r \in R. \quad (2.36)$$

As restrições (2.35) asseguram que cada vértice $i \in V'$ pertence a uma e uma só rota e as restrições (2.36) definem o domínio das variáveis do modelo.

De acordo com Laporte (2007), Baldacci et al. (2008) e Letchford e Salazar-Gonzalez (2006), *FPartição* origina, em média, bons *gaps* lineares. No entanto, a formulação apresentada usa um número exponencial de variáveis, o que a torna impraticável relativamente aos esquemas usuais de *branch and bound*. Ainda de acordo com Laporte, o método de geração de colunas, que consiste na abordagem mais comumente usada para resolver formulações deste tipo, também não tem originado bons resultados.

Por outro lado, e em contraponto com estas constatações, conhecem-se trabalhos realizados com base em *FPartição* que provaram funcionar bem: Fukasawa et al.

(2006) e Baldacci et al. (2008) publicaram, com base naquela formulação, métodos exactos particularmente fortes para o PRVC.

Fukasawa et al. propõem um método que combina o algoritmo de *branch and cut* de Lysgaard et al. (2004) com geração de colunas, para produzir um esquema de *branch and cut and price*.

Por seu turno, Baldacci et al. adicionam um conjunto de cortes à formulação *FPartição* e definem um método em que o valor da solução dual da relaxação em PL da formulação fortalecida é usado para obter limites inferiores para a solução óptima do primal através de um conjunto de heurísticas. Este procedimento é encaixado num esquema de *branch and cut*.

2.3.5 Conclusões e notas finais

Nesta subsecção resumimos as relações de dominância relativas às formulações naturais e de fluxo introduzidas nas subsecções anteriores. Recorde-se que provámos que *FFAgregado* é dominado pelos restantes modelos, que *FFAgregado*⁺ é dominado por *FFDesagregado* e que não há relação de dominância entre *FCorte(FSub)* e *FFAgregado*⁺ nem entre *FCorte(FSub)* e *FFDesagregado*. O esquema apresentado na Figura 2.3 ilustra as relações que acabámos de descrever.

Desconhecemos a existência de qualquer estudo publicado que permita comparar quantitativamente os *gaps* lineares associados às formulações representadas no esquema.

Dedicamos os próximos capítulos ao desenvolvimento e estudo de novos modelos para o PRVC-PU. Nas novas formulações modelamos as restrições ao comprimento da rota impondo restrições ao comprimento de cada caminho e/ou circuito com origem no nodo 1.

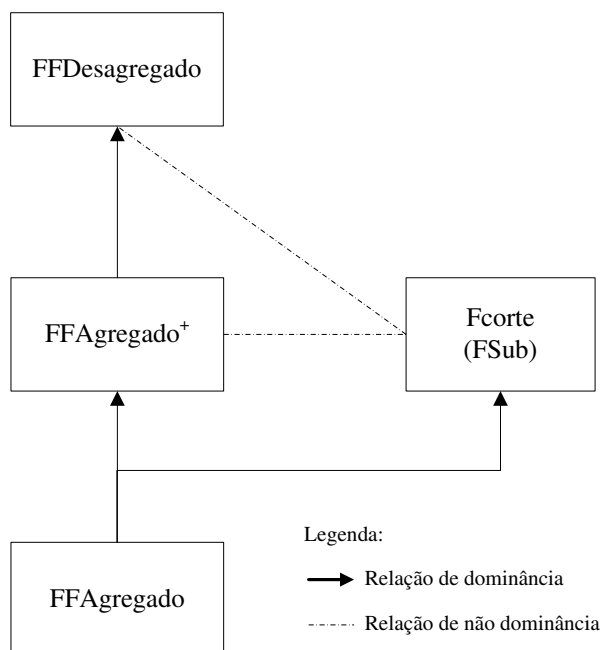


Figura 2.3: Representação esquemática das relações de dominância entre as formulações $FCorte$, $FFAgregado$, $FFAgregado^+$ e $FFDesagregado$.

Esta abordagem está, em certa medida, relacionada com o trabalho de Miller et al. (1960), pois, tal como referimos na subsecção anterior, as desigualdades de *Miller-Tucker-Zemlin* impõem restrições ao afastamento máximo entre cada par de vértices, impondo, portanto, restrições ao comprimento do caminho entre cada par de vértices. Repare-se, no entanto, que enquanto Miller et al. usam variáveis associadas às posições dos vértices para escrever as ditas restrições, nos modelos que agora propomos usamos, para o efeito, variáveis com dependências temporais associadas aos arcos, *i.e.*, variáveis que informam acerca da presença e da posição de um arco na solução. Desta forma, o comprimento do caminho/circuito é limitado de forma implícita, restringindo o conjunto de posições que admitimos para cada arco. Temos, assim, uma abordagem distinta que, tanto quanto sabemos, não foi usada no âmbito do PRV em trabalhos anteriores a esta tese. Como foi referido no Capítulo 1, o facto deste tipo de abordagem resultar bem para problemas relacionados com o PRVC-PU, como o PCV e o PASCMS, constituiu uma forte motivação para a realização deste trabalho.

2.3. FORMULAÇÕES EM PLI PARA O PRVC-PU: REVISÃO DA LITERATURA43

Com efeito, mostraremos que os melhores dos modelos desenvolvidos com base nestas ideias são modelos fortes, que, em média, produzem limites inferiores superiores aos produzidos pelos modelos compactos estudados nesta secção.

Capítulo 3

Formulações em PLI envolvendo variáveis com dependências temporais puras para o PRVC-PU

Dedicamos este capítulo ao desenvolvimento e estudo de uma nova formulação derivada a partir do modelo proposto por Picard e Queyranne (1978) para o Problema do Caixeiro Viajante com Dependências Temporais. Gouveia e Voss (1995) e Gouveia e Pires (1996) analisaram a referida formulação no contexto do PCV, comparando-a com as formulações congêneres das de Fluxo Agregado e de Fluxo Desagregado apresentadas no Capítulo 2, e concluíram que a formulação de Picard e Queyranne domina a de Fluxo Agregado, mas não tem relação de dominância com a de Fluxo Desagregado. Dada a relação existente entre o PCV e o PRVC-PU, estes resultados criavam alguma expectativa quanto à qualidade da nova formulação. Com efeito, obtivemos uma formulação que domina $FFAgregado^+$ e que melhora, em média, os valores dos *gaps* lineares que lhe estão associados com um baixo esforço computacional, mas que não é suficientemente forte para dominar $FFDesagregado$. Observamos, no entanto, que apesar de se mostrar que não existe uma relação de dominância, os resultados computacionais obtidos indiciam que, com algumas exceções, os *gaps* lineares associados à nova formulação são de melhor qualidade que os produzidos resolvendo $FFDesagregado_L$.

Explorando o resultado de dominância entre a nova formulação e $FFAgregado^+$, introduzimos e analisamos algumas desigualdades obtidas por projecção no espaço

natural e das variáveis de fluxo agregado do conjunto das soluções admissíveis da correspondente relaxação em PL. De seguida, introduzimos a formulação fortalecida obtida adicionando a $FFAgregado^+$ um sub-conjunto dessas mesmas desigualdades e referimos alguns resultados computacionais que permitem avaliar o efeito da sua adição a $FFAgregado^+$.

Finalmente, comparamos as formulações propostas neste capítulo com outras formulações da literatura, quer teoricamente, quer através de um pequeno conjunto de testes computacionais com que se pretende dar uma indicação da qualidade dos *gaps* lineares que lhes estão associados. Os limites inferiores produzidos pelos novos modelos são também comparados com os limites inferiores produzidos por duas versões do algoritmo de Lysgaard et al. (2004). Na primeira versão, que designámos por versão restrita, só é considerada a rotina de separação associada às restrições (2.7) e na segunda é fornecido o valor na raiz do algoritmo completo.

3.1 Formulação de Picard e Queyranne Modificada

O Problema do Caixeiro Viajante com Dependências Temporais é uma variante do PCV onde se considera que o custo de cada arco depende da sua posição no circuito. Em 1978, Picard e Queyranne introduziram uma formulação natural para o problema na qual um conjunto de variáveis binárias, z_{ij}^h , é usado para indicar se o arco (i, j) está na posição h do circuito, para $(i, j) \in A$ e $h = 1, \dots, n$. Temos, assim, definida uma variável por par arco–posição admissível. Esta circunstância faz com que seja possível usar este conjunto de variáveis para modelar a restrição ao comprimento da rota do PRVC-PU de forma implícita, através de uma escolha criteriosa do conjunto das posições que associamos a cada arco. Nesta secção, propomos uma formulação desenvolvida com base nestas ideias que mostraremos dominar a formulação $FFAgregado^+$ mas não ter relação de dominância nem com $FFDesagregado$ nem com $FCorte$.

Começamos, então, por observar o esquema da esquerda na Figura 3.1 e notar que

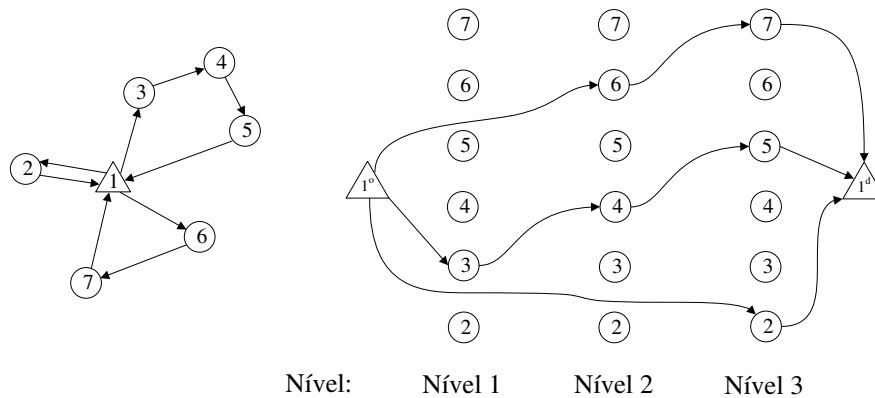


Figura 3.1: Uma solução do PRVC-PU para $n = 7$ e $Q = 3$ e a correspondente representação num grafo expandido

é possível associar uma posição a cada um dos vértices representados, se se estabelecerem algumas convenções.

Consideremos, por exemplo, o depósito: o vértice 1 desempenha um papel duplo na rota, sendo simultaneamente vértice origem e vértice terminal. Para ultrapassar esta duplicidade, consideramos, no que se segue, duas cópias do vértice 1: 1^o , vértice que associamos à "função" origem do vértice 1 e ao qual atribuímos a posição 0 e 1^d , vértice que associamos à "função" destino do mesmo vértice e ao qual atribuímos a posição 4.

Da mesma forma, atribuir posições aos vértices em rotas incompletas requer algum cuidado (ordenar os vértices associados aos clientes numa rota completa é trivial). De facto, podemos optar por seguir a ordem de saída do depósito (realizando uma contagem crescente a partir de 1^o , ou seja, a partir da posição 0) ou a ordem de chegada ao depósito (realizando uma contagem decrescente a partir de 1^d , ou seja, a partir da posição 4). As duas regras têm vantagens e inconvenientes: se a primeira é mais intuitiva, a segunda permite relacionar a posição de um vértice com o número de clientes que se lhe seguem na rota.

No nosso trabalho seguimos a segunda regra. Assim, de acordo com a regra adotada, dizemos que os vértices 2, 5 e 7 estão na terceira posição, que os vértices 4 e 6 estão na segunda e que o vértice 3 está na primeira. No caso geral, dizemos que um vértice é visitado na $h^{\text{ésima}}$ posição de uma determinada rota se se lhe seguem outros $Q - h$ clientes na mesma rota.

Estender o conceito de posição ao conjunto dos arcos levanta o mesmo tipo de questões. Seguindo a linha da convenção anterior estabelecemos, então, que um arco na posição h é um arco que incide num vértice visitado na $h^{\text{ésima}}$ posição, para $h = 1, \dots, Q + 1$.

Este conjunto de observações permite entender representação sobre o grafo expandido da solução do PRVC-PU apresentada na Figura 3.1 e, transpondo-as para o caso geral, concluir que é possível representar uma solução do PRVC-PU num grafo expandido, $G_E = (V_E, A_E)$, construído por níveis, tantos quantas as posições que cada vértice $j \in V$ pode ocupar numa rota admissível. Em cada nível, colocamos réplicas dos referidos vértices distribuídas de acordo com as posições que aqueles podem ocupar na rota. Resumindo, teremos 1^o no nível 0, 1^d no nível $Q + 1$ e réplicas dos vértices associados aos clientes nos níveis $1, \dots, Q$. De cada uma dessas réplicas parte um conjunto de arcos destinados às réplicas colocadas no nível seguinte, não sendo admitidos arcos entre réplicas do mesmo vértice. Para poder representar rotas incompletas incluímos, também, arcos de 1^o para cada uma das réplicas dos vértices associados aos clientes.

Num grafo com estas características uma rota admissível em G pode ser representada como um caminho $1^o - 1^d$ em G_E . Por outro lado, verificamos que um caminho $1^o - 1^d$ em G_E corresponde a um circuito, não necessariamente elementar, que visita o depósito e que usa, no máximo, $Q + 1$ arcos no grafo original, ou seja, um caminho $1^o - 1^d$ em G_E corresponde a uma rota de comprimento não superior a Q em G . Então, associando variáveis binárias aos arcos de G_E e escrevendo as restrições usuais de conservação de fluxo obtemos uma descrição estendida da restrição ao comprimento

da rota no grafo original. De seguida, apresentamos a referida formulação já re-escrita para o grafo original, uma vez que a transposição de G_E para G é trivial (a cada um dos arcos de G_E corresponde um e um só par arco-posição em G , pelo que o mesmo conjunto de variáveis pode ser interpretado quer em termos dos objectos de G_E quer em termos dos objectos de G).

Consideremos, então, variáveis binárias z_{ij}^h definidas para $(i, j) \in A$ e $h \in H_{(i,j)}$, onde $H_{(i,j)}$ denota o conjunto das possíveis posições do arco (i, j) , com $H_{(1,j)} = \{1, \dots, Q\}$, $H_{(j,1)} = \{Q + 1\}$ e $H_{(i,j)} = \{2, \dots, Q\}$, para $(i, j) \in A$, $i, j \neq 1$.

Usando aquele conjunto de variáveis podemos modelar (2.4) como se segue:

$$\sum_{i \in V} z_{ij}^h = \sum_{i \in V'} z_{ji}^{h+1} \quad j \in V', 1 \leq h \leq Q - 1 \quad (3.1)$$

$$\sum_{i \in V} z_{ij}^Q = z_{j1}^{Q+1} \quad j \in V' \quad (3.2)$$

$$\sum_{h \in H_{(i,j)}} z_{ij}^h = x_{ij} \quad (i, j) \in A \quad (3.3)$$

$$z_{ij}^h \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A, h \in H_{(i,j)} \quad (3.4)$$

As restrições (3.1) e (3.2) indicam que a um vértice $j \in V'$ chega um arco na posição h se e só se de j parte um arco na posição $h + 1$. As restrições (3.3) relacionam as variáveis z_{ij}^h com as variáveis topológicas, x_{ij} , garantindo que os arcos usados estão na solução e, finalmente, as restrições (3.4) definem as variáveis z_{ij}^h .

Como já foi observado, o sistema (3.1), (3.2) e (3.4) garante a restrição ao comprimento da rota mas não é suficiente para garantir a sua admissibilidade, *i.e.* aquele conjunto de restrições garante um circuito com início e fim no vértice 1, com, no máximo, $Q + 1$ arcos, mas não garante que esse circuito seja elementar. Essa situação é resolvida na presença das restrições de ligação entre as variáveis z_{ij}^h e x_{ij} e das restrições de afectação pelo que a formulação que obtemos substituindo as restrições

(2.4) de *FEsquia* pelo sistema (3.1) – (3.4) é uma formulação válida para o PRVC-PU. Designamos por Formulação de Picard e Queyranne Modificada (*FPQM*) essa formulação:

$$\mathbf{F\ PQM} : \min\left\{ \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} : (2.2), (2.3), (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (2.5) \right\}$$

A formulação *FPQM* é uma formulação compacta com $\mathcal{O}(Qn^2)$ variáveis e $\mathcal{O}(n^2)$ restrições.

As restrições (3.3) permitem eliminar as variáveis x_{ij} da formulação e obter um modelo escrito apenas nas variáveis z_{ij}^h . No entanto, a presença das variáveis x_{ij} facilita a comparação de *FPQM* com outras formulações, pelo que usamos a formulação como a introduzimos.

3.2 Comparação com a Formulação Forte de Fluxo Agregado

Nesta secção comparamos a nova formulação com a formulação *FFAgregado*⁺. Para poder comparar os dois modelos adicionamos a *FPQM* o seguinte conjunto de igualdades:

$$f_{ij} = \sum_{h \in H(i,j)} (Q - h + 1) z_{ij}^h \quad (i, j) \in A, j \neq 1 \quad (3.5)$$

$$f_{j1} = 0 z_{j1}^{Q+1} \quad j \in V' \quad (3.6)$$

As igualdades (3.5) e (3.6) ligam as variáveis z_{ij}^h de *FPQM* e as variáveis f_{ij} de *FFAgregado*⁺ relacionando posição e fluxo para cada um dos arcos $(i, j) \in A$. Na Figura 3.2 representamos uma solução admissível para o PRVC-PU, onde, junto a cada arco, indicamos os valores do fluxo e da posição que lhe estão associados. Observando a referida figura e recordando que um arco numa solução ocupa uma única posição compreendemos, facilmente, a validade de (3.5) e (3.6).

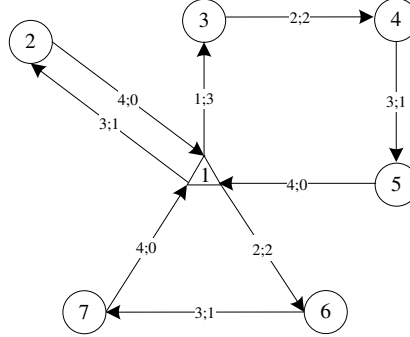


Figura 3.2: Relação entre o valor do fluxo e a posição de um arco numa solução admissível do PRVC-PU numa instância com $n = 7$ e $Q = 3$. As etiquetas associadas a cada arco indicam a sua posição e o valor do fluxo transportado, respectivamente. Observe-se que o valor do fluxo num arco numa posição h é dado por $Q - h + 1$.

Notamos, agora, que esta modificação não fortalece $FPQM_L$ pois (3.5) e (3.6) não implicam relações novas entre as variáveis z_{ij}^h .

O próximo resultado relaciona os modelos $FPQM$ e $FFAgregado^+$.

Resultado 3.2.1

A formulação $FPQM$ domina a formulação $FFAgregado^+$.

Demonstração:

Seja PQM_L o conjunto das soluções admissíveis de $FPQM_L$ e seja $FAgregado_L^+$ o conjunto das soluções admissíveis de $FFAgregado_L^+$.

Provamos o resultado mostrando que $Proj_{(x,f)}(PQM_L) \subseteq FAgregado_L^+$. Para tal, mostramos que o conjunto de restrições (2.10) – (2.12) de $FFAgregado_L^+$ é implicado pela relaxação em PL de $FPQM$ aumentada com (3.5) e (3.6), visto que restrições (2.9) são redundantes em $FFAgregado_L^+$ e que as restrições (2.2) e (2.3) são comuns às duas formulações.

Veamos, então, como obter cada uma das referidas restrições.

1. Restrições (2.10): $\sum_{i \in V} f_{ij} - \sum_{i \in V'} f_{ji} = 1, j \in V'$.

Consideremos um vértice $j \in V'$ e o sub-conjunto de restrições (3.1) e (3.2) que lhe está associado. Multiplicando ambos os membros de cada uma das igualdades por $(Q - h + 1)$ e adicionando as expressões resultantes, obtemos:

$$\sum_{i \in V} \sum_{h=1, \dots, Q} (Q - h + 1) z_{ij}^h - \sum_{i \in V'} \sum_{h=1, \dots, Q} (Q - h + 1) z_{ji}^{h+1} = 0 \quad (3.7)$$

que pode ser re-escrita como:

$$\sum_{i \in V} \sum_{h=1, \dots, Q} (Q - h + 1) z_{ij}^h - \sum_{i \in V'} \sum_{h=2, \dots, Q+1} (Q - h + 1) z_{ji}^h = \sum_{i \in V} \sum_{h=2, \dots, Q+1} z_{ji}^h \quad (3.8)$$

Finalmente, obtemos a expressão desejada usando (3.5) e (3.6) no primeiro membro de (3.8) e usando (3.3) e (2.3) no segundo membro da mesma igualdade (recordamos que $H_{(1,j)} = \{1, \dots, Q\}$, $H_{(j,1)} = \{Q + 1\}$ e que $H_{(i,j)} = \{2, \dots, Q\}$, para $(i, j) \in A$, $i, j \neq 1$).

2. Restrições (2.14), (2.15) e (2.12):

$$x_{1j} \leq f_{1j} \leq Qx_{1j} \quad (1, j) \in A \quad (2.14)$$

$$x_{ij} \leq f_{ij} \leq (Q - 1)x_{ij} \quad (i, j) \in A, i, j \neq 1 \quad (2.15)$$

$$f_{ij} \geq 0 \quad (i, j) \in A, i, j \neq 1. \quad (2.12)$$

Consideremos um arco $(1, j) \in A$ e a correspondente restrição (3.3):

$$\sum_{h \in H_{(1,j)}} z_{1j}^h = x_{1j}$$

Observando que para $1 \leq h \leq Q$ temos $1 \leq (Q - h + 1) \leq Q$, podemos escrever:

$$x_{1j} \leq \sum_{h \in H_{(1,j)}} (Q - h + 1) z_{1j}^h \leq Qx_{1j} \quad (3.9)$$

Finalmente, usando (3.5) em (3.9), obtemos (2.14).

Tome-se, agora, um arco $(i, j) \in A$ tal que $i, j \neq 1$ e a correspondente restrição (3.3):

$$\sum_{h \in H(i,j)} z_{ij}^h = x_{ij}$$

Seguindo o mesmo procedimento, observamos que para $2 \leq h \leq Q$, temos $1 \leq (Q - h + 1) \leq Q - 1$, para escrever (recordamos que $H(i,j) = \{2, \dots, Q\}$):

$$x_{ij} \leq \sum_{h \in H(i,j)} (Q - h + 1) z_{ij}^h \leq (Q - 1) x_{ij} \quad (3.10)$$

Substituindo (3.5) em (3.10), temos, então, (2.15).

Finalmente, usando as restrições de não negatividade das variáveis x_{ij} de $FPQM_L$ na expressão de limite inferior de (3.9) e de (3.10) e usando (3.5) nas expressões resultantes, obtemos as restrições (2.12), para cada $(i, j) \in A, j \neq 1$, concluindo, assim, a nossa demonstração. ■

Corolário 3.2.1

$$v(FPQM_L) \geq v(FFAgregado_L^+).$$

Como veremos na Secção 3.4, a relação de "≥" deste resultado verifica-se, para determinados valores de Q , em sentido estrito e com diferenças significativas. Então, estudando a projecção de PQM_L no espaço das variáveis de $FFAgregado^+$ podemos obter desigualdades interessantes que incluídas nos esquemas *branch and bound* referenciados na Secção 2.3.3.1 podem resultar no seu fortalecimento. Dedicamos a próxima subsecção ao estudo da referida projecção.

3.2.1 Desigualdades no espaço das variáveis naturais e de fluxo agregado implicadas pela relaxação em PL da Formulação de Picard e Queyranne Modificada

Mostrámos na Secção 3.2 que $FPQM$ domina $FFAgregado^+$. Os resultados computacionais a apresentar na Secção 3.4 mostram que essa relação de dominância se verifica com ganhos efectivos em termos da qualidade dos limites inferiores produzidos pelos dois modelos, numa grande parte das instâncias consideradas. Concluímos, portanto, que existem desigualdades implicadas por $FPQM_L$ no sub-espaço das variáveis de $FFAgregado^+$ que podem ser usadas para fortalecer este último modelo. Esta secção dedica-se ao estudo dessas mesmas desigualdades.

Comecemos, então, por recordar as restrições (2.14) e (2.15) de $FFAgregado^+$:

$$x_{1j} \leq f_{1j} \leq Qx_{1j} \quad (1, j) \in A \quad (2.14)$$

$$x_{ij} \leq f_{ij} \leq (Q - 1)x_{ij} \quad (i, j) \in A, i, j \neq 1 \quad (2.15)$$

Estas restrições impõem limites mínimos e máximos ao valor do fluxo transportado num arco. Analisemos as expressões relativas aos limites máximos. Comparando (2.14) com (2.15) verificamos que o limite máximo admitido diminui uma unidade quando deixamos de considerar arcos com origem no depósito e passamos a considerar arcos internos, *i.e.*, arcos $(i, j) \in A$ com $i, j \neq 1$. Esta circunstância decorre do facto de que se um arco interno é usado numa rota, então pelo menos um vértice já foi visitado pela mesma e, como tal, pelo menos uma unidade de fluxo já foi retida (recordamos que é retida uma unidade de fluxo em cada vértice visitado). Repare-se, agora, que estas restrições não distinguem a posição do referido arco, limitando o valor do fluxo num arco interno a $Q - 1$ independentemente da posição que aquele ocupa na rota. No entanto, como já vimos, fluxo e posição estão relacionados e parece evidente que se poderia fortalecer a formulação se se conhecessem conjuntos de restrições nas variáveis f_{ij} que modelassem essas relações.

Consideremos, agora, as igualdades (3.5):

3.2. DESIGUALDADES NO ESPAÇO DE X E F IMPLICADAS POR $FPQM_L$ 55

$$f_{ij} = \sum_{h \in H(i,j)} (Q - h + 1) z_{ij}^h \quad (i, j) \in A, i, j \neq 1 \quad (3.5)$$

este conjunto de igualdades relaciona as variáveis z_{ij}^h de $FPQM$ com as variáveis f_{ij} de $FFAgregado^+$. As variáveis z_{ij}^h informam acerca da posição do arco (i, j) na rota, pelo que usando, de forma adequada, (3.5) em $FPQM$ podemos estabelecer a relação fluxo – posição que procuramos. De seguida, exemplificamos esse procedimento para o caso em que o arco interno ocupa uma posição superior à segunda.

Considere-se um vértice $i \in V'$ e a restrição (3.1) de $FPQM$ que lhe está associada, escrita para $h = 1$:

$$z_{1i}^1 = \sum_{j \in V'} z_{ij}^2$$

usando as restrições de não negatividade das variáveis z_{ij}^h obtemos, sucessivamente:

$$z_{1i}^1 \geq z_{ij}^2 \quad (i, j) \in A, j \neq 1$$

e

$$\sum_{h \in H(1,i)} z_{1i}^h \geq z_{ij}^2 \quad (i, j) \in A, j \neq 1$$

Observamos, agora, que para $h \geq 3$ temos $Q - (h - 1) \leq Q - 2$, pelo que podemos escrever:

$$\begin{aligned} \sum_{h \in H(1,i)} z_{1i}^h &\geq z_{ij}^2 + \sum_{h=3, \dots, Q} [(Q - h + 1) - (Q - 2)] z_{ij}^h \\ &\geq \sum_{h \in H(i,j)} [(Q - h + 1) - (Q - 2)] z_{ij}^h \quad (i, j) \in A, j \neq 1 \end{aligned}$$

Finalmente, usando (3.3) e (3.5) na expressão anterior e re-arranjando os membros, obtemos:

$$f_{ij} \leq (Q - 2)x_{ij} + x_{1i} \quad (i, j) \in A, j \neq 1 \quad (3.11)$$

A expressão que acabámos de obter indica que o valor do fluxo transportado num arco (i, j) com, $i, j \neq 1$, usado nalguma rota é limitado por $Q - 2$ a não ser que $x_{1i} = 1$ se verifique, caso em que o valor do fluxo é limitado a $Q - 1$. Notando que $x_{1i} = 1$ se e só se o arco (i, j) for o segundo a ser incluído na rota, não é difícil concluir que (3.11) modela a situação desejada.

De modo análogo, partindo da restrição (3.2) de $FPQM$, obtemos a desigualdade simétrica de (3.11):

$$f_{ij} \geq 2x_{ij} - x_{j1} \quad (i, j) \in A, i \neq 1 \quad (3.12)$$

Também (3.12) relaciona o fluxo num arco com a sua posição, modelando o facto de que a um arco interno se seguem pelo menos dois vértices, a menos que àquele se siga um arco dirigido ao depósito.

A forma como foram obtidas (3.11) e (3.12) mostra que aquelas desigualdades estão incluídas na projecção do conjunto das soluções admissíveis de $FPQM_L$ no sub-espaco das variáveis de $FFAgregado^+$ para $(i, j) \in A, i, j \neq 1$.

Este procedimento pode ser generalizado e adaptado para obter expressões adequadas a outras posições e/ou a conjuntos de arcos, permitindo escrever o resultado que apresentamos de seguida e que demonstramos no Apêndice A. Para apresentar o referido resultado, introduzimos alguma notação. Assim, para qualquer par de sub-conjuntos, S e S' , de V denotamos por $A(S, S')$ o sub-conjunto dos arcos $(i, j) \in A$ tais que $i \in S$ e $j \in S'$, por $x(S, S')$ o termo $\sum_{i \in S, j \in S'} x_{ij}$ e por $f(S, S')$ o termo $\sum_{i \in S, j \in S'} f_{ij}$. Observamos que $x(S, S')$ representa o número de arcos de $A(S, S')$ na solução e $f(S, S')$ o valor total do fluxo que atravessa o mesmo conjunto de arcos.

Resultado 3.2.2

Sejam S e S' sub-conjuntos disjuntos de V e seja S_0, \dots, S_k uma partição de

3.2. DESIGUALDADES NO ESPAÇO DE X E F IMPLICADAS POR $FPQM_L$ 57

$k + 1$ sub-conjuntos de V' . As desigualdades:

$$f(S, S') \leq (Q - k)x(S, S') + \sum_{p=0, \dots, k-2} \sum_{q=p+2, \dots, k} (q - p - 1)x(S_p, S_q) \quad k = 2, \dots, Q - 1,$$

$$S_0 = \{1\}, S_k = S$$

$$S \subseteq (S_1 \cup S_2) \quad (3.13)$$

e

$$f(S, S') \geq kx(S, S') - \sum_{p=0, \dots, k-2} \sum_{q=p+2, \dots, k} (q - p - 1)x(S_p, S_q) \quad k = 2, \dots, Q - 1,$$

$$S_0 = S', S_k = \{1\}$$

$$S \subseteq (S_{k-2} \cup S_{k-1}) \quad (3.14)$$

são implicadas pela relaxação em Programação Linear da formulação $FPQM$.

Ilustramos a actuação das desigualdades (3.13) na Figura 3.3 onde, por simplicidade, consideramos um exemplo com $k = 3$ e $|S| = |S'| = 1$. Seja, então, $S = \{i\}$ e $S' = \{j\}$. Neste caso, escrevemos (3.13) como:

$$f_{ij} \leq (Q - 3)x_{ij} + 2x_{1i} + x(\{1\}, S_2) + x(S_1, \{j\})$$

Admitindo que o arco (i, j) está na solução, podemos observar o seguinte (no que se segue, designamos por *arcos do salto* (S_p, S_q) os arcos $A(S_p, S_q)$, para $S_p, S_q \subseteq V$):

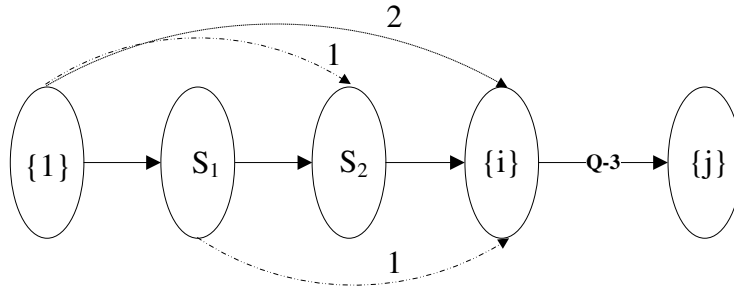


Figura 3.3: Representação esquemática da actuação da desigualdade (3.13) para o caso em que $k = 3$, $S = \{i\}$ e $S' = \{j\}$. Representamos um arco de S_p para S_q , para $p = 0, \dots, k - 2$ e $q = p + 2, \dots, k$, com $k = 3$. As etiquetas junto aos arcos indicam o valor do termo $(q - p - 1)$ que lhe está associado.

- Se o arco $(1, i)$ é usado no caminho entre 1 e j , então aquele é $\{(1, i), (i, j)\}$. Sendo recolhida uma unidade de fluxo em cada vértice visitado, temos que o valor do fluxo no arco (i, j) é, no máximo, $(Q - 1)$. Com efeito, usando (3.13) obtemos, para este caso, $2x_{1i} + x(\{1\}, S_2) + x(S_1, \{j\}) = 2 + 0 + 0$, pelo que $f_{ij} \leq (Q - 3)x_{ij} + 2$;
- Se o caminho entre 1 e j usa apenas um dos arcos de $A(\{1\}, S_2)$ ou um dos arcos de $A(S_1, \{i\})$, então aquele caminho visita pelo menos 2 vértices (o vértice i e um dos vértices da partição visitada). Sendo recolhida uma unidade de fluxo em cada vértice visitado, temos que o valor do fluxo no arco (i, j) é, no máximo, $(Q - 2)$. Usando (3.13) para este caso obtemos $2x_{1i} + x(1, S_2) + x(S_1, j) = 1$, pelo que $f_{ij} \leq (Q - 3)x_{ij} + 1$;
- Se nenhum dos arcos de salto é usado para atingir i então o caminho entre 1 e j visita o vértice i e, pelo menos, um vértice de cada uma das partições, S_1 e S_2 . Sendo recolhida uma unidade de fluxo por cada vértice visitado, concluímos que o valor do fluxo no arco (i, j) é, no máximo, $(Q - 3)$. Observe-se que, neste caso, o valor associado ao termo $2x_{1i} + x(\{1\}, S_2) + x(S_1, \{j\})$ é 0, pelo que temos $f_{ij} \leq (Q - 3)x_{ij}$;
- Noutros casos a restrição não é interessante.

As desigualdades que acabámos de derivar, desigualdades (3.13) e (3.14), podem ser incluídas em esquemas de *branch-and-cut* baseados em $FFAgregado^+$, como os referenciados no Capítulo 2. Estudar o problema da separação que lhes está associado e avaliar o impacto nos resultados da inclusão das novas desigualdades naqueles esquemas são, por conseguinte, tópicos para trabalhos futuros. Na próxima subsecção estudamos a formulação obtida adicionando um sub-conjunto de (3.13) e de (3.14) a $FFAgregado^+$.

3.2.2 Formulação Forte de Fluxo Agregado II

Seja Formulação Forte de Fluxo Agregado II ($FFAgregado^{++}$) a formulação que se obtém adicionando a $FFAgregado^+$ as desigualdades (3.11) e (3.12):

$$\mathbf{F FAggregado}^{++} : \min \left\{ \sum_{i,j \in V} c_{ij} x_{ij} : (2.2), (2.3), (2.9), (2.10), (2.14), (2.15), (2.12), (3.11), (3.12), (2.5) \right\}$$

A formulação $FFAgregado^{++}$ é uma formulação compacta com $\mathcal{O}(n^2)$ variáveis e $\mathcal{O}(n^2)$ restrições.

O modo como $FFAgregado^{++}$ foi obtida permite-nos escrever o seguinte resultado:

Resultado 3.2.3

A formulação $FFAgregado^{++}$ domina a formulação $FFAgregado^+$.

Na secção 3.4 apresentamos um pequeno conjunto de resultados computacionais que indicam o impacto da inclusão de (3.11) e de (3.12) em $FFAgregado_L^+$ no valor do *gap* linear médio associado àquele modelo. Estes resultados revelam a contribuição das referidas restrições para a diferença entre os dois modelos e ilustram o que se pode atingir quando se incorpora informação associada a um modelo mais forte num mais fraco. Notamos que com este procedimento foi possível fortalecer o modelo mais fraco, mantendo a sua ordem de complexidade.

3.3 Comparação com outras formulações

Nesta secção comparamos $FPQM$ com $FFDesagregado$ e com $FCorte$.

3.3.1 Comparação com a Formulação de Fluxo Desagregado

Nesta subsecção comparamos $FPQM$ e $FFDesagregado$. Para facilitar a comparação dos dois modelos, adicionamos as igualdades:

$$x_{ij} = y_{ij}^j \quad (i, j) \in A, j \neq 1 \quad (3.15)$$

a *FFDesagregado*. Como já vimos (v. Secção 2.3.3.2), as restrições (3.15) são redundantes em *FFDesagregado_L*, pelo que esta alteração não fortalece o modelo.

Consideremos, agora, as soluções admissíveis das relaxações em PL de *FFDesagregado* e de *FPQM* que representamos nas Figuras 3.4 e 3.5, respectivamente. As soluções representadas nas figuras são usadas para demonstrar o resultado que relaciona os modelos *FPQM* e *FFDesagregado*.

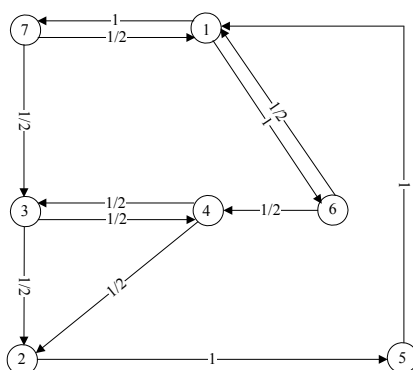


Figura 3.4: Solução admissível de *FFDesagregado_L* para uma instância do PRVC-PU com $n = 7$ e $Q = 3$. As etiquetas associadas aos arcos indicam o valor das variáveis x_{ij} .

Tabela 3.1: Valores das variáveis y_{ij}^k associadas à solução representada na Fig. 3.4

	k						
	2	3	4	5	6	7	
(1,6)	1/2	1/2	1/2	1/2	1		
(1,7)	1/2	1/2	1/2	1/2		1	
(2,5)				1			
(3,2)	1/2			1/2			
(3,4)			1/2				
(4,2)	1/2			1/2			
(4,3)		1/2					
(6,4)	1/2	1/2	1/2	1/2			
(7,3)	1/2	1/2	1/2	1/2			

Os valores não apresentados são nulos.

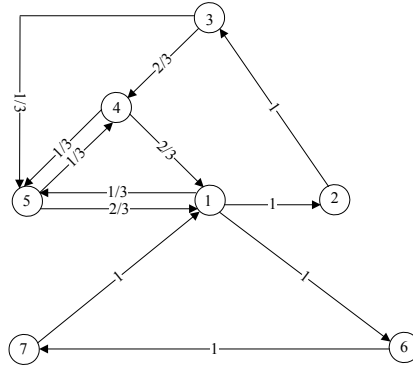


Figura 3.5: Solução admissível de $FPQM_L$ para uma instância do PRVC-PU com $n = 7$ e $Q = 3$. As etiquetas associadas aos arcos indicam o valor das variáveis topológicas, x_{ij} . Os valores não apresentados são nulos. Na Tabela 3.2 indicam-se os valores das variáveis z_{ij}^h .

Tabela 3.2: Valores das variáveis z_{ij}^h associadas à solução representada na Fig. 3.5

		h			
		1	2	3	4
Arco (i, j)	(1,2)	1			
	(1,5)	1/3			
	(1,6)		1		
	(2,3)		1		
	(3,4)			2/3	
	(3,5)			1/3	
	(4,1)				2/3
	(4,5)			1/3	
	(5,1)				2/3
	(5,4)		1/3		
	(6,7)			1	
	(7,1)				1

Os valores não apresentados são nulos.

Resultado 3.3.1

Não há relação de dominância entre as formulações FPQM e FFDesagregado.

Demonstração:

Seja $FDesagregado_L$ o conjunto das soluções admissíveis de $FFDesagregado_L$ e seja PQM_L o conjunto das soluções admissíveis de $FPQM_L$.

Para demonstrar o resultado provamos que as proposições enunciadas em 1. e 2. são proposições verdadeiras.

1. $Proj_x(FDesagregado_L) \not\subseteq Proj_x(PQM_L)$

Provamos a proposição mostrando que existe $x \in Proj_x(FDesagregado_L)$ tal que $x \notin Proj_x(PQM_L)$. Para o efeito, exibimos x e mostramos que não existe z tal que $(x, z) \in PQM_L$

Seja x a solução representada na Figura 3.4. Considere-se o subconjunto das restrições (3.1), (3.2) e (3.3) de $FPQM_L$, que lhe estão associadas:

$$x_{51} = z_{51}^4$$

$$z_{51}^4 = z_{25}^3$$

$$z_{25}^3 = z_{42}^2 + z_{32}^2$$

$$x_{42} = z_{42}^2 + z_{42}^3$$

$$x_{32} = z_{32}^2 + z_{32}^3$$

$$z_{42}^2 = z_{14}^1 \leq x_{14}$$

$$z_{32}^2 = z_{13}^1 \leq x_{13}$$

Substituindo as variáveis topológicas pelos seus valores constatamos facilmente que obtemos um sistema impossível. Então, x prova a proposição.

2. $Proj_x(PQM_L) \not\subseteq Proj_x(FDesagregado_L)$

Seguindo o mesmo procedimento, exibimos, agora, uma solução $x \in Proj_x(PQM_L)$ e mostramos que $x \notin Proj_x(FDesagregado_L)$.

Seja x a solução representada na Figura 3.5 e considere-se o subconjunto das restrições (2.18), (2.21) e (3.15) de $FFDesagregado_L$, que lhe estão associadas (observamos que por (2.22) $y_{ij}^k = 0$ se $x_{ij} = 0$, para $(i, j) \in A$, $j \neq 1$, $k \in V'$):

$$y_{23}^3 + y_{23}^4 + y_{23}^5 + y_{23}^6 + y_{23}^7 \leq 2x_{23}$$

$$y_{23}^4 - y_{34}^4 - y_{35}^4 = 0$$

$$y_{23}^5 - y_{34}^5 - y_{35}^5 = 0$$

$$y_{34}^5 - y_{45}^5 = 0$$

$$x_{23} = y_{23}^3$$

$$x_{34} = y_{34}^4$$

$$x_{35} = y_{35}^5$$

$$x_{45} = y_{45}^5$$

Substituindo as variáveis topológicas pelos seus valores constatamos facilmente que obtemos um sistema impossível. Então, x prova a proposição. ■

Os resultados computacionais apresentados na Secção 3.4 indicam que $FPQM_L$ produz, na maioria dos casos estudados, *gaps* lineares de melhor qualidade do que $FFDesagregado_L$ e com menor esforço computacional.

3.3.2 Comparação com a Formulação Corte

Nesta subsecção comparamos os modelos $FPQM$ e $FCorte$.

Resultado 3.3.2

Não há relação de dominância entre as formulações $FPQM$ e $FCorte$.

Demonstração:

Seja $Corte_L$ o conjunto das soluções admissíveis de $FCorte_L$ e seja PQM_L o conjunto das soluções admissíveis de $FPQM_L$. Seja, também $FAgregado_L^+$ o conjunto

das soluções admissíveis de $FAgregado_L^+$.

Para demonstrar o resultado, mostramos que são verdadeiras as proposições enunciadas em 1. e 2.

1. $Corte_L \not\subseteq Proj_x(PQM_L)$

Admitamos que $Corte_L \subseteq Proj_x(PQM_L)$. Então, pelo Resultado 3.2.1, temos $Corte_L \subseteq Proj_x(FAgregado_L^+)$, o que contraria o Resultado 2.3.6.

2. $Proj_x(PQM_L) \not\subseteq Corte_L$

Consideremos, de novo, a solução representada na Figura 3.5 e a desigualdade (2.7) escrita para $S = \{2, 3, 4, 5\}$:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} \geq \lceil \frac{4}{3} \rceil$$

Substituindo as variáveis pelos seus valores, facilmente constatamos que a desigualdade não é verificada, pelo que x prova a proposição.

■

Da comparação com $FCorte$ concluímos que as desigualdades 2.6 não são implicadas pela projecção no espaço das variáveis x_{ij} de $FPQM_L$. Como tal, aquele conjunto de desigualdades continua a ser útil como corte se adicionado a $FPQM_L$.

Na Secção 3.4 apresentamos um conjunto de resultados computacionais que compara os limites inferiores produzidos por este modelo com os limites inferiores produzidos por uma versão restrita do esquema de *branch and bound* de Lysgaard et al. (2004) onde só são consideradas as rotinas de separação referentes às restrições (2.7). Os resultados obtidos reforçam a afirmação anterior.

3.4 Resultados computacionais

Nesta secção apresentamos um estudo computacional que engloba as formulações introduzidas neste capítulo e os modelos $FFAgregado^+$ e $FFDesagregado$ usando, para o efeito, as instâncias descritas na Secção 2.2.3.

Na Tabela 3.3 indicamos, para cada grupo de 5 testes, os valores médios do *gap* associado às respectivas relaxações em PL e do tempo de CPU, em segundos, consumido na determinação das soluções óptimas das mesmas. Todos os resultados computacionais referentes aos valores das relaxações em PL dos vários modelos apresentados neste trabalho foram obtidos usando o algoritmo *Barrier* do CPLEX 11.2, num computador pessoal com um processador INTEL Core2Duo a 1,33GHz com 8Gb de RAM. No Apêndice C apresentamos os resultados detalhados de todos os testes considerados.

Apresentamos, também, na Tabela 3.4, um pequeno conjunto de resultados obtidos recorrendo ao algoritmo de Lysgaard et al. (2004) em duas versões. Na primeira, que designámos por versão restrita, só é considerada a rotina de separação associada às restrições (2.7) e na segunda é considerada a versão completa. Em ambos os casos, apresentamos o *gap* associado ao valor obtido na raiz da árvore de pesquisa. Estes resultados foram obtidos num computador pessoal equipado com um processador INTEL Celeron a 700 MHz e com 256 MB de memória RAM. Naturalmente, os tempos não são comparáveis, mas, ainda assim, referimos que os testes referentes à versão restrita do algoritmo foram resolvidos em menos de 1s e que os testes referentes à versão completa foram resolvidos em menos de 5s.

A Tabela 3.3 permite uma comparação global de 4 dos modelos compactos apresentados e discutidos até ao momento neste trabalho. Da análise da tabela salientamos o seguinte:

- Os *gaps* lineares associados a $FFDesagregado_L$ são, em geral, melhores do que os produzidos resolvendo $FFAgregado_L^+$, registando-se as maiores diferenças no caso dos testes euclidianos. As diferenças observadas tem grande variabilidade,

não permitindo, por isso, concluir acerca da maior adequabilidade dum ou de outro modelo relativamente a um dado tipo de instância. Constatamos, no entanto, que, para $Q = 3$, há uma coincidência total nos valores relativos às instâncias aleatórias simétricas. O esforço computacional requerido para resolver $FFDesagregado_L$ é muito superior ao requerido para resolver $FFAgregado_L^+$, como seria de esperar devido à diferença entre as ordens de complexidade;

- Comparando os *gaps* lineares obtidos através de $FPQM_L$ e de $FFAgregado_L^+$, verificamos que os valores obtidos coincidem para o caso das instâncias simétricas com $Q = 3$. Nos restantes casos, os primeiros são de melhor qualidade. As diferenças relativas entre os valores observados são significativas (40%, em média), aumentam com a dimensão da instância e têm maior impacto nas instâncias assimétricas, para as quais observámos reduções de cerca 60%;
- Comparando os *gaps* lineares associados às formulações $FPQM$ e $FFDesagregado$ verificamos que há uma relação de não dominância entre os dois modelos: se no caso das instâncias euclidianas os limites inferiores associados a $FFDesagregado$ são, em geral, de melhor qualidade, no caso das instâncias aleatórias verifica-se a situação inversa (exceptuando o caso das instâncias TRS com $Q = 3$ para as quais há uma coincidência nos valores obtidos). As maiores diferenças registam-se nas instâncias TRA (diferença relativa média de 50%). Os tempos de CPU associados a $FPQM$ são, naturalmente, substancialmente menores;
- Relativamente a $FFAgregado_L^+$, $FFAgregado_L^{++}$ e $FPQM_L$ constatamos que para $Q = 3$ há uma coincidência total nos valores dos *gaps* lineares associados aos testes simétricos. Nas restantes situações, observamos que a diferença relativa entre os valores dos *gaps* lineares associados a $FFAgregado_L^+$, $FFAgregado_L^{++}$ é, em média, maior do que a correspondente diferença entre os valores associados a $FFAgregado_L^{++}$ e $FPQM_L$. Por outro lado, observamos que os tempos de CPU associados à resolução de $FFAgregado_L^{++}$ são muito maiores do que os tempos associados às resoluções dos outros dois modelos, apesar das ordens de complexidade apontarem uma direcção inversa.

Em suma, os resultados destacam o modelo *FPQM* como o mais competitivo dentro dos modelos introduzidos neste capítulo e indicam, também, que pode haver vantagem na utilização daquele modelo em detrimento dos modelos compactos propostos na literatura, *FFAgregado*⁺ e *FFDesagregado*. Os resultados mostram também não haver vantagem na utilização de *FFAgregado*⁺⁺ em lugar de *FPQM*, pois verificou-se que, apesar da sua maior complexidade, resolver a relaxação em PL deste último modelo requer menos tempo de CPU.

Por seu turno, a Tabela 3.4 permite comparar os *gaps* lineares associados aos nossos modelos com o valor obtido na raiz pelas duas versões do algoritmo de Lysgaard et al. (2004) já mencionadas. Os resultados mostram que os valores obtidos através da versão completa dominam os *gaps* lineares dos restantes modelos estudados até ao momento. No caso da versão restrita, verificara-se um caso (*TE_40_1.5*) em que se observou a relação inversa.

Tabela 3.3: Resultados computacionais obtidos através das formulações compactas apresentadas nos capítulos 2 e 3.

	FFAgreg.+	FFDesg.	FPQM	FFAgreg.++	
$Q = 3$	TC_20	4,49 (0,01)	3,82 (0,52)	4,49 (0,00)	4,49 (0,02)
	TE_20	3,67 (0,01)	3,50 (0,56)	3,67 (0,00)	3,67 (0,03)
	TRS_20	4,57 (0,01)	4,57 (0,56)	4,57 (0,00)	4,57 (0,01)
	TRA_20	5,32 (0,01)	5,08 (0,56)	2,89 (0,00)	3,85 (0,01)
	TC_40	3,22 (0,04)	2,85 (20,08)	3,22 (0,02)	3,22 (0,16)
	TE_40	2,96 (0,04)	1,92 (21,14)	2,96 (0,02)	2,96 (0,23)
	TRS_40	2,46 (0,05)	2,46 (21,46)	2,46 (0,02)	2,46 (0,22)
	TRA_40	5,80 (0,06)	5,63 (20,09)	2,88 (0,02)	3,30 (0,19)
	TC_20	8,17 (0,02)	5,06 (0,07)	7,06 (0,00)	7,69 (0,04)
	TE_20	5,61 (0,01)	4,30 (2,61)	3,72 (0,00)	4,49 (0,04)
$Q = 5$	TRS_20	7,37 (0,02)	6,09 (1,23)	5,23 (0,00)	5,37 (0,02)
	TRA_20	8,79 (0,01)	8,55 (0,56)	3,48 (0,00)	6,27 (0,02)
	TC_40	6,87 (0,05)	5,31 (19,70)	4,94 (0,00)	5,60 (0,18)
	TE_40	5,40 (0,05)	4,67 (24,58)	2,88 (0,00)	3,80 (0,23)
	TRS_40	5,79 (0,05)	4,83 (19,94)	4,16 (0,00)	4,30 (0,24)
	TRA_40	7,08 (0,05)	6,59 (19,32)	2,52 (0,00)	5,33 (0,16)

Tabela 3.4: Resultados computacionais relativos às versões restrita e completa do algoritmo de Lysgaard et al. (2004) e comparação com os resultados obtidos através de uma selecção das formulações compactas apresentadas neste trabalho.

Instância	FFAgreg.+	FFDesg.	FPQM	FFAgreg.++	Lysgaard I	Lysgaard II
TC_20.1.3	3,33	2,87	3,33	3,33	0,57	0,00
TE_20.1.3	3,25	3,23	3,25	3,25	0,71	0,00
TC_20.1.5	7,43	3,94	5,84	7,17	0,00	0,00
TE_20.1.5	6,33	4,58	4,51	5,48	0,00	0,00
TC_40.1.3	2,38	2,21	2,38	2,38	1,79	0,00
TE_40.1.3	5,96	1,48	5,96	5,96	3,60	0,12
TC_40.1.5	8,01	6,04	5,66	6,66	1,42	0,26
TE_40.1.5	4,83	4,71	1,51	2,48	3,22	0,84

3.5 Conclusões e notas finais

Neste capítulo explorámos uma nova abordagem na construção de modelos para o PRVC-PU. A nova abordagem baseia-se na utilização de variáveis com dependências temporais associadas aos arcos, o que permite modelar as restrições de comprimento da rota de forma implícita, escolhendo o conjunto de posições que admitimos para cada arco. Os modelos introduzidos foram comparados com os restantes modelos estudados. Na Figura 3.6 sintetizamos as relações de dominância demonstradas até ao momento.

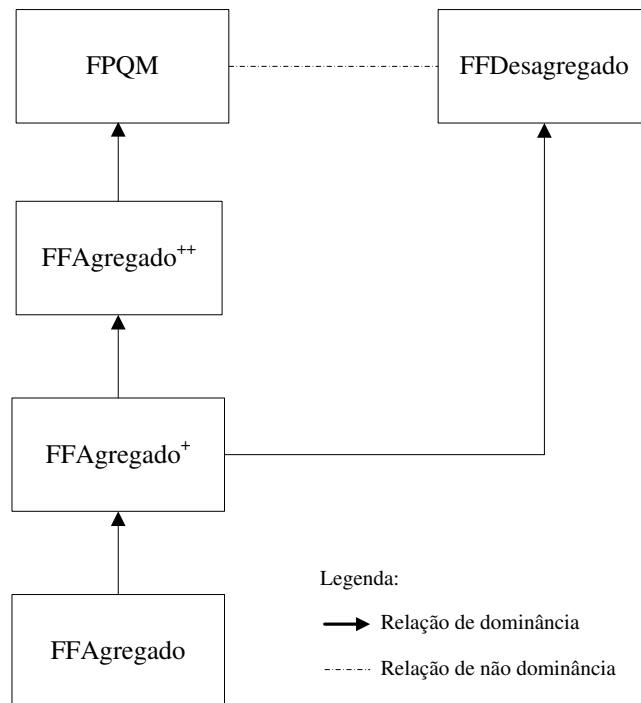


Figura 3.6: Representação esquemática das relações de dominância demonstradas nos Capítulos 2 e 3

Os resultados computacionais apresentados na Secção 3.4 permitiram ter uma medida das distâncias entre as várias formulações e identificar *FPQM* como o modelo mais competitivo, em termos da produção de limites inferiores.

No próximo capítulo mostramos como fortalecer os modelos aqui apresentados.

A finalizar, referimos que os temas abordados neste capítulo estão publicados em Godinho et al., 2007 e 2009b.

Capítulo 4

Formulações em PLI envolvendo variáveis de fluxo desagregado com dependências temporais para o PRVC-PU

Dedicamos este capítulo ao desenvolvimento de um conjunto de formulações motivadas pela percepção de que, em qualquer solução do PRVC-PU, uma rota pode ser decomposta num conjunto de pares de caminhos. De facto, a cada cliente $k \in V'$ visitado pela rota podemos associar dois caminhos, um caminho depósito - k e um caminho k - depósito, que verificam: i) o número de arcos usados em cada um dos caminhos é não superior a Q e ii) o número total de arcos usados nos dois caminhos não excede $Q+1$ (caso contrário, não é cumprida a restrição ao comprimento da rota).

A partir deste conjunto de notas, desenvolvemos duas famílias de formulações distintas, uma baseada apenas em i) - onde ii) é garantido implicitamente - e outra baseada em i) + ii). Nos dois casos, apresentamos uma formulação onde o (sub)-problema associado é modelado de forma exacta como um problema de caminho mais curto, não necessariamente elementar, sobre um grafo expandido adequado. Este tipo de abordagem baseia-se no trabalho de Gouveia (1998) que propõe um grafo similar para modelar o problema de caminho, no âmbito do PASCMS.

Mostramos que o mais forte dos modelos derivados seguindo ii) domina os modelos

obtidos através de i) e introduzimos um conjunto de desigualdades válidas que adicionadas àquele modelo resultam no seu fortalecimento. Esse conjunto de desigualdades traduz uma nova via para a obtenção de modelos desagregados (*i.e.* modelos em que temos um sub-problema associado a cada vértice $k \in V'$). Com efeito, enquanto que nos modelos estudados anteriormente os sub-problemas se relacionam entre si de forma indirecta, através das restrições de ligação entre variáveis de fluxo e topológicas, neste modelo é explicitada a relação entre os vários sub-problemas escrevendo restrições de ligação entre as próprias variáveis de fluxo. Desta nova abordagem resultam, como veremos, modelos particularmente fortes.

Prosseguimos o nosso estudo mostrando que a formulação assim obtida domina *FPQM*.

Com base no resultado anterior, propomos, então, um conjunto de desigualdades obtidas por projecção no espaço das variáveis z_{ij}^h do conjunto das soluções admissíveis da relaxação em PL da nova formulação. Seguidamente, analisamos a formulação fortalecida que resulta da adição a *FPQM* do referido sub-conjunto de desigualdades quanto à contribuição das mesmas para a diferença entre os dois modelos.

Terminamos, comparando as novas formulações, teórica e computacionalmente, com os restantes modelos compactos estudados.

4.1 Formulações de Caminho

Como já foi referido, nas formulações que apresentamos nesta secção a restrição ao comprimento da rota de *FEsquema* é modelada garantindo que a cada par k - depósito está associado um caminho com, no máximo, Q arcos, para cada $k \in V'$. Refira-se que escolhemos modelar o caminho $k - 1$ em detrimento do caminho $1 - k$ por coerência com a definição de posição de um vértice apresentada no Capítulo 3.

4.1.1 Formulação Caminho

Para apresentar a primeira das formulações introduzidas neste capítulo, comecemos por recordar que na Secção 2.3.3.2 definimos o conjunto das variáveis y_{ij}^k da seguinte forma:

Seja $k \in V'$. Para cada $(i, j) \in A$, $i \neq k$, $j \neq 1$ definimos uma variável binária y_{ij}^k tal que:

$$y_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j) \text{ é atravessado por fluxo destinado a } k. \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Por outro lado, não é difícil verificar que o conjunto de variáveis y_{ij}^k com valor 1 numa solução do sistema de restrições (2.17) – (2.19) e (2.23) define um caminho 1 - k , para cada $k \in V'$. Então, podemos redefinir aquele conjunto de variáveis e associar y_{ij}^k à presença do arco (i, j) no caminho 1 - k , para $(i, j) \in A$, $j \neq 1$ e $k \in V'$. Esta circunstância permite modelar a restrição ao comprimento do caminho 1 - k como:

$$\sum_{(i,j) \in A} y_{ij}^k \leq Q \quad k \in V' \quad (4.1)$$

e, conjugando as observações anteriores, construir o modelo desejado. Repare-se que na expressão anterior omitimos as exclusões que decorrem da definição das variáveis y_{ij}^k ao indicar a variação de (i, j) (*i.e.* para indicar $\sum_{(i,j) \in A, j \neq 1, i \neq k} y_{ij}^k$ escrevemos apenas $\sum_{(i,j) \in A} y_{ij}^k$, pois as variáveis y_{i1}^k e y_{kj}^k não estão definidas). Esta opção mantém-se no que se segue.

No entanto, como já referimos, pretendemos modelar o caminho k - 1. Desta forma, definimos, agora, um novo conjunto de variáveis binárias, g_{ij}^k , tal que:

$$g_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j) \text{ está no caminho entre } k \text{ e } 1, \\ & k \in V', (i, j) \in A, i \neq 1, j \neq k. \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

e modelamos o problema do caminho (não necessariamente elementar) k - 1 com, no máximo, Q arcos como se segue:

$$\sum_{j \in V} g_{kj}^k = 1 \quad (4.2)$$

$$\sum_{i \in V'} g_{ij}^k - \sum_{i \in V} g_{ji}^k = 0 \quad j \in V', j \neq k \quad (4.3)$$

$$\sum_{i \in V'} g_{i1}^k = 1 \quad (4.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} g_{ij}^k \leq Q \quad (4.5)$$

$$g_{ij}^k \leq x_{ij} \quad (i,j) \in A, i \neq 1, j \neq k \quad (4.6)$$

$$g_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad (i,j) \in A, i \neq 1, j \neq k \quad (4.7)$$

O sistema (4.2) - (4.4) garante a existência de um caminho $k - 1$, assegurando que o vértice k está no caminho, restrição (4.2), e que o caminho prossegue, restrições (4.3), até que seja atingido o vértice 1, restrição (4.4). A restrição (4.5) garante que o caminho usa, no máximo, Q arcos. Finalmente, as restrições (4.6) ligam as variáveis, garantindo que os arcos usados no caminho estão na solução e as restrições (4.7) definem as variáveis.

Observamos que o sistema das restrições (4.2) - (4.4), (4.6) e (4.7) não é mais do que uma adaptação do modelo apresentado na Subsecção 2.3.3.2 para *FFDesagregado*, constituído pelo sistema de restrições (2.17) - (2.19), (2.22) e (2.23). A adaptação é trivial: basta, substituir no referido sistema de restrições as variáveis y_{1j}^k , y_{jk}^k e y_{ij}^k pelas correspondentes variáveis g_{kj}^k , g_{j1}^k e g_{ij}^k .

Seja *FCaminho_k* o modelo que acabámos de apresentar. Substituindo em *FEsquema* as restrições (2.4) por *FCaminho_k*, escrito para todo o $k \in V'$, obtemos um modelo válido para o PRVC-PU. Seja *Formulação Caminho (FCaminho)* esse modelo:

$$\mathbf{F Caminho} : \min \left\{ \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} : (2.2), (2.3), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (4.7), (2.5) \right\}$$

Notamos que a presença de caminhos não elementares na solução, admitidos pelo sistema (4.3) – (4.7), é resolvida pela acção conjunta das restrições de ligação, (4.6), e das restrições de afectação (2.2) e (2.3).

A formulação *FCaminho* é uma formulação compacta com $\mathcal{O}(n^3)$ variáveis e $\mathcal{O}(n^3)$ restrições.

Na próxima subsecção mostramos como fortalecer *FCaminho*.

4.1.2 Formulação Forte de Caminho

Gouveia (1998) mostra como obter um modelo exacto para o sub-problema em estudo nesta secção usando a formulação "tradicional" de fluxos para o Problema do Caminho mais Curto (não restringido no número de arcos) definida sobre um grafo expandido adequado. Naturalmente, a formulação obtida desta forma domina a formulação *FCaminho*. Esta subsecção dedica-se à apresentação dum tal modelo.

Gouveia modela o Problema do Caminho mais Curto entre dois vértices com, no máximo, Q arcos usando um grafo expandido semelhante ao grafo descrito na Secção 3.1. Assim, o grafo proposto por Gouveia é constituído por níveis incluindo, em cada nível, uma cópia dos vértices que podem ocupar a posição que lhe está associada e, entre níveis consecutivos, cópias dos arcos do grafo original. Para modelar caminhos com um número de arcos inferior ao limite máximo admitido, Gouveia inclui lacetes (*i.e.* arcos do tipo (j^h, j^{h+1})) no conjunto dos arcos do grafo. No nosso trabalho, em lugar dos lacetes, consideramos a existência de um vértice fictício, f , ligado a cada uma das réplicas do vértice k . Desta forma, o arco (f, k) pode ser entendido como uma representação agregada do caminho 1 - k . Esta opção facilita a comparação futura deste modelo com o de circuito e daquele com *FPQM*.

Sumariando, para cada $k \in V'$, consideramos um grafo expandido $G_E = (V_E, A_E)$ constituído por um vértice fictício no nível 0; réplicas do vértice k nos níveis $1, \dots, Q$; réplicas dos vértices $j \in \{2, \dots, n\}$ nos níveis $2, \dots, Q$; uma réplica do vértice 1 no

nível $Q + 1$; arcos do vértice fictício para cada uma das réplicas de k e arcos entre réplicas de vértices distintos colocados em níveis consecutivos. Um grafo expandido como o que definimos permite representar o caminho $k - 1$ duma qualquer solução admissível do PRVC-PU e permite associar, a qualquer caminho $f - 1$ em G_E , um caminho $k - 1$ com, no máximo, Q arcos no grafo original. A Figura 4.1 procura exemplificar esta relação.

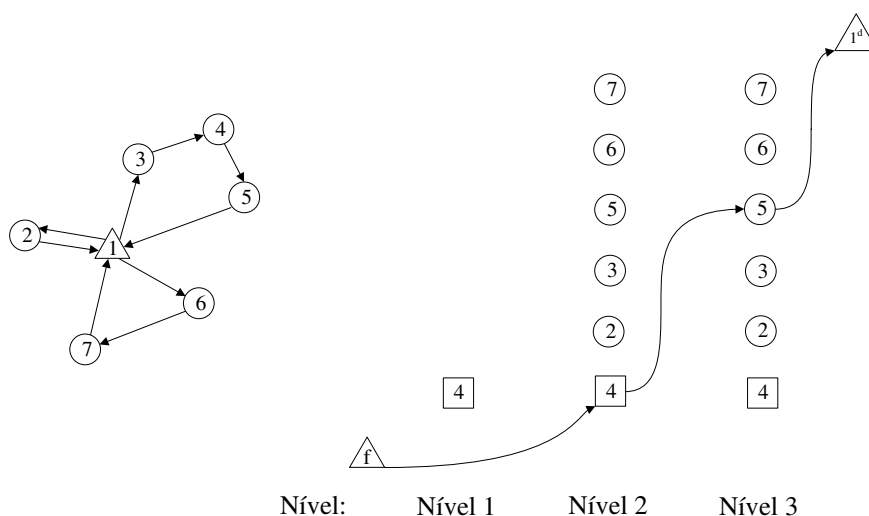


Figura 4.1: Uma solução do PRVC-PU para $n = 7$ e $Q = 3$ e a correspondente representação num grafo expandido do caminho cliente 4 - 1. Observamos que a uma réplica do vértice 4 numa posição p está associado um conjunto de caminhos 4 - 1 com exactamente $Q - p + 1 = 3 - p + 1$ arcos (observamos que $p \geq 2$ pelo que $Q - p + 1 \leq Q$, ficando, assim, garantidas as restrições ao comprimento do caminho).

Então, seguindo a linha de argumentação usada na Secção 3.1, percebemos que associando uma variável binária a cada um dos arcos do grafo expandido e escrevendo a formulação que designamos por formulação *tradicional* do Problema do Caminho Mais Curto numa Rede Orientada (doravante designada por formulação tradicional de caminho) obtemos uma formulação estendida para o problema da determinação de um caminho entre os vértices k e 1 com no máximo Q arcos sobre o grafo original.

Seja, então, $k \in V'$ e considerem-se variáveis v_{ij}^{hk} , definidas para $(i, j) \in A$, $j \neq k$, $i \neq 1$ e $h \in H_{(i,j)}$. $H_{(i,j)}$ denota, recorde-se, o conjunto das possíveis posições do arco (i, j) , com $H_{(k,j)} = \{2, \dots, Q\}$ se $j \neq 1$, $H_{(i,1)} = \{Q + 1\}$ e $H_{(i,j)} = \{3, \dots, Q\}$ nos restantes casos.

$$v_{ij}^{hk} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i, j) \text{ é usado na posição } h \text{ do caminho } k - 1. \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Considerem-se, também, as variáveis associadas ao vértice fictício, f , definidas para $h \in H_{(f,k)} = \{1, \dots, Q\}$ como:

$$v_{fk}^{hk} = \begin{cases} 1, & \text{se } k \text{ está na posição } h \text{ da rota que o visita.} \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Usando este conjunto de variáveis podemos modelar o Problema do Caminho Mais Curto (não necessariamente elementar) entre os vértices k e 1 com, no máximo Q , arcos, como:

$$\sum_{h \in H_{(f,k)}} v_{fk}^{hk} = 1 \tag{4.8}$$

$$v_{fk}^{hk} = \sum_{i \in V} v_{ki}^{h+1,k} \quad h = 1, \dots, Q \tag{4.9}$$

$$\sum_{i \in V'} v_{ij}^{hk} = \sum_{i \in V} v_{ji}^{h+1,k} \quad j \neq k, h = 2, \dots, Q \tag{4.10}$$

$$\sum_{i \in V'} v_{i1}^{Q+1,k} = 1 \tag{4.11}$$

$$\sum_{h \in H_{(i,j)}} v_{ij}^{hk} \leq x_{ij} \quad (i, j) \in A, i \neq 1, j \neq k \tag{4.12}$$

$$v_{ij}^{hk} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A, i \neq 1, j \neq k, h \in H_{(i,j)} \tag{4.13}$$

$$v_{fk}^{hk} \in \{0, 1\} \quad h \in H_{(f,k)} \tag{4.14}$$

A restrição (4.8) garante que é iniciado um caminho $k - 1$. As restrições (4.9), (4.10) e (4.11) indicam que o caminho prossegue até que seja atingido o vértice 1 na posição $Q + 1$. As restrições (4.12) relacionam as variáveis v_{ij}^{hk} com as variáveis

topológicas, x_{ij} , garantindo que os arcos usados no caminho estão na solução e, finalmente, as restrições (4.13) e (4.14) definem as variáveis.

Seja $FCaminhoForte_k$ o modelo que acabámos de apresentar. É sabido que o conjunto das soluções admissíveis da relaxação em PL da formulação tradicional de caminho tem pontos extremos inteiros (a matriz dos coeficientes das restrições associada àquela formulação é a matriz de incidência vértice-arco do grafo de suporte da rede, que sabemos ser totalmente unimodular), pelo que $FCaminhoForte_k$ é uma formulação exacta para o Problema do Caminho Mais Curto (não necessariamente elementar) entre os vértices k e 1 com, no máximo Q arcos sobre o grafo original. Com base nesta observação, podemos, então, enunciar o resultado que relaciona os dois modelos apresentados, $FCaminho_k$ e $FCaminhoForte_k$:

Resultado 4.1.1

Seja $k \in V'$ e sejam $CaminhoForte_{kL}$ e $Caminho_{kL}$ os conjuntos das soluções admissíveis de $FCaminho_{kL}$ e de $FCaminhoForte_{kL}$, respectivamente. Então, $Proj_y(CaminhoForte_{kL}) \subseteq Caminho_{kL}$.

Substituindo a restrição (2.4) de $FEsquema$ pelo sistema (4.8) - (4.14) escrito para todo $k \in V'$, obtemos, então, a Formulação Forte de Caminho ($FForteCaminho$). Como já foi referido, o sistema (4.8) - (4.11), (4.13) e (4.14) admite caminhos não elementares. Estes são, no entanto, eliminados do conjunto das soluções de $FForteCaminho$ pela acção conjunta das restrições de ligação, (4.12), e das restrições de afectação (2.2) e (2.3). Notamos, também, que (4.11) é redundante na relaxação em PL de $FForteCaminho$. Todavia, considerámo-la na formulação por considerarmos que a torna mais intuitiva.

F ForteCaminho : $\min \left\{ \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} : (2.2), (2.3), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12), (4.13), (4.14), (2.5) \right\}$

A formulação $FForteCaminho$ é uma formulação compacta com $\mathcal{O}(Qn^3)$ variáveis e $\mathcal{O}(n^3)$ restrições.

Conjugando o Resultado 4.1.1 com o facto das restrições (2.2), (2.3) e (2.5) serem comuns às formulações *FCaminho* e *FForteCaminho*, podemos enunciar o resultado que estabelece a relação de dominância entre as duas formulações, bem como o correspondente corolário:

Resultado 4.1.2

A formulação FForteCaminho domina a formulação FCaminho.

Corolário 4.1.1

$v(FForteCaminho_L) \geq v(FCaminho_L)$.

Na Secção 4.5 apresentamos resultados computacionais que mostram que a relação de "≥" deste resultado se verificou em sentido estrito em todos os casos estudados. Os resultados mostram, também, que os limites inferiores obtidos são de fraca qualidade, quando comparados com os produzidos resolvendo as relaxações em PL dos restantes modelos apresentados neste trabalho. Na próxima secção, introduzimos um conjunto de formulações que permitem obter limites inferiores de melhor qualidade.

4.2 Formulações de Circuito

Esta secção é dedicada a uma família de modelos onde a restrição ao comprimento da rota é assegurada impondo que cada cliente $k \in V'$ é visitado por um circuito com início e fim no depósito e com, no máximo, $Q + 1$ arcos. Para modelar um tal circuito consideramos que este se decompõe em dois caminhos sequenciais, $1 - k$ e $k - 1$, tais que: i) o número de arcos usados num caminho é não superior a Q e ii) o número de arcos usados nos dois caminhos não excede $Q + 1$. Mostramos que por esta via se consegue derivar uma formulação que domina *FForteCaminho*.

Observamos que o modelo de circuito acima descrito inclui, como sub-problema, o problema de caminho estudado na secção anterior. Então, numa primeira abordagem, podemos considerar trivial o resultado anunciado e questionar a pertinência da inclusão das formulações de caminho neste trabalho. A sua inclusão foi motivada por

duas observações: i) trabalhos anteriores realizados no âmbito do PCV e no âmbito do PRVC indicam que outras formulações de caminho e circuito publicadas produzem relaxações em PL equivalentes (ver Langevin et al. (1990) sobre o trabalho de Wong (1980), ou Letchford e Salazar-Gonzalez (2006) sobre a formulação de dois fluxos de Baldacci et al. (2004), entre outros). Desta forma, era importante mostrar que este não é o caso das nossas formulações; ii) resolver uma formulação de circuito implica um maior esforço computacional do que resolver uma formulação de caminho. Havia, portanto, que verificar se as diferenças na qualidade (média) dos limites inferiores associados às duas formulações "compensavam" o maior esforço computacional. Na Secção 4.5, apresentamos uma série de resultados computacionais que indicam haver uma diferença significativa entre os valores dos limites inferiores produzidos resolvendo as relaxações em PL dos melhores modelos conseguidos com cada uma das abordagens.

4.2.1 Formulação Circuito

A formulação que apresentamos nesta subsecção tem as suas raízes no trabalho de Wong (1980) para o PCV. O modelo de circuito proposto por Wong é um modelo de fluxo desagregado que usa os dois conjuntos de variáveis binárias definidas nas secções 2.3.3.2 e 4.1.1, variáveis y_{ij}^k e g_{ij}^k , para modelar os caminhos $1 - k$ e $k - 1$, respectivamente. Wong descreve aqueles caminhos através das restrições de conservação de fluxo que apresentámos quando estudámos os modelos *FFDesagregado* e *FCaminho*. Na formulação que apresentamos de seguida usamos os mesmos conjuntos de variáveis. No entanto, para além das restrições de conservação de fluxo, a nossa formulação usa também restrições para garantir a cardinalidade de cada um dos caminhos e do circuito - no caso do PCV, as restrições ao comprimento do circuito são implicadas pela acção conjunta das restrições de ligação entre as variáveis de fluxo e as variáveis topológicas e das restrições de afectação.

Seja, então $k \in V'$. Usando variáveis y_{ij}^k e variáveis g_{ij}^k definidas como nas secções 2.3.3.2 e 4.1.1, respectivamente, modelamos o problema do circuito (não necessariamente elementar) $1 - k - 1$ com, no máximo, $Q + 1$ arcos como se segue:

$$\sum_{j \in V} y_{1j}^k = 1 \quad (2.17)$$

$$\sum_{i \in V} y_{ij}^k - \sum_{i \in V'} y_{ji}^k = 0 \quad j \in V', j \neq k \quad (2.18)$$

$$\sum_{i \in V'} y_{ik}^k = 1 \quad (2.19)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} y_{ij}^k \leq Q \quad (4.1)$$

$$\sum_{j \in V} g_{kj}^k = 1 \quad (4.2)$$

$$\sum_{i \in V'} g_{ij}^k - \sum_{i \in V} g_{ji}^k = 0 \quad j \in V', j \neq k \quad (4.3)$$

$$\sum_{i \in V'} g_{i1}^k = 1 \quad (4.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} g_{ij}^k \leq Q \quad (4.5)$$

$$y_{ij}^k + g_{ij}^k \leq x_{ij} \quad (i,j) \in A \quad (4.15)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} (y_{ij}^k + g_{ij}^k) \leq Q + 1 \quad (4.16)$$

$$y_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad (i,j) \in A, i \neq k, j \neq 1 \quad (2.23)$$

$$g_{ij}^k \in \{0, 1\} \quad (i,j) \in A, i \neq 1, j \neq k \quad (4.7)$$

Como já vimos, os sistemas (2.17) - (2.19) e (4.2) - (4.4) garantem a existência de um caminho 1 - k e k - 1, respectivamente. As restrições (4.1) e (4.5) garantem que cada caminho usa, no máximo, Q arcos e a restrição (4.16) garante que, na totalidade, os dois caminhos usam, no máximo, $Q + 1$ arcos. Finalmente, as restrições (4.16) ligam as variáveis, garantindo que os arcos usados num dos caminhos estão na solução e as restrições (2.23) e (4.7) definem as variáveis.

Seja $FCircuito_k$ o modelo que acabámos de apresentar. Substituindo em $FEsquema$ as restrições (2.4) por $FCircuito_k$, escrito para todo o $k \in V'$, obtemos um modelo válido para o PRVC-PU. Seja *Formulação Circuito (FCircuito)* esse modelo:

F Circuito : $\min\left\{ \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}x_{ij} : (2.2), (2.3), (2.17), (2.18), (2.19), (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.15), (4.16), (2.23), (4.7), (2.5) \right\}$

Notamos que as restrições (4.5) (ou, alternativamente (4.1)) são redundantes face à acção conjunta de (4.1) ((4.5)) e de (4.16). Notamos também que a presença de circuitos não elementares na solução é proibida pela acção conjunta das restrições de ligação, (4.15), e das restrições de afectação, (2.2) e (2.3).

A formulação *FCircuito* é uma formulação compacta com $\mathcal{O}(n^3)$ variáveis e $\mathcal{O}(n^3)$ restrições.

Na próxima subsecção mostramos como obter um modelo mais forte para o mesmo sub-problema.

4.2.2 Formulação Forte de Circuito

Esta subsecção é dedicada ao estudo de uma formulação onde o problema do circuito 1 - k - 1 com, no máximo, $Q + 1$ arcos é modelado de forma exacta como um Problema de Caminho mais Curto, não restringido no número de arcos, num grafo expandido apropriado. O novo grafo é construído sobre o grafo apresentado na Secção 4.1.2 que, como já vimos, modela o caminho $k - 1$ com no máximo Q arcos, aumentando-o de forma a passar a incluir, também, o caminho 1 - k .

Recordamos, então, que na Subsecção 4.1.2 modelamos o caminho $k - 1$ com, no máximo, Q arcos usando um grafo expandido que incluía um vértice fictício e um conjunto de arcos vértice fictício - k . Observámos também que cada um desses arcos pode ser entendido como uma representação agregada do caminho 1 - k que, agora, pretendemos explicitar. Então, o novo grafo pode ser obtido a partir do anterior substituindo cada arco vértice-fictício - k por um conjunto de caminhos compatíveis, em termos do seu comprimento, com o caminho $k - 1$ que se lhe segue. Comparando

a Figura 4.1 (*v.* Subsecção 4.1.2) com a Figura 4.2 que se apresenta de seguida compreende-se facilmente o que acabámos de descrever.

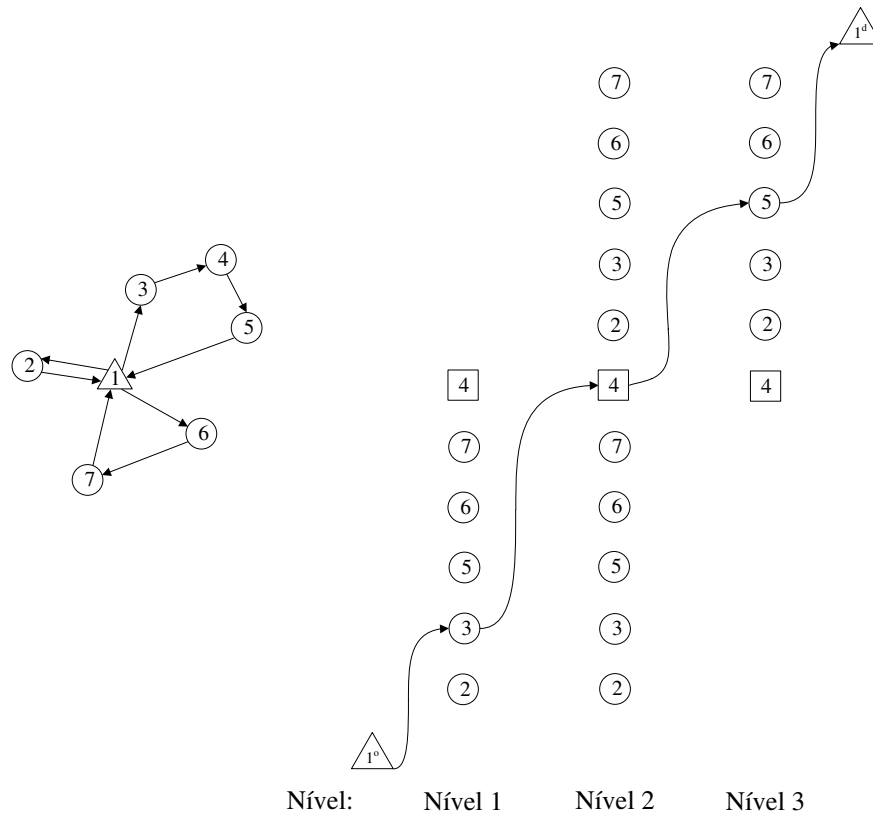


Figura 4.2: Uma solução do PRVC-PU para $n = 7$ e $Q = 3$ e a correspondente representação num grafo expandido do circuito 1 - 4 - 1.

Assim, podemos modelar o problema do circuito que vimos a estudar recorrendo à formulação tradicional de caminho sobre um grafo expandido como o da Figura 4.2: *i.e.* um grafo construído por níveis e subdividido em duas camadas, estando a inferior associada ao caminho 1 - k e a superior ao caminho k - 1. Nos vários níveis incluímos cópias dos vértices que podem ocupar a posição que lhes está associada e, entre níveis consecutivos, incluímos cópias dos arcos do grafo original. A "mudança" de caminho é garantida não admitindo a existência de arcos (k, j) na primeira camada do grafo nem de arcos (j, k) na segunda. Por outro lado, admitimos, na camada inferior, arcos do

vértice 1 para cada uma das réplicas dos vértices associados aos clientes para modelar rotas incompletas.

Seguindo o procedimento usual, associando uma variável binária a cada um dos arcos do grafo expandido que acabámos de descrever e escrevendo a formulação tradicional de caminho em termos das referidas variáveis obtemos uma formulação estendida para o problema da determinação de um circuito que visita os vértices 1 e k com, no máximo, $Q + 1$ arcos, sobre o grafo original. O facto do conjunto das soluções admissíveis da relaxação em PL da formulação tradicional de caminho ter pontos extremos inteiros permite concluir que a formulação assim obtida para o problema do circuito no grafo original é exacta.

Seja, então, $k \in V'$ e considerem-se variáveis $w1_{ij}^{hk}$ definidas para $(i, j) \in A$ com $i \neq k, j \neq 1$ e $h \in H_{(i,j)}$, com $H_{(1,j)} = \{1, \dots, Q\}$, $H_{(i,k)} = \{2, \dots, Q\}$ se $i \neq 1$ e $H_{(i,j)} = \{2, \dots, Q - 1\}$ nos restantes casos:

$$w1_{ij}^{hk} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i, j) \text{ é usado na posição } h \text{ do caminho } 1 - k. \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Considerem-se, também, variáveis $w2_{ij}^{hk}$ definidas para $(i, j) \in A$ com $i \neq 1, j \neq k$ e $h \in H_{(i,j)}$, com $H_{(k,j)} = \{2, \dots, Q\}$ se $j \neq 1$, $H_{(i,1)} = \{Q + 1\}$ e $H_{(i,j)} = \{3, \dots, Q\}$ nos restantes casos:

$$w2_{ij}^{hk} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i, j) \text{ é usado na posição } h \text{ do caminho } k - 1. \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Usando este conjunto de variáveis, podemos modelar o Problema do Circuito Mais Curto (não necessariamente elementar) que visita os vértices 1 e k com, no máximo $Q + 1$ arcos, como:

$$\sum_{h \in H_{(1,j)}} \sum_{j \in V} w1_{1j}^{hk} = 1 \quad (4.17)$$

$$\sum_{i \in V} w1_{ij}^{hk} = \sum_{i \in V} w1_{ji}^{h+1,k} \quad j \neq 1, k, h = 1, \dots, Q-1 \quad (4.18)$$

$$\sum_{i \in V} w1_{ik}^{hk} = \sum_{i \in V} w2_{ki}^{h+1,k} \quad h = 1, \dots, Q \quad (4.19)$$

$$\sum_{i \in V} w2_{ij}^{hk} = \sum_{i \in V} w2_{ji}^{h+1,k} \quad j \neq k, h = 2, \dots, Q \quad (4.20)$$

$$\sum_{i \in V} w2_{i1}^{Q+1,k} = 1 \quad (4.21)$$

$$\sum_{h \in H_{(i,j)}} (w1_{ij}^{hk} + w2_{ij}^{hk}) \leq x_{ij} \quad (i, j) \in A \quad (4.22)$$

$$w1_{ij}^{hk} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A, i \neq k, j \neq 1, h \in H_{(i,j)} \quad (4.23)$$

$$w2_{ij}^{hk} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A, i \neq 1, j \neq k, h \in H_{(i,j)} \quad (4.24)$$

O sistema (4.17) – (4.21) garante a existência de um circuito 1- k - 1, assegurando que parte um arco do depósito em direcção a k –restrição (4.17)– e que o caminho prossegue visitando k –restrições (4.18) (4.19) e (4.20)– até que seja atingido o vértice 1, na posição $Q+1$ –restrição (4.21). As restrições (4.22) relacionam as variáveis $w1_{ij}^{hk}$ e $w2_{ij}^{hk}$ com as variáveis topológicas, x_{ij} , garantindo que os arcos usados no caminho estão na solução e, finalmente, as restrições (4.23) e (4.24) definem as variáveis do modelo.

Designamos por $FCircuitoForte_k$ o modelo que acabámos de apresentar. Como já foi referido, $FCircuitoForte_k$ é um modelo exacto para o problema em estudo, o que permite enunciar o seguinte resultado:

Resultado 4.2.1

Seja $k \in V'$ e sejam $Circuito_{kL}$ e $CircuitoForte_{kL}$ os conjuntos das soluções admissíveis de $FCircuito_{kL}$ e de $FCircuitoForte_{kL}$, respectivamente. Então, $Proj_{(y,g)}(CircuitoForte_{kL}) \subseteq Circuito_{kL}$.

Substituindo a restrição (2.4) de *FEsquema* pelo sistema (4.17) - (4.24) escrito para todo $k \in V'$, obtemos uma formulação válida para o PRVC-PU. Seja Formulação Forte de Circuito (*FForteCircuito*) essa formulação:

$$\mathbf{F ForteCircuito} : \min\left\{ \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}x_{ij} : (2.2), (2.3), (4.17), (4.18), (4.19), (4.20), (4.21), (4.22), (4.23), (4.24), (2.5) \right\}$$

Observamos que os circuitos não elementares admitidos pelo sistema (4.17) - (4.21) são eliminados do conjunto das soluções de *FForteCircuito* pela acção conjunta das restrições de ligação, (4.22), e das restrições de afectação (2.2) e (2.3).

A formulação *FForteCircuito* é uma formulação compacta com $\mathcal{O}(Qn^3)$ variáveis e $\mathcal{O}(n^3)$ restrições.

Com base no Resultado 4.2.1 e no facto das restrições (2.2), (2.3) e (2.5) serem comuns às duas formulações, introduzimos o resultado que relaciona *FCircuito* e *FForteCircuito* e o correspondente corolário:

Resultado 4.2.2

A formulação FForteCircuito domina a formulação FCircuito.

Corolário 4.2.1

$$v(\text{FForteCircuito}_L) \geq v(\text{FCircuito}_L).$$

Na Secção 4.5 apresentamos resultados computacionais que mostram que a relação de "≥" deste resultado se verificou em sentido estrito em todos os casos estudados. Os resultados mostram, também, que os limites inferiores obtidos, embora superiores aos dos modelos de caminho, são de fraca qualidade, quando comparados com os produzidos resolvendo as relaxações em PL dos restantes modelos apresentados neste trabalho.

4.3 Comparação entre as formulações de Caminho e de Circuito

Nesta secção comparamos teoricamente os modelos associados a cada uma das abordagens descritas nas secções anteriores.

Começamos por comparar $FCircuito$ com $FCaminho$. A forma como o primeiro modelo foi construído torna evidente o próximo resultado, que apresentamos sem prova:

Resultado 4.3.1

A formulação $FCircuito$ domina a formulação $FCaminho$.

e permite-nos escrever o corolário:

Corolário 4.3.1

$$v(FCircuito_L) \geq v(FCaminho_L).$$

Os resultados computacionais apresentados na Secção 4.5 indicam que a relação de "≥" deste resultado se verifica em sentido estrito. Esta circunstância significa que, usando este tipo de modelo, há vantagem em seguir a abordagem "circuito" em detrimento da abordagem "caminho", o que não era evidente nos modelos publicados anteriormente.

De seguida mostramos que $FForteCircuito$ domina $FForteCaminho$. Para tal, começamos por observar que, para cada $k \in V'$, as variáveis $w1_{ij}^{hk}$ e $w2_{ij}^{hk}$ de $FCircuito$ e as variáveis v_{ij}^{hk} e v_{fk}^{hk} de $FCaminho$ podem ser relacionadas através do seguinte conjunto de igualdades:

$$v_{ij}^{hk} = w2_{ij}^{hk} \quad (i, j) \in A, i \neq 1, j \neq k, h \in H_{(i,j)} \quad (4.25)$$

$$v_{fk}^{hk} = \sum_{i \in V} w1_{ik}^{hk} \quad h \in H_{(f,k)} \quad (4.26)$$

Dado que (4.25) e (4.26) não implicam relações novas entre as variáveis $w1_{ij}^{hk}$ e $w2_{ij}^{hk}$, as relaxações em PL de $FForteCircuito$ e de $FForteCircuito$ aumentado

com (4.25) e (4.26) são equivalentes. Esta observação é usada na demonstração do Resultado 4.3.2:

Resultado 4.3.2

A formulação $FForteCircuito$ domina a formulação $FForteCaminho$.

Demonstração:

Seja $CircuitoForte_L$ o conjunto das soluções admissíveis de $FForteCircuito_L$ e seja $CaminhoForte_L$ o conjunto das soluções admissíveis de $FForteCaminho_L$.

Como usual, mostramos que $Proj_{(x,v)}(CircuitoForte_L) \subseteq CaminhoForte_L$ para provar o resultado. Para tal, demonstramos que o sistema de restrições (4.8)–(4.10) e (4.12) de $FForteCaminho_L$ é implicado pela relaxação em PL de $FForteCircuito$ aumentada com (4.25) e (4.26) uma vez que (4.11) é, como já foi observado, redundante em $FForteCaminho_L$ e as restrições de afectação, (2.2) e (2.3), são comuns às duas formulações.

Consideremos, então, um determinado $k \in V'$ e mostremos como obter cada uma das restrições referidas.

1. Restrições (4.8): $\sum_{h \in H(f,k)} v_{fk}^{hk} = 1$.

Considerem-se as restrições (4.18) de $FForteCircuito_L$:

$$\sum_{i \in V} w_{ij}^{hk} = \sum_{i \in V'} w_{ji}^{h+1,k} \quad (4.18)$$

definidas para $j \in V - \{1, k\}$ e $h = 1, \dots, Q - 1$. Adicionando para todo o j e todo o h as referidas igualdades e eliminando os termos simétricos, obtemos:

$$\sum_{h=1, \dots, Q-1} \sum_{j \in V', j \neq k} w_{1j}^{hk} - \sum_{h=2, \dots, Q} \sum_{j \in V', j \neq k} w_{jk}^{hk} = 0 \quad (4.27)$$

De seguida, consideramos a restrição (4.17) da mesma formulação:

$$\sum_{h \in H(1,j)} \sum_{j \in V'} w1_{1j}^{hk} = \sum_{h=1, \dots, Q-1} \sum_{j \in V', j \neq k} w1_{1j}^{hk} + \sum_{h=1, \dots, Q} w1_{1k}^{hk} = 1 \quad (4.17)$$

adicionando-a a $-(4.27)$ obtemos:

$$\sum_{h=1, \dots, Q} \sum_{j \in V} w1_{jk}^{hk} = 1 \quad (4.28)$$

Finalmente, obtemos a expressão desejada usando (4.26) em (4.28)

2. Restrições (4.9): $v_{fk}^{hk} = \sum_{i \in V} v_{ki}^{h+1,k}$, $h = 1, \dots, Q + 1$.

Recordemos as restrições (4.19) de $FForteCircuito_L$:

$$\sum_{i \in V} w1_{ik}^{hk} = \sum_{i \in V} w2_{ki}^{h+1,k} \quad h = 1, \dots, Q \quad (4.19)$$

substituindo, para cada h , (4.26) e (4.25) no primeiro e no segundo membro de (4.19), respectivamente, obtemos a expressão desejada.

3. Restrições (4.10): $\sum_{i \in V} v_{ij}^{hk} = \sum_{i \in V} v_{ji}^{h+1,k}$, $j \in V - \{1, k\}$, $h = 2, \dots, Q$.

Consideramos, agora, as restrições (4.20) de $FForteCircuito_L$:

$$\sum_{i \in V'} w2_{ij}^{hk} = \sum_{i \in V} w2_{ji}^{h+1,k} \quad j \neq 1, k, \quad h = 2, \dots, Q \quad (4.20)$$

Substituindo, para cada h e para cada j , (4.25) em (4.20) obtemos o resultado.

4. Restrições (4.12): $\sum_{h \in H(i,j)} v_{ij}^{hk} \leq x_{ij}$, $(i, j) \in A$, $j \neq k$

Considerem-se as restrições (4.22) de $FCircuito_L$

$$\sum_{h \in H(i,j)} (w1_{ij}^{hk} + w2_{ij}^{hk}) \leq x_{ij} \quad (4.22)$$

Usando em (4.22) as restrições de não negatividade das variáveis $w1_{ij}^{hk}$ podemos escrever:

$$\sum_{h \in H(i,j)} w 2_{ij}^{hk} \leq x_{ij} \quad (4.29)$$

Substituindo, para cada (i, j) e para cada h , (4.25) em (4.29) obtemos a expressão desejada, concluindo assim a nossa demonstração. ■

Corolário 4.3.2

$$v(\text{FForteCircuito}_L) \geq v(\text{FForteCaminho}_L).$$

Como temos vindo a referir, os limites inferiores associados aos dois tipos de modelo são fracos. Ainda assim, registamos que os limites inferiores associados a FForteCircuito_L são, para as instâncias testadas, superiores aos restantes, o que mostra existir vantagem em usar esta formulação em detrimento das restantes. Na próxima secção mostramos como fortalecê-la.

4.4 Formulação de Circuitos Combinados

Nesta secção mostramos como obter uma formulação que domina FForteCircuito através da adição de um conjunto de desigualdades válidas àquele modelo. As desigualdades que aqui introduzimos são baseadas em ideias bastante intuitivas que surgem ao observar uma solução do PRVC-PU e o conjunto dos grafos expandidos que lhe está associado.

Assim, começamos por notar que o modelo FForteCircuito inclui um conjunto de $|V| - 1$ sub-problemas definidos para cada $k \in V'$. Cada um desses sub-problemas trata o problema do circuito que visita os vértices 1 e k com, no máximo, $Q+1$ arcos de forma independente, *i.e.* não é especificada qualquer relação entre circuitos associados a vértices distintos. No entanto, ao observar a representação duma solução admissível do PRVC-PU e do conjunto de grafos expandidos que lhe está associado, constatamos que os circuitos associados a vértices duma mesma rota partilham os

mesmos arcos nas mesmas posições. Na Figura 4.3 apresentamos um exemplo que ilustra essa situação.

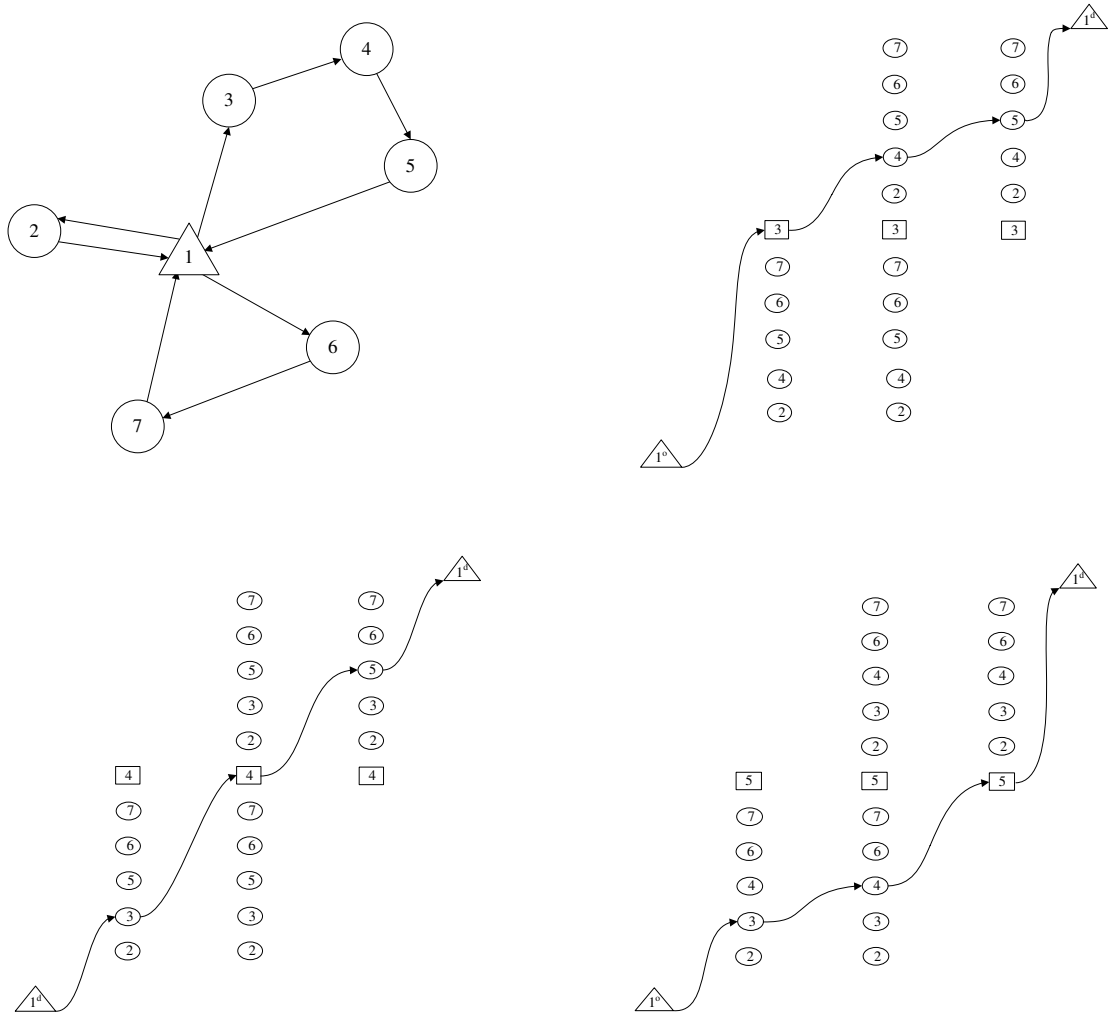


Figura 4.3: Uma solução do PRVC-PU para $n = 7$ e $Q = 3$ e a correspondente representação num grafo expandido dos circuitos associados aos vértices 3, 4 e 5.

Com base nestas observações, podemos afirmar que se um determinado arco $(i, j) \in A$ está na posição h do circuito associado a um vértice $k \in V'$, então (i, j) está na posição h dos circuitos associados aos restantes vértices visitados por essa mesma

rota. Naturalmente, uma tal rota visita i e j , pelo que podemos escrever a seguinte propriedade:

Propriedade 4.1

Seja $k \in V'$ e seja $(i, j) \in A$ tal que (i, j) é usado na posição h do circuito $1 - k - 1$. Então, (i, j) é usado na posição h dos circuitos $1 - i - 1$ e $1 - j - 1$.

Usando as variáveis $w1_{ij}^{hk}$ e $w2_{ij}^{hk}$ definidas na secção anterior podemos modelar a Propriedade 4.1 como:

$$w1_{ij}^{hk} + w2_{ij}^{hk} \leq w1_{ij}^{hj} \quad (i, j) \in A, j \neq 1, k \in V', h = 1, \dots, Q \quad (4.30)$$

e

$$w1_{ij}^{hk} + w2_{ij}^{hk} \leq w2_{ij}^{hi} \quad (i, j) \in A, i \neq 1, k \in V', h = 2, \dots, Q + 1 \quad (4.31)$$

Designamos por Formulação de Circuitos Combinados (*FCircComb*) o modelo que se obtém adicionando (4.30) e (4.31) a *FForteCircuito*.

$$\mathbf{F\ CircComb} : \min \left\{ \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} : (2.2), (2.3), (4.17), (4.18), (4.19), (4.20), (4.21), (4.22), (4.30), (4.31), (4.23), (4.24), (2.5) \right\}$$

O modo como *FCircComb* foi construída permite escrever o resultado que enunciaremos de seguida e o correspondente corolário:

Resultado 4.4.1

A formulação FCircComb domina a formulação FForteCircuito.

Corolário 4.4.1

$$v(\text{FCircComb}_L) \geq v(\text{FForteCircuito}_L).$$

Os resultados computacionais apresentados na Secção 4.5 mostram que os cortes considerados são muito fortes, verificando-se que os *gaps* lineares associados à nova formulação são, em média, 20 vezes menores do que os associados a *FForteCircuito*. Notamos, também, que apesar do aumento na complexidade da formulação (temos, agora, uma formulação $\mathcal{O}(Qn^3)$ nas variáveis e $\mathcal{O}(Qn^3)$ nas restrições), os tempos

computacionais associados são cerca de 8 vezes menores.

4.4.1 Comparação com a formulação de Picard e Queyranne Modificada

Nesta subsecção comparamos $FCircComb$ - que, como já vimos, é o melhor dos modelos associados à abordagem usada neste capítulo - com $FPQM$. Mostramos que $FCircComb$ domina $FPQM$.

Consideremos o seguinte conjunto de igualdades:

$$z_{ij}^h = w1_{ij}^{hj} \quad (i, j) \in A, j \neq 1; h \in H_{(i,j)} \quad (4.32)$$

e

$$z_{i1}^{Q+1} = w2_{i1}^{Q+1,i} \quad (i, 1) \in A \quad (4.33)$$

As igualdades apresentadas relacionam as variáveis de $FPQM$ com as variáveis de $FCircComb$ sem que se introduzam novas relações entre estas últimas. Por conseguinte, podemos adicionar (4.32) e (4.33) a $FCircComb$ sem afectar o valor obtido ao resolver a correspondente relaxação em PL.

O resultado que enunciamos de seguida relaciona os dois modelos:

Resultado 4.4.2

A formulação $FCircComb$ domina a formulação $FPQM$.

Demonstração:

Seja $CircComb_L$ o conjunto das soluções admissíveis de $FCircComb_L$ e seja PQM_L o conjunto das soluções admissíveis de $FPQM_L$.

Provamos que $Proj_{(x,z)}(CircComb_L) \subseteq PQM_L$.

Para o efeito, mostramos que o sistema de restrições (3.1) – (3.3) de $FPQM_L$ é implicado pela relaxação em PL de $FCircComb$ aumentada com (4.32) e (4.33), uma

vez que as restrições de afectação, (2.2) e (2.3), são comuns às duas formulações.

Mostremos, então, como obter cada uma das referidas restrições:

1. Restrições (3.1): $\sum_{i \in V} z_{ij}^h = \sum_{i \in V'} z_{ji}^{h+1}$, $j \in V'$, $h = 1, \dots, Q - 1$.

Recordemos as restrições (4.30) e (4.31) de $FCircuitosCombinados_L$:

$$w1_{ij}^{hk} + w2_{ij}^{hk} \leq w1_{ij}^{hj} \quad (i, j) \in A, j \neq 1, k \in V' \text{ e } h \in H_{(i,j)} \quad (4.30)$$

e

$$w1_{ij}^{hk} + w2_{ij}^{hk} \leq w2_{ij}^{hi} \quad (i, j) \in A, i \neq 1, k \in V' \text{ e } h \in H_{(i,j)} \quad (4.31)$$

e consideremos os subconjuntos das referidas restrições associados a $h = 2, \dots, Q$, escritos para $k = i$ e para $k = j$, respectivamente:

$$w2_{ij}^{hi} \leq w1_{ij}^{hj} \quad (i, j) \in A, i \neq 1; h = 2, \dots, Q \quad (4.34)$$

e

$$w1_{ij}^{hj} \leq w2_{ij}^{hi} \quad (i, j) \in A, j \neq 1; h = 2, \dots, Q. \quad (4.35)$$

Conjugando (4.34) e (4.35) obtemos:

$$w1_{ij}^{hj} = w2_{ij}^{hi} \quad (i, j) \in A, i, j \neq 1; h = 2, \dots, Q. \quad (4.36)$$

Recordemos, agora, as restrições (4.19) de $FCircComb_L$:

$$\sum_{i \in V} w1_{ik}^{hk} = \sum_{i \in V} w2_{ki}^{h+1,k} \quad k \in V'; h = 1, \dots, Q. \quad (4.19)$$

Substituindo, para $h = 1, \dots, Q - 1$, (4.36) no segundo membro de (4.19), obtemos (recorde-se que para cada $k \in V'$ as variáveis $w2_{k1}^{hk}$ só estão definidas se $h = Q + 1$):

$$\sum_{i \in V} w1_{ik}^{hk} = \sum_{i \in V'} w1_{ki}^{h+1,i} \quad k \in V'; h = 1, \dots, Q - 1. \quad (4.37)$$

Finalmente, usando (4.32) em (4.37) obtemos a expressão desejada.

2. Restrições (3.2): $\sum_{i \in V} z_{ij}^Q = z_{j1}^{Q+1}, j \in V'$.

Consideremos, de novo, as restrições (4.19) de $FCircComb_L$:

$$\sum_{i \in V} w1_{ik}^{hk} = \sum_{i \in V} w2_{ki}^{h+1,k} \quad k \in V'; h = 1, \dots, Q. \quad (4.19)$$

Escrevendo (4.19) para $h = Q$, tendo em conta que $w2_{ki}^{Q+1,k}$ só está definida para $i = 1$ e substituindo (4.32) e (4.33) no primeiro e no segundo membro da igualdade, respectivamente, obtemos a expressão desejada.

3. Restrições (3.3): $\sum_{h \in H(i,j)} z_{ij}^h = x_{ij}, (i, j) \in A$.

Dividimos a demonstração do ponto 3 em duas partes: em 3.1. consideramos os arcos $(i, j) \in A$ tais que $j \neq 1$ e em 3.2. consideramos os arcos $(i, 1) \in A$.

$$3.1. \text{ Restrições (3.3.1) } \sum_{h \in H(i,j)} z_{ij}^h = x_{ij}, (i, j) \in A, j \neq 1.$$

Recordamos que na demonstração do Resultado 4.3.2 verificámos que as igualdades:

$$\sum_{i \in V} \sum_{h \in H(i,j)} w1_{ij}^{hj} = 1 \quad j \in V'. \quad (4.28)$$

são implicadas pela relaxação em PL de $FForteCircuito$. Pelo Resultado 4.4.1 podemos concluir que o mesmo conjunto de restrições também é implicado pela relaxação em PL de $FCircComb$.

Consideremos, agora, as restrições de afectação (2.2):

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1 \quad j \in V'. \quad (2.2)$$

e o sub-conjunto das restrições de ligação de $FCircComb_L$ associadas aos arcos $(i, j) \in A$ com $j \neq 1$ e a $k = j$:

$$\sum_{h \in H(i,j)} w1_{ij}^{hj} \leq x_{ij} \quad (i, j) \in A, j \neq 1. \quad (4.22)$$

conjugando, para cada $j \in V'$, (4.28) com (2.2) e com (4.22) obtemos, então:

$$\sum_{h \in H(i,j)} w1_{ij}^{hj} = x_{ij} \quad (i, j) \in A, j \neq 1. \quad (4.38)$$

Finalmente, usando (4.32) em (4.38) obtemos a expressão desejada.

3.2. Restrições (3.3.2): $z_{i1}^{Q+1} = x_{i1}, (i, 1) \in A$.

De modo análogo, começamos notar que fixando um dado vértice $j \in V'$ e adicionando para todo o $h = 1, \dots, Q+1$ as restrições (4.17) – (4.19) de $FCircComb_L$ obtemos a restrição simétrica de (4.28):

$$\sum_{i \in V} \sum_{h \in H(i,j)} w2_{ji}^{hj} = 1 \quad j \in V'. \quad (4.39)$$

Seguindo o procedimento anterior, conjugando (4.39) com as restrições de afecção (2.3):

$$\sum_{i \in V} x_{ji} = 1 \quad j \in V'. \quad (2.3)$$

e com o sub-conjunto das restrições de ligação de $FCircComb_L$ associadas aos arcos $(i, j) \in A$ com $i \neq 1$ e a $k = i$:

$$\sum_{h \in H(i,j)} w2_{ij}^{hi} \leq x_{ij} \quad (i, j) \in A, i \neq 1. \quad (4.22)$$

obtemos:

$$\sum_{h \in H_{(i,j)}} w2_{ij}^{hi} = x_{ij} \quad (i, j) \in A, i \neq 1. \quad (4.40)$$

No caso particular em que $j = 1$, temos $H_{(i,1)} = \{Q + 1\}$, pelo que (4.40) pode ser escrita como:

$$w2_{i1}^{Q+1,i} = x_{i1} \quad (i, 1) \in A. \quad (4.41)$$

Finalmente, usando (4.33) em (4.41) obtemos a expressão desejada e concluímos a demonstração. ■

Como veremos na Secção 4.5, os *gaps* lineares associados a *FCircComb* são, em média, consideravelmente menores dos que os associados a *FPQM_L*, muito embora essa redução seja conseguida a expensas de um aumento muito significativo do esforço computacional. Na próxima secção apresentamos um conjunto de desigualdades definidas no espaço das variáveis de *FPQM* implicadas por *FCircComb_L*. Este conjunto de restrições, se adicionado a *FPQM*, melhora de forma expressiva a qualidade média dos *gaps* lineares que lhe estão associados, sem que haja um aumento tão acentuado nos tempos registados.

4.4.1.1 Desigualdades implicadas no espaço das variáveis com dependências temporais pela relaxação em PL da Formulação de Circuitos Combinados

Seguindo a linha indicada na Subsecção 3.2.1 estudamos, agora, algumas desigualdades implicadas pela relaxação em PL de *FCircComb* no espaço das variáveis de *FPQM* que, como vimos, é dominada pelo primeiro modelo. Resultados computacionais a apresentar na Secção 4.5 mostram que a adição de sub-conjuntos das referidas desigualdades a *FPQM* resulta numa diminuição muito significativa do *gap* linear associado.

Considere-se, então, $k \in V'$ e recorde-se o conjunto das restrições (4.18) de $FCircComb$, que lhe estão associadas:

$$\sum_{i \in V} w1_{ij}^{hk} = \sum_{i \in V'} w1_{ji}^{h+1,k} \quad j \in V', j \neq k, h = 1, \dots, Q-1 \quad (4.18)$$

Tome-se um determinado j . Devido às restrições de não-negatividade das variáveis $w1_{ij}^{hk}$, podemos escrever:

$$w1_{jk}^{h+1,k} \leq \sum_{i \in V} w1_{ij}^{hk} \quad h = 1, \dots, Q-1 \quad (4.42)$$

Recordem-se, agora, as restrições (4.30) de $FCircComb$:

$$w1_{ij}^{hk} + w2_{ij}^{hk} \leq w1_{ij}^{hj} \quad k \in V', (i, j) \in A, i \neq k, j \neq 1, h \in H_{(i,j)} \quad (4.30)$$

Donde se obtém:

$$w1_{ij}^{hk} \leq w1_{ij}^{hj} \quad (i, j) \in A, j \neq 1, k \in V', h \in H_{(i,j)} \quad (4.43)$$

Adicionando, no índice i , para $i \in V - \{k\}$, o sub-conjunto das desigualdades (4.43) associadas a cada combinação possível dos índices j , k e h , obtemos (recorde-se que as variáveis $w1_{ij}^{hk}$ não estão definidas para $i = k$):

$$\sum_{i \in V} w1_{ij}^{hk} \leq \sum_{i \in V - \{k\}} w1_{ij}^{hj} \quad j, k \in V', h \in H_{(i,j)} \quad (4.44)$$

Conjugando as desigualdades (4.42) e (4.44), podemos escrever:

$$w1_{jk}^{h+1,k} \leq \sum_{i \in V - \{k\}} w1_{ij}^{hj} \quad h = 1, \dots, Q \quad (4.45)$$

Finalmente, usando (4.32) na expressão anterior, chegamos a:

$$z_{jk}^{h+1} \leq \sum_{i \in V - \{k\}} z_{ij}^h \quad j \neq 1, h = 1, \dots, Q-1 \quad (4.46)$$

As desigualdades que acabámos de obter garantem que se um arco (j, k) está numa dada posição, então, em j incide um arco que está na posição anterior e que não provém de k . Desta forma, as restrições (4.46) impedem, para cada $k \in V'$, a presença de sub-circuitos de comprimento 2 na solução do sub-problema associado às variáveis z_{ij}^h em $FPQM$.

Refira-se que este conjunto de igualdades era já conhecido da literatura, sendo usadas, com bons resultados, como desigualdades de corte sobre a formulação de Picard e Queyranne em trabalhos vários realizados quer no âmbito do PCV quer no âmbito doutros problemas relacionados (a esse propósito veja-se, por exemplo, Costa et al. (2009) ou Abeledo et al. (2010)).

O procedimento usado para obter (4.46) mostra que este conjunto de desigualdades está na projecção no espaço das variáveis z_{ij}^h do conjunto das soluções admissíveis de $FCircComb_L$. O mesmo tipo de procedimento pode ser usado para obter uma generalização das desigualdades (4.46) permitindo escrever o resultado que apresentamos de seguida e que demonstramos no Apêndice B.

Resultado 4.4.3

Seja $k \in V'$. As desigualdades:

$$\sum_{h=1, \dots, Q} \sum_{i \notin S_k^{h-1}} \sum_{j \in S_k^h} z_{ij}^h \geq 1 \quad S_k^h \subseteq V' \text{ com } k \in S_k^h \text{ para } h = 1, \dots, Q \text{ e } S_k^0 = \{1\} \quad (4.47)$$

são implicadas pela relaxação em Programação Linear de $FCircComb$.

Facilmente se verifica que para cada $\{k, j\} \subset V'$ e para cada $h = 1, \dots, Q$, as desigualdades (4.46) são as desigualdades (4.47) escritas para $S_k^h = \{k, j\}$ e $S_k^p = \{k\}$, se $p \neq h$, $p = 1, \dots, Q$.

O conjunto de desigualdades que acabámos de introduzir garante a existência de um caminho 1 - k definido nas variáveis z_{ij}^h . Observando a Figura 4.4 entendemos

melhor esta afirmação: qualquer caminho $1^o - 1^d$ que inclua, pelo menos, um dos arcos representados visita, necessariamente, k . Na figura representamos uma instância do PRVC-PU com $n = 5$ e $Q = 4$ e consideramos $S_k^1 = \{k\}$, $S_k^2 = \{k, j\}$, $S_k^3 = \{k, j\}$ e $S_k^4 = \{k\}$

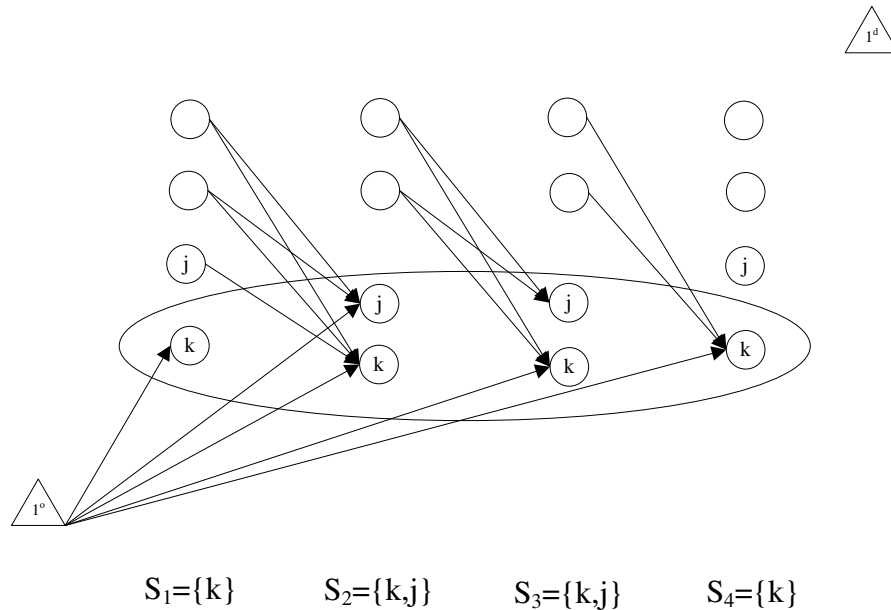


Figura 4.4: Representação esquemática da actuação da desigualdade (4.47) para o caso em que $n = 5$ e $Q = 4$. Indicamos os arcos $(i, j) \in A$ tais que $i \notin S^{h-1}$ e $j \in S^h$ para $h = 1, \dots, Q$.

É interessante comparar, para cada $k \in V'$, a desigualdade (4.47) com a igualdade:

$$\sum_{i \in V} \sum_{h=1, \dots, Q} z_{ik}^h = 1 \tag{4.48}$$

que obtemos a partir das restrições (3.3) e (2.2) de $FPQM$. Ambas as restrições garantem que o vértice k é visitado mas, exceptuando o caso em que $S_k^h = \{k\}$, para $h = 1, \dots, Q$, não há relação de dominância entre (4.47) e (4.48). Então, podemos fortalecer $FPQM$ adicionando-lhe as restrições (4.47). Estas desigualdades são, no entanto, em número exponencial. Assim, consideramos o modelo $FPQM$ aumentado

com um sub-conjunto das desigualdades (4.47) que Abeledo et al. (2010) mostram definir facetas do poliedro associado ao envolvente convexo do conjunto dos vectores de incidência das soluções do PCVDT no espaço das variáveis z_{ij}^h .

Adicionando (4.46) ao modelo $FPQM$ obtemos uma versão fortalecida do mesmo, que denotamos por $FPQM^+$. Na Secção 4.5 apresentamos resultados computacionais que mostram a redução no valor do *gap* linear médio associado a $FPQM$ conseguida através da adição das desigualdades (4.46) ao modelo. Estes resultados revelam que as referidas restrições têm um peso muito significativo na diferença entre os modelos $FPQM$ e $FForteCircuito$. A próxima subsecção é dedicada a esta formulação.

4.4.1.2 Formulação de Picard e Queyranne Modificada II

Seja Formulação de Picard e Queyranne Modificada II ($FPQM^+$) a formulação que se obtém adicionando (4.46) a $FPQM$:

$$\mathbf{F PQM}^+ : \min \left\{ \sum_{i,j \in V} c_{ij} x_{ij} : (2.2), (2.3), (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (4.46), (2.5) \right\}$$

$FPQM$ e $FPQM^+$ diferem unicamente pela presença de um conjunto extra de desigualdades válidas em $FPQM^+$, pelo que podemos enunciar o resultado seguinte e o correspondente corolário:

Resultado 4.4.4

A formulação $FPQM^+$ domina a formulação $FPQM$.

Corolário 4.4.2

$$v(FPQM_L^+) \geq v(FPQM_L).$$

Os resultados computacionais a apresentar na Secção 4.5 mostram o impacto da adição de (4.46) a $FPQM$. As reduções no valores dos *gaps* lineares associados àquela formulação são significativos evidenciando, mais uma vez, o que se afirmou no Capítulo 1 acerca da utilidade do uso de técnicas de projecção no estudo e idealização de modelos em PLI para este e outros problemas: através deste conjunto de técnicas fortalecemos uma formulação, mantendo a sua complexidade.

4.4.2 Comparação com outras formulações

Nesta subsecção comparamos o modelo $FCircComb$ com $FFDesagregado$ e com $FCorte$.

Consideremos a solução admissível de $FPQM_L$ que representámos na Figura 3.5 e que usámos na demonstração dos Resultados 3.3.1 e 3.3.2. Observando que a mesma solução é admissível para a relaxação em PL de $FCircComb$ (na Tabela 4.1 indicamos os valores das variáveis $w1_{ij}^{hk}$ e $w2_{ij}^{hk}$ que lhe estão associados) e tendo em conta o Resultado 4.4.2, concluímos que não existe relação de dominância entre $FCircComb$ e $FFDesagregado$ nem entre $FCircComb$ e $FCorte$.

Tabela 4.1: Valores das variáveis $w1_{ij}^{hk}$ e $w2_{ij}^{hk}$ associadas à solução representada na Fig. 3.5

		$w1_{ij}^{hk}$																	
		2			3			4			5			6			7		
k	h	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Arco																			
(i, j)																			
(1,2)		1			1			2/3			1/3								
(1,5)								1/3				1/3	1/3						
(1,6)														1					1
(2,3)					1			2/3			1/3								
(3,4)									2/3										
(3,5)													1/3						
(4,5)													1/3						
(5,4)								1/3											
(6,7)																			1

		$w2_{ij}^{hk}$																	
		2			3			4			5			6			7		
k	h	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4
Arco																			
(i, j)																			
(2,3)		1																	
(3,4)			2/3			2/3													
(3,5)			1/3			1/3													
(5,4)											1/3								
(4,5)								1/3				1/3							
(6,7)															1				
(4,1)			2/3			2/3			1			1/3							
(5,1)			1/3			1/3						2/3							
(7,1)																1			1

Os valores não apresentados são nulos.

Posto isto, podemos, então, escrever os resultados que se enunciam de seguida:

Resultado 4.4.5

Não há relação de dominância entre as formulações $FCircComb$ e $FFDesagregado$.

e

Resultado 4.4.6

Não há relação de dominância entre as formulações $FCircComb$ e $FCorte$.

A terminar, observamos que apesar dos resultados computacionais apresentados na Secção 4.5 indicarem que $FCircComb_L$ produz, em média, melhores *gaps* lineares do que $FFDesagregado$, o Resultado 4.4.5 justifica o interesse do estudo que apresentamos no próximo capítulo. Observamos, também, que pelo Resultado 4.4.6 concluímos que as desigualdades 2.6 não estão incluídas na projecção no espaço das variáveis x_{ij} de $FCircComb_L$. No entanto, os limites inferiores obtidos com $FCircComb_L$ e com a versão restrita do algoritmo de *branch and cut* de Lysgaard et al. (2004) indicam que $FCircComb_L$ produz, em média, limites inferiores de melhor (ou igual) qualidade. A excepção verifica-se em instâncias de pequena dimensão, associadas pequenos valores de Q , conforme veremos na Secção 4.5.

4.5 Resultados computacionais

Nesta secção apresentamos uma comparação computacional entre as formulações introduzidas neste capítulo e os modelos $FFAgregado^+$, $FFDesagregado$ e $FPQM$. Para tal, usamos as quatro famílias de instâncias, duas euclidianas (TC e TE) e duas aleatórias (TRS e TRA), descritas no Capítulo 2.

Mais uma vez, usámos estas famílias de instâncias para $n = 20$ e $n = 40$ e com $Q = 3$ e $Q = 5$ e considerámos 5 testes para cada combinação possível. Na Tabela 4.5 apresentamos os valores médios dos *gaps* associados às relaxações lineares dos modelos estudados bem como o tempo de CPU, em segundos, consumido na determinação

da correspondente solução ótima.

Tal como no capítulo anterior, todos os resultados computacionais referentes aos valores das relaxações em PL dos vários modelos apresentados neste trabalho foram obtidos usando o algoritmo *Barrier* do CPLEX 11.2, num computador pessoal com um processador INTEL Core2Duo a 1,33GHz com 8Gb de RAM.

Apresentamos, também, na Tabela 4.5 uma comparação entre os resultados obtidos com os novos modelos e os resultados das duas versões do algoritmo de Lysgaard et al. (2004) já referenciadas.

Da análise das duas tabelas destacamos o seguinte:

- Os *gaps* lineares associados às formulações *FCaminho* e *FCircuito* indicam de forma clara que aqueles modelos produzem limites inferiores de má qualidade, independentemente do tipo de instância considerada. Não obstante, refira-se que os limites inferiores associados a *FCircuito* são de melhor qualidade do que os associados a *FCaminho*, indicando que, ao contrário do que sucede para o PCV, existe uma diferença nos modelos de fluxo desagregado associados a cada uma daquelas abordagens;
- Comparando os *gaps* lineares associados às formulações *FForteCaminho* e *FCaminho* e às formulações *FForteCircuito* e *FCircuito* verificamos uma vantagem significativa no uso de modelos de fluxo com dependências temporais face aos modelos de fluxo desagregado. Observamos, também, que, em média, os limites inferiores associados a *FForteCircuito* são substancialmente melhores do que os valores correspondentes obtidos através de *FForteCaminho*. Assim, apesar dos valores registados serem muito inferiores aos valores obtidos com as formulações da literatura e com *FPQM*, estes resultados merecem algum destaque por constituírem um indicador das diferenças associadas a cada uma das abordagens e a cada um dos tipos de modelo;

- A comparação de *FForteCircuito* com *FCircComb* indica uma redução média relativa nos valores dos correspondentes *gaps* lineares de mais de 90%. Verificamos, também, que a resolução de *FCircComb_L* requer menores tempos de CPU do que *FCircuitoForte*, apesar da maior complexidade computacional;
- Por seu turno, a comparação de *FPQM* com *FCircComb* mostra uma redução média relativa nos valores dos correspondentes *gaps* lineares de aproximadamente 50%. Essa redução distribuiu-se de forma muito diferenciada pelos vários tipos de instâncias, tendo uma expressão reduzida nas instâncias aleatórias assimétricas e muito significativa nas instâncias simétricas (euclidianas e aleatórias). Quanto ao esforço computacional, verificamos que a resolução de *FCircComb_L* requer maiores tempos de CPU e que essa diferença se acentua com o aumento da dimensão da instância;
- A comparação de *FPQM⁺* com *FCircComb* mostra que se consegue uma aproximação muito significativa entre os resultados obtidos com os modelos *FPQM* e *FCircComb* adicionando as desigualdades (4.46) ao primeiro. Para $Q = 3$ obtemos o mesmo *gap* linear em todas as instâncias simétricas e para $Q = 5$ temos uma redução média de 60%.

Em suma, os resultados destacam os modelos *FPQM⁺* e *FCircComb* como os mais competitivos dentro dos modelos introduzidos neste capítulo e indicam, também, haver uma vantagem clara na utilização daqueles modelos em detrimento dos modelos compactos propostos na literatura. Comparando *FPQM⁺* com *FCircComb* verificamos existirem diferenças consideráveis nos tempos de CPU associados à resolução das relaxações em PL de cada um dos modelos. Desta forma, o modelo *FPQM⁺* afigura-se particularmente atractivo no caso das instâncias de maior dimensão.

Por outro lado, a Tabela 4.5 permite comparar os *gaps* lineares associados aos nossos modelos com os resultados obtidos através das duas versões do algoritmo de Lysgaard et al. (2004) já mencionadas. Os resultados mostram que a versão restrita do referido algoritmo originou limites inferiores melhores que os produzidos através de *FPQM_L⁺* e *FCircComb_L* apenas nas instâncias de menor dimensão e que os limites

inferiores obtidos através da versão completa são, em média, os de melhor qualidade (registamos apenas um caso ($n = 40$ e $Q = 5$) em que o limite inferior produzido resolvendo $FCircComb_L$ é de melhor qualidade).

Tabela 4.2: Resultados computacionais obtidos através das formulações compactas apresentadas Capítulo 4 e comparação com uma selecção de alguns dos modelos introduzidos nos capítulos 2 e 3.

	FFAgreg.+	FFDesg.	FPQM	FCam.	FFCam.	FCir.	FFCir.	FCircComb	FPQM+	
$Q = 3$	TC_20	4,49 (0,01)	3,82 (0,52)	4,49 (0,00)	35,75 (1,08)	31,65 (4,10)	21,71 (1,83)	19,17 (6,31)	2,19 (0,85)	2,19 (0,62)
	TE_20	3,67 (0,01)	3,50 (0,57)	3,67 (0,00)	59,08 (1,23)	55,94 (4,35)	34,89 (2,01)	32,88 (6,69)	2,31 (0,89)	2,31 (0,65)
	TRS_20	4,57 (0,01)	4,57 (0,57)	4,57 (0,00)	57,60 (1,18)	54,35 (4,33)	34,06 (2,00)	28,52 (6,66)	2,01 (0,86)	2,01 (0,63)
	TRA_20	5,32 (0,01)	5,08 (0,56)	2,89 (0,00)	48,90 (0,39)	44,99 (4,25)	19,81 (1,94)	13,86 (6,55)	2,85 (0,86)	2,89 (0,63)
	TC_40	3,22 (0,04)	2,85 (20,08)	3,22 (0,02)	50,20 (8,03)	46,63 (146,58)	28,65 (41,64)	26,52 (252,73)	1,09 (32,02)	1,09 (20,82)
	TE_40	2,96 (0,04)	1,92 (21,14)	2,96 (0,02)	64,91 (8,46)	63,78 (151,17)	44,66 (42,29)	41,88 (260,63)	0,65 (31,02)	0,65 (20,16)
	TRS_40	2,46 (0,05)	2,46 (21,46)	2,46 (0,02)	63,33 (8,59)	61,45 (131,79)	38,59 (42,93)	37,24 (227,22)	1,25 (32,63)	1,32 (21,21)
	TRA_40	5,80 (0,06)	5,63 (20,09)	2,88 (0,02)	54,41 (8,04)	53,36 (140,49)	25,58 (40,18)	24,05 (242,22)	2,60 (33,66)	2,88 (21,88)
	TC_20	8,17 (0,02)	5,06 (0,56)	7,06 (0,00)	23,76 (0,22)	20,99 (31,65)	19,50 (1,11)	16,60 (48,70)	1,70 (3,17)	3,09 (2,31)
	TE_20	5,61 (0,01)	4,30 (0,68)	3,72 (0,00)	47,75 (0,27)	46,05 (31,97)	32,64 (1,36)	30,46 (49,18)	0,39 (3,15)	0,82 (2,30)
	TRS_20	7,37 (0,02)	6,09 (0,57)	5,23 (0,00)	48,68 (0,23)	46,76 (28,54)	33,12 (1,14)	30,62 (43,91)	0,64 (2,92)	0,98 (2,13)
	TRA_20	8,79 (0,01)	8,55 (0,54)	3,48 (0,00)	43,05 (0,22)	40,93 (31,45)	25,79 (1,08)	23,01 (48,38)	2,87 (2,87)	3,09 (2,10)
TC_40	6,87 (0,05)	5,31 (19,70)	4,94 (0,04)	38,87 (7,88)	35,36 (1526,13)	29,75 (102,46)	25,74 (2631,26)	1,75 (128,22)	1,95 (83,35)	
TE_40	5,40 (0,05)	4,67 (24,58)	2,88 (0,05)	57,52 (9,83)	54,78 (1662,54)	46,45 (127,84)	43,02 (2866,44)	0,85 (141,86)	1,10 (92,21)	
TRS_40	5,79 (0,06)	4,83 (19,95)	4,16 (0,05)	58,06 (7,98)	54,51 (1415,09)	47,49 (103,73)	43,58 (2439,81)	0,68 (137,89)	0,90 (89,63)	
TRA_40	7,08 (0,06)	6,59 (19,32)	2,52 (0,04)	49,42 (7,73)	45,14 (1389,14)	37,27 (100,46)	31,96 (2395,07)	2,03 (148,14)	2,46 (96,29)	

4.6 Conclusões e notas finais

Neste capítulo exploramos uma abordagem na construção de modelos para o PRVC-PU onde recorreremos à utilização de variáveis de fluxo desagregado com e sem dependências temporais para modelar as restrições ao comprimento da rota. A existência de dependências temporais permite, como já foi referido, garantir as restrições ao

Tabela 4.3: Resultados computacionais relativos às versões restrita e completa do algoritmo de Lysgaard et al. (2004) e comparação com os resultados obtidos através de uma selecção das formulações compactas apresentadas neste trabalho.

Instância	FFAgreg.+	FFDesg.	FPQM	FPQM+	FCircComb	Lysgaard I	Lysgaard II
TC_20_1.3	3,33	2,87	3,33	0,90	0,90	0,57	0,00
TE_20_1.3	3,25	3,23	3,25	1,63	1,63	0,71	0,00
TC_20_1.5	7,43	3,94	5,84	2,77	1,92	0,00	0,00
TE_20_1.5	6,33	4,58	4,51	1,66	0,06	0,00	0,00
TC_40_1.3	2,38	2,21	2,38	0,71	0,71	1,79	0,00
TE_40_1.3	5,96	1,48	5,96	0,33	0,33	3,60	0,12
TC_40_1.5	8,01	6,04	5,66	2,47	2,15	1,42	0,26
TE_40_1.5	4,83	4,71	1,51	0,28	0,16	3,22	0,84

comprimento da rota de forma implícita. Por outro lado, a utilização de modelos de fluxo desagregado permite associar um circuito a cada vértice e garantir, assim, a aplicação de um dado conjunto de restrições a cada $k \in V'$.

Desta abordagem resultaram 5 novos modelos para o problema. Os modelos introduzidos foram comparados entre si e com as formulações da literatura, teórica e computacionalmente. A Figura 4.5 sintetiza as relações de dominância demonstradas.

Os resultados computacionais apresentados na Secção 4.5 permitiram ter uma medida das distâncias entre as várias formulações e identificar $FPQM^+$ e $FCircComb$ como os modelos mais competitivos, em termos da produção de limites inferiores.

Registamos, ainda, que apesar de termos estudado um número de modelos que produzem, em média, *gaps* lineares substancialmente inferiores aos produzidos pelo modelo *FFDesagregado*, não conseguimos idealizar um modelo que o domine.

A finalizar, referimos que grande parte dos temas abordados neste capítulo estão publicados em Godinho et al. (2008) e Godinho et al. (2011a).

Capítulo 5

Formulações em PLI envolvendo restrições de circuito e de capacidade para o PRVC-PU

Neste capítulo introduzimos um terceiro e último conjunto de formulações em PLI para o PRVC-PU. Fundamentamos a abordagem usada na construção dos novos modelos com base no que observámos acerca de *FFDesagregado* e de *FCircComb* na última secção. Com efeito, apesar dos testes computacionais indicarem um decréscimo no valor médio dos *gaps* lineares associados de 3,97% para 1,37%, no caso das instâncias euclidianas, e de 5,47% para 1,86%, no caso das instâncias aleatórias, o Resultado 4.4.5, mostra que não existe relação de dominância entre as duas formulações. Então, há informação em *FFDesagregado* que pode ser usada para fortalecer *FCircComb*. Nas próximas secções analisamos as diferenças entre os dois modelos e indicamos como incorporar essa informação em *FCircComb* para obter duas novas formulações que dominam os restantes modelos compactos apresentados neste trabalho.

5.1 Restrições de Capacidade e de Roteamento

Começamos, então, por analisar os modelos *FFDesagregado* e *FCircComb* quanto à abordagem usada para modelar as restrições de cardinalidade das rotas de *FEsquema*, restrições (2.4):

Em *FFDesagregado* as restrições (2.4) são asseguradas limitando o valor do fluxo que atravessa um arco com origem no depósito a Q . Tendo em conta que é enviada uma unidade de fluxo do depósito para cada um dos restantes vértices em V' , garantimos, assim, que aqueles se distribuem por componentes com origem no depósito e com, no máximo, Q vértices.

No caso de *FCircComb* garantimos que as restrições (2.4) são observadas ao impor que cada vértice em V' está incluído num circuito com origem no depósito e comprimento não superior a $Q+1$. Consequentemente, um tal circuito visita, no máximo, Q vértices, para além do depósito.

Cada uma destas abordagens traduz uma forma diferente de "olhar" o PRVC-PU: enquanto que o primeiro modelo se baseia numa estrutura que associamos a problemas com restrições de capacidade, a segunda baseia-se numa estrutura que associamos a problemas de roteamento. Conjugando estas observações com o Resultado 4.4.5 parece evidente que escrevendo um modelo que reúna as duas abordagens conseguiremos obter ganhos face aos modelos associados a cada uma delas tomada individualmente.

Assim, na próxima secção introduzimos uma formulação que usa as restrições de capacidade como cortes sobre *FCircComb* (que, como já vimos é o mais forte dos modelos associados à segunda abordagem) e mostramos que o novo modelo domina todas as formulações compactas propostas e/ou analisadas neste trabalho. Letchford e Salazar-Gonzalez (2006) sugerem um modelo que usa uma abordagem semelhante à que aqui descrevemos, escrito usando as variáveis de fluxo desagregado. No entanto, os autores não mencionam resultados (teóricos ou computacionais) que permitam avaliar a formulação.

5.2 Formulação de Circuito e Capacidade

Como referimos, esta secção é dedicada ao desenvolvimento de uma formulação que combina os modelos *FCircComb* e *FFDesagregado*.

Começemos, então, por escrever um conjunto de igualdades que relaciona as variáveis das duas formulações:

$$y_{ij}^k = \sum_{h \in H(i,j)} w1_{ij}^{hk} \quad (i, j) \in A, j \neq 1, k \in V' \quad (5.1)$$

Estas igualdades indicam que um determinado arco $(i, j) \in A$ é usado para transportar fluxo para um vértice $k \in V'$ se e só se é usado nalguma posição do caminho 1 - k .

Usando (5.1) nas restrições de capacidade de *FFDesagregado*, restrições (2.20) e (2.21):

$$\sum_{k \in V'} y_{1j}^k \leq Qx_{1j} \quad (1, j) \in A \quad (2.20)$$

$$\sum_{k \in V'} y_{ij}^k \leq (Q - 1)x_{ij} \quad (i, j) \in A, i, j \neq 1 \quad (2.21)$$

chegamos a:

$$\sum_{k \in V'} \sum_{h \in H(1,j)} w1_{1j}^{hk} \leq Qx_{1j} \quad (1, j) \in A \quad (5.2)$$

$$\sum_{k \in V'} \sum_{h \in H(i,j)} w1_{ij}^{hk} \leq (Q - 1)x_{ij} \quad (i, j) \in A, i, j \neq 1 \quad (5.3)$$

Desta forma, obtivemos um conjunto de desigualdades que modelam as restrições de capacidade de *FFDesagregado* usando as variáveis de *FCircComb*, o que vai permitir incluir aquelas restrições em *FCircComb* e cumprir o propósito descrito na secção anterior.

Designamos, então, por Formulação de Circuito e Capacidade (*FCircCap*) o modelo que se obtém adicionando (5.2) e (5.3) a *FCircComb*:

$$\mathbf{F\ CircCap} : \min\left\{ \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}x_{ij} : (2.2), (2.3), (4.17), (4.18), (4.19), (4.20), (4.21), (4.22), (4.30), (4.31), (5.2), (5.3), (4.23), (4.24), (2.5) \right\}$$

Mostramos de seguida que $FCircCap$ domina $FCircComb$ e $FFDesagregado$. Conjugando esses dois resultados com o facto das formulações $FFDesagregado$ e $FCircComb$ serem as únicas formulações não dominadas dentro das formulações compactas estudadas até ao momento, concluímos, finalmente, que $FCircCap$ domina todas as formulações compactas já apresentadas.

A forma como $FCircCap$ foi obtida permite escrever o Resultado 5.2.1 e o correspondente corolário:

Resultado 5.2.1

A formulação $FCircCap$ domina a formulação $FCircComb$.

Corolário 5.2.1

$$v(FCircCap_L) \geq v(FCircComb_L).$$

Comparamos, agora, $FCircCap$ com $FFDesagregado$. Para tal, observamos que as igualdades (5.1) não implicam relações entre as variáveis $w1_{ij}^{hk}$, pelo que a sua adição a $FCircCap$ não afecta o valor obtido ao resolver a correspondente relaxação em PL.

Resultado 5.2.2

A formulação $FCircCap$ domina a formulação $FFDesagregado$.

Demonstração:

Seja $CircCap_L$ o conjunto das soluções admissíveis de $FCircCap_L$ e seja $FDesagregado_L$ o conjunto das soluções admissíveis de $FFDesagregado_L$.

Seguindo o procedimento habitual, demonstramos o resultado mostrando que $Proj_{(x,y)}(CircCap_L) \subseteq FDesagregado_L$.

Para o efeito, provamos que os sistemas de restrições (2.17) – (2.18) e (2.20) – (2.22) de $FFDesagregado_L$ são implicados pela relaxação em PL de $FCircCap$ aumentada com (5.1), uma vez que, como já foi observado, (2.19) é redundante na relaxação em PL de $FFDesagregado$ e que as restrições de afectação, (2.2) e (2.3), são comuns às duas formulações.

Nos pontos 1 a 4 concretizamos a nossa prova, mostrando como obter cada uma das referidas restrições combinando, de forma adequada, subconjuntos de restrições de $FCircCap_L$:

1. Restrições (2.17): $\sum_{j \in V} y_{1j}^k = 1, k \in V'$.

Recordamos as restrições (4.17) de $FCircCap_L$:

$$\sum_{h \in H(1,j)} \sum_{j \in V} w_{1j}^{hk} = 1 \quad k \in V' \quad (4.17)$$

Usando, para cada $k \in V'$, (5.1) em (4.17) obtemos a expressão desejada.

2. Restrições (2.18): $\sum_{i \in V} y_{ij}^k - \sum_{i \in V} y_{ji}^k = 0, j, k \in V', j \neq k$.

Consideremos, agora, as restrições (4.18) de $FCircCap_L$:

$$\sum_{i \in V} w_{ij}^{hk} = \sum_{i \in V} w_{ji}^{h+1,k} \quad j, k \in V', j \neq k, h = 1, \dots, Q-1 \quad (4.18)$$

Para cada par $j, k \in V'$ tais que $j \neq k$ adicionamos as restrições (4.18) que lhe estão associadas, no índice h , para $h = 1, \dots, Q-1$ de onde obtemos:

$$\sum_{h=1, \dots, Q-1} \sum_{i \in V} w_{ij}^{hk} = \sum_{h=2, \dots, Q} \sum_{i \in V} w_{ji}^{hk} \quad (5.4)$$

que, tendo em conta as definições das variáveis $w1_{ij}^{hk}$ e dos conjuntos $H_{(i,j)}$, pode ser reescrita como:

$$\sum_{h \in H_{(i,j)}} \sum_{i \in V} w1_{ij}^{hk} = \sum_{h \in H_{(i,j)}} \sum_{i \in V} w1_{ji}^{hk} \quad (5.5)$$

Finalmente, substituindo (5.1) em (5.5), obtemos a expressão desejada.

3. Restrições (2.20) e (2.21):

$$\sum_{k \in V} y_{1j}^k \leq Qx_{1j} \quad (1, j) \in A \quad (2.20)$$

$$\sum_{k \in V} y_{ij}^k \leq (Q-1)x_{ij} \quad (i, j) \in A, i, j \neq 1 \quad (2.21)$$

Consideremos as restrições (5.2) de $FCircCap_L$:

$$\sum_{k \in V'} \sum_{h \in H_{(1,j)}} w1_{1j}^{hk} \leq Qx_{1j} \quad (5.2)$$

usando (5.1) em (5.2), obtemos a expressão desejada.

Por seu turno, (2.21) é obtida a partir de (5.3) aplicando o mesmo procedimento.

4. Restrições (2.22): $y_{ij}^k \leq x_{ij}$ ($(i, j) \in A, j \neq 1, k \in V'$).

Consideremos as restrições de ligação de $FCircCap_L$:

$$\sum_{h \in H_{(i,j)}} (w1_{ij}^{hk} + w2_{ij}^{hk}) \leq x_{ij} \quad (i, j) \in A, k \in V' \quad (4.22)$$

Usando as restrições de não negatividade das variáveis $w2_{ij}^{hk}$ em (4.22) e usando (5.1) na expressão resultante obtemos as restrições (2.22) e concluímos a nossa prova. ■

Corolário 5.2.2

$$v(FCircCap_L) \geq v(FFDesagregado_L).$$

Na Secção 5.5 veremos que os ganhos de $FCircCap_L$ face a $FFDesagregado_L$ são notórios, o que já seria de esperar se recordarmos o Resultado 5.4.1 e o que foi observado quando comparámos $FFDesagregado_L$ com $FCircComb_L$. Por outro lado, os ganhos de $FCircCap_L$ face a $FCircComb_L$ registaram-se apenas para $Q = 5$ e têm pouco significado, sendo obtidos à custa de um muito maior esforço computacional.

5.3 Formulação Forte de Circuito e Capacidade

Nesta secção mostramos que $FCircCap$ pode ser fortalecida considerando um conjunto de igualdades obtidas por desagregação, no índice h , das desigualdades (5.2) e (5.3). Vejamos, então, como obter um tal conjunto.

Começamos por recordar que na Subsecção 4.4.1 mostramos que as igualdades (4.40):

$$\sum_{h \in H(i,j)} w1_{ij}^{hj} = x_{ij} \quad (i, j) \in A, i, j \neq 1 \quad (4.40)$$

são implicadas pela relaxação em PL de $FCircComb$. Então, pelo Resultado 5.2.1, sabemos que o modelo aumentado obtido adicionando aquelas igualdades a $FCircCap$ é-lhe equivalente. No que se segue, consideramos o modelo aumentado para o qual mantemos, por razões de simplicidade, a mesma designação.

Considere-se, agora, um arco $(1, j) \in A$ e o subconjunto das desigualdades (5.2) de $FCircCap$ que lhe está associado:

$$\sum_{k \in V'} \sum_{h \in H(1,j)} w1_{1j}^{hk} \leq Qx_{1j}$$

usando (4.40) na desigualdade que acabámos de apresentar obtemos:

$$\sum_{k \in V'} \sum_{h \in H(1,j)} w1_{1j}^{hk} \leq Q \sum_{h \in H(1,j)} w1_{1j}^{hj}$$

Por sua vez, observando que se $(1, j)$ está na posição h de alguma rota então está na posição h do caminho $1 - j$, temos:

$$\sum_{k \in V'} w_{1j}^{hk} \leq Q w_{1j}^{hj}$$

O valor de $\sum_{k \in V'} w_{1j}^{hk}$ indica o número de caminhos $1 - k$ que usam o arco $(1, j)$ na posição h . Logo, pelo novo conjunto de desigualdades, o número de caminhos $1 - k$ que usa o arco $(1, j)$ numa dada posição é limitado por Q , independentemente do valor assumido pelo parâmetro h . No entanto, pela definição de posição de um arco numa rota (v. Secção 3.1), sabemos que um arco na posição h é usado para alcançar, exactamente, $Q - h + 1$ vértices. Então, podemos melhorar a desigualdade anterior e escrever:

$$\sum_{k \in V'} w_{1j}^{hk} = (Q - h + 1) w_{1j}^{hj} \quad h \in H_{(1,j)}$$

A Figura 5.1 ajuda a compreender a igualdade anterior. Consideremos, por exemplo, o arco $(1, 3)$: analisando a figura verificamos que o arco $(1, 3)$ está na primeira posição da rota que visita 3, 4 e 5 e que é usado para servir 3 ($3 = 3 - 1 + 1$) vértices; já o arco $(1, 6)$, que está na segunda posição da rota que visita 6 e 7, é usado para servir 2 ($2 = 3 - 2 + 1$) vértices.

De forma análoga, obtemos igualdades do mesmo tipo para os restantes arcos $(i, j) \in A$, pelo que obtemos, finalmente:

$$\sum_{k \in V'} w_{ij}^{hk} = (Q - h + 1) w_{ij}^{hj} \quad (i, j) \in A, j \neq 1, h \in H_{(i,j)} \quad (5.6)$$

Não é difícil verificar que o novo conjunto de igualdades implica, para cada $(i, j) \in A$, as restrições (5.2) e (5.3). Desta forma, substituindo em $FCircCap$ o conjunto das restrições (5.2) e (5.3) pelas restrições (5.6), obtemos um modelo válido para o PRVC-PU que domina $FCircCap$.

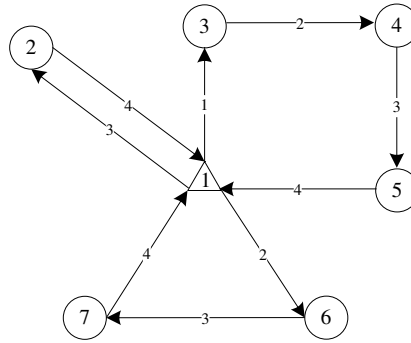


Figura 5.1: Solução admissível do PRVC-PU numa instância com $n = 7$ e $Q = 3$. As etiquetas associadas aos arcos indicam as respectivas posições.

Porém, antes de apresentarmos um tal modelo, introduzimos um segundo conjunto de restrições. Repare-se, então, que o valor de $\sum_{k \in V'} w 2_{ij}^{hk}$ indica o número de caminhos $k - 1$ que usam (i, j) na posição h numa dada rota. Recordando que os caminhos $k - 1$ são caminhos de retorno ao depósito, compreendemos que $\sum_{k \in V'} w 2_{ij}^{hk}$ é igual ao número de vértices da rota em posições anteriores, que, pela definição de posição de um vértice, sabemos não ser superior a $h - 1$ (a igualdade verifica-se para rotas completas). Com base neste conjunto de observações, escrevemos:

$$\sum_{k \in V'} w 2_{ij}^{hk} \leq (h - 1) w 2_{ij}^{hi} \quad (i, j) \in A, i \neq 1, h \in H_{(i,j)} \quad (5.7)$$

A Figura 5.1 ilustra a validade da nova desigualdade: observamos, por exemplo, que os arcos $(4, 5)$ e $(6, 7)$ ocupam a terceira posição das respectivas rotas; o arco $(4, 5)$, que é usado numa rota completa, é usado por $2 = 3 - 1$ caminhos $k - 1$, o arco $(6, 7)$, que é usado numa rota incompleta, é usado por $1 \leq 3 - 1$ caminhos $k - 1$.

Comparando as desigualdades (5.6) e (5.7) verificamos que estas podem ser referenciadas como desigualdades complementares no sentido em que descrevem troços complementares da rota que inclui um dado arco numa dada posição. Assim, ao incluir (5.6) e (5.7) no modelo estendemos o objectivo enunciado na Secção 5.1. Com efeito, passamos de uma situação onde especificávamos o número máximo de vértices

por componente com origem no depósito para uma situação em que especificamos o número de vértices que se segue a um dado arco numa dada posição de uma componente e o número máximo de vértices que o antecede.

Introduzidas (5.6) e (5.7), estamos, então, em condições de apresentar a Formulação Forte de Circuito e Capacidade ($FCircCap^+$), que é como se segue:

$$\mathbf{F \ CircCap}^+ : \min \left\{ \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} : (2.2), (2.3), (4.17), (4.18), (4.19), (4.20), (4.21), \right. \\ \left. (4.22), (4.30), (4.31), (5.6), (5.7), (4.23), (4.24), (2.5) \right\}$$

A forma como a nova formulação foi construída mostra que esta domina $FCircCap$, pelo que podemos enunciar o resultado que apresentamos de seguida e o correspondente corolário.

Resultado 5.3.1

A formulação $FCircCap^+$ domina a formulação $FCircCap$.

Corolário 5.3.1

$$v(FCircCap^+) \geq v(FCircCap_L).$$

Os resultados computacionais a apresentar na Secção 5.5 mostram melhorias no valores dos *gaps* lineares associados à nova formulação para as instâncias euclidianas com $Q = 5$.

5.4 Comparação com a Formulação de Corte

Relativamente aos modelos que vimos a estudar, resta comparar $FCircCap^+$ com $FCorte$.

Na Figura 5.2 representamos uma solução admissível para a relaxação em PL de $FCircCap^+$. Usamos a referida solução para demonstrar o resultado que enunciamos de seguida.

Resultado 5.4.1

Não há relação de dominância entre as formulações $FCircCap^+$ e $FCorte$.

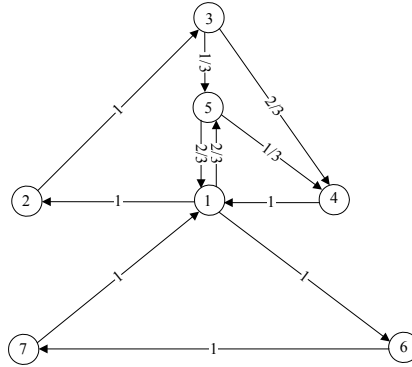


Figura 5.2: Solução admissível de $FCircCap_L^+$ para uma instância do PRVC-PU com $n = 7$ e $Q = 3$. As etiquetas associadas aos arcos indicam o valor das variáveis topológicas, x_{ij} . Os valores não apresentados são nulos. Na Tabela 5.1 indicamos os valores das variáveis $w1_{ij}^{hk}$ e $w2_{ij}^{hk}$.

Demonstração:

Seja $CircCap_L^+$ o conjunto das soluções admissíveis de $FCircCap_L^+$ e seja $Corte_L$ o conjunto das soluções admissíveis de $FCorte_L$. Seja, também $CircComb_L$ o conjunto das soluções admissíveis de $FCircComb_L$.

Para demonstrar o resultado mostramos que são verdadeiras as proposições enunciadas em 1. e 2.

1. $Corte_L \not\subseteq Proj_x(FCircCap_L^+)$

Admitamos que $Corte_L \subseteq Proj_x(FCircCap_L^+)$. Então, pelo Resultado 5.2.1, temos $Corte_L \subseteq Proj_x(CircComb_L)$, o que contraria o Resultado 4.4.6.

2. $Proj_x(FCircCap_L^+) \not\subseteq Corte_L$

Consideremos, de novo, a solução representada na Figura 5.2 e a desigualdade (2.7) escrita para $S = \{2, 3, 4, 5\}$:

Tabela 5.1: Valores das variáveis $w1_{ij}^{hk}$ e $w2_{ij}^{hk}$ associadas à solução representada na Fig. 5.2

		$w1_{ij}^{hk}$																	
k		2			3			4			5			6			7		
h		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Arco	(i, j)																		
	(1,2)	1			1			2/3			1/3								
	(1,5)								1/3			1/3	1/3						
	(1,6)														1				1
	(2,3)				1			2/3			1/3								
	(3,4)									2/3									
	(3,5)												1/3						
	(5,4)								1/3										
	(6,7)																		1

		$w2_{ij}^{hk}$																	
k		2			3			4			5			6			7		
h		2	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4
Arco	(i, j)																		
	(2,3)	1																	
	(3,4)		2/3			2/3													
	(3,5)		1/3			1/3													
	(5,4)											1/3							
	(6,7)														1				
	(4,1)			2/3			2/3									1/3			
	(5,1)			1/3			1/3			1						2/3			
	(7,1)																	1	1

Os valores não apresentados são nulos.

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} \geq \lceil \frac{4}{3} \rceil$$

Substituindo as variáveis pelos seus valores, facilmente constatamos que a desigualdade não é verificada, pelo que x prova a proposição. ■

O resultado que acabámos de mostrar permite concluir que as desigualdades (2.7) não estão incluídas na projecção no espaço das variáveis x_{ij} de $FCircCap_L^+$ o que significa que não temos, ainda, uma descrição polinomial das referidas restrições.

5.5 Resultados computacionais

Nesta secção descrevemos uma comparação computacional entre as formulações introduzidas neste capítulo e os modelos $FFAgregado^+$, $FFDesagregado^+$, $FPQM$,

$FPQM^+$ e $FCircComb$, que destacamos como os modelos mais representativos entre os apresentados neste trabalho. Considerámos, naturalmente, o conjunto de instâncias usadas para obter os resultados descritos nos capítulos anteriores e o mesmo *software* na mesma máquina.

Comparamos, também, os resultados obtidos com os novos modelos e com as já referidas versões do algoritmo de Lysgaard et al. (2004).

A Tabela 5.5 permite constatar que a qualidade média nos *gaps* lineares associados às formulações $FCircCap$ e $FCircComb$ é muito semelhante: registaram-se apenas dois casos em que os valores dos correspondentes *gaps* lineares não coincidiram (instâncias TC, para $Q = 5$). As diferenças observadas são muito diminutas e foram conseguidas à custa de um aumento significativo do esforço computacional.

Por outro lado, comparando os *gaps* lineares associados às formulações $FCircComb$ e $FCircCap^+$ encontramos mais casos onde registamos melhorias (instâncias euclidianas e aleatórias simétricas com $Q = 5$), sendo que as diferenças observadas são mais significativas (reduções da ordem de 15-30%). As diferenças nos tempos computacionais são substanciais.

Por sua vez, a Tabela 5.3 confirma a prevalência da versão completa do algoritmo de Lysgaard face aos restantes modelos, muito embora essa prevalência diminua com o aumento da dimensão do modelo, acentuando-se a tendência que já tínhamos observado ao analisar os resultados referentes ao Capítulo 4.

5.6 Conclusões e notas finais

Neste capítulo explorámos uma terceira via para a construção de modelos para o PRVC-PU que resulta da fusão das abordagens usualmente associadas aos problemas de "capacidade" e de "roteamento". Desta forma, obtivemos dois novos modelos para o problema que foram comparados com os restantes modelos estudados neste trabalho.

Tabela 5.2: Resultados computacionais obtidos através das formulações compactas apresentadas Capítulo 5 e comparação com uma selecção de algumas dos modelos introduzidos nos capítulos 2, 3 e 4

	FFAgreg.+	FFDesg.	FPQM	FCircComb	FPQM+	FCircCap	FCircCap+	
$Q = 3$	TC_20	4,49 (0,01)	3,82 (0,52)	4,49 (0,00)	2,19 (0,85)	2,19 (0,62)	2,19 (1,13)	2,19 (1,03)
	TE_20	3,67 (0,01)	3,50 (0,57)	3,67 (0,00)	2,31 (0,89)	2,31 (0,65)	2,31 (1,08)	2,31 (1,10)
	TRS_20	4,57 (0,01)	4,57 (0,57)	4,57 (0,00)	2,01 (0,86)	2,01 (0,63)	2,01 (1,13)	2,01 (1,10)
	TRA_20	5,32 (0,01)	5,08 (0,56)	2,89 (0,00)	2,85 (0,86)	3,39 (0,63)	2,85 (1,11)	2,85 (1,08)
	TC_40	3,22 (0,04)	2,85 (20,08)	3,22 (0,02)	1,09 (32,02)	1,09 (20,82)	1,09 (39,48)	1,09 (35,80)
	TE_40	2,96 (0,04)	1,92 (21,14)	2,96 (0,02)	0,65 (31,02)	0,65 (20,16)	0,65 (39,33)	0,65 (41,36)
	TRS_40	2,46 (0,05)	2,46 (21,46)	2,46 (0,02)	1,25 (32,63)	1,32 (21,21)	1,25 (38,99)	1,25 (37,17)
	TRA_40	5,80 (0,06)	5,63 (20,09)	2,88 (0,02)	2,60 (33,66)	3,14 (21,88)	2,60 (39,62)	2,60 (37,08)
	TC_20	8,17 (0,02)	5,06 (0,56)	7,06 (0,00)	1,70 (3,17)	3,09 (2,31)	1,67 (6,62)	1,10 (10,20)
	TE_20	5,61 (0,01)	4,30 (0,68)	3,72 (0,00)	0,39 (3,15)	0,82 (2,30)	0,39 (6,10)	0,29 (9,44)
	TRS_20	7,37 (0,02)	6,09 (0,57)	5,23 (0,00)	0,64 (2,92)	0,98 (2,13)	0,64 (6,06)	0,60 (8,35)
	TRA_20	8,79 (0,01)	8,55 (0,54)	3,48 (0,00)	2,87 (2,87)	3,09 (2,10)	2,87 (5,86)	2,87 (8,40)
TC_40	6,87 (0,05)	5,31 (19,70)	4,94 (0,04)	1,75 (128,22)	1,95 (83,35)	1,74 (273,07)	1,69 (507,60)	
TE_40	5,40 (0,05)	4,67 (24,58)	2,88 (0,05)	0,85 (141,86)	1,10 (92,21)	0,85 (303,04)	0,84 (573,60)	
TRS_40	5,79 (0,06)	4,83 (19,95)	4,16 (0,05)	0,68 (137,89)	0,90 (89,63)	0,68 (296,64)	0,68 (449,33)	
TRA_40	7,08 (0,06)	6,59 (19,32)	2,52 (0,04)	2,03 (148,14)	2,46 (96,29)	2,03 (288,85)	2,03 (506,21)	

Tabela 5.3: Resultados computacionais relativos às versões restrita e completa do algoritmo de Lysgaard et al. (2004) e comparação com os resultados obtidos através de uma selecção das formulações compactas apresentadas neste trabalho.

Instância	FFDesg.	FPQM	FPQM+	FCircComb	FCircCap	FCircCap	Lysgaard I	Lysgaard II
TC_20.1.3	2,87	3,33	0,90	0,90	0,90	0,90	0,57	0,00
TE_20.1.3	3,23	3,25	1,63	1,63	1,63	1,63	0,71	0,00
TC_20.1.5	3,94	5,84	2,77	1,92	1,92	1,92	0,00	0,00
TE_20.1.5	4,58	4,51	1,66	0,06	0,05	0,00	0,00	0,00
TC_40.1.3	2,21	2,38	0,71	0,71	0,71	0,71	1,79	0,00
TE_40.1.3	1,48	5,96	0,33	0,33	0,33	0,33	3,60	0,12
TC_40.1.5	6,04	5,66	2,47	2,15	2,15	1,99	1,42	0,26
TE_40.1.5	4,71	1,51	0,28	0,16	0,16	0,16	3,22	0,84

A Figura 5.3 sintetiza as relações de dominância demonstradas.

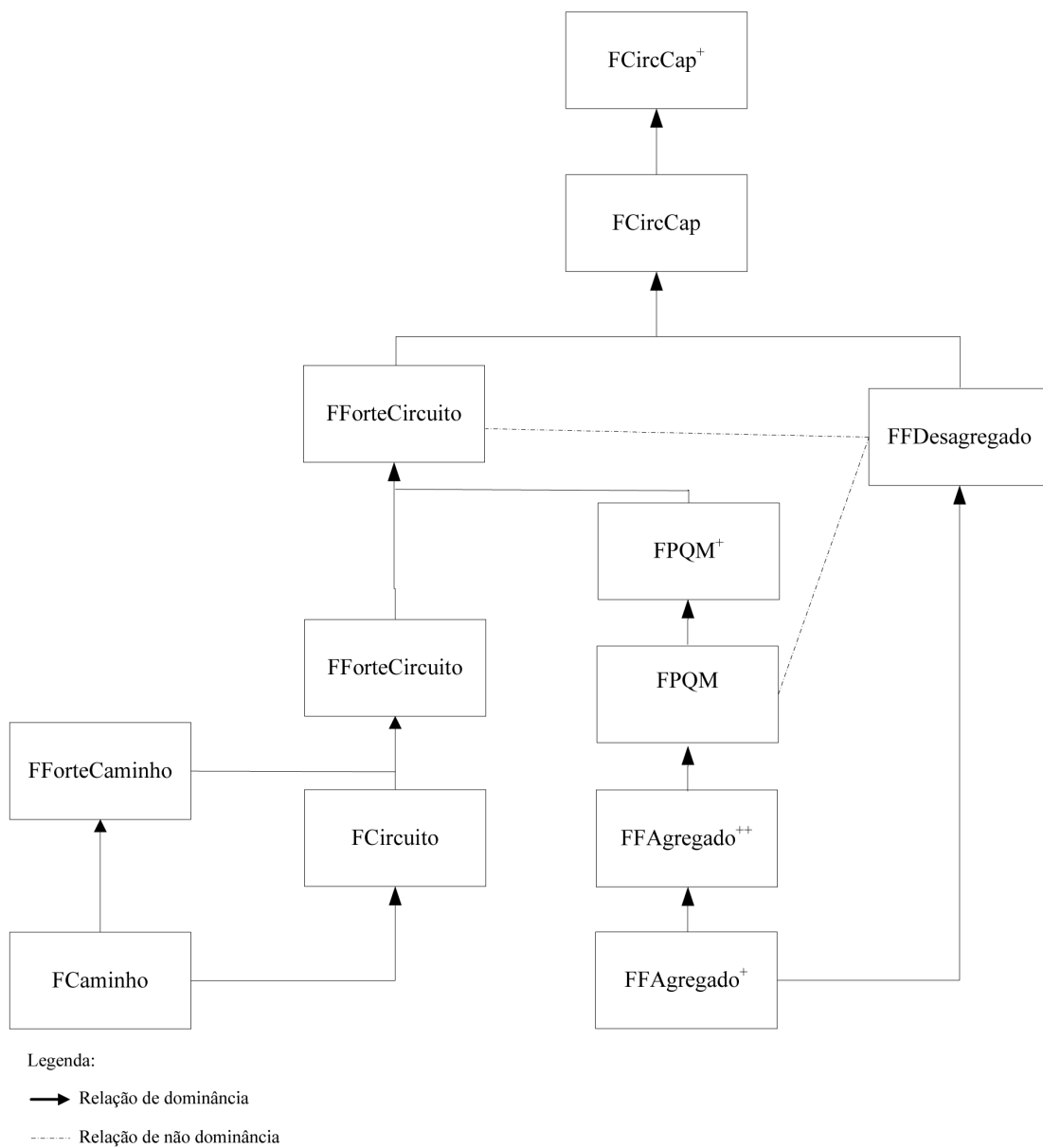


Figura 5.3: Representação esquemática das relações de dominância demonstradas neste trabalho

Os resultados computacionais apresentados na Secção 5.5 permitiram ter uma medida das distâncias entre as várias formulações e identificar $FPQM$, $FPQM^+$ e $FCircComb$ como os modelos mais competitivos, em termos da produção de limites inferiores.

A finalizar, notamos que com base no que apresentámos neste capítulo surgem como evidentes outros modelos intermédios cuja ausência deste trabalho pode ser notada. Por exemplo, não é difícil de observar que obtemos uma formulação que domina $FFDesagregado$ a partir de $FCaminho$ adicionando a esta última as restrições de capacidade; ou, de modo análogo, também não é difícil observar que as desigualdades (5.6) podem ser adicionadas a qualquer um dos modelos com variáveis com dependências temporais apresentados no Capítulo 4. Estes (e outros) modelos são apresentados e estudados em Godinho et al. 2005 e 2008 e a sua omissão deste trabalho resulta essencialmente de dois factores: os limites inferiores que lhes estão associados não se destacam dos restantes e ii) a construção Caminho – Circuito – Circuito Forte – Circuitos Combinados – Circuito e Capacidade apresentada posteriormente teria resultado muito mais complexa.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalho Futuro

Nesta tese discutimos modelos em PLI para o PRVC-PU.

No Capítulo 2 realizamos uma revisão de um conjunto de modelos da literatura. Nalguns casos os modelos apresentados foram adaptados e/ou fortalecidos. Neste capítulo introduzimos, ainda, alguns resultados teóricos que permitiram estabelecer relações de dominância entre os modelos estudados.

Nos capítulos subsequentes propomos novos modelos em PLI para o PRVC-PU.

Nos capítulos 3 e 4 seguimos uma metodologia que incluiu a idealização de modelos estendidos num determinado espaço, seguido da aplicação de técnicas de projecção que permitiram obter desigualdades implicadas pelas relaxações em PL dos novos modelos em espaços de menor dimensão. Desta forma, conseguiu-se incorporar informação relativa a modelos mais fortes em modelos de menor complexidade. Os resultados computacionais apresentados no Capítulo 4 mostram que esta abordagem resultou particularmente bem sucedida no caso do modelo ali apresentado.

No Capítulo 5 apresentamos um conjunto de formulações que domina todos os modelos compactos propostos e/ou discutidos nesta tese. Para a sua obtenção, analisámos e comparámos as estratégias subjacentes aos mais fortes dos modelos anteriores e propusemos uma formulação que os unifica.

Foi realizada uma comparação computacional entre os modelos apresentados que permitiu identificar os modelos mais competitivos em termos da produção de limites inferiores. Refira-se que com este trabalho foi conseguida uma redução nos melhores valores conhecidos para *gaps* lineares associados às instâncias consideradas (passamos de 3,97% (instâncias euclidianas) e de 5,47% (instâncias aleatórias) para 1,26% e 1,86%, respectivamente).

Os bons resultados obtidos encorajam a utilização dos modelos apresentados em dois campos: i) utilização de técnicas de projecção para obter desigualdades implicadas pelas correspondentes relaxações em PL no espaço das variáveis topológicas que possam ser embebidas em esquemas de *branch-and-cut* e ii) adaptação dos modelos a problemas relacionados. Relativamente a estes tópicos, foi já realizado algum trabalho exploratório:

- quanto a i) apresentamos em Godinho et al. (2008) e em Godinho et al. (2009a) um conjunto de desigualdades nas variáveis x_{ij} obtidas por projecção de algumas das formulações apresentadas nos capítulos 3 e 4. Nos trabalhos citados incluímos algumas comparações teóricas com desigualdades conhecidas da literatura. Resta, no entanto, avaliar a sua eficiência/eficácia computacional;

- quanto a ii) apresentamos em Godinho et al. (2011a) e em Godinho et al. (2011b) adaptações do mais forte dos modelos apresentados no Capítulo 4 ao PCV nas variantes com dependências temporais e assimétrica, respectivamente. No primeiro trabalho apresentamos uma comparação computacional que mostra que o novo modelo produz limites inferiores muito apertados ($\leq 1\%$); no segundo realizamos uma comparação teórica que mostra que o nosso modelo não é dominado pelos melhores modelos da literatura. Naturalmente, estamos também interessados na adaptação dos modelos estudados ao CVRP. Será interessante verificar se os bons resultados se mantêm, sendo, como é conhecido, o CVRP um problema cuja abordagem através de métodos exactos tem provado ser particularmente difícil.

Apêndice A

Demonstrações de resultados relativos à Formulação de Picard e Queyranne Modificada

Neste apêndice demonstramos o Resultado 3.2.2. Para o efeito, introduzimos dois lemas.

No que se segue, dados $A, B \subseteq V$, denotamos $\sum_{i \in A, j \in B} z_{ij}^h$ por $z^h(A, B)$, para $h = 1, \dots, Q + 1$.

Lema A.1

Sejam S e S' sub-conjuntos disjuntos de V' e seja k um inteiro tal que $2 \leq k \leq Q - 1$.

As desigualdades:

$$f(S, S') \leq (Q - k)x(S, S') + \sum_{h=2}^k (k + 1 - h)z^h(S, S') \quad (\text{A.1})$$

e

$$f(S, S') \geq kx(S, S') - \sum_{h=Q-k}^Q (k + 1 + h - Q)z^h(S, S') \quad (\text{A.2})$$

são implicadas pela relaxação em Programação Linear da formulação FPQM.

Demonstração:

Demonstramos o resultado para (A.1). A adaptação da demonstração apresentada para (A.2) é trivial e, por conseguinte, omitida.

Considere-se um inteiro k com $2 \leq k \leq Q-1$ e sejam $S, S' \subseteq V'$ tais que $S \cap S' = \emptyset$. Partindo da igualdade:

$$\sum_{h=2}^k (k+1-h)z^h(S, S') = \sum_{h=2}^k (k+1-h)z^h(S, S') \quad (\text{A.3})$$

e tendo em conta que $\sum_{h=k+1, \dots, Q} (k+1-h)z^h(S, S')$ é não positivo, podemos escrever:

$$\sum_{h=2}^k (k+1-h)z^h(S, S') + \sum_{h=k+1}^Q (k+1-h)z^h(S, S') \leq \sum_{h=2}^k (k+1-h)z^h(S, S') \quad (\text{A.4})$$

de onde obtemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{h=2}^Q (k+1-h)z^h(S, S') = \\ & \sum_{h=2}^Q [(Q-h+1) - (Q-k)]z^h(S, S') = \\ & \sum_{h=2}^Q (Q-h+1)z^h(S, S') - \sum_{h=2}^Q (Q-k)z^h(S, S') \leq \sum_{h=2}^k (k+1-h)z^h(S, S') \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Reescrevendo a expressão anterior na forma:

$$\sum_{h=2}^Q (Q-h+1)z^h(S, S') \leq (Q-k) \sum_{h=2}^Q z^h(S, S') + \sum_{h=2}^k (k+1-h)z^h(S, S') \quad (\text{A.6})$$

e usando as restrições de ligação entre as variáveis z_{ij}^h e as variáveis f_{ij} e x_{ij} , restrições (3.3) e (3.5), em (A.6) obtemos, finalmente, a expressão desejada.

■

Lema A.2

Sejam S e S' sub-conjuntos disjuntos de V' . Seja k um inteiro tal que $2 \leq k \leq Q - 1$ e considere-se uma partição de V' , S_0, \dots, S_k . As desigualdades:

$$\sum_{h=2}^k (k+1-h)z^h(S, S') \leq \sum_{p=0}^{k-2} \sum_{q=p+2}^k (q-p-1)x(S_p, S_q)$$

com $S_0 = \{1\}$, $S_k = S$
e $S' \subseteq (S_1 \cup S_2)$ (A.7)

e

$$\sum_{h=Q-k}^Q (k+1+h-Q)z^h(S, S') \geq \sum_{p=0}^{k-2} \sum_{q=p+2}^k (q-p-1)x(S_p, S_q)$$

com $S_0 = S$, $S_k = \{1\}$
e $S' \subseteq (S_{k-1} \cup S_k)$ (A.8)

são implicadas pela relaxação em Programação Linear da formulação $FPQM$.

Demonstração:

Considere-se o sub-conjunto das restrições (3.2) de $FPQM$ associadas a um dado h , com $1 \leq h \leq Q - 1$:

$$z^h(V, \{j\}) = z^{h+1}(\{j\}, V') \quad j \in V' \quad (\text{A.9})$$

Considere-se, também, um inteiro k tal que $2 \leq k \leq Q - 1$ e seja $S_0, \dots, S_q, \dots, S_k$ uma partição de V , com $S_0 = \{1\}$.

Tome-se um determinado q e adicionem-se, no índice j , as igualdades (A.9) associadas aos vértices $j \in S_q$, para obter:

$$z^h(V, S_q) = z^{h+1}(S_q, V') \quad (\text{A.10})$$

Seja $P_1, \dots, P_p, \dots, P_P$ uma família de subconjuntos mutuamente disjuntos de V' (não necessariamente uma partição). Então, (A.10) implica:

$$z^h(V, S_q) \geq z^{h+1}(S_q, (\cup_{p=1}^P P_p)) = z^{h+1}(S_q, P_1) \dots + z^{h+1}(S_q, P_P) \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, sendo $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \dots, \alpha_P, \beta$ uma colecção de $P + 1$ inteiros não negativos, que verifica $\beta \geq \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_p, \dots, \alpha_P\}$, podemos escrever:

$$\beta z^h(V, S_q) \geq \alpha_1 z^{h+1}(S_q, P_1) \dots + \alpha_P z^{h+1}(S_q, P_P) \quad (\text{A.12})$$

O procedimento usado é válido qualquer que seja o valor escolhido para os parâmetros h, k e q e qualquer que seja a família de subconjuntos, $P_1, \dots, P_p, \dots, P_P$, considerada, desde que sejam observadas as condições indicadas. Para efeito da nossa demonstração interessam-nos, apenas, alguns casos particulares.

Se $k = 2$, obter (A.7) de (A.12) é trivial. Basta considerar (A.12) para $q = 2$ e $h = 1$ e fazer $P = 1, P_1 = S', S_2 = S$ e $\beta = \alpha_1 = 1$, para obter (recordamos que, para $h = 1$ as variáveis z_{ij}^h só estão definidas se $i = 1$):

$$z^1(V, S) = z^1(\{1\}, S) \geq z^2(S, S') \quad (\text{A.13})$$

Por outro lado, adicionando as restrições de não negatividade das variáveis z_{ij}^h para $i = 1, j \in S$ e $h = 2, \dots, Q$, obtemos $\sum_{h=2, \dots, Q} z^h(\{1\}, S) \geq 0$. Esta desigualdade pode ser adicionada a (A.13) para obter:

$$\sum_{h=1}^Q z^h(1, S) \geq z^2(S, S') \quad (\text{A.14})$$

usando as restrições de ligação entre as variáveis x_{ij} e as variáveis z_{ij}^h , restrições (3.3) temos a expressão desejada.

Nos restantes casos, para cada k , com $3 \leq k \leq Q - 1$, adicionamos (A.12) para $q = 2, \dots, k$ e $h = 1, \dots, q - 1$, para obter (por simplicidade, mantemos a indexação dos parâmetros ao índice h na última igualdade):

$$\sum_{q=2}^k \sum_{h=1}^{q-1} \beta^{qh} z^h(V, S_q) \geq \sum_{q=2}^k \sum_{h=1}^{q-1} \sum_{p=1}^{P^{qh}} \alpha_p^{qh} z^{h+1}(S_q, P_p^{qh}) = \sum_{q=2}^k \sum_{h=2}^q \sum_{p=1}^{P^{qh}} \alpha_p^{qh} z^h(S_q, P_p^{qh}) \quad (\text{A.15})$$

Recordando que $V = \cup_{q=0, \dots, k} S_q$, temos, finalmente:

$$\sum_{q=2}^k (\cup_{p=0}^k S_p) \sum_{h=1}^{q-1} \beta^{qh} z^h(S_p, S_q) = \sum_{p=0}^k \sum_{q=2}^k \sum_{h=1}^{q-1} \beta^{qh} z^h(S_p, S_q) \geq \sum_{q=2}^k \sum_{h=2}^q \sum_{p=1}^{P^{qh}} \alpha_p^{qh} z^h(S_q, P_p^{qh}) \quad (\text{A.16})$$

Obtemos (A.8) a partir de (A.16) usando um conjunto de parâmetros e uma coleção de famílias de sub-conjuntos tais que permitam cancelar os termos indesejados do membro da esquerda e, simultaneamente, obter, no termo da direita, a expressão pretendida.

Assim, para cada k e para cada par (q, h) , fazemos:

$$S_k = S$$

$$P^{qh} = k - h + 1$$

$$P_p^{qh} = \begin{cases} S', & \text{se } p = P^{qh} \\ S_{p+h}, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\beta^{qh} = q - h$$

e:

	α_p^{qh}		
	$q = 2$	$q = 3, \dots, k-1$	$q = k$
$h = 2, \dots, q-1$		0 se $p = k-h+1$ $q-h+1$ se $p = q-h+1, \dots, k-h$ p se $p = 1, \dots, q-h$	$k-h+1$ se $p = k-h+1$ p c.c.
$h = q$	0 se $p = k-h+1$ 1 c.c.	0 se $p = k-h+1$ 1 c.c.	1 se $p = 1, \dots, k-h+1$

Se $k = 3$ ignoramos a segunda coluna.

para obter:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{p=0}^k \sum_{q=2}^k \sum_{h=1}^{q-1} (q-h) z^h(S_p, S_q) \geq \\
 & \sum_{q=3}^{k-1} \sum_{h=2}^{q-1} \left[\sum_{p=1}^{q-h} p z^h(S_q, S_{p+h}) + \sum_{p=q-h+1}^{k-h} (q-h+1) z^h(S_q, S_{p+h}) \right] + \\
 & \sum_{h=2}^{k-1} \left[\sum_{p=1}^{k-h} p z^h(S_k, S_{p+h}) + (k-h+1) z^h(S, S') \right] + \sum_{q=2}^{k-1} \sum_{p=1}^{k-q} z^q(S_q, S_{p+q}) + z^k(S, S')
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

manipulando o segundo membro de (A.17) obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{q=3}^{k-1} \sum_{h=2}^{q-1} \left[\sum_{p=1}^{q-h} p z^h(S_q, S_{p+h}) + \sum_{p=q-h+1}^{k-h} (q-h+1) z^h(S_q, S_{p+h}) \right] + \\
 & \sum_{h=2}^{k-1} \left[\sum_{p=1}^{k-h} p z^h(S_k, S_{p+h}) + (k-h+1) z^h(S, S') \right] + \sum_{q=2}^{k-1} \sum_{p=1}^{k-q} z^q(S_q, S_{p+q}) + z^k(S, S') = \\
 & = \sum_{q=3}^k \sum_{h=2}^{q-1} \sum_{p=1}^{q-h} p z^h(S_q, S_{p+h}) + \sum_{q=2}^{k-1} \sum_{h=2}^q \sum_{p=q-h+1}^{k-h} (q-h+1) z^h(S_q, S_{p+h}) + \\
 & + \sum_{h=2}^k (k-h+1) z^h(S, S') =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{q=3}^k \sum_{h=2}^{q-1} \sum_{p=h+1}^q (p-h)z^h(S_q, S_p) + \sum_{q=2}^{k-1} \sum_{h=2}^q \sum_{p=q+1}^k (q-h+1)z^h(S_q, S_p) + \\
&\quad + \sum_{h=2}^k (k-h+1)z^h(S, S') = \\
&= \sum_{q=3}^k \sum_{p=3}^q \sum_{h=2}^{p-1} (p-h)z^h(S_q, S_p) + \sum_{q=2}^{k-1} \sum_{p=q+1}^k \sum_{h=2}^q (q-h+1)z^h(S_q, S_p) + \\
&\quad + \sum_{h=2}^k (k-h+1)z^h(S, S') \qquad k = 3, \dots, Q-1
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Finalmente, reescrevendo o primeiro membro de (A.17) na forma:

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^k \sum_{q=2}^k \sum_{h=1}^{q-1} (q-h)z^h(S_p, S_q) = \\
&= \sum_{q=2}^k (q-1)z^1(S_0, S_q) + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=3}^k \sum_{h=2}^{q-1} (q-h)z^h(S_p, S_q) + \sum_{q=3}^k \sum_{h=2}^{q-1} (q-h)z^h(S_2, S_q) + \\
&\quad + \sum_{p=3}^k \sum_{q=3}^p \sum_{h=2}^{q-1} (q-h)z^h(S_p, S_q) + \sum_{p=3}^{k-1} \sum_{q=p+1}^k \sum_{h=2}^{q-1} (q-h)z^h(S_p, S_q) = \\
&= \sum_{q=2}^k (q-1)z^1(S_0, S_q) + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=3}^k \sum_{h=2}^{q-1} (q-h)z^h(S_p, S_q) + \\
&\quad + \sum_{p=3}^k \sum_{q=3}^p \sum_{h=2}^{q-1} (q-h)z^h(S_p, S_q) + \sum_{p=2}^{k-1} \sum_{q=p+1}^k \sum_{h=2}^p (q-h)z^h(S_p, S_q) \\
&\quad + \sum_{p=2}^{k-2} \sum_{q=p+2}^k \sum_{h=p+1}^{q-1} z^h(S_p, S_q) \geq \\
&\quad \sum_{p=3}^k \sum_{q=3}^p \sum_{h=2}^{q-1} (q-h)z^h(S_p, S_q) + \sum_{p=2}^{k-1} \sum_{q=p+1}^k \sum_{h=2}^p (p-h+1)z^h(S_p, S_q) + \\
&\quad + \sum_{h=2}^k (k-h+1)z^h(S, S')
\end{aligned}$$

e eliminando os termos simétricos obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{h=2}^k (k-h+1)z^h(S, S') \leq \\
 & \sum_{q=2}^k (q-1)z^h(S_0, S_q) + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=3}^k \sum_{h=2}^{q-1} (q-h)z^h(S_p, S_q) + \\
 & \sum_{p=2}^{k-2} \sum_{q=p+2}^k \sum_{h=2}^p (q-p-1)z^h(S_p, S_q) + \sum_{p=2}^{k-2} \sum_{q=p+2}^k \sum_{h=p+1}^{q-1} (q-h)z^h(S_p, S_q)
 \end{aligned}
 \tag{A.19}$$

$k = 3, \dots, Q-1$

considerando, agora, as restrições de não negatividade das variáveis z_{ij}^h obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{h=2}^k (k-h+1)z^h(S, S') \leq \\
 & = \sum_{q=2}^k (q-1)z^h(S_0, S_q) + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=3}^k \sum_{h=2}^{q-1} [(q-h) + (h-p-1)]z^h(S_p, S_q) + \\
 & \sum_{p=2}^{k-2} \sum_{q=p+2}^k \sum_{h=2}^p (q-p-1)z^h(S_p, S_q) + \sum_{p=2}^{k-2} \sum_{q=p+2}^k \sum_{h=p+1}^{q-1} [(q-h) + (h-p-1)]z^h(S_p, S_q) = \\
 & = \sum_{q=2}^k (q-1)z^h(S_0, S_q) + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=3}^k \sum_{h=2}^{q-1} (q-p-1)z^h(S_p, S_q) + \\
 & \sum_{p=2}^{k-2} \sum_{q=p+2}^k \sum_{h=2}^{q-1} (q-p-1)z^h(S_p, S_q)
 \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{h=2}^k (k-h+1)z^h(S, S') \leq \\
 & \sum_{q=2}^k (q-1)z^h(S_0, S_q) + \sum_{p=0}^1 \sum_{q=3}^k \sum_{h=2}^{q-1} (q-p-1)z^h(S_p, S_q) + \sum_{h=q}^Q (q-p-1)z^h(S_p, S_q) + \\
 & + \sum_{p=2}^{k-2} \sum_{q=p+2}^k \sum_{h=2}^{q-1} (q-p-1)z^h(S_p, S_q) + \sum_{h=q}^Q (q-p-1)z^h(S_p, S_q) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=3}^k \sum_{h=1}^Q (q-p-1)z^h(S_p, S_q) + \sum_{p=2}^{k-2} \sum_{q=p+2}^k \sum_{h=2}^Q (q-p-1)z^h(S_p, S_q) = \\
&= \sum_{p=0}^{k-2} \sum_{q=p+2}^k \sum_{h=1}^Q (q-p-1)z^h(S_p, S_q) \tag{A.20}
\end{aligned}$$

finalmente, usando as restrições de ligação entre as variáveis x_{ij} e z_{ij}^h , restrições (3.3), no membro da direita de (A.20) obtemos, finalmente, a expressão desejada. ■

Recordamos, agora, o resultado que pretendemos demonstrar

Resultado 3.2.2

Sejam S e S' sub-conjuntos disjuntos de V' e seja S_0, \dots, S_k uma partição de $k+1$ sub-conjuntos mutuamente disjuntos de V' .

As desigualdades

$$\begin{aligned}
f(S, S') \leq (Q-k)x(S, S') + \sum_{p=0, \dots, k-2} \sum_{q=p+2, \dots, k} (q-p-1)x(S_p, S_q) \\
\text{com } S_0 = \{1\}, S_k = S \\
S \subseteq (S_1 \cup S_2) \tag{3.13}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
f(S, S') \geq kx(S, S') - \sum_{p=0, \dots, k-2} \sum_{q=p+2, \dots, k} (q-p-1)x(S_p, S_q) \\
\text{com } S_0 = S', S_k = \{1\} \\
S \subseteq (S_{k-2} \cup S_{k-1}) \tag{3.14}
\end{aligned}$$

são implicadas pela relaxação em Programação Linear da formulação FPQM.

Demonstração:

Considerem-se os lemas A.1 e A.2. Por transitividade obtemos a expressão desejada.



Apêndice B

Demonstrações de resultados relativos à Formulação de Circuitos Combinados

Neste Apêndice demonstramos o resultado 4.4.3 introduzido no Capítulo 4.

Resultado 4.4.3

Seja $k \in V'$. As desigualdades:

$$\sum_{h=1, \dots, Q} \sum_{i \notin S_k^{h-1}} \sum_{j \in S_k^h} z_{ij}^h \geq 1 \quad S_k^h \subseteq V' \text{ com } k \in S_k^h \text{ para } h = 1, \dots, Q \text{ e } S_k^0 = \{1\} \quad (4.47)$$

são implicadas pela relaxação em Programação Linear de $FCircComb_L$.

Demonstração:

Seja $k \in V'$ e considerem-se as restrições (4.30) de $FCircComb_L$ que lhe estão associadas:

$$w1_{ij}^{hk} + w2_{ij}^{hk} \leq w1_{ij}^{hj} \quad (i, j) \in A, j \neq 1, h = 1, \dots, Q \quad (4.30)$$

usando as restrições de não-negatividade das variáveis $w2_{ij}^{hk}$ em (4.30) obtemos:

$$w1_{ij}^{hk} \leq w1_{ij}^{hj} \quad (i, j) \in A, j \neq 1, h = 1, \dots, Q \quad (B.1)$$

Considerem-se, agora, as restrições de ligação entre as variáveis $w1_{ij}^{hk}$ e z_{ij}^h , igualdades (4.32):

$$z_{ij}^h = w1_{ij}^{hj} \quad (i, j) \in A, j \neq 1, h = 1, \dots, Q \quad (4.32)$$

Usando (4.32) em (B.1) obtemos:

$$w1_{ij}^{hk} \leq z_{ij}^h \quad (i, j) \in A, j \neq 1, h = 1, \dots, Q \quad (B.2)$$

Então, (B.2) é implicada por $FCircComb_L$ aumentada com (4.32) que, como vimos, é equivalente a $FCircComb_L$. Desta forma, se adicionarmos as desigualdades (B.2) a $FCircComb_L$ obtemos um modelo equivalente. No que se segue consideramos, então, o modelo aumentado.

Consideremos, também, para o mesmo k , as restrições de conservação de fluxo, (4.17) e (4.18), de $FCircComb_L$ associadas às variáveis $w1_{ij}^{hk}$:

$$\sum_{h \in H(1,j)} \sum_{j \in V} w1_{1j}^{hk} = 1 \quad (4.17)$$

$$\sum_{i \in V} w1_{ij}^{hk} = \sum_{i \in V} w1_{ji}^{h+1,k} \quad j \neq 1, k, h = 1, \dots, Q - 1 \quad (4.18)$$

O sistema (4.17) - (4.18) garante que uma unidade de fluxo é enviada do vértice 1 para o conjunto de cópias do vértice k através de uma rede cujo grafo de suporte é definido pela camada inferior do grafo expandido associado ao modelo de circuito (*v.* Figura 4.2). Por seu turno, (B.2) define o valor da variável z_{ij}^h como a capacidade do arco (i, j) na posição h do referido grafo. Então, o teorema do fluxo máximo-corte mínimo (ver, por exemplo, Ahuja et al. (1993)) garante que qualquer corte num grafo assim definido tem capacidade não inferior a 1, de onde obtemos a expressão desejada. ■

Apêndice C

Resultados Computacionais

Este apêndice é dedicado ao trabalho computacional realizado neste trabalho.

Nas tabelas C.1 e C.2 apresentamos, com detalhe, as características das instâncias usadas nos testes realizados. Como referido na Subsecção 2.2.3 do Capítulo 2, indicamos, para cada instância, nome, tipologia, dimensão e valor da solução óptima.

Nas tabelas C.3 a C.10 apresentamos os resultados associados a cada uma das formulações compactas focadas neste trabalho. Para cada formulação e para cada instância apresentamos o *gap* linear relativo à solução óptima da respectiva relaxação em PL e o tempo de CPU, em segundos, consumido na sua determinação.

Recordamos que o valor óptimo de cada instância foi obtido resolvendo a formulação *FPQM* através do *branch and bound solver* disponibilizado pelo pacote de *software* CPLEX, na versão 11.2, num computador pessoal com um processador INTEL Core2Duo a 1,33GHz com 8Gb de RAM enquanto que os valores referentes aos *gaps* lineares foram obtidos usando o algoritmo *Barrier* do mesmo pacote de *software* na mesma máquina.

Tabela C.1: Características das instâncias

Instância	Tipologia	Loc. Depósito	n	A	Q	val. ótimo
TC_20_1.3	Euclidiana	Centro	21	420	3	663
TC_20_2.3	Euclidiana	Centro	21	420	3	756
TC_20_3.3	Euclidiana	Centro	21	420	3	736
TC_20_4.3	Euclidiana	Centro	21	420	3	781
TC_20_5.3	Euclidiana	Centro	21	420	3	752
TE_20_1.3	Euclidiana	Canto	21	420	3	1265
TE_20_2.3	Euclidiana	Canto	21	420	3	1098
TE_20_3.3	Euclidiana	Canto	21	420	3	1201
TE_20_4.3	Euclidiana	Canto	21	420	3	1174
TE_20_5.3	Euclidiana	Canto	21	420	3	1096
TRS_20_1.3	Aleatória	-	21	420	3	686
TRS_20_2.3	Aleatória	-	21	420	3	665
TRS_20_3.3	Aleatória	-	21	420	3	636
TRS_20_4.3	Aleatória	-	21	420	3	672
TRS_20_5.3	Aleatória	-	21	420	3	678
TRA_20_1.3	Aleatória	-	21	420	3	420
TRA_20_2.3	Aleatória	-	21	420	3	484
TRA_20_3.3	Aleatória	-	21	420	3	584
TRA_20_4.3	Aleatória	-	21	420	3	457
TRA_20_5.3	Aleatória	-	21	420	3	679
TC_20_1.5	Euclidiana	Centro	21	420	5	520
TC_20_2.5	Euclidiana	Centro	21	420	5	557
TC_20_3.5	Euclidiana	Centro	21	420	5	537
TC_20_4.5	Euclidiana	Centro	21	420	5	594
TC_20_5.5	Euclidiana	Centro	21	420	5	553
TE_20_1.5	Euclidiana	Canto	21	420	5	849
TE_20_2.5	Euclidiana	Canto	21	420	5	769
TE_20_3.5	Euclidiana	Canto	21	420	5	794
TE_20_4.5	Euclidiana	Canto	21	420	5	802
TE_20_5.5	Euclidiana	Canto	21	420	5	762
TRS_20_1.5	Aleatória	-	21	420	5	393
TRS_20_2.5	Aleatória	-	21	420	5	377
TRS_20_3.5	Aleatória	-	21	420	5	372
TRS_20_4.5	Aleatória	-	21	420	5	385
TRS_20_5.5	Aleatória	-	21	420	5	338
TRA_20_1.5	Aleatória	-	21	420	5	273
TRA_20_2.5	Aleatória	-	21	420	5	265
TRA_20_3.5	Aleatória	-	21	420	5	381
TRA_20_4.5	Aleatória	-	21	420	5	381
TRA_20_5.5	Aleatória	-	21	420	5	429

Tabela C.2: Características das instâncias (cont.)

Instância	Tipologia	Loc. Depósito	n	A	Q	val. ótimo
TC_40_1.3	Euclidiana	Centro	41	1640	3	1358
TC_40_2.3	Euclidiana	Centro	41	1640	3	1302
TC_40_3.3	Euclidiana	Centro	41	1640	3	1285
TC_40_4.3	Euclidiana	Centro	41	1640	3	1424
TC_40_5.3	Euclidiana	Centro	41	1640	3	1329
TE_40_1.3	Euclidiana	Canto	41	1640	3	2247
TE_40_2.3	Euclidiana	Canto	41	1640	3	2099
TE_40_3.3	Euclidiana	Canto	41	1640	3	2113
TE_40_4.3	Euclidiana	Canto	41	1640	3	2137
TE_40_5.3	Euclidiana	Canto	41	1640	3	2113
TRS_40_1.3	Aleatória	-	41	1640	3	1021
TRS_40_2.3	Aleatória	-	41	1640	3	1085
TRS_40_3.3	Aleatória	-	41	1640	3	1397
TRS_40_4.3	Aleatória	-	41	1640	3	974
TRS_40_5.3	Aleatória	-	41	1640	3	1364
TRA_40_1.3	Aleatória	-	41	1640	3	803
TRA_40_2.3	Aleatória	-	41	1640	3	730
TRA_40_3.3	Aleatória	-	41	1640	3	1397
TRA_40_4.3	Aleatória	-	41	1640	3	684
TRA_40_5.3	Aleatória	-	41	1640	3	993
TC_40_1.5	Euclidiana	Centro	41	1640	5	971
TC_40_2.5	Euclidiana	Centro	41	1640	5	935
TC_40_3.5	Euclidiana	Centro	41	1640	5	921
TC_40_4.5	Euclidiana	Centro	41	1640	5	1006
TC_40_5.5	Euclidiana	Centro	41	1640	5	966
TE_40_1.5	Euclidiana	Canto	41	1640	5	1482
TE_40_2.5	Euclidiana	Canto	41	1640	5	1401
TE_40_3.5	Euclidiana	Canto	41	1640	5	1413
TE_40_4.5	Euclidiana	Canto	41	1640	5	1449
TE_40_5.5	Euclidiana	Canto	41	1640	5	1406
TRS_40_1.5	Aleatória	-	41	1640	5	505
TRS_40_2.5	Aleatória	-	41	1640	5	514
TRS_40_3.5	Aleatória	-	41	1640	5	665
TRS_40_4.5	Aleatória	-	41	1640	5	501
TRS_40_5.5	Aleatória	-	41	1640	5	748
TRA_40_1.5	Aleatória	-	41	1640	5	426
TRA_40_2.5	Aleatória	-	41	1640	5	351
TRA_40_3.5	Aleatória	-	41	1640	5	665
TRA_40_4.5	Aleatória	-	41	1640	5	336
TRA_40_5.5	Aleatória	-	41	1640	5	523

Tabela C.3: Resultados detalhados para as instâncias com $n = 21$ e $Q = 3$

Q=3	FFAgreg.+	FFDesg.	FFAgreg.++	FPQM	FPQM+	FCam.	FFCam.	
tc	20_1	3,33 (0,00)	2,87 (0,51)	3,33 (0,01)	3,33 (0,00)	0,90 (0,63)	34,97 (0,36)	30,97 (4,40)
	20_2	3,77 (0,00)	3,47 (0,56)	3,77 (0,01)	3,77 (0,00)	1,28 (0,65)	35,27 (0,39)	31,40 (3,78)
	20_3	4,93 (0,02)	3,71 (0,56)	4,93 (0,03)	4,93 (0,00)	2,76 (0,61)	36,04 (0,39)	31,57 (4,37)
	20_3	3,92 (0,02)	2,99 (0,51)	3,92 (0,03)	3,92 (0,00)	1,02 (0,61)	35,38 (0,36)	31,05 (3,97)
	20_5	6,52 (0,02)	6,07 (0,48)	6,52 (0,03)	6,52 (0,00)	4,97 (0,61)	37,11 (0,34)	33,25 (3,98)
	20_1	3,25 (0,03)	3,23 (0,66)	3,25 (0,05)	3,25 (0,00)	1,63 (0,61)	58,90 (0,46)	55,81 (4,45)
te	20_2	2,95 (0,00)	2,72 (0,58)	2,95 (0,00)	2,95 (0,00)	1,06 (0,69)	58,77 (0,41)	55,58 (4,22)
	20_3	5,77 (0,00)	5,75 (0,53)	5,77 (0,02)	5,77 (0,00)	5,41 (0,61)	59,97 (0,37)	56,96 (4,41)
	20_3	3,71 (0,02)	3,29 (0,55)	3,71 (0,03)	3,71 (0,00)	2,21 (0,69)	59,09 (0,39)	55,84 (4,23)
	20_5	2,67 (0,00)	2,51 (0,55)	2,67 (0,03)	2,67 (0,00)	1,22 (0,65)	58,65 (0,39)	55,48 (4,43)
	20_1	5,61 (0,02)	5,61 (0,58)	5,61 (0,03)	5,61 (0,00)	1,65 (0,69)	58,05 (0,41)	52,68 (4,00)
	20_2	4,56 (0,02)	4,56 (0,51)	4,56 (0,03)	4,56 (0,00)	2,61 (0,61)	56,74 (0,36)	53,43 (4,39)
trs	20_3	3,43 (0,00)	3,44 (0,66)	3,43 (0,02)	3,43 (0,00)	0,68 (0,61)	57,37 (0,46)	54,11 (5,04)
	20_3	3,79 (0,00)	3,79 (0,55)	3,79 (0,01)	3,79 (0,00)	2,43 (0,57)	57,83 (0,39)	54,60 (4,19)
	20_5	5,43 (0,02)	5,43 (0,55)	5,43 (0,03)	5,43 (0,00)	2,65 (0,65)	60,00 (0,39)	56,94 (4,02)
	20_1	5,71 (0,02)	5,71 (0,55)	4,89 (0,03)	3,65 (0,00)	3,65 (0,61)	47,43 (0,39)	43,40 (4,18)
	20_2	4,93 (0,02)	4,93 (0,56)	4,96 (0,03)	3,65 (0,00)	3,65 (0,55)	49,89 (0,39)	46,05 (4,58)
	20_3	4,39 (0,02)	4,03 (0,56)	3,17 (0,03)	2,45 (0,00)	2,45 (0,57)	48,54 (0,39)	44,59 (4,63)
tra	20_3	4,85 (0,00)	4,63 (0,62)	2,37 (0,02)	1,53 (0,00)	1,53 (0,57)	46,78 (0,43)	42,70 (4,44)
	20_5	6,71 (0,00)	6,08 (0,56)	3,85 (0,01)	3,14 (0,00)	3,14 (0,61)	51,90 (0,39)	48,21 (3,98)

Tabela C.4: Resultados detalhados para as instâncias com $n = 21$ e $Q = 3$ (cont.)

	Q=3	FCirc.	FFCirc.	FCircComb	FCircCap	FCircCap+
tc	20.1	17,32 (1,79)	15,16 (6,77)	0,90 (0,86)	0,90 (1,14)	0,90 (1,06)
	20.2	23,00 (1,96)	20,56 (5,82)	1,28 (0,89)	1,28 (1,14)	1,28 (1,09)
	20.3	23,33 (1,96)	20,85 (6,72)	2,76 (0,83)	2,76 (1,09)	2,76 (1,06)
	20.3	20,32 (1,79)	16,89 (6,10)	1,02 (0,84)	1,02 (1,20)	1,02 (1,01)
	20.5	24,57 (1,68)	22,40 (6,13)	4,97 (0,83)	4,97 (1,08)	4,97 (0,95)
	20.1	35,87 (2,31)	35,08 (6,85)	1,63 (0,83)	1,63 (1,06)	1,63 (1,06)
te	20.2	34,86 (2,03)	32,25 (6,49)	1,06 (0,94)	1,06 (1,09)	1,06 (1,06)
	20.3	36,54 (1,86)	33,90 (6,79)	5,41 (0,83)	5,41 (1,01)	5,41 (1,03)
	20.3	35,24 (1,93)	32,86 (6,51)	2,21 (0,95)	2,21 (1,14)	2,21 (1,29)
	20.5	31,91 (1,93)	30,29 (6,82)	1,22 (0,89)	1,22 (1,08)	1,22 (1,08)
	20.1	28,26 (2,03)	25,91 (6,16)	1,65 (0,94)	1,65 (1,26)	1,65 (1,22)
trs	20.2	36,03 (1,79)	27,08 (6,75)	2,61 (0,84)	2,61 (1,09)	2,61 (1,05)
	20.3	32,04 (2,31)	28,14 (7,75)	0,68 (0,84)	0,68 (1,09)	0,68 (1,15)
	20.3	37,17 (1,93)	28,91 (6,44)	2,43 (0,78)	2,43 (1,09)	2,43 (1,06)
	20.5	36,81 (1,93)	32,57 (6,19)	2,65 (0,89)	2,65 (1,12)	2,65 (1,00)
	20.1	20,65 (1,93)	11,37 (6,43)	3,65 (0,83)	3,65 (1,09)	3,65 (1,08)
tra	20.2	21,73 (1,96)	15,52 (7,04)	3,65 (0,76)	3,65 (1,08)	3,65 (1,00)
	20.3	17,77 (1,96)	13,24 (7,13)	2,45 (0,78)	2,45 (1,08)	2,45 (1,03)
	20.3	15,52 (2,17)	10,28 (6,83)	1,53 (0,78)	1,53 (1,06)	1,53 (1,14)
	20.5	23,40 (1,96)	18,91 (6,13)	2,95 (0,84)	2,95 (1,14)	2,95 (1,05)

Tabela C.5: Resultados detalhados para as instâncias com $n = 21$ e $Q = 5$

	Q=3	FFAgreg.+	FFDesg.	FFAgreg.++	FPQM	FPQM+	FCam.	FFCam.
tc	20_1	7,43 (0,02)	3,94 (0,62)	7,17 (0,02)	5,84 (0,00)	2,77 (2,30)	23,13 (0,25)	20,79 (28,36)
	20_2	4,84 (0,02)	4,69 (0,59)	4,49 (0,04)	4,26 (0,00)	1,54 (2,29)	20,99 (0,23)	20,51 (32,85)
	20_3	9,73 (0,02)	4,93 (0,53)	9,46 (0,03)	8,86 (0,00)	1,97 (2,29)	25,05 (0,27)	20,71 (31,53)
	20_3	8,55 (0,02)	5,42 (0,51)	7,14 (0,03)	6,35 (0,00)	3,87 (2,50)	24,07 (0,20)	21,12 (28,20)
	20_5	10,33 (0,02)	6,29 (0,53)	10,22 (0,03)	9,96 (0,00)	5,29 (2,19)	25,54 (0,21)	21,84 (37,34)
	20_1	6,33 (0,02)	4,58 (0,63)	5,48 (0,03)	4,51 (0,00)	1,66 (2,50)	48,14 (0,25)	46,21 (34,48)
te	20_2	6,73 (0,00)	5,99 (0,76)	4,90 (0,04)	3,52 (0,00)	0,46 (2,29)	48,37 (0,30)	47,00 (29,64)
	20_3	4,82 (0,00)	4,29 (0,67)	4,23 (0,04)	4,20 (0,00)	0,20 (2,26)	47,31 (0,27)	46,04 (32,83)
	20_3	3,44 (0,02)	1,65 (0,69)	2,45 (0,03)	2,04 (0,00)	0,00 (2,05)	46,55 (0,28)	44,56 (31,30)
	20_5	6,74 (0,00)	5,00 (0,64)	5,38 (0,03)	4,33 (0,00)	1,79 (2,39)	48,37 (0,26)	46,44 (31,60)
	20_1	8,43 (0,02)	7,65 (0,55)	7,16 (0,03)	6,91 (0,00)	1,12 (2,26)	46,89 (0,22)	44,91 (28,24)
	20_2	8,41 (0,00)	6,55 (0,58)	6,45 (0,01)	6,28 (0,00)	2,07 (2,06)	47,56 (0,23)	45,60 (25,22)
trs	20_3	8,24 (0,02)	7,48 (0,64)	6,34 (0,02)	6,23 (0,00)	0,83 (2,16)	48,10 (0,26)	46,17 (26,71)
	20_3	5,78 (0,02)	3,75 (0,56)	2,53 (0,03)	2,34 (0,00)	0,62 (2,14)	49,89 (0,22)	48,02 (26,62)
	20_5	5,97 (0,02)	5,01 (0,51)	4,37 (0,01)	4,36 (0,02)	0,27 (2,03)	50,96 (0,20)	49,13 (35,93)
	20_1	11,54 (0,00)	11,48 (0,64)	8,19 (0,01)	4,40 (0,00)	4,40 (2,18)	37,85 (0,26)	35,53 (35,33)
	20_2	9,12 (0,02)	9,04 (0,53)	7,69 (0,01)	4,72 (0,02)	4,01 (2,06)	42,03 (0,21)	39,87 (26,70)
	20_3	7,50 (0,00)	7,31 (0,47)	3,23 (0,02)	3,12 (0,00)	2,65 (2,05)	44,07 (0,19)	41,98 (34,07)
tra	20_3	7,50 (0,00)	7,31 (0,45)	7,57 (0,02)	3,12 (0,00)	2,65 (2,06)	44,07 (0,18)	41,98 (34,05)
	20_5	8,30 (0,02)	7,62 (0,61)	4,65 (0,01)	2,04 (0,00)	1,73 (2,14)	47,24 (0,24)	45,27 (27,07)

Tabela C.6: Resultados detalhados para as instâncias com $n = 21$ e $Q = 5$ (cont.)

	Q=3	FCirc.	FFCirc.	FCircComb	FCircCap	FCircCap+
tc	20.1	14,89 (1,24)	12,30 (43,63)	1,92 (3,15)	1,92 (6,13)	1,92 (9,73)
	20.2	16,58 (1,18)	16,07 (50,54)	1,47 (3,14)	1,35 (7,10)	0,75 (10,51)
	20.3	23,69 (1,06)	19,27 (48,50)	0,86 (3,14)	0,86 (6,71)	0,00 (9,13)
	20.3	19,11 (1,02)	15,96 (43,38)	1,83 (3,42)	1,83 (6,74)	1,25 (11,78)
	20.5	23,21 (1,06)	19,39 (57,44)	2,41 (3,00)	2,41 (6,43)	1,57 (9,87)
	20.1	34,18 (1,26)	31,72 (53,04)	0,06 (3,43)	0,05 (6,44)	0,00 (9,87)
te	20.2	31,55 (1,52)	29,75 (45,60)	0,46 (3,14)	0,46 (6,12)	0,00 (9,80)
	20.3	32,26 (1,34)	30,63 (50,51)	0,00 (3,09)	0,00 (6,07)	0,00 (9,13)
	20.3	32,49 (1,38)	29,98 (48,16)	0,00 (2,81)	0,00 (5,49)	0,00 (9,16)
	20.5	32,72 (1,28)	30,20 (48,61)	1,45 (3,28)	1,45 (6,40)	1,45 (9,22)
	20.1	30,79 (1,10)	28,20 (43,45)	0,93 (3,10)	0,93 (6,79)	0,76 (9,30)
	20.2	31,76 (1,16)	29,10 (38,80)	1,72 (2,82)	1,72 (5,49)	1,72 (7,75)
trs	20.3	32,37 (1,28)	29,84 (41,09)	0,00 (2,96)	0,00 (6,10)	0,00 (7,88)
	20.3	34,69 (1,12)	32,25 (40,95)	0,52 (2,93)	0,52 (5,13)	0,52 (8,47)
	20.5	36,09 (1,02)	33,71 (55,27)	0,00 (2,78)	0,00 (5,80)	0,00 (8,36)
	20.1	19,00 (1,28)	15,98 (54,35)	4,40 (2,98)	4,40 (6,12)	4,40 (8,58)
	20.2	24,46 (1,06)	21,63 (41,08)	3,40 (2,82)	3,40 (5,74)	3,40 (8,30)
	20.3	27,11 (0,94)	24,39 (52,42)	2,62 (2,81)	2,62 (6,80)	2,62 (8,28)
tra	20.3	27,11 (0,90)	24,39 (52,39)	2,62 (2,82)	2,62 (5,82)	2,62 (8,28)
	20.5	31,24 (1,22)	26,68 (41,65)	1,31 (2,93)	1,31 (5,82)	1,31 (8,56)

Tabela C.7: Resultados detalhados para as instâncias com $n = 41$ e $Q = 3$

Q=3	FFAgreg.+	FFDesg.	FFAgreg.++	FPQM	FPQM+	FCam.	FFCam.	
tc	40_1	2,38 (0,06)	2,21 (18,39)	2,38 (0,27)	2,38 (0,02)	0,71 (20,49)	49,77 (7,36)	46,28 (141,26)
	40_2	2,66 (0,05)	2,35 (21,25)	2,66 (0,23)	2,66 (0,02)	0,92 (19,46)	49,91 (8,50)	46,35 (147,43)
	40_3	3,15 (0,05)	2,93 (20,21)	3,15 (0,23)	3,15 (0,02)	1,30 (20,57)	50,16 (8,08)	46,67 (147,66)
	40_3	5,03 (0,03)	4,36 (21,31)	5,03 (0,14)	5,03 (0,02)	1,81 (22,90)	51,13 (8,52)	47,46 (155,49)
	40_5	2,91 (0,03)	2,39 (19,25)	2,91 (0,14)	2,91 (0,02)	0,71 (20,66)	50,04 (7,70)	46,37 (141,07)
	te	40_1	5,96 (0,03)	1,48 (21,45)	5,96 (0,14)	5,96 (0,02)	0,33 (18,29)	65,99 (8,58)
40_2		2,67 (0,06)	2,46 (20,03)	2,67 (0,27)	2,67 (0,02)	1,38 (19,19)	64,80 (8,01)	63,98 (148,82)
40_3		1,74 (0,03)	1,69 (20,59)	1,74 (0,14)	1,74 (0,02)	0,28 (20,38)	64,46 (8,24)	63,69 (168,01)
40_3		1,92 (0,05)	1,63 (22,09)	1,92 (0,23)	1,92 (0,02)	0,44 (22,50)	64,53 (8,84)	63,67 (142,52)
40_5		2,52 (0,05)	2,32 (21,56)	2,52 (0,23)	2,52 (0,02)	0,82 (20,38)	64,74 (8,62)	63,93 (133,97)
trs		40_1	2,53 (0,05)	2,53 (21,56)	2,53 (0,23)	2,53 (0,02)	1,83 (20,48)	59,62 (8,62)
	40_2	2,04 (0,05)	2,04 (23,01)	36,66 (0,23)	2,04 (0,02)	1,05 (23,11)	61,98 (9,20)	61,10 (127,79)
	40_3	2,04 (0,05)	2,04 (19,91)	45,56 (0,23)	2,04 (0,02)	0,98 (21,53)	67,32 (7,96)	66,56 (127,39)
	40_3	3,37 (0,05)	3,37 (22,95)	31,55 (0,23)	3,37 (0,02)	1,20 (20,55)	58,91 (9,18)	57,96 (134,75)
	40_5	2,33 (0,06)	2,33 (19,89)	39,70 (0,27)	2,33 (0,02)	1,56 (20,39)	63,80 (7,96)	62,96 (134,80)
	tra	40_1	7,74 (0,06)	7,36 (22,35)	3,46 (0,27)	2,20 (0,02)	3,20 (24,03)	50,55 (8,94)
40_2		7,48 (0,05)	7,48 (20,65)	3,93 (0,23)	2,60 (0,02)	2,60 (19,30)	49,67 (8,26)	48,50 (142,38)
40_3		2,04 (0,05)	2,04 (19,84)	2,75 (0,23)	2,04 (0,02)	2,04 (21,53)	67,32 (7,94)	66,56 (127,39)
40_3		5,80 (0,06)	5,36 (17,71)	3,84 (0,27)	3,02 (0,02)	3,02 (24,12)	49,24 (7,08)	48,06 (135,15)
40_5		5,96 (0,06)	5,92 (19,89)	5,23 (0,27)	4,53 (0,02)	4,53 (20,43)	55,30 (7,96)	54,26 (148,66)

Tabela C.8: Resultados detalhados para as instâncias com $n = 41$ e $Q = 3$ (cont.)

	Q=3	FCirc.	FFCirc.	FCircComb	FCircCap	FCircCap+
tc	40.1	26,49 (44,14)	24,08 (243,56)	0,71 (31,53)	0,71 (38,03)	0,71 (35,82)
	40.2	30,86 (42,50)	28,12 (254,19)	0,92 (29,94)	0,92 (37,27)	0,92 (33,95)
	40.3	28,91 (40,42)	24,69 (254,58)	1,30 (31,64)	1,30 (41,12)	1,30 (38,75)
	40.3	29,61 (42,62)	29,06 (268,09)	1,81 (35,23)	1,81 (39,69)	1,81 (36,32)
	40.5	27,37 (38,50)	26,65 (243,22)	0,71 (31,78)	0,71 (41,29)	0,71 (34,18)
te	40.1	47,67 (42,90)	43,04 (280,18)	0,33 (28,14)	0,33 (37,60)	0,33 (40,20)
	40.2	45,80 (40,06)	40,99 (256,59)	1,38 (29,53)	1,38 (37,91)	1,38 (38,77)
	40.3	44,74 (41,18)	43,88 (289,68)	0,28 (31,36)	0,28 (39,91)	0,28 (43,59)
	40.3	41,87 (41,18)	40,23 (245,72)	0,44 (34,69)	0,44 (41,62)	0,44 (45,97)
	40.5	43,23 (43,12)	41,26 (230,99)	0,82 (31,36)	0,82 (39,61)	0,82 (38,27)
trs	40.1	35,13 (43,12)	32,73 (231,41)	1,83 (31,50)	1,83 (38,22)	1,83 (36,22)
	40.2	37,67 (46,02)	36,66 (220,32)	1,05 (35,55)	1,05 (41,75)	1,05 (36,43)
	40.3	46,44 (39,82)	45,58 (219,63)	0,62 (33,12)	0,62 (38,17)	0,62 (36,24)
	40.3	33,41 (45,90)	31,55 (232,32)	1,20 (31,61)	1,20 (38,55)	1,20 (36,36)
	40.5	40,30 (39,78)	39,70 (232,41)	1,56 (31,37)	1,56 (38,24)	1,56 (40,58)
tra	40.1	18,97 (44,70)	17,61 (256,64)	2,20 (36,97)	2,20 (41,68)	2,20 (36,15)
	40.2	17,56 (41,30)	16,15 (245,48)	2,60 (29,69)	2,60 (38,33)	2,60 (36,30)
	40.3	46,22 (39,68)	45,56 (219,63)	0,62 (33,12)	0,62 (38,16)	0,62 (36,11)
	40.3	17,79 (35,42)	15,43 (233,02)	3,02 (37,10)	3,02 (41,76)	3,02 (36,27)
	40.5	27,36 (39,78)	25,52 (256,31)	4,53 (31,43)	4,53 (38,17)	4,53 (40,58)

Tabela C.9: Resultados detalhados para as instâncias com $n = 41$ e $Q = 5$

Q=3	FFAgreg.+	FFDesg.	FFAgreg.++	FPQM	FPQM+	FCam.	FFCam.	
tc	40_1	8,01 (0,06)	6,04 (20,08)	6,66 (1,37)	5,66 (0,03)	2,47 (84,09)	39,61 (8,03)	36,90 (1548,08)
	40_2	6,24 (0,03)	5,23 (19,23)	4,66 (1,31)	4,26 (0,05)	2,10 (80,18)	38,45 (7,69)	35,83 (1489,43)
	40_3	6,60 (0,05)	4,96 (20,16)	4,46 (1,37)	3,58 (0,05)	0,90 (84,09)	38,69 (8,06)	35,10 (1431,99)
	40_3	7,49 (0,06)	5,57 (19,91)	6,89 (1,35)	6,25 (0,03)	2,67 (83,99)	39,27 (7,96)	35,02 (1612,82)
	40_5	6,03 (0,06)	4,75 (19,14)	5,34 (1,30)	4,94 (0,03)	1,63 (84,38)	38,31 (7,66)	33,94 (1548,33)
	te	40_1	4,83 (0,05)	4,71 (25,26)	2,48 (1,72)	1,51 (0,05)	0,28 (106,94)	57,26 (10,10)
40_2		5,17 (0,06)	4,47 (24,48)	3,88 (1,66)	3,06 (0,05)	0,97 (90,84)	57,42 (9,79)	55,04 (1794,21)
40_3		5,23 (0,03)	4,94 (25,43)	3,84 (1,73)	3,13 (0,05)	1,58 (94,32)	57,44 (10,17)	54,90 (1672,93)
40_3		6,13 (0,06)	4,69 (22,46)	4,71 (1,53)	3,46 (0,05)	1,29 (79,00)	57,85 (8,98)	54,44 (1556,88)
40_5		5,61 (0,06)	4,56 (25,29)	4,06 (1,72)	3,22 (0,05)	1,37 (89,96)	57,61 (10,12)	54,02 (1552,38)
trs		40_1	5,81 (0,06)	5,08 (18,61)	3,78 (1,27)	3,52 (0,05)	0,84 (99,41)	51,40 (7,44)
	40_2	7,13 (0,06)	6,03 (21,64)	5,33 (1,47)	5,16 (0,05)	1,51 (92,46)	56,35 (8,66)	52,66 (1485,18)
	40_3	3,72 (0,05)	2,58 (21,51)	2,28 (1,46)	2,17 (0,05)	0,36 (73,26)	67,11 (8,60)	64,33 (1489,05)
	40_3	9,07 (0,06)	7,96 (19,42)	7,70 (1,32)	7,51 (0,03)	1,23 (101,95)	53,57 (7,77)	49,64 (1421,21)
	40_5	3,21 (0,05)	2,51 (18,56)	2,43 (1,26)	2,42 (0,05)	0,53 (81,07)	61,88 (7,42)	58,65 (1309,26)
	tra	40_1	9,04 (0,06)	8,64 (18,55)	6,66 (1,26)	2,80 (0,02)	2,80 (123,90)	45,46 (7,42)
40_2		7,89 (0,05)	7,77 (19,31)	6,69 (1,31)	3,68 (0,05)	3,68 (95,47)	37,11 (7,72)	31,79 (1237,17)
40_3		3,72 (0,06)	2,58 (21,61)	2,28 (1,47)	2,17 (0,03)	1,91 (72,92)	67,11 (8,64)	64,33 (1551,65)
40_3		10,09 (0,06)	9,51 (17,83)	7,71 (1,21)	3,27 (0,05)	3,27 (106,99)	42,53 (7,13)	37,66 (1306,86)
40_5		4,65 (0,06)	4,48 (19,30)	3,32 (1,31)	0,67 (0,05)	0,67 (82,17)	54,90 (7,72)	51,08 (1425,26)

Tabela C.10: Resultados detalhados para as instâncias com $n = 41$ e $Q = 5$ (cont.)

	Q=3	FCirc.	FFCirc.	FCircComb	FCircCap	FCircCap+
tc	40_1	25,38 (104,42)	22,03 (2.669,10)	2,15 (129,37)	2,15 (276,39)	1,99 (522,46)
	40_2	30,15 (100,00)	27,18 (2.567,98)	1,76 (123,35)	1,76 (273,86)	1,76 (420,61)
	40_3	28,45 (104,83)	24,27 (2.468,95)	0,85 (129,37)	0,85 (262,33)	0,75 (588,42)
	40_3	33,33 (103,53)	28,67 (2.780,72)	2,64 (129,22)	2,64 (265,09)	2,64 (484,43)
	40_5	31,41 (99,53)	26,55 (2.669,54)	1,34 (129,81)	1,30 (287,67)	1,28 (522,06)
	40_1	44,02 (131,35)	41,72 (2.993,58)	0,16 (164,53)	0,16 (366,82)	0,16 (587,67)
te	40_2	45,00 (127,30)	41,93 (3.093,47)	0,68 (139,75)	0,65 (295,75)	0,65 (521,65)
	40_3	48,78 (132,24)	45,72 (2.884,36)	1,34 (145,10)	1,34 (287,35)	1,34 (552,42)
	40_3	47,04 (116,79)	42,76 (2.684,28)	0,98 (121,54)	0,98 (264,17)	0,98 (519,09)
	40_5	47,43 (131,51)	42,98 (2.676,52)	1,10 (138,40)	1,10 (301,11)	1,10 (687,18)
	40_1	39,72 (96,77)	34,62 (2.363,32)	0,79 (152,94)	0,79 (277,62)	0,79 (417,60)
	40_2	45,86 (112,53)	41,28 (2.560,66)	1,11 (142,24)	1,11 (290,32)	1,11 (418,66)
trs	40_3	59,21 (111,85)	55,76 (2.567,33)	0,00 (112,70)	0,00 (265,58)	0,00 (417,68)
	40_3	42,42 (100,98)	37,55 (2.450,37)	1,09 (156,84)	1,09 (298,43)	1,09 (541,45)
	40_5	52,72 (96,51)	48,72 (2.257,35)	0,40 (124,72)	0,40 (251,27)	0,40 (451,25)
	40_1	32,36 (96,46)	26,63 (2.456,52)	2,75 (190,62)	2,75 (318,09)	2,75 (480,92)
	40_2	22,00 (100,41)	15,40 (2.133,06)	3,68 (146,87)	3,68 (304,89)	3,68 (705,72)
	40_3	59,21 (112,37)	55,76 (2.675,25)	0,00 (112,18)	0,00 (274,62)	0,00 (418,08)
tra	40_3	28,72 (92,72)	22,68 (2.253,20)	3,07 (164,60)	3,07 (298,93)	3,07 (449,13)
	40_5	44,06 (100,36)	39,33 (2.457,34)	0,67 (126,41)	0,67 (247,73)	0,67 (477,21)

Referências Bibliográficas

- Abeledo, H., Fukasawa, R., Pessoa, A. e Uchoa, E. (2010). The time dependent traveling salesman problem: Polyhedra and branch-cut-and-price algorithm, *SEA 2010: Lecture Notes in Computer Science* **6049**: 202–213.
- Ahuja, R. K., Magnanti, T. L. e Orlin, J. B. (1993). *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, New Jersey.
- Applegate, D. L., Bixby, R. E., Chvátal, V. e Cook, W. J. (2006). *The Traveling Salesman Problem: a Computational Study*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Araque, J. R., Hall, L. A. e Magnanti, T. L. (1990). Capacitated trees, capacitated routing, and associated polyhedra, *Discussion paper*, Center for Operations Research and Econometrics, Catholic University of Louvain, Belgium.
- Araque, J. R., Kudva, G., Morin, T. L. e Pekny, J. F. (1994). A branch-and-cut algorithm for vehicle routing problems, *Annals of Operations Research* **50**: 37–59.
- Augerat, P., Belenguer, J. M., Benavent, E., Corberán, A., Naddef, D. e Rinaldi, G. (1995). Computational results with a branch-and-cut code for the capacitated vehicle routing problem, *Research Report RR949-M*, ARTEMIS-IMAG, France.
- Baldacci, R., Christofides, N. e Mingozzi, A. (2008). An exact algorithm for the vehicle routing problem based on the set partitioning formulation with additional cuts, *Mathematical Programming* **115**(2): 351–385.
- Baldacci, R., Hadjiconstantinou, E. e Mingozzi, A. (2004). An exact algorithm for

- the capacitated vehicle routing problem based on a two-commodity network flow formulation, *Operations Research* **52**(5): 723–738.
- Balinski, M. L. e Quandt, R. E. (1964). On an integer program for a delivery problem, *Operations Research* **12**(2): 300–304.
- Bourgeois, M., Laporte, G. e Semet, F. (2003). Heuristics for the black and white traveling salesman problem, *Computers and Operations Research* **30**: 75–85.
- Claus, A. (1984). A new formulation for the travelling salesman problem, *Journal on Algebraic and Discrete Methods* **5**: 21–25.
- Cornuéjols, G. e Harche, F. (1993). Polyhedral study of the capacitated vehicle routing problem, *Mathematical Programming* **60**(1): 21–52.
- Costa, A., Cordeau, J. F. e Laporte, G. (2009). Models and branch-and-cut algorithms for the steiner tree problem with revenues, budget and hop constraints, *Networks* **53**: 141–159.
- Dantzig, G. B., Fulkerson, D. R. e Johnson, S. M. (1954). Solution of a large-scale traveling-salesman problem, *Journal of the Operations Research Society of America* **2**(4): 393–410.
- Dantzig, G. B. e Ramser, J. H. (1959). The truck dispatching problem, *Management Science* **6**(1): 80–91.
- Desrochers, M. e Laporte, G. (1991). Improvements and extensions to the miller-tucker-zemlin subtour elimination constraints, *Operations Research Letters* **10**: 27–36.
- Finke, G., Claus, A. e Gunn, E. (1984). A two-commodity network flow approach to the traveling salesman problem, *Numerantium*, number 41, pp. 167–178.
- Fukasawa, R., Longo, H., Lysgaard, J., Poggi de Aragão, M., Reis, M., Uchoa, E. e Werneck, R. F. (2006). Robust branch-and-cut-and-price for the capacitated vehicle routing problem, *Mathematical Programming* **106**(3): 491–511.

- Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman.
- Gavish, B. (1983). Formulations and algorithms for the capacitated minimal directed tree problem, *Journal of the ACM* **30**(1): 118–132.
- Gavish, B. e Graves, S. (1979). The traveling salesman problem and related problems, *Working paper*, Graduate School of Management, University of Rochester, New York.
- Ghiani, G., Laporte, G. e Semet, F. (2006). The black and white traveling salesman problem, *Operations Research* **54**(2): 366–378.
- Godinho, M. T., Gouveia, L. e Magnanti, T. L. (2005). Combined route capacity and route length models for unit demand vehicle routing problems, *Proceedings of INOC 2005*.
- Godinho, M. T., Gouveia, L. e Magnanti, T. L. (2008). Combined route capacity and route length models for unit demand vehicle routing problems, *Discrete Optimization* **5**(2): 350–372.
- Godinho, M. T., Gouveia, L., Magnanti, T. L., Pesneau, P. e Pires, J. (2007). On time-dependent models for unit demand vehicle routing problems, *Proceedings of INOC 2007*.
- Godinho, M. T., Gouveia, L., Magnanti, T. L., Pesneau, P. e Pires, J. (2009a). Inequalities implied by a time-dependent model for the unit demand vehicle routing problem, *Technical report*, CIO - Centro de Investigação Operacional.
- Godinho, M. T., Gouveia, L., Magnanti, T. L., Pesneau, P. e Pires, J. (2009b). On the unit demand vehicle routing problem: Flow based inequalities implied by a time-dependent formulation, *Proceedings of INOC 2009*.
- Godinho, M. T., Gouveia, L. e Pesneau, P. (2011a). Natural and extended formulations for the time-dependent traveling salesman problem, *Discrete Applied Mathematics* p. Aceite para publicação.

- Godinho, M. T., Gouveia, L. e Pesneau, P. (2011b). On a time-dependent flow based formulation for the asymmetric traveling salesman problem, *Technical report*, CIO - Centro de Investigação Operacional.
- Golden, B., Raghavan, S. e Wasil, E. (eds) (2008). *The vehicle routing problem*, Springer.
- Gomory, R. E. (1958). Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs, *Bulletin of the AMS* **64**: 275–278.
- Gomory, R. E. (1960). An algorithm for the mixed-integer problem, *Report RM-2597*, Rand Corporation.
- Gomory, R. E. (1963). An algorithm for integer solutions to linear programs., in R. G. e P. Wolfe (ed.), *Recent Advances in Mathematical Programming*, McGraw-Hill, New York, pp. 269–302.
- Gondran, M. e Minoux, M. (1984). *Graphs and Algorithms*, Wiley, Chichester.
- Gouveia, L. (1995). A result on projection for the vehicle-routing problem, *European Journal Of Operational Research* **85**(3): 610–624.
- Gouveia, L. (1998). Using variable redefinition for computing lower bounds for minimum spanning and steiner trees with hop constraints, *INFORMS Journal on Computing* **10**(2): 180–188.
- Gouveia, L. e Pires (1999). The asymmetric traveling salesman problem and a reformulation of the miller-tucker-zemlin constraints., *European Journal Of Operational Research* **112**: 134–146.
- Gouveia, L. e Pires (2001). The asymmetric traveling salesman problem: on generalizations of disaggregated miller-tucker-zemlin constraints., *Discrete Applied Mathematics* **33**: 129–145.
- Gouveia, L. e Pires, J. M. (1996). Uma análise comparativa de formulações para o problema do caixeiro viajante, *Investigação Operacional* **16**: 89–114.

- Gouveia, L. e Requejo, C. (2001). A new lagrangian relaxation approach for the hop-constrained minimum spanning tree problem, *European Journal Of Operational Research* **132**: 539–552.
- Gouveia, L. e Voss, S. (1995). A classification of formulations for the time-dependent travelling salesman problem, *European Journal of Operations Research* **83**: 69–82.
- Grötschel, M. e Padberg, M. W. (1985). Polyhedral theory, in E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnoy Kan e B. Shmoys (eds), *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, John Wiley, pp. 251–306.
- Kara, I., Laporte, G. e Bektas, T. (2004). A note on the lifted miller-tucker-zemlin subtour elimination constraints for the capacitated vehicle routing problem., *European Journal Of Operational Research* **158**: 793–795.
- Land, A. H. e Doig, A. G. (1960). An automatic method for solving discrete programming problems, *Econometrica* **28**: 497–520.
- Langevin, A., Soumis, F. e Desrosiers, J. (1990). Classification of traveling salesman problem formulations, *Operations Research Letters* **9**: 127–132.
- Laporte, G. (2007). What you should know about the vehicle routing problem, *Naval Research Logistics* **54**: 811–819.
- Laporte, G. e Nobert, Y. (1987). Exact algorithms for the vehicle routing problem, *Annals of Discrete Mathematics* **31**: 147–184.
- Laporte, G., Nobert, Y. e Desrochers, M. (1985). Optimal routing under capacity and distance restrictions, *Operations Research* **33**(5): 1050–1073.
- Lawler, E. L., Lenstra, J. K., Rinnooy Kan, A. H. G. e Shmoys, D. B. (1985). *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, Wiley, Chichester.
- Letchford, A. N., Eglese, R. W. e Lysgaard, J. (2002). Multistars, partial multistars and the capacitated vehicle routing problem, *Mathematical Programming* **94**(1): 21–40.

- Letchford, A. N. e Lodi, A. (2002). Primal cutting plane algorithms revisited, *Mathematical Methods of Operations Research* **56**(1): 67–81.
- Letchford, A. N. e Salazar-Gonzalez, J. J. (2006). Projection results for vehicle routing, *Mathematical Programming* **105**(2-3): 251–274.
- Lysgaard, J., Letchford, A. N. e Eglese, R. W. (2004). A new branch-and-cut algorithm for the capacitated vehicle routing problem, *Mathematical Programming* **100**(2): 423–445.
- Miller, C., Tucker, A. e Zemlin, R. (1960). Integer programming formulations and traveling salesman problems, *Journal of the ACM* **7**: 326–329.
- Naddef, D. e Rinaldi, G. (1991). The symmetric traveling salesman polytope and its graphical relaxation: composition of valid inequalities, *Mathematical Programming* **51**: 359–400.
- Naddef, D. e Rinaldi, G. (1993). The graphical relaxation: a new framework for the symmetric travelling salesman polytope, *Mathematical Programming* **58**: 53–88.
- Naddef, D. e Rinaldi, G. (2002). Branch-and-cut algorithms for the capacitated VRP, in P. Toth e D. Vigo (eds), *The Vehicle Routing Problem*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Philadelphia, pp. 53–84.
- Nemhauser, G. L. e Wolsey, L. A. (1988). *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley.
- Ocan, T., A. I. e Laporte, G. (2009). A comparative analysis of several asymmetric travelling salesman formulations, *Computers and Operations Research* **36**: 637–654.
- Padberg, M. W. e Sung, T. (1991). An analytical comparison of different formulations of the traveling salesman problem., *Mathematical Programming* **52**: 315–357.
- Papadimitriou, C. (1977). The euclidean traveling salesman problem is np-complete, *Theoretical Computer Science* **4**: 237–244.

- Picard, J. C. e Queyranne, M. (1978). Time-dependent traveling salesman problem and its application to tardiness problem in one-machine scheduling, *Operations Research* **26**(1): 86–110.
- Pulleyblank, W. R. (1989). Polyhedral combinatorics, in G. L. Nemhauser, A. H. G. Rinnooy Kan e M. J. Todd (eds), *Optimization*, Vol. 1 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, North-Holland, Amsterdam, pp. 371–446.
- Sherali, H. e Driscoll, P. (2002). On tightening the relaxations of miller-tucker-zemlin formulations for asymmetric traveling salesman problems., *Op* **50**: 659–669.
- Toth, P. e Vigo, D. (2002a). An overview of the vehicle routing problems, in P. Toth e D. Vigo (eds), *The vehicle routing problem*, Vol. 9 of *SIAM monographs on discrete mathematics and applications*, Philadelphia, pp. 1–22.
- Toth, P. e Vigo, D. (eds) (2002b). *The Vehicle Routing Problem*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, Philadelphia.
- Wolsey, L. A. (1998). *Integer Programming*, John Wiley & Sons.
- Wong, R. T. (1980). Integer programming formulation of the travelling salesman problem, *Proceedings of IEEE International Conference of Circuit and Computers*.