

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM: Ciências Actuarias

AVALIAÇÃO DE DERIVADOS DE CATÁSTROFE

MARTA FILIPA GOMES DINIS

Orientação: Professor Doutor João Miguel Espiguiha Guerra

Júri:

Presidente: Professor Doutor Onofre Alves Simões

Vogais: Professor Doutor Alfredo Duarte Egídio dos Reis

Professor Doutor João Miguel Espiguiha Guerra

Outubro/2011

AVALIAÇÃO DE DERIVADOS DE CATÁSTROFE

Marta Filipa Gomes Dinis

Mestrado em: Ciências Actuarias

Orientador: Professor Doutor João Miguel Espiguinha Guerra

Provas concluídas em: Outubro de 2011

Resumo

Nas últimas décadas observou-se o desenvolvimento de produtos financeiros destinados a cobrir riscos catastróficos. Os derivados de catástrofe são instrumentos financeiros baseados num índice de perdas, como por exemplo o índice PCS, que reflecte as perdas da indústria seguradora ocorridas num determinado período.

A presente dissertação pretende estudar duas metodologias de avaliação de derivados de catástrofe utilizando técnicas da transformada de Fourier para determinar uma fórmula analítica para o preço das opções transaccionadas.

O índice de perdas na primeira metodologia (modelo de Mürmann) é modelado como um processo de Poisson composto, qualquer que seja o instante em análise até à maturidade. No segundo modelo de avaliação (modelo de Biagini, Bregman e Meyer-Brandis) é feita a distinção entre o período de perdas, durante o qual o evento catastrófico pode ocorrer, e o período de desenvolvimento, no qual as perdas registadas no período anterior são reestimadas. Supõe-se que o índice de perdas é modelado por um processo de Poisson composto no período de perdas e as perdas são reestimadas por um factor obtido por um processo de Lévy exponencial.

Os modelos propostos são aplicados a dados de opções *call spread*, calculando-se o seu preço com base no algoritmo da transformada rápida de Fourier e comparando-se os resultados com os preços de mercado.

Palavras-chave:

Opções PCS, índice de perdas, processo de Poisson composto, processo de Lévy, transformada de Fourier, transformada rápida de Fourier.

PRICING CATASTROPHE DERIVATIVES

Marta Filipa Gomes Dinis

Master in: Actuarial Science

Advisor: Professor Doutor João Miguel Espiguiha Guerra

Approved in: October, 2011

Abstract

In the last decades we have seen the development of financial products to cover catastrophe risks. Catastrophe derivatives are financial instruments based on a loss index, such as the PCS index, which reflect estimated insured industry losses occurred over a certain period.

The present dissertation intends to study two valuation models for catastrophe derivatives using Fourier transform techniques to provide analytical formulas for the prices of traded options.

The loss index in the first methodology (Mürmann's model) is modeled as a compound Poisson process, whatever the instant until maturity. In the second valuation model (model of Biagini, Bregman and Meyer-Brandis) we distinguish the loss period, during which the catastrophe event may happen, and the development period, during which the losses registered during the previous period are reestimated. We assume that the loss index is modeled by a compound Poisson process in the loss period and the losses are reestimated by a factor given by an exponential Lévy process.

The proposed models are tested with data of call spread options, we calculate the price with the fast Fourier transform algorithm and compare with the market prices.

Keywords:

PCS options, loss index, compound Poisson process, Levy process, Fourier transform, fast Fourier transform.

Índice

Agradecimentos	10
1. Introdução	11
2. Revisão da Literatura.....	13
2.1 Instrumentos Financeiros.....	13
2.1.1 <i>Industry Loss Warranties</i>	14
2.1.2 Securitização.....	15
2.1.3 Derivados.....	16
2.2 Modelos de avaliação	19
3. Modelos de Avaliação.....	22
3.1 Modelo de Mürmann	22
3.1.1 Índice de perdas	23
3.1.2 Medidas de probabilidade equivalentes.....	25
3.1.3 Avaliação neutra face ao risco.....	27
3.1.4 Aplicação	31
3.1.5 Transformada rápida de Fourier	32
3.2 Modelo BBM.....	35
3.2.1 Índice de perdas	36
3.2.2 Medidas de probabilidade equivalentes.....	39
3.2.3 Avaliação neutra face ao risco.....	40
3.2.4 Aplicação	44
3.2.5 Transformada rápida de Fourier	47
4. Aplicação Prática.....	51
4.1 Modelo de Mürmann	52

4.1.1 Transformada rápida de Fourier	52
4.1.2 Resultados.....	54
4.2 Modelo BBM.....	57
4.2.1 Processo <i>Variance Gamma</i>	57
4.2.2 Transformada rápida de Fourier	58
4.2.3 Resultados.....	60
4.3 Comparação dos modelos.....	61
5. Conclusão	63
Bibliografia.....	66
Anexo A - Catástrofes	69
Anexo B – Transformada rápida de Fourier, modelo Mürmann	70

Índice de Quadros

Quadro 4.1 – Preços das opções <i>National PCS call spread</i>	51
Quadro 4.2 – Parâmetros estimados – Mürmann	54
Quadro 4.3 – Parâmetros estimados – BBM	60
Quadro B.1 – Parâmetros estimados	71

Índice de Figuras

Figura 4.1 – Calibragem do modelo de Mürmann – Caso 1	55
Figura 4.2 – Calibragem do modelo de Mürmann – Caso 2	56
Figura 4.3 – Calibragem do modelo BBM	61
Figura A.1 – Número de catástrofes ocorridas entre 1980 e 2010	69
Figura A.2 – Perdas suportadas pelo sector segurador entre 1980 e 2010	69
Figura B.1 – Calibragem do modelo de Mürmann – Caso 1	71
Figura B.2 – Calibragem do modelo de Mürmann – Caso 2	72

Glossário

Siglas e Abreviaturas

BBM - Biagini, Bregman e Meyer-Brandis.

CBoT - Chicago Board of Trade.

i.i.d. - Independentes e identicamente distribuídas.

PCS - Property Claim Services.

TRF - Transformada rápida de Fourier.

Notação

$\hat{f}(\cdot)$ - Transformada de Fourier.

\mathcal{F} - σ -álgebra dos acontecimentos.

$G(\cdot)$ - Função de distribuição do montante de perdas.

$h(\cdot)$ - Função de *payoff*.

K - Preço de exercício da opção.

L_t - Perdas acumuladas resultantes de catástrofes ocorridas até ao instante t .

N_t - Número de eventos de catástrofe ocorridos até ao instante t .

\mathbb{P} - Medida de probabilidade de referência.

Q - Medida equivalente de martingala.

T - Maturidade no modelo de Mürmann.

T_1 - Instante final do período de perdas.

T_2 - Maturidade no modelo BBM e instante final do período de desenvolvimento.

r - Taxa de juro.

Y_i - Montante de perdas.

Z_u - Factor de reestimação das perdas.

π_t^Q - Processo de preço da opção.

Agradecimentos

Ao Professor Doutor João Miguel Espiguiha Guerra pela orientação e aconselhamento prestados, ao longo da realização deste trabalho.

Ao Conselho Directivo do Instituto de Seguros de Portugal e ao Dr. José Pavão Nunes, por me terem proporcionado a frequência deste mestrado.

A todos os elementos do Departamento de Estatística e Controlo de Informação do Instituto de Seguros de Portugal, pelo apoio, compreensão e tempo disponibilizado.

Aos meus amigos, pelo incentivo, apoio e confiança transmitidos, em particular à Sofia Frederico, por ouvir os muitos desabafos em momentos mais complicados.

Aos meus pais, pelo seu apoio incondicional e compreensão em todas as etapas da minha vida.

1. Introdução

Nas últimas duas décadas registaram-se inúmeras catástrofes causadas quer pela natureza quer por intervenção humana, com acréscimo da intensidade dos fenómenos e das perdas resultantes (ver Figuras A.1 e A.2 – Anexo A) pelo que o sector segurador teve necessidade de procurar soluções alternativas ao tradicional contrato de resseguro para a transferência dos riscos catastróficos assumidos. Em resposta, os mercados de capitais desenvolveram novos instrumentos financeiros cujo *payoff* depende da ocorrência de fenómenos catastróficos pré-definidos no contrato, como são exemplo os derivados de catástrofe (opções e futuros).

Os derivados de catástrofe baseados num índice de perdas foram criados e comercializados pela primeira vez em 1992, impulsionando o estudo de métodos de avaliação dos mesmos. O índice de perdas subjacente a estes produtos não é transaccionado em bolsa o que significa que o mercado é incompleto, questionando-se deste modo qual o procedimento adequado para determinar o preço dos mesmos.

É neste enquadramento que foi desenvolvida a presente dissertação cujo objectivo é analisar duas metodologias de avaliação de derivados de catástrofe baseados em índices, apresentadas em Mürmann (2001) e Biagini, Bregman e Meyer-Brandis (2008).

O corpo deste trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo expõem-se de forma sucinta os mecanismos de transferência de riscos para os mercados financeiros e é feita uma revisão da literatura mais relevante sobre a avaliação dos derivados.

No segundo capítulo procede-se à apresentação dos pressupostos base das metodologias de avaliação e à modelação do índice de perdas. No modelo proposto por Mürmann o índice de perdas é modelado por um processo de Poisson composto, não sendo feita a

distinção entre o período de perdas e o período de desenvolvimento, que caracteriza a estrutura temporal das opções de catástrofe. No segundo modelo, que pode ser interpretado como uma generalização do anterior, é feita a distinção entre os dois períodos, considerando-se que o índice no período de perdas é caracterizado por um processo de Poisson composto e no período de desenvolvimento o índice é reestimado por um factor obtido por um processo de Lévy exponencial.

Introduzindo o conceito de medida equivalente de martingala são determinadas as fórmulas explícitas para o preço das opções de estilo europeu aplicando técnicas baseadas no conceito de transformada de Fourier. Estabelecidas as fórmulas, procede-se pela primeira vez (não se conhecem estudos prévios que considerem este tema), à apresentação da transformada rápida de Fourier enquanto algoritmo utilizado para a avaliação numérica do preço das opções.

No último capítulo é feita uma aplicação prática da calibragem dos modelos apresentados para opções *call spread* e comparam-se os resultados obtidos por aplicação das duas metodologias.

2. Revisão da Literatura

Este capítulo tem como objectivo apresentar os instrumentos financeiros disponíveis no mercado que permitem às empresas de seguros a transferência de riscos catastróficos, tais como a ocorrência de furacões, tornados ou sismos, e o enquadramento de trabalhos desenvolvidos no âmbito da avaliação dos derivados.

2.1 Instrumentos Financeiros

As empresas de seguros assumem riscos de natureza diversa, em troca do recebimento de prémios, e de modo a garantir uma cobertura eficaz dos mesmos procedem à sua diversificação, o que se revela difícil no caso dos riscos catastróficos. O mercado de resseguro é o mercado tradicional para transferência de riscos. No entanto, a ocorrência de catástrofes naturais com elevados montantes de perdas e a consequente insolvência de algumas empresas no início da década de 90 impulsionou a procura de novos mecanismos para a transferência dos riscos. Os mercados financeiros apresentaram-se como uma alternativa em virtude da sua potencial capacidade de absorver riscos de catástrofe, com a transacção de novos instrumentos financeiros.

Estes novos instrumentos podem ser classificados em três categorias: *Industry loss warranties (ILWs)*, securitização e derivados. Para efeitos de avaliação considerar-se-á apenas os derivados, contudo será feita uma breve caracterização de todos.

2.1.1 *Industry Loss Warranties*

Os *ILWs* (também conhecidos como *Original loss warranties*) são instrumentos baseados em índices e cuja estrutura é semelhante a um contrato de resseguro ou contrato de derivado. O *payoff* do produto está dependente de dois *triggers*, o primeiro consiste na indemnização (perdas em que o comprador incorreu) e o segundo corresponde às perdas sofridas pela indústria, nomeadamente a empresa de seguros recebe os *payoffs* se as suas perdas excederem o limite de retenção ($trigger_{ret}$) e se o índice atingir um valor pré-definido ($trigger_{index}$). A estrutura referida pode ser representada com base no seguinte *trigger* binário:

$$Payoff\ trigger_{evento} = \begin{cases} 1 & \left\{ \begin{array}{l} \text{se } perda_{evento} > trigger_{ret} \\ \text{e} \\ \text{se } perda_{evento, indústria} > trigger_{index} \end{array} \right. \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} .$$

O *trigger* correspondente às perdas da indústria, na maioria dos casos, está associado aos índices PCS, *sigma* da Swiss Re ou *NatCat Service* da Munich Re.

No mercado é possível encontrar diferentes tipos de *ILW* construídos com base na localização geográfica do evento, no tipo de risco a cobrir e no montante das perdas. O *trigger* das perdas da indústria pode variar dependendo do montante ou da área geográfica considerada, sendo ainda possível admitir-se um valor máximo acima do qual não é efectuado nenhum *payoff*, como por exemplo um *ILW* que admite pagar perante a ocorrência de um furacão na Florida cujas perdas da indústria excedam o montante de 20 biliões de dólares mas sejam inferiores a 30 biliões. Para mais informação sobre este instrumento, ver por exemplo Sigma Nr. 4 (2009).

2.1.2 Securitização

O furacão Andrew, em conformidade com o que foi referido previamente, impulsionou o aparecimento de instrumentos que possibilitassem a transferência de riscos de catástrofe para o mercado de capitais, tendo-se verificado que a principal forma de securitização de riscos catastróficos Não Vida corresponde a *cat bonds*, obrigações cujo *payoff* depende da ocorrência de um determinado evento pré-definido para o qual estão estabelecidos *triggers*. Estas obrigações visam proteger as empresas face a perdas avultadas resultantes da ocorrência de eventos catastróficos, funcionando como uma alternativa ao resseguro tradicional ou como uma protecção adicional.

A primeira obrigação bem sucedida foi emitida pela Hannover Re em 1994, com um capital em risco de 85 milhões de dólares. Desde que foram emitidas as primeiras *cat bonds* o mercado tem verificado uma grande evolução, existindo actualmente um mercado mais estabilizado. As obrigações mais conhecidas e transaccionadas são associadas a eventos catastróficos tais como furacões, sismos e cheias, apresentando a seguinte estrutura de funcionamento.

A operação tem início com a criação do *special purpose vehicle (SPV)* que após formalizado o contrato com a empresa de seguros, emite *cat bonds* para os investidores e faz investimentos considerados seguros. Simultaneamente, a empresa de seguros efectua o pagamento de prémios ao *SPV*, em troca de cobertura. Os prémios e o retorno dos investimentos seguros são utilizados para o pagamento dos juros aos investidores. É ainda efectuado um contrato *swap*, de modo a que o retorno dos investimentos seguros esteja indexado à *London interbank offered rate (LIBOR)* ou a outra taxa de juro de referência. Os investidores ao exporem-se ao risco da empresa de seguros recebem a

LIBOR e um *spread* do prêmio de risco. No caso de se verificar a ocorrência do evento catastrófico pré-definido o investidor pode perder os juros, o capital ou ambos.

As *cat bonds* em consequência dos eventos subjacentes e da sua reduzida liquidez apresentam *yields* elevadas como forma de compensarem os investidores. No que respeita ao *rating* das obrigações, em geral ele é inferior a BBB¹ (*Investment grade*).

O mercado das *cat bonds* inicialmente considerava apenas riscos catastróficos Não Vida. Contudo, em 2003 e 2004 foram emitidas as primeiras obrigações associadas a eventos de mortalidade (*extreme mortality bonds*) e de longevidade (*longevity bonds*), respectivamente.

No caso de se pretender obter mais detalhes sobre securitização, aconselha-se a leitura de Sigma Nr. 7 (2006).

2.1.3 Derivados

Os derivados de catástrofe são contratos que tal como os *ILWs* dependem de índices pré-definidos, sendo a maioria relacionados com riscos nos E.U.A.

O mercado de derivados de catástrofe teve início em Dezembro de 1992 com a Chicago Board of Trade (CBoT) a desenvolver e emitir futuros e opções baseados em índices calculados pela empresa de estatística Insurance Service Office (ISO). O índice correspondia ao quociente das perdas trimestrais da empresa pelo total de prémios adquiridos e era calculado a partir de dados reportados por cerca de 100 empresas de seguros para riscos específicos. No caso dos contratos de futuros, o preço de referência estava definido como 25.000 dólares por cada ponto do quociente.

¹ O *rating* indicado corresponde à classificação do *Standard and Poor's* ou equivalente.

No entanto, os produtos acabariam por ser retirados do mercado devido ao reduzido volume de transacções e em Setembro de 1995 surgiu uma nova geração de opções, as opções PCS, baseadas em índices publicados diariamente pela Property Claim Services (PCS). Os índices reflectem as perdas da indústria seguradora ocorridas num determinado período, expressas em 100 milhões de dólares e representam diferentes eventos de catástrofe, existindo na totalidade 9 índices que podem ser desagregados em três índices referentes a estados americanos (Florida, Califórnia e Texas), cinco regionais (Este, Nordeste, Sudeste, Centro-Oeste e Oeste) ou um nacional. Na maturidade, cada ponto do índice superior ao preço de exercício da opção corresponde a 200 dólares.

As opções PCS podem ser transaccionadas como *calls*, *puts* ou *spreads* de estilo europeu, com contratos de “*small cap*” se as perdas da indústria forem inferiores a 20 biliões de dólares ou “*large cap*” se as perdas variarem entre 20 e 50 biliões de dólares. A estrutura temporal das opções PCS pode ser desagregada em dois períodos, o de perdas e o de desenvolvimento. A catástrofe deve ocorrer durante o período de perdas de forma às perdas resultantes da mesma serem consideradas no índice, podendo o período ser trimestral ou anual dependendo do contrato².

Decorrido o período de perdas estipulado no contrato, inicia-se o período de desenvolvimento, que pode ser de 6 ou 12 meses, durante o qual a empresa PCS procede à estimação e reestimação de catástrofes que ocorreram no período de perdas e continuam a afectar os índices PCS. O contrato vence no final do período de desenvolvimento, apesar do índice PCS poder continuar a ser alterado.

² O período de perdas dos contratos da Califórnia e Oeste são anuais e os restantes são trimestrais, excepto o contrato Nacional que possibilita ambas as durações.

No ano de 1997 começaram também a ser transaccionados derivados na Bermuda Commodities Exchange (BCOE) baseados no índice Guy Carpenter Catastrophe (GCCCI) que reflectia as perdas originadas por fenómenos climatéricos em território americano.

Estes produtos apesar de diferenciados dos primeiros derivados emitidos pela CBoT continuaram a verificar um reduzido número de transacções. No entanto, na sequência das perdas avultadas registadas pelos furacões Katrina, Rita e Wilma em 2005 e da crise financeira, os mercados procederam à criação de novos derivados. Actualmente, são transaccionados contratos associados a furacões na Chicago Mercantile Exchange (CME), Insurance Futures Exchange Services (IFEX) e Eurex.

Os contratos comercializados na CME baseiam-se no CME Hurricane Index (CHI) que mede os danos potenciais provocados por um furacão combinando o raio e a velocidade máxima sustentada do vento do furacão ao chegar a terra. O índice CHI é expresso em pontos, cada um com o valor de 1.000 dólares. Recentemente, a CME emitiu contratos sazonais com perdas binárias.

A IFEX / Chicago Climate Futures Exchange em Setembro de 2007 emitiu *event-linked futures* associados ao risco de tempestade nos E.U.A. e prevê-se a emissão de contratos para cobertura de outros riscos e de outras regiões. Os contratos negociados na Eurex são similares aos da IFEX.

A New York Mercantile Exchange (NYMEX) em Março de 2007 começou novamente a transaccionar futuros e opções de catástrofe baseados no índice Re-Ex da Gallagher Re (actual Aon Re Global) que contém as perdas estimadas para todos os riscos considerados pela PCS excepto os riscos de sismo e de terrorismo. No entanto, em Abril de 2009 a NYMEX deixou de explorar esses contratos.

Para mais informações e detalhes sobre derivados de catástrofe pode-se consultar, por exemplo, Christensen (1998) e Sigma Nr. 4 (2009).

2.2 Modelos de avaliação

Nos últimos anos têm sido desenvolvidos inúmeros trabalhos de investigação relacionados com a problemática da avaliação de derivados de catástrofe.

No artigo de Cummins e Geman (1993) foi apresentado um dos primeiros modelos na literatura para o caso de futuros de catástrofe, cuja abordagem de avaliação tem em conta as técnicas de avaliação de opções asiáticas. O valor agregado dos sinistros

ocorridos até ao instante $t \in [0, T]$ é definido por $L_t = \int_0^t S_s ds$, com S_t a ser descrito

pela equação diferencial estocástica $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + k dN_t$, em que W_t

corresponde a um movimento Browniano, N_t um processo de Poisson de intensidade

λ e k uma constante positiva que representa o acréscimo das perdas decorrentes do evento.

Em Geman e Yor (1997) é obtida uma solução semi-analítica para o preço de opções de catástrofe, cujo índice de perdas subjacente não é transaccionado. Neste trabalho é feita uma desagregação da estrutura temporal do derivado em dois períodos, o de perdas quando $t \in [0, T_1]$ e o de desenvolvimento quando $t \in [T_1, T]$. A equação que descreve

L_t neste caso vem: $dL_t = \begin{cases} S_t dt + \theta dN_t & , \text{se } t \in [0, T_1] \\ S_t dt & , \text{se } t \in [T_1, T] \end{cases}$, em que S_t representa um

movimento Browniano geométrico, N_t um processo de Poisson de intensidade λ e θ

uma constante positiva que representa a magnitude dos incrementos.

Christensen (1999) retoma a desagregação da estrutura temporal em dois períodos considerada em Geman e Yor (1997), modelando o índice da forma $L_t = L_0 e^{X_t} - L_0$,

com X_t a corresponder a um processo de Lévy. No período de perdas, X_t é modelado

como um processo de Poisson composto $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, no qual N_t designa um processo

de Poisson de intensidade λ e as variáveis Y_i têm distribuição exponencial de

parâmetro α . Para o período de desenvolvimento, X_t é descrito por $X_t = X_{\tau_1} + \sum_{i=1}^{\tilde{N}_{t-\tau_1}} \tilde{Y}_i$,

em que \tilde{N}_t é um processo de Poisson composto e as variáveis \tilde{Y}_i seguem uma distribuição Normal.

Aase (1999) modela o índice de perdas com recurso a um processo de Poisson composto com saltos de amplitude aleatória para a avaliação de futuros e opções sobre

futuros. O processo de perdas é representado por $L_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, no qual, tal como nos

artigos anteriormente mencionados, N_t corresponde a um processo de Poisson de

intensidade λ e as variáveis Y_i positivas, independentes e identicamente distribuídas

(i.i.d.), independentes do processo N , têm distribuição Gama. As fórmulas de preço são

determinadas com base no pressuposto das preferências dos participantes do mercado

seguirem uma função de utilidade exponencial negativa $u(x, t) = e^{-(\alpha x + \rho t)}$.

Dassios e Jang (2003) estudam a avaliação de derivados de catástrofe com recurso ao

processo de Cox para modelar os sinistros ocorridos e ao processo de *shot noise* para a

função de intensidade de sinistros. O processo λ_t é utilizado para gerar o processo N_t

funcionando como a sua intensidade. Este artigo introduz flexibilidade à hipótese da

intensidade de ocorrência de sinistros ser determinística ao considerar o processo de

shot noise $\lambda_t = \lambda_0 e^{-\delta t} + \sum_{i: s_i \leq t} y_i e^{-\delta(t-s_i)}$, tal como definido em Cox e Isham (1980). A

avaliação dos derivados é desenvolvida sob o pressuposto de ausência de arbitragem,

utilizando para efeitos da determinação da medida equivalente de martingala, a transformada de Esscher.

3. Modelos de Avaliação

O desenvolvimento de derivados que permitissem fazer a cobertura, por parte das empresas de seguros, de riscos de catástrofe impulsionou o estudo de diferentes modelos de avaliação dos mesmos, tal como referido no capítulo anterior. Contudo, na prática verificam-se algumas dificuldades na avaliação resultantes do mercado ser incompleto e o índice subjacente ao derivado apresentar um comportamento estocástico, não estando associado a um activo negociado em bolsa.

No presente trabalho serão expostas duas metodologias de avaliação de opções destinadas a cobrir riscos catastróficos, usando técnicas da transformada de Fourier para a determinação das fórmulas de preço.

3.1 Modelo de Mürmann

A primeira metodologia em análise, apresentada em Mürmann (2001), propõe-se modelar o índice de perdas PCS por um processo de Poisson composto.

A incerteza do mercado é modelada pelo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, no qual Ω representa o espaço de resultados, \mathcal{F} é o σ -álgebra dos acontecimentos em Ω e \mathbb{P} é a medida de probabilidade definida sobre \mathcal{F} . Por hipótese, considera-se que a maturidade do derivado, definida por T , é finita e o mercado é composto por derivados de estilo europeu³ cujo *payoff* depende do valor do índice de perdas na maturidade. O índice de perdas é descrito pelo processo estocástico $L = (L_t)_{0 \leq t \leq T}$, no qual L_t representa as perdas acumuladas da indústria resultantes de catástrofes ocorridas até ao instante t .

³ Os derivados de estilo europeu apenas podem ser exercidos no momento da maturidade.

No caso dos investidores, pressupõe-se que eles têm acesso à evolução histórica do índice, sendo o fluxo de informação dado pela filtração $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ de σ -álgebras geradas pelo processo estocástico com $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Definição 3.1: Uma filtração é uma família crescente de σ -álgebras $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, ou seja, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ se $s \leq t$.

Em relação à filtração $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, considera-se que a hipótese usual é verificada, isto é, são satisfeitas as condições:

- (i) \mathcal{F}_0 contém todos os conjuntos \mathbb{P} -nulos de \mathcal{F} ; e
- (ii) $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$, para todo o $t \in [0, T]$ (filtração contínua à direita).

Assume-se adicionalmente a existência de um activo livre face ao risco, cujo processo de preço $B = (B_t)_{0 \leq t \leq T}$ é definido pela equação linear de primeira ordem

$$\begin{cases} dB_t = r_t B_t dt \\ B_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right),$$

com r_t a representar a taxa de juro, que por simplificação de cálculos se assumiu determinística.

3.1.1 Índice de perdas

Os modelos de avaliação básicos associados a riscos financeiros consideram normalmente processos estocásticos contínuos, como por exemplo o modelo de Black-Scholes (ver Black e Scholes (1973)). Contudo, no caso de riscos actuariais e em particular o risco catastrófico, os sinistros originam alterações inesperadas no processo

estocástico associado. Os fenómenos considerados nos derivados em estudo geram sinistros de grande magnitude, tendo-se considerado a abordagem apresentada em Aase (1999) na qual o índice de perdas L corresponde a um processo de Poisson composto.

Definição 3.2: Um processo estocástico $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$ é um processo de Poisson composto

homogéneo se for definido por $L_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, em que N_t é um processo de Poisson de

intensidade λ e as variáveis Y_i são i.i.d. e independentes do processo.

Assim, o índice de perdas é modelado pelo processo estocástico L_t , em que N_t representa o processo de contagem dos eventos de catástrofe ocorridos até ao instante t e as variáveis Y_i que designam o montante das perdas são i.i.d. positivas e independentes do processo N , cuja função de distribuição G tem suporte $[0, \infty)$. O processo L tem, deste modo, os parâmetros $(\lambda, dG(y))$ e assume-se que se trata de um processo homogéneo com incrementos independentes pertencente à classe dos processos de Lévy. Esta hipótese é discutível no caso de acontecimentos como os furacões que tendem a apresentar uma tendência sazonal (a hipótese de intensidade constante pode não capturar essa tendência).

Sendo o processo L modelado como um processo de Poisson composto, considera-se o seguinte teorema referente à filtração $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ (ver Protter (2004)):

Teorema 3.1: Seja L um processo de Poisson composto e $\mathcal{F}_t = \sigma(\sigma(L_s, s \leq t) \cup N)$, em que $\sigma(L_s, s \leq t)$ é a filtração natural de L e N os conjuntos \mathbb{P} -nulos de \mathcal{F} . Então \mathcal{F}_t é contínua à direita.

Pelo teorema enunciado, a filtração $\mathcal{F}_t = \sigma(\sigma(L_s, s \leq t) \cup \mathcal{N})$ verifica as condições da hipótese usual.

3.1.2 Medidas de probabilidade equivalentes

O conceito de alteração da medida de probabilidade é também importante na aplicação da metodologia, uma vez que os processos de preços descontados sob determinadas medidas de probabilidade equivalentes são martingalas.

Definição 3.3: Um processo estocástico L é uma martingala em relação à filtração

$(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ se:

- (i) L_t é \mathcal{F}_t -mensurável para todo o instante t ;
- (ii) $E[|L_t|] < \infty, \forall t$;
- (iii) $E[L_s | \mathcal{F}_t] = L_t, \forall s \geq t$.

Definição 3.4: As medidas de probabilidade \mathbb{Q} e \mathbb{P} sobre (Ω, \mathcal{F}) são equivalentes, representando-se por $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$, se e só se:

$$\mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0, \forall A \in \mathcal{F}.$$

Na metodologia em análise, interessam-nos as medidas de probabilidade equivalentes à medida de referência que garantem que o índice continua a ser representado por um processo de Poisson composto com parâmetros diferentes. Este conjunto de medidas é

caracterizado pela seguinte proposição (ver Delbaen e Haezendonck (1989) e Mürmann (2001)):

Proposição 3.1: *Seja \mathbb{Q} uma medida de probabilidade em (Ω, \mathcal{F}) tal que:*

- (i) \mathbb{Q} é equivalente à medida de referência \mathbb{P} ;
- (ii) Sob a medida \mathbb{P} o processo de Poisson composto L tem parâmetros $(\lambda, dG(y))$;

Então L é um processo de Poisson composto sob a medida \mathbb{Q} se e só se existir uma constante não negativa κ e uma função mensurável não negativa $v: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ que

verifica $\int_0^\infty v(y)dG(y)=1$. O processo de densidade associado $\xi_t = E^{\mathbb{P}}[\xi_T | \mathcal{F}_t]$ da

derivada de Radon-Nikodym $\xi_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ é definido por

$$\begin{aligned} \xi_t &= \left(\prod_{i=1}^{N_t} \kappa v(Y_i) \right) \cdot \exp \left(\int_0^t \int_0^\infty (1 - \kappa v(y)) \lambda dG(y) ds \right) \\ &= \exp \left(\sum_{i=1}^{N_t} \ln(\kappa v(Y_i)) + \lambda(1 - \kappa)t \right), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (1)$$

Assim, com base na proposição enunciada considera-se que sob a medida de probabilidade \mathbb{Q} o processo L tem parâmetros $(\lambda^{\mathbb{Q}}, dG^{\mathbb{Q}}(y)) = (\lambda\kappa, v(y)dG(y))$. Em termos económicos, o parâmetro κ pode ser interpretado como o prémio de risco de frequência e $v(\cdot)$ como o prémio de risco de dimensão do sinistro.

3.1.3 Avaliação neutra face ao risco

O desenvolvimento da metodologia em exposição para a avaliação dos contratos é feito sob a hipótese de não arbitragem.

Definição 3.5: *Uma oportunidade de arbitragem é a possibilidade de obter lucro sem risco no mercado financeiro.*

Modelado o índice de perdas como um processo de Poisson composto procede-se à determinação do preço do derivado. Se $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ for o processo de preço de um activo financeiro, define-se o seu processo de preço descontado por

$$\tilde{S}_t = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) S_t.$$

Em primeiro lugar, enuncia-se a equivalência entre as medidas equivalentes de martingala e a ausência de oportunidades de arbitragem.

Definição 3.6: *Uma medida equivalente de martingala é uma medida de probabilidade que é equivalente à medida de referência e sob a qual o processo de preço descontado é uma martingala.*

Em geral, a existência de medidas equivalentes de martingala é equivalente à ausência de oportunidades de arbitragem (ou a um conceito que generaliza este, o conceito de “no free lunch”). Para mais detalhes sobre esta relação de equivalência ver Kreps (1981) e Schachermayer (2008).

No caso concreto do mercado de derivados de catástrofe, este é incompleto, uma vez que o índice subjacente L não é transaccionado em bolsa e os seus movimentos são imprevisíveis com saltos de dimensão aleatória. Assim, não é possível determinar um preço único para o derivado baseado exclusivamente na hipótese de inexistência de arbitragem ou de “*free lunch*”, pois em geral existem muitas medidas equivalentes de martingala.

A escolha da medida equivalente de martingala é feita de modo a que o processo do índice continue a ser representado por um processo de Poisson composto, tal como definido na secção anterior.

Assumindo que não são admitidas oportunidades de arbitragem ou “*free lunch*” procede-se à determinação do preço dos derivados, sendo a metodologia exposta baseada na avaliação neutra face ao risco (ou seja, considerando a medida equivalente de martingala \mathbb{Q}). Desta forma, o processo de preço do derivado que paga $h(L_T)$ na maturidade, considerando a medida equivalente de martingala \mathbb{Q} , pode ser expresso por

$$\pi_t^{\mathbb{Q}} = E^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) h(L_T) \mid \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

que sob a hipótese assumida da taxa de juro r ser determinística pode ser reformulado por

$$\pi_t^{\mathbb{Q}} = E^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} h(L_T) \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Para efeitos de simplificação na dedução das fórmulas de preço, não se considera o factor de desconto, ou seja, considera-se $r \equiv 0$. Assim, é possível escrever o processo de preço da forma $f^{\mathbb{Q}}(L_t, t)$, em que o processo estocástico $(f^{\mathbb{Q}}(L_t, t))_{0 \leq t \leq T}$ representa o processo de preços sob a medida de probabilidade \mathbb{Q} com *payoff* $f^{\mathbb{Q}}(L_T, T) = h(L_T)$ na maturidade.

Considere-se por hipótese que na equação (2) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável que verifica a condição $h(\cdot) - k \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) = \left\{ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensurável} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty \right\}$ para algum $k \in \mathbb{R}$. De forma a calcular o valor esperado do *payoff* é necessário introduzir a noção de transformada de Fourier.

Se f for uma função pertencente à classe $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ define-se a transformada de Fourier como

$$\hat{f}(u) = F(f)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuz} f(z) dz. \quad (3)$$

A função original f pode ser obtida invertendo a transformada de Fourier pela relação,

$$f(z) = F^{-1}(\hat{f}(u)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuz} \hat{f}(u) du. \quad (4)$$

Aplicando os conceitos (3) e (4) à função $h(\cdot) - k \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ obtém-se

$$h(x) - k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{-iuz} (h(z) - k) dz du. \quad (5)$$

Considere-se o resultado da versão condicionada do teorema de Fubini, apresentada em Klebaner (2005), para um processo estocástico M sob a filtração \mathcal{F}_t

$$E \left[\int_0^t M_s ds \mid \mathcal{F}_t \right] = \int_0^t E[M_s \mid \mathcal{F}_t] ds.$$

Assumindo $r \equiv 0$ a equação (2) vem

$$\begin{aligned} \pi_t^Q &= f^Q(L_t, t) = E^Q[h(L_T) \mid \mathcal{F}_t] = E^Q[h(L_T) - k \mid \mathcal{F}_t] + k \\ &= \frac{1}{2\pi} E^Q \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{-iuz} (h(z) - k) dz du \mid \mathcal{F}_t \right] + k \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E^Q \left[e^{iuL_T} \mid \mathcal{F}_t \right] e^{-iuz} (h(z) - k) dz du + k \end{aligned} \quad (\text{Teorema Fubini})$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} E^{\mathbb{Q}} \left[e^{iuL_T} \mid \mathcal{F}_t \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-iuz} (h(z) - k) dz du + k \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} E^{\mathbb{Q}} \left[e^{iuL_T} \mid \mathcal{F}_t \right] \tilde{\varphi}(u) du + k, \tag{6}
 \end{aligned}$$

com $\tilde{\varphi}(\cdot)$ a representar a transformada inversa de Fourier de $h(\cdot) - k$.

O processo de Poisson composto é um processo de Markov com incrementos estacionários e independentes, pelo que se verifica

$$\begin{aligned}
 E^{\mathbb{Q}} \left[e^{iuL_T} \mid \mathcal{F}_t \right] &= e^{iuL_t} E^{\mathbb{Q}} \left[e^{iu(L_T - L_t)} \mid L_t \right] \\
 &= e^{iuL_t} E^{\mathbb{Q}} \left[e^{iuL_{T-t}} \mid L_t \right] = e^{iuL_t} E^{\mathbb{Q}} \left[e^{iuL_{T-t}} \right],
 \end{aligned}$$

com $E^{\mathbb{Q}} \left[e^{iuL_{T-t}} \right]$ a representar a função característica da variável L_{T-t} , que sob a medida de probabilidade \mathbb{Q} é dada por

$$\chi_{T-t}^{\mathbb{Q}}(u) = \exp \left(\lambda^{\mathbb{Q}} \left(\int_0^{\infty} e^{iuy} dG^{\mathbb{Q}}(y) - 1 \right) (T-t) \right). \tag{7}$$

O preço do derivado no momento t tendo em consideração as equações (6) e (7) é definido por

$$\begin{aligned}
 \pi_t^{\mathbb{Q}} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuL_t} \chi_{T-t}^{\mathbb{Q}}(u) \tilde{\varphi}(u) du + k \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuL_t} \exp \left(\lambda^{\mathbb{Q}} \left(\int_0^{\infty} e^{iuy} dG^{\mathbb{Q}}(y) - 1 \right) (T-t) \right) \tilde{\varphi}(u) du + k \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuL_t} \exp \left(\lambda^{\mathbb{Q}} \left(E^{\mathbb{Q}} \left[e^{iuY_1} \right] - 1 \right) (T-t) \right) \tilde{\varphi}(u) du + k. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Considerando que o índice de perdas L_t assume o valor s obtém-se

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ius} (\pi_t^{\mathbb{Q}} - k) ds = \chi_{T-t}^{\mathbb{Q}}(u) \tilde{\varphi}(u).$$

3.1.4 Aplicação

Nos parágrafos seguintes, são determinadas fórmulas explícitas para a transformada inversa de Fourier de $h(\cdot) - k$ das opções mais comuns em transacção no mercado. Uma das opções mais comuns é a *call spread* que consiste na compra (posição longa) de uma opção *call* com preço de exercício K_1 e na venda (posição curta) de uma opção *call* com preço de exercício $K_2 > K_1$, para a mesma maturidade. Assim a função de *payoff* $h_{CS}(s)$ que depende do valor do índice, que se assume ser s , vem

$$h_{CS}(s) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq s \leq K_1 \\ s - K_1 & , K_1 < s \leq K_2 \\ K_2 - K_1 & , s > K_2 \end{cases}$$

Na maturidade o índice de perdas não é negativo, sendo suficiente garantir que $(h_{CS}(\cdot) - k) \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty)}(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ para um $k \in \mathbb{R}$, com $\mathbb{1}_A(\cdot)$ a representar a função indicatriz no conjunto de Borel A . Deste modo a condição de integração é satisfeita para $k = K_2 - K_1$ e a transformada inversa de Fourier pode ser expressa por

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{CS}(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ius} (h_{CS}(s) - (K_2 - K_1)) ds \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{K_1} e^{-ius} (K_2 - K_1) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{K_1}^{K_2} e^{-ius} (s - K_2) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{u^2} (e^{-iuK_2} - e^{-iuK_1} + iu(K_2 - K_1)). \end{aligned}$$

Considerando o resultado apresentado o preço da opção *call spread* no instante t vem

$$\pi_{CS}^Q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2} \chi_{T-t}^Q(u) e^{ius} (e^{-iuK_2} - e^{-iuK_1} + iu(K_2 - K_1)) du + K_2 - K_1. \quad (9)$$

A opção *put spread* tal como a opção *call spread* consiste numa combinação de posições de opções *put* cujo *payoff* h_{PS} é definido por

$$h_{PS}(s) = \begin{cases} K_2 - K_1 & , 0 \leq s \leq K_1 \\ K_2 - s & , K_1 < s \leq K_2 \\ 0 & , s > K_2 \end{cases}$$

A condição de integração, em conformidade com o caso anterior, também é satisfeita e verifica-se a relação $h_{PS}(s) = -(h_{CS}(s) - (K_2 - K_1))$. Consequentemente, a transformada inversa vem $\tilde{\varphi}_{PS}(u) = -\tilde{\varphi}_{CS}(u)$ e o preço da opção *put spread* é dado por

$$\begin{aligned} \pi_{PS}^Q(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2} \chi_{T-t}^Q(u) e^{ius} (e^{-iuK_1} - e^{-iuK_2} - iu(K_2 - K_1)) du \\ &= -\pi_{CS}^Q(t) + K_2 - K_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Deste modo constatou-se que a fórmula de preços verifica a condição de paridade *put-call* para a medida equivalente de martingala Q .

No caso das opções *call* é possível determinar o seu preço com recurso à fórmula da opção *call spread* considerando que o preço de exercício é o preço de exercício inferior, ou seja, $K_1 = K$ e que K_2 consiste no limite das perdas estabelecido no contrato (20 ou 50 biliões de dólares). Analogamente pode ser calculado o preço da opção *put* considerando $K_1 = 0$ e $K_2 = K$.

3.1.5 Transformada rápida de Fourier

O modelo de avaliação apresentado foi desenvolvido com base na análise de Fourier, podendo o preço da opção ser estimado numericamente com recurso a vários métodos de integração numérica. Na presente análise, a estimação foi feita com recurso à

transformada rápida de Fourier (TRF), um algoritmo computacional otimizado que permite o cálculo da soma de NP valores (NP uma potência de 2)

$$w_n = \sum_{j=0}^{NP-1} e^{i \frac{2\pi}{NP} nj} z_j, \quad n = 0, \dots, NP-1. \quad (11)$$

A utilização do algoritmo permite um ganho no tempo computacional, uma vez que requer $O(NP \log_2(NP))$ operações aritméticas em oposição à forma convencional que requer $O(NP^2)$ operações (ver Pina (1995)).

Na exposição do raciocínio inerente à avaliação numérica considerou-se o caso de opções *call spread*, cuja fórmula de preço definida em (9) pode ser reformulada por

$$\begin{aligned} \pi_{CS}^Q(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuK_2} e^{ius} \frac{1}{u^2} \chi_{T-t}^Q(u) du - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuK_1} e^{ius} \frac{1}{u^2} \chi_{T-t}^Q(u) du \\ &\quad + \frac{K_2 - K_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ius} \frac{i}{u} \chi_{T-t}^Q(u) du + K_2 - K_1 \\ &= g(K_2) - g(K_1) + (K_2 - K_1)H + K_2 - K_1, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} g(K) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuK} e^{ius} \frac{1}{u^2} \chi_{T-t}^Q(u) du \text{ e} \\ H &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ius} \frac{i}{u} \chi_{T-t}^Q(u) du. \end{aligned}$$

Estabelecida a fórmula analítica do preço das opções PCS *call spread*, procede-se à estimação numérica do seu valor, aplicando a $g(K)$ o algoritmo da TRF e ao integral H a regra de Simpson. Saliente-se que o valor da opção corresponde à parte real da aproximação enunciada.

Considerando-se a grelha de discretização definida por

$$u_m = (m+1)\Delta u, \quad m = 0, \dots, NP-1,$$

em que Δu representa o passo de integração e NP o número de passos, pode-se aproximar $g(K)$ por

$$g(K) \approx \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\sum_{m=0}^{NP-1} e^{-iu_m K} e^{iu_m s} \frac{1}{(u_m)^2} \chi_{T-t}^Q(u_m) \Delta u \right].$$

O integral $g(K)$ depende do valor do preço de exercício pelo que o algoritmo da TRF devolve NP valores para K com espaçamento ΔK , determinados por

$$K_p = a + p\Delta K, \quad p = 0, \dots, NP - 1.$$

Substituindo na aproximação tem-se

$$\begin{aligned} g(K_p) &\approx \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\sum_{m=0}^{NP-1} e^{-iu_m K_p} e^{iu_m s} \frac{1}{(u_m)^2} \chi_{T-t}^Q(u_m) \Delta u \right] \\ &\approx \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[e^{-iK_p \Delta u} \sum_{m=0}^{NP-1} e^{-imp\Delta u \Delta K} e^{-iam\Delta u} e^{iu_m s} \frac{1}{(u_m)^2} \chi_{T-t}^Q(u_m) \Delta u \right], \end{aligned}$$

verificando-se a condição

$$\Delta u \Delta K = \frac{2\pi}{NP}. \quad (12)$$

O integral H é calculado numericamente pela regra de Simpson composta⁴, considerando-se a grelha de discretização utilizada na TRF, ou seja,

$$H \approx \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\sum_{m=0}^{NP-1} e^{iu_m s} \frac{i}{u_m} \chi_{T-t}^Q(u_m) \frac{\Delta u}{3} (3 - (-1)^m - \rho_m) \right],$$

em que ρ_m é igual à unidade se $m = 0$ e zero nos restantes casos.

Assim o preço da opção *call spread* definido em (9) é aproximado por

⁴ Definindo a partição de $[a, b]$ em N subintervalos de igual amplitude tal que $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, N$)

e $h = \frac{b-a}{N}$. Então obtém-se a regra de Simpson composta

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^{N/2} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=2}^{N/2} f(x_{2i-2}) + f(x_N) \right).$$

$$\begin{aligned}
\pi_{CS}^Q(t) \approx & \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[e^{-iK_2, p \Delta u} \sum_{m=0}^{NP-1} e^{-imp \Delta u \Delta K_2} e^{-iam \Delta u} e^{iu_m s} \frac{1}{(u_m)^2} \chi_{T-t}^Q(u_m) \Delta u \right. \\
& - e^{-iK_1, p \Delta u} \sum_{m=0}^{NP-1} e^{-imp \Delta u \Delta K_1} e^{-iam \Delta u} e^{iu_m s} \frac{1}{(u_m)^2} \chi_{T-t}^Q(u_m) \Delta u \\
& \left. + (K_2 - K_1) \sum_{m=0}^{NP-1} e^{iu_m s} \frac{i}{u_m} \chi_{T-t}^Q(u_m) \frac{\Delta u}{3} (3 - (-1)^m - \rho_m) \right] + K_2 - K_1. \quad (13)
\end{aligned}$$

A aproximação numérica no caso das opções *put spread* vem

$$\begin{aligned}
\pi_{PS}^Q(t) \approx & \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[e^{-iK_1, p \Delta u} \sum_{m=0}^{NP-1} e^{-imp \Delta u \Delta K_1} e^{-iam \Delta u} e^{iu_m s} \frac{1}{(u_m)^2} \chi_{T-t}^Q(u_m) \Delta u \right. \\
& - e^{-iK_2, p \Delta u} \sum_{m=0}^{NP-1} e^{-imp \Delta u \Delta K_2} e^{-iam \Delta u} e^{iu_m s} \frac{1}{(u_m)^2} \chi_{T-t}^Q(u_m) \Delta u \\
& \left. - (K_2 - K_1) \sum_{m=0}^{NP-1} e^{iu_m s} \frac{i}{u_m} \chi_{T-t}^Q(u_m) \frac{\Delta u}{3} (3 - (-1)^m - \rho_m) \right].
\end{aligned}$$

Analisando as fórmulas apresentadas verifica-se que existem erros inerentes à discretização do integral e à sua truncagem que não serão analisados no presente estudo.

3.2 Modelo BBM

A segunda abordagem para a avaliação dos derivativos foi apresentada por Biagini, Bregman e Meyer-Brandis (BBM) (ver Biagni *et al* (2008)), no qual a incerteza do mercado é modelada pelo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Este modelo, tal como os artigos de Geman e Yor (1997) e Christensen (1999), faz uma distinção da estrutura temporal em dois períodos, o período de perdas $[0, T_1]$ e o período de desenvolvimento $[T_1, T_2]$. A opção vence no final do período de desenvolvimento $T_2 < \infty$ (no modelo anterior T_2 corresponde a T).

3.2.1 Índice de perdas

O índice de perdas é modelado pelo processo estocástico $L = (L_t)_{0 \leq t \leq T_2}$, que é definido de forma distinta dependendo do período. No período de perdas o índice é modelado por um processo de Poisson composto não homogéneo $L_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, com N_t a representar um processo de Poisson não homogéneo de intensidade $\lambda_t > 0$ e Y_i variáveis i.i.d. positivas com função de distribuição G , independentes de N_t .

No período de desenvolvimento considera-se a relação $L_t = L_{T_1+u} = L_{T_1} Z_u$, na qual Z_u designa o processo que representa o factor de reestimação, com $Z_0 = 1$ e os processos $(L_t)_{t \leq T_1}$ e $(Z_u)_{0 \leq u \leq T_2 - T_1}$ são independentes.

Assume-se que os investidores, tal como na primeira metodologia, observam a evolução do índice de perdas e o fluxo de informação é dado pela filtração $(\mathcal{F}_t^0)_{0 \leq t \leq T_2}$ gerada pelo processo L , que verifica as condições:

- (i) $\mathcal{F}_0^0 = \{\emptyset, \Omega\}$;
- (ii) $\mathcal{F}_t^0 = \sigma(L_u, u \leq t) = \begin{cases} \sigma\left(\sum_{i=1}^{N_u} Y_i, u \leq t\right) & , t \in [0, T_1] ; \\ \sigma(L_s, s \leq T_1) \vee \sigma(Z_{u-T_1}, T_1 < u \leq t) & , t \in [T_1, T_2] \end{cases}$;
- (iii) $\mathcal{F}_{T_2}^0 \subseteq \mathcal{F}$.

A filtração $(\mathcal{F}_t^0)_{0 \leq t \leq T_2}$ por hipótese é contínua à direita e $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T_2}$ é a filtração completa de $(\mathcal{F}_t^0)_{0 \leq t \leq T_2}$ que contém todos os conjuntos \mathbb{P} -nulos de \mathcal{F} . É razoável assumir que Z_t não seja enviesado (ver Biagini *et al* (2008) e Schmidli (2001)). Assim, considera-se que o processo $(Z_t)_{0 \leq t \leq T_2 - T_1}$ é uma martingala positiva em relação à filtração $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T_2}$

com representação $Z_t = e^{X_t}$, assumindo-se que X_t é um processo de Lévy não homogéneo.

Definição 3.7: Um processo estocástico $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ com valores em \mathbb{R} é um processo de Lévy não homogéneo se e só se:

- (i) Tem incrementos independentes, ou seja, quaisquer que sejam os instantes $t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$, as variáveis aleatórias $X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ são independentes;
- (ii) Para todo o $t \in [0, T]$, a função característica é definida por

$$E[e^{iux_t}] = \exp\left(\int_0^t \left(iub_s - \frac{u^2}{2} c_s + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}) F_s(dx) \right) ds \right),$$

com $b_s \in \mathbb{R}$, $c_s \in \mathbb{R}_+$ e F_s uma medida de Lévy em \mathbb{R} que satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) F_s(dx) < \infty \text{ e } F_s(\{0\}) = 0 \text{ (representação Lévy-Khintchine).}$$

Pressupõe-se que $\int_0^T \left(|b_s| + c_s + \int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) F_s(dx) \right) ds$ é finito e as características do

processo são $(b_s, c_s, F_s)_{0 \leq s \leq T}$.

É de salientar que pelo Lema 1.4 e 1.5 de Kluge (2005) o processo de Lévy X é uma semimartingala cujas características (B, C, ν) são definidas por

$$B_t = \int_0^t b_s ds, \quad C_t = \int_0^t c_s ds, \quad \nu([0, t] \times A) = \int_0^t \int_A F_s(dx) ds \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Uma semimartingala é essencialmente um processo estocástico que se pode decompor em duas partes, uma martingala e um processo de variação finita (ver Protter (2004)).

Em relação à medida de Lévy F_s assume-se que existe uma constante $\varepsilon > 0$ tal que para todo o $u \in [-(1 + \varepsilon), 1 + \varepsilon]$

$$\int_0^T \int_{\{|x|>1\}} e^{ux} F_s(dx) ds < \infty .$$

A condição enunciada pode ser escrita de forma equivalente em termos da existência dos momentos exponenciais. Desta forma, considera-se que existe uma constante $\varepsilon > 0$ tal que para todo o $u \in [-(1 + \varepsilon), 1 + \varepsilon]$

$$E[e^{uX_t}] < \infty , \forall t \in [0, T].$$

Pela nova formulação da condição, é possível afirmar que $E[Z_t]$ é finito para todo o $t \in [0, T]$. Em relação às características do processo, ao impor-se que

$$\int_0^t b_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t c_s ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1 - h(x)) F_s(dx) ds = 0 ,$$

é possível afirmar que $Z_t = e^{X_t}$ é uma martingala.

Adicionalmente o processo X_t pode ser representado na forma canónica (ver Kluge (2005))

$$X_t = \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sqrt{c_s} dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x(\mu(ds, dx) - F_s(dx) ds),$$

em que W_t designa um movimento Bowniano estandardizado e μ é a medida associada aos saltos de X_t .

Modelado o índice de perdas procede-se à determinação do preço do derivado, introduzindo o conceito de medidas de probabilidade equivalentes.

3.2.2 Medidas de probabilidade equivalentes

O mercado de derivados de catástrofe, tal como referido na secção 3.1.3, é incompleto, não existindo deste modo apenas uma medida equivalente de martingala. Em conformidade com o modelo proposto por Mürmann, assume-se que existe uma medida \mathbb{Q} sob a qual o processo do índice de perdas é descrito por um processo semelhante ao associado à medida de referência \mathbb{P} . O processo diz-se semelhante, no sentido em que preserva a estrutura, ou seja, o índice de perdas continua a ser um processo de Poisson composto no período de perdas e um processo de Lévy no período de desenvolvimento (ver Biagini *et al* (2008) e Jacob e Shiryaev (2003)).

Proposição 3.2: *Seja \mathbb{Q} uma medida de probabilidade em (Ω, \mathcal{F}) equivalente à medida de referência \mathbb{P} . Então o processo L sob a medida \mathbb{Q} é um processo semelhante ao associado à medida de referência e a classe das medidas é determinada pelas derivadas de Radon-Nikodym com densidade definida por*

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = & \exp\left(\sum_{i=1}^{N_{T_1}} \beta(Y_i) + \int_0^{T_1} \lambda_s ds E[1 - e^{\beta(Y_1)}]\right) \times \exp\left(\int_0^T \gamma(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma^2(s) ds\right) \\ & \times \exp\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \ln \phi(s, x) (\mu(ds, dx) - F_s(dx) ds) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\phi(s, x) - 1 - \ln \phi(s, x)) F_s(dx) ds\right) \end{aligned}$$

com a função de Borel β a verificar $E[e^{\beta(Y_1)}]$ finito, $\phi(t, x)$ um integral positivo e

$$\gamma(t) \text{ tal que } E\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = 1.$$

Aplicando o Teorema de Girsanov para movimentos Brownianos e medidas aleatórias (ver Jacob e Shiryaev (2003)), as medidas da classe preservam a estrutura do modelo

apresentado. Assim, perante a medida de probabilidade \mathbb{Q} , o processo L_t no período de perdas permanece um processo de Poisson composto não homogéneo de intensidade

$$\lambda_t^{\mathbb{Q}} = \lambda_t E[e^{\beta(Y_t)}] \text{ e as variáveis } Y_t \text{ têm função distribuição } dG^{\mathbb{Q}}(y) = \frac{e^{\beta(y)}}{E[e^{\beta(Y_t)}]} dG(y).$$

No período de perdas o processo X_t continua a corresponder a um processo de Lévy não homogéneo, independente de L_t , com características

$$(b^{\mathbb{Q}}, c^{\mathbb{Q}}, F^{\mathbb{Q}}) := \begin{cases} b_t^{\mathbb{Q}} = b_t - \gamma_t \sqrt{c_t} \\ c_t^{\mathbb{Q}} = c_t \\ F_t^{\mathbb{Q}}(dx) = \phi(t, x) F_t(dx) \end{cases}.$$

Recorrendo aos preços de mercado é possível calibrar β , ϕ e γ , e especificar a medida \mathbb{Q} . Para aplicar a metodologia em análise assume-se que existe uma medida equivalente de martingala \mathbb{Q} e procede-se à avaliação neutra face ao risco do preço das opções.

3.2.3 Avaliação neutra face ao risco

As opções de catástrofe dependem do valor do índice de perdas na maturidade, sendo o valor esperado do *payoff* definido por

$$\pi_t^{\mathbb{Q}} = E^{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T_2-t)} h(L_{T_2}) \mid \mathcal{F}_t \right],$$

com h uma função contínua tal que $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ e r a representar a taxa de juro, que por simplificação se assumiu ser determinística. Para efeitos de simplificação da dedução das fórmulas de preço considerou-se $r \equiv 0$. Tendo em conta a expressão do processo de perdas na maturidade, pode-se reescrever o processo de preço como

$$\pi_t^{\mathbb{Q}} = E^{\mathbb{Q}} \left[h(L_{T_1} Z_{T_2-T_1}) \mid \mathcal{F}_t \right] = E^{\mathbb{Q}} \left[h(L_{T_1} e^{X_{T_2-T_1}}) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (14)$$

A expressão (14) pode ser alterada se introduzirmos a função $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por

$$g(x_1, x_2) = h(x_1 e^{x_2}), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Neste caso, o processo de preço do derivado é definido por

$$\pi_t^Q = E^Q [g(L_{T_1}, X_{T_2-T_1}) | \mathcal{F}_t]. \quad (15)$$

Aplicando a transformada de Fourier é possível determinar o valor esperado definido em (15) considerando *payoffs* a duas dimensões, sendo necessário impor as seguintes condições:

- (i) $I_1 := \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\alpha x_1 - \beta x_2} g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 < \infty \right\} \neq \emptyset,$
- (ii) $I_2 := \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \int_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha x_1 + \beta x_2} G_{(L_{T_1}, X_{T_2-T_1})}^Q(dx_1 dx_2) < \infty \right\} \neq \emptyset,$ e
- (iii) $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset,$

com $G_{(L_{T_1}, X_{T_2-T_1})}^Q$ a representar a função de distribuição de $(L_{T_1}, X_{T_2-T_1})$ sob a medida Q .

No entanto, sob a medida Q os processos L_{T_1} e $X_{T_2-T_1}$ são independentes e a condição

I_2 pode ser redefinida da forma

$$I_2 := \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : E^Q [e^{\alpha L_{T_1}}] < \infty \text{ e } E^Q [e^{\beta X_{T_2-T_1}}] < \infty \right\}.$$

Especificadas as condições define-se a função de *payoff* amortecido (*dampened payoff*)

por

$$f(x_1, x_2) = e^{-(\alpha x_1 + \beta x_2)} g(x_1, x_2), \text{ para } (\alpha, \beta) \in I_1 \cap I_2, \quad (16)$$

e pela condição I_1 , $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^2)$.

A transformada de Fourier bidimensional, que se pressupõe pertencer à classe $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^2)$, é

definida pela relação

$$\hat{f}(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x_1 u_1 + x_2 u_2)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad \forall u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (17)$$

O pressuposto de $\hat{f} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^2)$ permite com base no teorema da inversão da transformada de Fourier, obter

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x_1 u_1 + x_2 u_2)} \hat{f}(u_1, u_2) du_1 du_2. \quad (18)$$

O processo de preço, considerando as expressões (16) e (18), e a independência dos processos L_t e X_t pode ser redefinido

$$\begin{aligned} \pi_t^Q &= E^Q \left[g(L_{T_1}, X_{T_2-T_1}) \mid \mathcal{F}_t \right] = E^Q \left[e^{\alpha L_{T_1} + \beta X_{T_2-T_1}} f(L_{T_1}, X_{T_2-T_1}) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^Q \left[e^{\alpha L_{T_1} + \beta X_{T_2-T_1}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(u_1 L_{T_1} + u_2 X_{T_2-T_1})} \hat{f}(u_1, u_2) du_1 du_2 \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} E^Q \left[\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i((u_1 + i\alpha)L_{T_1} + (u_2 + i\beta)X_{T_2-T_1})} \hat{f}(u_1, u_2) du_1 du_2 \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} E^Q \left[e^{-i((u_1 + i\alpha)L_{T_1} + (u_2 + i\beta)X_{T_2-T_1})} \mid \mathcal{F}_t \right] \hat{f}(u_1, u_2) du_1 du_2 \quad (\text{Teorema de Fubini}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} E^Q \left[e^{-i(u_1 + i\alpha)L_{T_1}} \mid \mathcal{F}_t \right] E^Q \left[e^{-i(u_2 + i\beta)X_{T_2-T_1}} \mid \mathcal{F}_t \right] \hat{f}(u_1, u_2) du_1 du_2. \quad (19) \end{aligned}$$

No período de perdas, $[0, T_1]$, L refere-se a um processo de Poisson composto não homogéneo e X a um processo de Lévy não homogéneo independente de L_t . O processo de Lévy satisfaz a propriedade de que para todo o $t \geq 0$, $E^Q \left[e^{iuX_t} \right] = e^{t\psi^Q(u)}$ com $\psi^Q(u) := \psi_1^Q(u)$ a representar a característica de X_1 . Considerando a propriedade enunciada e as funções características, determina-se individualmente os valores esperados condicionados da expressão (19):

$$\begin{aligned} E^Q \left[e^{-i(u_1 + i\alpha)L_{T_1}} \mid \mathcal{F}_t \right] &= e^{-i(u_1 + i\alpha)L_t} E^Q \left[e^{-i(u_1 + i\alpha)(L_{T_1} - L_t)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-i(u_1 + i\alpha)L_t} E^Q \left[e^{-i(u_1 + i\alpha)(L_{T_1} - L_t)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-i(u_1+i\alpha)L_t} \exp\left(\int_t^{T_1} \lambda_s^Q ds \int_0^\infty (e^{-i(u_1+i\alpha)x} - 1)G^Q(dx)\right) \\
 &= e^{-i(u_1+i\alpha)L_t} \exp\left(-\int_t^{T_1} \lambda_s^Q ds\right) \exp\left(\int_t^{T_1} \lambda_s^Q ds \int_0^\infty e^{-i(u_1+i\alpha)x} G^Q(dx)\right), e \\
 E^Q \left[e^{-i(u_2+i\beta)X_{T_2-T_1}} \mid \mathcal{F}_t \right] &= E^Q \left[e^{-i(u_2+i\beta)X_{T_2-T_1}} \right] \\
 &= \exp\left(\int_0^{T_2-T_1} \left(-i(u_2+i\beta)b_s^Q - \frac{1}{2}c_s^Q(u_2+i\beta)^2\right) ds\right) \\
 &\quad \times \exp\left(\int_0^{T_2-T_1} \int_{\mathbb{R}} (e^{-i(u_2+i\beta)x} - 1 + i(u_2+i\beta)x \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}) F_s^Q(dx) ds\right).
 \end{aligned}$$

No período de desenvolvimento, $[T_1, T_2]$, observa-se a relação $L_t = L_{T_1} e^{X_u}$ e os valores esperados condicionados vêm:

$$\begin{aligned}
 E^Q \left[e^{-i(u_1+i\alpha)L_{T_1}} \mid \mathcal{F}_t \right] &= e^{-i(u_1+i\alpha)L_{T_1}}, e \\
 E^Q \left[e^{-i(u_2+i\beta)X_{T_2-T_1}} \mid \mathcal{F}_t \right] &= e^{-i(u_2+i\beta)X_{t-T_1}} E^Q \left[e^{-i(u_2+i\beta)(X_{T_2-T_1}-X_{t-T_1})} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= e^{-i(u_2+i\beta)X_{t-T_1}} E^Q \left[e^{-i(u_2+i\beta)(X_{T_2-T_1}-X_{t-T_1})} \right] \\
 &= e^{-i(u_2+i\beta)X_{t-T_1}} \exp\left(\int_{t-T_1}^{T_2-T_1} \left(-i(u_2+i\beta)b_s^Q - \frac{1}{2}c_s^Q(u_2+i\beta)^2\right) ds\right) \\
 &\quad \times \exp\left(\int_{t-T_1}^{T_2-T_1} \int_{\mathbb{R}} (e^{-i(u_2+i\beta)x} - 1 + i(u_2+i\beta)x \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}) F_s^Q(dx) ds\right).
 \end{aligned}$$

Compilando os resultados obtidos para os valores esperados condicionados, o processo de preço do derivado, π_t^Q , é definido por

1. Se o momento t pertencer ao período de perdas

$$\begin{aligned} \pi_t^Q &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\int_t^{T_1} \lambda_s^Q ds\right) \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(u_1, u_2) e^{-i(u_1+i\alpha)L_t} \exp\left(\int_t^{T_1} \lambda_s^Q ds \int_0^\infty e^{-i(u_1+i\alpha)x} G^Q(dx)\right) \\ &\quad \times \exp\left(\int_0^{T_2-T_1} \left(-i(u_2+i\beta)b_s^Q - \frac{1}{2}c_s^Q(u_2+i\beta)^2\right) ds\right) \\ &\quad \times \exp\left(\int_0^{T_2-T_1} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(u_2+i\beta)x} - 1 + i(u_2+i\beta)x \mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}} F_s^Q(dx) ds\right) du_1 du_2. \end{aligned} \quad (20)$$

2. Se o momento t corresponder ao período de desenvolvimento

$$\begin{aligned} \pi_t^Q &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(u_1, u_2) e^{-i(u_1+i\alpha)L_{T_1}} e^{-i(u_2+i\beta)X_{t-T_1}} \\ &\quad \times \exp\left(\int_{t-T_1}^{T_2-T_1} \left(-i(u_2+i\beta)b_s^Q - \frac{1}{2}c_s^Q(u_2+i\beta)^2\right) ds\right) \\ &\quad \times \exp\left(\int_{t-T_1}^{T_2-T_1} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-i(u_2+i\beta)x} - 1 + i(u_2+i\beta)x \mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right) F_s^Q(dx) ds\right) du_1 du_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Nas expressões apresentadas para o processo de preço, $\hat{f}(\cdot)$ representa a transformada de Fourier da função $f(\cdot)$ (expressão (17)).

3.2.4 Aplicação

As fórmulas apresentadas para o processo de preço podem ser deduzidas para as opções mais comuns no mercado, calculando a respectiva transformada de Fourier. Considerando uma opção *call*, a função de *payoff* com preço de exercício $K > 0$ é dada pela fórmula $h_C(x) = (x - K)^+$, sendo o correspondente *payoff* bidimensional definido por

$$g_C(x_1, x_2) = (x_1 e^{x_2} - K)^+ \mathbf{1}_{\{x_1 > 0\}} = (x_1 e^{x_2} - K) \mathbf{1}_{\{x_1 > 0, x_2 > \ln(K/x_1)\}}$$

e a função de *payoff* amortecido, f_C , vem

$$f_C(x_1, x_2) = e^{-(\alpha_1 + \beta x_2)} g_C(x_1, x_2) = e^{-(\alpha_1 + \beta x_2)} (x_1 e^{x_2} - K) \mathbb{1}_{\{x_1 > 0, x_2 > \ln(K/x_1)\}}.$$

A função pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$ para $(\alpha, \beta) \in I_1 = (0, \infty) \times (1, \infty)$. A transformada de Fourier

\hat{f}_C definida pela expressão (17) é calculada por

$$\begin{aligned} \hat{f}_C(u_1, u_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x_1 u_1 + x_2 u_2)} f_C(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{\ln(K/x_1)}^{\infty} e^{i(x_1 u_1 + x_2 u_2)} e^{-(\alpha_1 + \beta x_2)} (x_1 e^{x_2} - K) dx_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} x_1 e^{-(\alpha - i u_1) x_1} \int_{\ln(K/x_1)}^{\infty} e^{-(\beta - 1 - i u_2) x_2} dx_2 dx_1 - K \int_0^{\infty} e^{-(\alpha - i u_1) x_1} \int_{\ln(K/x_1)}^{\infty} e^{-(\beta - i u_2) x_2} dx_2 dx_1 \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} x_1 e^{-(\alpha - i u_1) x_1} \frac{1}{\beta - 1 - i u_2} e^{-(\beta - 1 - i u_2) \ln(K/x_1)} dx_1 \right. \\ &\quad \left. - K \int_0^{\infty} e^{-(\alpha - i u_1) x_1} \frac{1}{\beta - i u_2} e^{-(\beta - i u_2) \ln(K/x_1)} dx_1 \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{(\beta - 1 - i u_2) K^{\beta - 1 - i u_2}} \int_0^{\infty} x_1^{\beta - i u_2} e^{-(\alpha - i u_1) x_1} dx_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(\beta - i u_2) K^{\beta - 1 - i u_2}} \int_0^{\infty} x_1^{\beta - i u_2} e^{-(\alpha - i u_1) x_1} dx_1 \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\beta - 1 - i u_2)(\beta - i u_2) K^{\beta - 1 - i u_2}} \int_0^{\infty} x_1^{\beta - i u_2} e^{-(\alpha - i u_1) x_1} dx_1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\beta - 1 - i u_2)(\beta - i u_2) K^{\beta - 1 - i u_2}} \frac{\Gamma(\beta + 1 - i u_2)}{(\alpha - i u_1)^{\beta + 1 - i u_2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(\beta - 1 - i u_2)k}}{(\beta - 1 - i u_2)(\beta - i u_2)} \frac{\Gamma(\beta + 1 - i u_2)}{(\alpha - i u_1)^{\beta + 1 - i u_2}}, \end{aligned} \tag{22}$$

com $\Gamma(\cdot)$ a representar uma função Gama e $k = -\log(K)$. É possível mostrar que

$\hat{f}_C(u_1, u_2) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ (ver Biagini *et al* (2008)).

Aplicando a expressão da transformada de Fourier \hat{f}_C ao processo $\pi_C^Q(t)$ obtém-se o preço da opção *call*⁵. Determinada a expressão para o preço de uma opção *call*, pode-se deduzir o preço de opções *put* e *spread*.

No caso de uma opção *put*, o *payoff* é definido pela função $h_p(x) = (K - x)^+$, e para o mesmo preço de exercício K pode-se estabelecer uma relação com o *payoff* de uma opção *call* através da fórmula $h_p(x) = h_c(x) + K - L_{T_2}$.

Estabelecida a relação entre os *payoffs*, o preço da opção *put* $\pi_p^Q(t)$ é determinado considerando o preço da opção *call* $\pi_c^Q(t)$ e a condição paridade *put-call*

$$\begin{aligned}\pi_p^Q(t) &= \pi_c^Q(t) + K - E^Q[L_{T_2} | \mathcal{F}_t] \\ &= \pi_c^Q(t) + K - E^Q[L_{T_1} Z_{T_2-T_1} | \mathcal{F}_t].\end{aligned}$$

O valor esperado condicionado $E^Q[L_{T_1} Z_{T_2-T_1} | \mathcal{F}_t]$ dada a independência dos processos $(L_t)_{t \leq T_1}$ e $(Z_u)_{0 \leq u \leq T_2-T_1}$ no período de perdidas corresponde a

$$\begin{aligned}E^Q[L_{T_1} Z_{T_2-T_1} | \mathcal{F}_t] &= E^Q[L_{T_1} | \mathcal{F}_t] E^Q[Z_{T_2-T_1} | \mathcal{F}_t] = E^Q[L_{T_1} | \mathcal{F}_t] E^Q[e^{X_{T_2-T_1}} | \mathcal{F}_t] \\ &= (L_t + E^Q[L_{T_1} - L_t | \mathcal{F}_t]) E^Q[e^{X_{T_2-T_1}} | \mathcal{F}_t] \\ &= \left(L_t + E^Q[Y_1] \int_t^{T_1} \lambda_s^Q ds \right) \\ &\quad \times \exp\left(\int_0^{T_2-T_1} \left(b_s^Q + \frac{1}{2} c_s^Q + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1 + x \mathbb{1}_{\{|x| < 1\}}) F_s^Q(dx) \right) ds \right);\end{aligned}$$

e no período de desenvolvimento vem

$$\begin{aligned}E^Q[L_{T_1} Z_{T_2-T_1} | \mathcal{F}_t] &= E^Q[L_{T_1} e^{X_{T_2-T_1}} | \mathcal{F}_t] \\ &= L_{T_1} e^{X_{t-T_1}} E^Q[e^{X_{T_2-T_1} - X_{t-T_1}}]\end{aligned}$$

⁵ O preço da opção *call*, para efeito de comparação com o modelo de Mürmann, deve ser calculado como uma opção *call spread* em que $K_1 = K$ e K_2 é o limite de perdidas estabelecido no contrato.

$$= L_{T_1} e^{X_{t-T_1}} \exp \left(\int_{t-T_1}^{T_2-T_1} \left(b_s^Q + \frac{1}{2} c_s^Q + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1 + x \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}) F_s^Q(dx) \right) ds \right).$$

As expressões determinadas para as opções *call* e *put* possibilitam a derivação do preço das opções *spread*, uma vez que este tipo de opções corresponde a uma combinação de posições das primeiras. Considerando-se uma opção *call spread*, a sua função *payoff* na maturidade é obtida pela diferença entre as funções de *payoff* de opções *call* com preços de exercício K_1 e K_2 ($K_2 > K_1$), respectivamente. Matematicamente a função de *payoff* é da forma $h_{CS}(x) = (x - K_1)^+ - (x - K_2)^+$. O preço desta opção é deste modo calculado como a diferença do preço das opções *call* subjacentes.

3.2.5 Transformada rápida de Fourier

Estabelecidas as fórmulas de preço para as opções mais comuns procede-se à sua estimação numérica, tendo em atenção o período temporal à data de avaliação. Por simplificação assume-se que os fenómenos subjacentes ao contrato não têm efeito de sazonalidade, podendo deste modo o índice no período de perdas ser modelado por um processo de Poisson composto homogéneo e no período de desenvolvimento por um processo de Lévy homogéneo. Assim a fórmula do preço da opção vem

1. Se $t \in [0, T_1]$

$$\begin{aligned} \pi_t^Q &= \frac{1}{2\pi} e^{-\lambda^Q(T_1-t)} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(u_1, u_2) e^{-i(u_1+i\alpha)L_t} \exp \left(\lambda^Q(T_1-t) \int_0^\infty e^{-i(u_1+i\alpha)x} G^Q(dx) \right) \\ &\times \exp \left(\left(-i(u_2+i\beta)b^Q - \frac{1}{2} c^Q(u_2+i\beta)^2 \right) (T_2-T_1) \right) \\ &\times \exp \left((T_2-T_1) \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-i(u_2+i\beta)x} - 1 + i(u_2+i\beta)x \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}} \right) F^Q(dx) \right) du_1 du_2. \end{aligned} \quad (23)$$

2. Se $t \in [T_1, T_2]$

$$\begin{aligned} \pi_t^Q &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(u_1, u_2) e^{-i(u_1+i\alpha)L_{T_1}} e^{-i(u_2+i\beta)X_{t-T_1}} \\ &\quad \times \exp\left(\left(-i(u_2+i\beta)b^Q - \frac{1}{2}c^Q(u_2+i\beta)^2\right)(T_2-t)\right) \\ &\quad \times \exp\left((T_2-t) \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-i(u_2+i\beta)x} - 1 + i(u_2+i\beta)x \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}\right) F^Q(dx)\right) du_1 du_2. \end{aligned} \quad (24)$$

O preço de uma opção *call* no período de perdas é definido em (23), com a transformada de Fourier dada por (22). O desenvolvimento do método numérico de estimação foi feito em conformidade com o exposto em Dempster (2000), considerando-se as grelhas de discretização

$$\begin{aligned} u_{1,m} &= \left(m - \frac{NP}{2}\right) \Delta u_1, \quad m = 0, \dots, NP-1 \text{ e} \\ u_{2,n} &= \left(n - \frac{NP}{2}\right) \Delta u_2, \quad n = 0, \dots, NP-1, \end{aligned}$$

com Δu_1 e Δu_2 a representarem os passos de integração. Considerando o índice de perdas L_t , que assume o valor s , e o simétrico do logaritmo do preço de exercício, definem-se as seguintes grelhas de forma a aplicar o algoritmo da TRF bidimensional

$$\begin{aligned} k_p &= \left(p - \frac{NP}{2}\right) \Delta k, \quad p = 0, \dots, NP-1 \text{ e} \\ s_q &= \left(q - \frac{NP}{2}\right) \Delta s, \quad q = 0, \dots, NP-1, \end{aligned}$$

em que Δk e Δs representam o espaçamento das variáveis k e s , respectivamente. É ainda necessário que se verifique a condição

$$\Delta u_1 \Delta s = \Delta u_2 \Delta k = \frac{2\pi}{NP}. \quad (25)$$

Na aplicação do algoritmo considerou-se a função característica do processo expressa em função dos parâmetros em alternativa à representação de Lévy-Khintchine, a qual iria implicar um factor de erro adicional no resultado decorrente da aproximação do integral associado à medida de Lévy. Neste caso o preço é aproximado por

$$\begin{aligned}
 \pi_C^Q(t) &\approx \frac{1}{4\pi^2} e^{-\lambda^Q(T_1-t)} \sum_{n=0}^{NP-1} \sum_{m=0}^{NP-1} \frac{e^{(\beta-1-iu_{2,n})k_p}}{(\beta-1-iu_{2,n})(\beta-iu_{2,n})(\alpha-iu_{1,m})^{\beta+1-iu_{2,n}}} \frac{\Gamma(\beta+1-iu_{2,n})}{\beta+1-iu_{2,n}} \\
 &\quad \times e^{-i(u_{1,m}+i\alpha)s_q} \exp\left(\lambda^Q(T_1-t) \int_0^\infty e^{-i(u_{1,m}+i\alpha)x} G^Q(dx)\right) E^Q\left[e^{-i(u_{2,n}+i\beta)X_{T_2-T_1}}\right] \Delta u_1 \Delta u_2 \\
 &\approx \frac{1}{4\pi^2} e^{-\lambda^Q(T_1-t)} e^{(\beta-1+i\frac{NP}{2}\Delta u_2)k_p} e^{(\alpha+i\frac{NP}{2}\Delta u_1)s_q} \sum_{n=0}^{NP-1} \sum_{m=0}^{NP-1} e^{-i\frac{2\pi}{NP}np} e^{-i\frac{2\pi}{NP}mq} e^{i\pi(n+m)} \\
 &\quad \times \frac{1}{(\beta-1-iu_{2,n})(\beta-iu_{2,n})(\alpha-iu_{1,m})^{\beta+1-iu_{2,n}}} \exp\left(\lambda^Q(T_1-t) \int_0^\infty e^{-i(u_{1,m}+i\alpha)x} G^Q(dx)\right) \\
 &\quad \times E^Q\left[e^{-i(u_{2,n}+i\beta)X_{T_2-T_1}}\right] \Delta u_1 \Delta u_2, \tag{26}
 \end{aligned}$$

no qual o integral $\int_0^\infty e^{-i(u_{1,m}+i\alpha)x} G^Q(dx)$ é conhecido com base na distribuição do montante

de perdas e $E^Q\left[e^{-i(u_{2,n}+i\beta)X_{T_2-T_1}}\right]$ é determinado de acordo com o processo de Lévy escolhido. É de realçar que, tal como no modelo de Mürmann, o preço da opção corresponde à componente real do resultado (26) que pode ser reescrito tendo em

consideração que $e^{-ia} = \cos(a) - i\sin(a)$:

$$\begin{aligned}
 \pi_C^Q(t) &\approx \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \left[(-1)^{p+q} e^{-\lambda^Q(T_1-t)} e^{(\beta-1)k_p} e^{\alpha s_q} \sum_{n=0}^{NP-1} \sum_{m=0}^{NP-1} e^{-i\frac{2\pi}{NP}np} e^{-i\frac{2\pi}{NP}mq} (-1)^{n+m} \right. \\
 &\quad \times \frac{1}{(\beta-1-iu_{2,n})(\beta-iu_{2,n})(\alpha-iu_{1,m})^{\beta+1-iu_{2,n}}} \exp\left(\lambda^Q(T_1-t) \int_0^\infty e^{-i(u_{1,m}+i\alpha)x} G^Q(dx)\right) \\
 &\quad \left. \times E^Q\left[e^{-i(u_{2,n}+i\beta)X_{T_2-T_1}}\right] \Delta u_1 \Delta u_2 \right]. \tag{27}
 \end{aligned}$$

No caso de se pretender avaliar uma opção no período de desenvolvimento define-se as grelhas para u_1 , u_2 e k tal como no período de perdas, e em substituição da grelha referente ao índice de perdas no instante t considera-se o instante T_1 , cujo valor se assume igual a l . A nova grelha define-se como

$$l_q = \left(q - \frac{NP}{2} \right) \Delta l, \quad q = 0, \dots, NP - 1,$$

verificando-se a condição

$$\Delta u_1 \Delta l = \frac{2\pi}{NP}.$$

Assim, o preço da opção definido em (24) vem

$$\begin{aligned} \pi_C^Q(t) &\approx \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \left[(-1)^{p+q} e^{-\lambda^Q (T_1-t)} e^{(\beta-1)k_p} e^{\alpha l_q} \sum_{n=0}^{NP-1} \sum_{m=0}^{NP-1} e^{-i\frac{2\pi}{NP}np} e^{-i\frac{2\pi}{NP}mq} (-1)^{n+m} \right. \\ &\quad \times \frac{1}{(\beta-1-iu_{2,n})(\beta-iu_{2,n})} \frac{\Gamma(\beta+1-iu_{2,n})}{(\alpha-iu_{1,m})^{\beta+1-iu_{2,n}}} \left(\frac{s}{l_q} \right)^{-i(u_{2,n}+i\beta)} \\ &\quad \left. \times E^Q \left[e^{-i(u_{2,n}+i\beta)(X_{T_2-T_1} - X_{t-T_1})} \right] \Delta u_1 \Delta u_2 \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

A aproximação numérica no caso de opções *put* é definida em função do preço da opção *call* e da condição de paridade *put-call*, tal como exposto na secção anterior.

É de salientar que, tal como acontece na aproximação do preço da opção no modelo de Mürmann, existem erros provenientes da discretização dos integrais e correspondentes truncagens que não serão analisados.

4. Aplicação Prática

Neste capítulo procede-se à calibragem dos modelos em *software* Matlab R2009, considerando-se o efeito da taxa de juro sem risco. A informação disponível, apesar de reduzida, corresponde a preços *bid* e *ask* de opções *National PCS call spread* divulgadas pela CBoT a 21 de Dezembro de 1998. Os contratos eram anuais, ou seja, o período de perdias era de 1 ano, e o período de desenvolvimento era de 6 meses. O índice de perdias à data observada era de 40. O preço de mercado das opções necessário na calibragem do modelo é aproximado pelo preço médio⁶, definido por

$$CS_t^m(K) = \frac{CS_t^{Ask}(K) + CS_t^{Bid}(K)}{2}.$$

Os preços médios utilizados na aplicação encontram-se no Quadro 4.1.

Quadro 4.1 – Preços das opções *National PCS call spread*

K ₁	K ₂	preço médio
40	60	11,00
60	80	8,00
80	100	8,00
100	120	4,75
100	150	12,00
120	140	3,50
150	200	5,75
180	200	1,10
250	300	1,50

A escolha dos parâmetros dos modelos é feita através da minimização do erro quadrático da amostra

⁶ Nos casos em que só existe preço *bid* ou *ask* considera-se esse preço na calibragem.

$$err = \sqrt{\sum_{i=1}^I w_i (CS_i^m - \pi_{CS_i}^Q)^2},$$

em que $\pi_{CS_i}^Q$ corresponde ao valor da opção *call spread* i , calculado com base na transformada rápida de Fourier e w_i representa o peso relativo do preço da opção. O peso pode ser determinado pela liquidez da opção, ou seja, pelo *spread bid-ask* (ver Cont e Tankov (2004)):

$$w_i = \frac{1}{(CS_t^{Bid}(K) - CS_t^{Ask}(K))^2}.$$

Contudo, os preços *bid* e *ask* nem sempre estão disponíveis pelo que se atribui o mesmo peso a cada opção, ou seja $w_i = \frac{1}{I}$.

Os preços das opções foram calculados pelas fórmulas deduzidas no capítulo anterior, sendo feita uma interpolação na grelha de valores do índice de perdas de forma a comparar com os resultados observados no mercado.

4.1 Modelo de Mürmann

4.1.1 Transformada rápida de Fourier

A metodologia proposta por Mürmann assume que a distribuição do montante das perdas seguras tem suporte $[0, \infty)$. Para o efeito admite-se que, sob a medida de probabilidade \mathbb{Q} , as variáveis Y_i seguem uma distribuição Gama de parâmetros (c, δ) e a função de densidade é definida por

$$\frac{dG^Q(y)}{dy} = \frac{c^\delta}{\Gamma(\delta)} e^{-cy} y^{\delta-1},$$

com $c > 0$, $\delta > 0$ e $\Gamma(\cdot)$ a representar a função Gama. Assim, a função característica vem

$$E^Q[e^{iuy}] = \left(\frac{c}{c - iu} \right)^\delta.$$

Deduzida a função característica do montante das perdas a função característica χ_{T-t}^Q presente na expressão (9) define-se como

$$\chi_{T-t}^Q(u) = \exp\left(\lambda^Q \left(\left(\frac{c}{c - iu} \right)^\delta - 1 \right) (T - t) \right).$$

Adicionalmente no cálculo do preço das opções inclui-se o factor de desconto, que na prática corresponde à aplicação do factor $e^{-r(T-t)}$ à expressão (13). A taxa de juro sem risco considerada corresponde à *yield* das obrigações do tesouro a 1 ano⁷, que na data em análise era de 4,65%.

Deste modo, para modelar o preço da opção *call spread* associado à primeira metodologia é implementada a aproximação

$$\begin{aligned} \pi_{CS}^Q(t) \approx & e^{-r(T-t)} \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[e^{-iK_{2,p}\Delta u} \sum_{m=0}^{NP-1} e^{-i\frac{2\pi}{NP}mp} e^{-iam\Delta u} e^{iu_m s} \frac{1}{(u_m)^2} \right. \right. \\ & \times \exp\left(\lambda^Q \left(\left(\frac{c}{c - iu_m} \right)^\delta - 1 \right) (T - t) \right) \Delta u \\ & \left. \left. - e^{-iK_{1,p}\Delta u} \sum_{m=0}^{NP-1} e^{-i\frac{2\pi}{NP}mp} e^{-iam\Delta u} e^{iu_m s} \frac{1}{(u_m)^2} \exp\left(\lambda^Q \left(\left(\frac{c}{c - iu_m} \right)^\delta - 1 \right) (T - t) \right) \Delta u \right. \right. \\ & \left. \left. + k \sum_{m=0}^{NP-1} e^{iu_m s} \frac{i}{u_m} \exp\left(\lambda^Q \left(\left(\frac{c}{c - iu_m} \right)^\delta - 1 \right) (T - t) \right) \frac{\Delta u}{3} (3 - (-1)^m - \rho_m) \right] + k \right), \end{aligned}$$

⁷ Fonte: U.S. Department of Treasury (www.treasury.gov).

com $k = K_2 - K_1$ e estimam-se os parâmetros λ^Q , c e δ . É de salientar que nos dois integrais em que se aplicou o algoritmo da TRF não foram considerados os pesos da regra de Simpson no somatório como sugerido em Carr e Madan (1999), uma vez que na prática o resultado da otimização piorava.

4.1.2 Resultados

Na aplicação do algoritmo é necessário escolher um valor para NP e um valor para o passo de integração Δu tal que a truncagem do integral e a discretização resultem em erros aceitáveis. Na implementação do modelo são utilizados $NP = 32.768$ pontos, a grelha do preço de exercício é iniciada em zero ($a = 0$) e o valor do passo de integração estabelecido deve ser baixo de forma a que o modelo se ajuste adequadamente aos dados. Tendo em conta a sensibilidade do modelo face aos passos de integração estudaram-se os seguintes casos, verificando a condição estabelecida em (12):

1. $\Delta u = 0,00153398$ e $\Delta K = 0,125$;
2. $\Delta u = 0,00076699$ e $\Delta K = 0,25$.

Os parâmetros que minimizam o erro quadrático da amostra estão listados no Quadro 4.2:

Quadro 4.2 – Parâmetros estimados – Mürmann

	λ^Q	c	δ	<i>err</i>
Caso 1	1,5952	0,0485	2,6810	0,8332
Caso 2	1,6169	0,0366	2,0623	0,6805

Na avaliação da qualidade da calibragem do modelo é útil recorrer às Figuras 4.1 e 4.2, que permitem observar se os preços gerados pelo modelo são aceitáveis quando comparáveis com os preços de mercado.

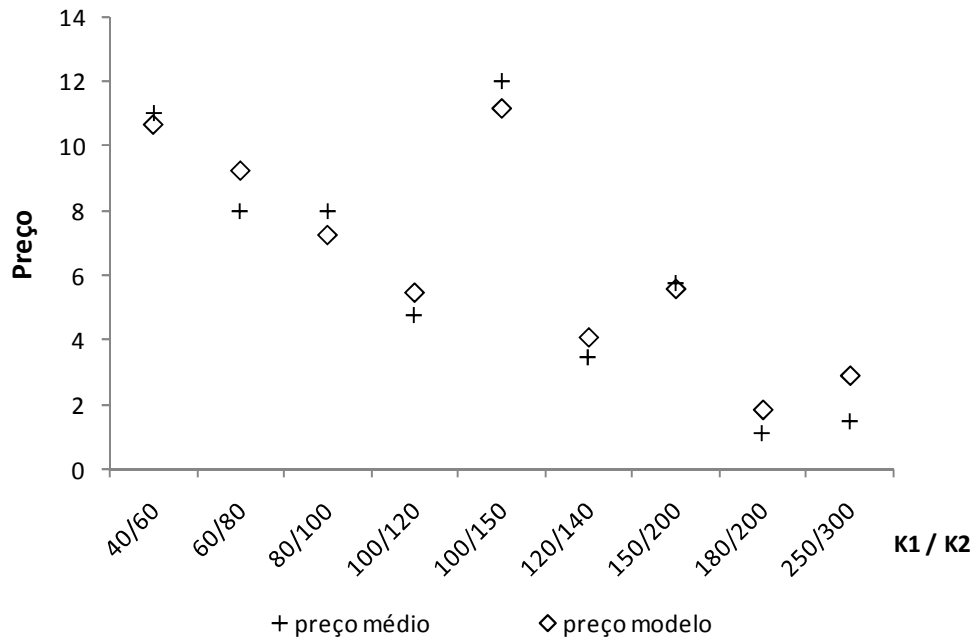


Figura 4.1 – Calibragem do modelo de Mürmann – Caso 1

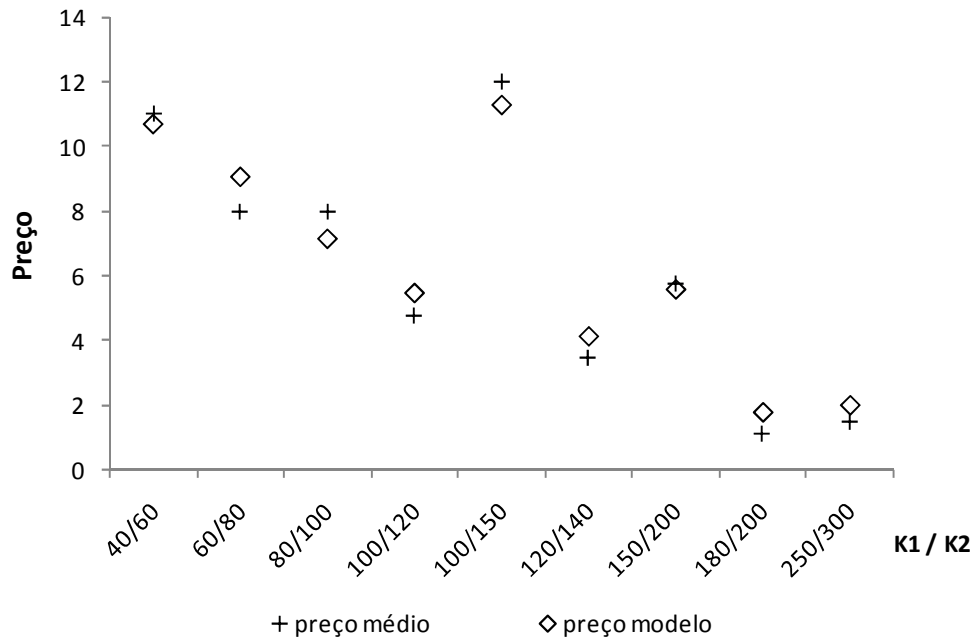


Figura 4.2 – Calibragem do modelo de Mürmann – Caso 2

Analisando os preços determinados na calibragem verifica-se que o modelo no caso 1 consegue ajustar adequadamente a maioria dos preços. No caso 2, em que se considera um passo de integração inferior, observa-se uma melhoria do ajustamento, em especial na opção *call spread* 250/300. O erro quadrático neste último caso é inferior, o que vem evidenciar a sensibilidade do modelo face aos valores do passo de integração. No entanto, em termos do limite efectivo do integral dado por $(NP-1)\Delta u$ é de salientar que o valor no caso 1 é de 50,264 em oposição aos 25,132 do caso 2.

4.2 Modelo BBM

4.2.1 Processo *Variance Gamma*

O processo *Variance Gamma* é um processo de Lévy, que pode ser representado por um movimento Browniano com deriva em que a variável tempo é transformada num processo Gama. A função característica do processo é definida por

$$E[e^{iuX_t}] = \left(1 - iu\theta v + \frac{1}{2}u^2\sigma^2 v\right)^{-\frac{t}{v}},$$

onde σ , v e θ são os parâmetros do modelo (ver Schoutens (2003)).

O processo pode, de forma alternativa, ser expresso como a diferença entre dois processos Gama independentes, $X_t = G_t^{(1)} - G_t^{(2)}$. Neste caso a função característica pode ser reescrita como

$$\Phi(u) = \left(\frac{GM}{GM + iu(M - G) + u^2}\right)^C,$$

com

$$C = \frac{1}{v} > 0,$$

$$G = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 v^2 + 2\sigma^2 v} - \frac{1}{2}\theta v\right)^{-1} > 0,$$

$$M = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 v^2 + 2\sigma^2 v} + \frac{1}{2}\theta v\right)^{-1} > 0.$$

Na parametrização considera-se que $G_t^{(1)}$ é um processo Gama com parâmetros C e M , e $G_t^{(2)}$ é um processo Gama independente com parâmetros C e G .

Os parâmetros do processo reflectem, de forma indirecta, a *skewness* e a *kurtosis*. Se $\theta = 0$, então verifica-se $G = M$ e a distribuição é simétrica. No caso de θ assumir valores negativos, tem-se $G > M$, o que resulta em *skewness* negativa. Em relação ao controlo da *kurtosis*, este é feito com base no parâmetro ν .

Caracterizado o processo *Variance Gamma*, descreve-se o processo preço do índice em conformidade com o apresentado em Carr *et al* (1998). O processo é dado por

$$L_t = L_0 \exp(mt + X_t(\sigma_P, \nu_P, \theta_P) + \omega_P t),$$

com o índice P dos parâmetros a evidenciar que estes são os parâmetros do modelo sob a medida de referência \mathbb{P} , $\omega_P = \frac{1}{\nu_P} \log\left(1 - \theta_P \nu_P - \frac{1}{2} \sigma_P^2 \nu_P\right)$, e m a taxa média de retorno do índice.

Sob a medida equivalente de martingala ou medida associada à metodologia de avaliação neutra face ao risco, os preços descontados são martingalas e a taxa média de retorno corresponde à taxa de juro sem risco. O processo de preço neste caso é parametrizado por

$$L_t = L_0 \exp(rt + X_t(\sigma_{RN}, \nu_{RN}, \theta_{RN}) + \omega_{RN} t),$$

com o índice RN a indicar que os parâmetros são determinados considerando a medida neutra face ao risco, e $\omega_{RN} = \frac{1}{\nu_{RN}} \log\left(1 - \theta_{RN} \nu_{RN} - \frac{1}{2} \sigma_{RN}^2 \nu_{RN}\right)$.

4.2.2 Transformada rápida de Fourier

No modelo BBM assume-se, tal como em Mürmann, que o montante de perdas segue uma distribuição Gama, pelo que se obtém

$$E^{\mathbb{Q}} \left[e^{-i(u_1 + i\alpha)X_t} \right] = \int_0^{\infty} e^{-i(u_1 + i\alpha)x} G^{\mathbb{Q}}(dx) = \left(\frac{c}{c - \alpha + iu_1} \right)^{\delta}.$$

O processo X_t pressupõe-se que corresponde a um *Variance Gamma* com parâmetros $(\sigma_{RN}, \nu_{RN}, \theta_{RN})$. A função característica neutra face ao risco do processo sob a medida equivalente de martingala pode ser definida com um termo de deriva (*drift*), ω_{RN} , e a taxa de juro r , obtendo-se

$$E^Q \left[e^{-i(u_2 + i\beta)X_{T_2 - T_1}} \right] = \exp(-i(u_2 + i\beta)(T_2 - T_1)(r + \omega_{RN})) \\ \times \exp\left(-\frac{T_2 - T_1}{\nu_{RN}} \log\left(1 + i(u_2 + i\beta)\theta_{RN}\nu_{RN} + \frac{1}{2}(u_2 + i\beta)^2\sigma_{RN}^2\nu_{RN}\right)\right),$$

com

$$\omega_{RN} = -\frac{1}{\nu_{RN}} \log\left(1 - \theta_{RN}\nu_{RN} - \frac{1}{2}\sigma_{RN}^2\nu_{RN}\right).$$

Os dados disponíveis correspondem a opções *call spread* no período de perdas pelo que o preço é implementado como a diferença de duas opções *call* com preços de exercícios K_1 e K_2 , respectivamente. O preço de cada opção *call*, com preço de exercício K , é definido pela expressão (27), que com base nos pressupostos assumidos para o processo de Lévy vem

$$\pi_C^Q(t) \approx e^{-r(T_2 - t)} \left(\frac{1}{4\pi^2} e^{-\lambda^Q(T_1 - t)} \operatorname{Re} \left[e^{(\beta-1)k_p} e^{\alpha q} (-1)^{p+q} \sum_{n=0}^{NP-1} \sum_{m=0}^{NP-1} e^{-i\frac{2\pi}{NP}np} e^{-i\frac{2\pi}{NP}mq} \right. \right. \\ \times \frac{1}{(\beta-1-iu_{2,n})(\beta-iu_{2,n})} \frac{\Gamma(\beta+1-iu_{2,n})}{(\alpha-iu_{1,m})^{\beta+1-iu_{2,n}}} \exp\left(\lambda^Q(T_1 - t) \left(\frac{c}{c-\alpha+iu_{1,m}}\right)^\delta\right) \\ \times (-1)^{n+m} \exp\left(i(u_{2,n} + i\beta)\frac{T_2 - T_1}{\nu_{RN}} \left(r + \log\left(1 - \theta_{RN}\nu_{RN} - \frac{1}{2}\sigma_{RN}^2\nu_{RN}\right)\right)\right) \\ \left. \times \exp\left(-\frac{T_2 - T_1}{\nu_{RN}} \log\left(1 + i(u_{2,n} + i\beta)\theta_{RN}\nu_{RN} + \frac{1}{2}(u_{2,n} + i\beta)^2\sigma_{RN}^2\nu_{RN}\right)\right) \Delta u_1 \Delta u_2 \right].$$

Para efeitos da calibragem, a função Gama complexa é calculada com base na implementação da aproximação de Lanczos⁸.

Importa referir que na prática para se obter valores admissíveis para as opções é necessário calcular o valor absoluto de $\pi_C^Q(t)$, mas como, por definição o preço de uma opção *call* é positivo, o valor absoluto é igual ao valor da opção.

4.2.3 Resultados

Na avaliação do segundo modelo (BBM) optou-se por $NP = 4.096$ pontos, uma vez que o aumento do número de pontos não introduz melhorias relevantes ao ajustamento e o tempo computacional para optimização dos parâmetros aumenta significativamente. Na aplicação considerou-se os passos de integração

$$\Delta u_1 = \Delta u_2 = 0,0122718 \text{ e } \Delta k = \Delta s = 0,125,$$

a satisfazer a condição (26) e $\alpha = 0,1$ e $\beta = 1,1$, a verificar a condição I_1 .

Os resultados obtidos para os parâmetros deste modelo estão listados no Quadro 4.3:

Quadro 4.3 – Parâmetros estimados – BBM

λ^Q	c	δ	σ_{RN}	ν_{RN}	θ_{RN}	<i>err</i>
0,5422	0,0795	3,1215	1,8031	0,1965	1,9970	1,4665

Os preços gerados pelo modelo podem ser observados na Figura 4.3, sendo feito um comparativo com os preços de mercado.

⁸ O código Matlab está disponível em: <http://winnie.fit.edu/~gabdo/gamma.txt>

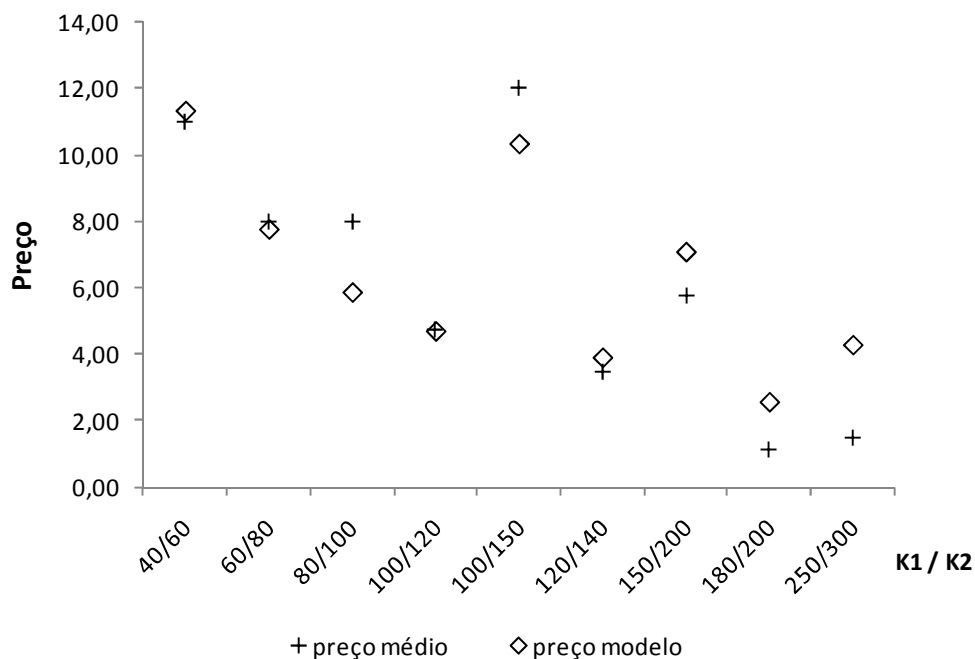


Figura 4.3 – Calibragem do modelo BBM

Observando os resultados deste segundo modelo verifica-se que o ajustamento piora em comparação com o modelo anterior, em especial para os preços das opções *call spread* 80/100 e 250/300, apesar de para as restantes opções o modelo parecer acompanhar os preços de mercado. Em termos práticos é de salientar que os limites de integração utilizados foram $-25,133 \leq u_1, u_2 \leq 25,120$.

A alteração do processo de Lévy considerado na aplicação poderia (teoricamente) permitir melhorar os resultados, mas devido à reduzida amostra histórica não parece vantajoso estudar processos com mais parâmetros para estes dados.

4.3 Comparação dos modelos

Concluída a exposição teórica dos modelos de avaliação e respectiva aplicação prática, será apresentado nesta secção um resumo das principais diferenças entre ambos.

No desenvolvimento das fórmulas de preço das opções o modelo de Mürmann considera que o índice de perdas é modelado pelo mesmo processo até à maturidade. Ao nível do modelo BBM é feita uma distinção na modelação do índice de perdas e na respectiva expressão para o preço, dependendo do instante de avaliação pertencer ao período de perdas ou ao período de desenvolvimento.

Em relação à aplicação das metodologias propostas, a distinção do período na modelação implica que é necessário estimar mais parâmetros no segundo modelo, o que em certos casos pode-se revelar limitativo face à dimensão da amostra em estudo.

Um outro aspecto prático em que os modelos diferem, diz respeito ao tempo computacional necessário para a determinação dos parâmetros que minimizam o erro. Para o número de pontos considerados na aplicação, o modelo de Mürmann converge rapidamente, contrariamente ao modelo BBM que demora significativamente mais tempo, uma vez que aplica o algoritmo da TRF a um integral duplo. O tempo de optimização do modelo BBM constitui uma restrição dado que o aumento do número de pontos de 4.096 para 8.192 implicaria uma duração computacional excessiva, comparativamente com o modelo anterior.

É ainda possível constatar que apesar de em termos teóricos o modelo BBM ser mais adequado à estrutura das opções de catástrofe, os resultados obtidos pela metodologia proposta por Mürmann, pelo menos para a amostra histórica de preços em estudo, são mais adequados quando comparados com os de mercado. Esta situação pode dever-se também aos problemas computacionais e aos erros de aproximação no cálculo dos integrais introduzidos no modelo BBM.

5. Conclusão

O objectivo da presente dissertação foi estudar duas metodologias de avaliação de opções de catástrofe, cujo índice subjacente não é transaccionado. A aplicação foi efectuada para o caso de opções *call spread*, contratos anuais que cobrem todo o território dos E.U.A.

Na primeira metodologia desenvolvida deduziu-se o preço dos derivados sob a hipótese de não arbitragem e o índice de perdas foi modelado por um processo de Poisson composto. Esta dedução baseia-se em técnicas de Fourier, permitindo obter fórmulas explícitas para o preço das opções a partir da transformada inversa de Fourier e da função característica do processo de perdas.

Concluída a dedução analítica das fórmulas, procedeu-se pela primeira vez (no que se tem conhecimento) ao cálculo do preço das opções utilizando o algoritmo da TRF. Na aplicação do algoritmo foi resolvido um problema de minimização, de modo a determinar-se quais os parâmetros que resultam numa melhor adequação do modelo aos dados observados no mercado.

Em termos da aplicação do modelo constatou-se que o passo de integração considerado deve ser pequeno de forma a ajustar bem os preços de mercado.

As principais limitações do modelo referem-se à hipótese de modelação do índice de perdas por um processo de Poisson composto homogéneo, que pode não ser o mais adequado, devido ao efeito de sazonalidade. Na parte prática, as limitações mais relevantes referem-se à hipótese do montante de perdas seguir uma distribuição Gama e à reduzida amostra histórica utilizada no cálculo do preço das opções.

Analizou-se ainda uma segunda metodologia de avaliação que desagrega a estrutura temporal do derivado em dois períodos, o de perdas e o de desenvolvimento. O índice

de perdas no primeiro período é modelado, tal como no caso do modelo de Mürmann, por um processo de Poisson composto e as perdas são reestimadas no segundo período com base num factor determinado por um processo de Lévy exponencial, que se assumiu ser um processo *Variance Gamma*.

Na aplicação prática do modelo foi necessário considerar para o algoritmo da TRF um número de pontos inferior ao do modelo anterior de modo a evitar que o tempo computacional necessário para a optimização dos parâmetros fosse excessivo. Em termos dos resultados obtidos observou-se um ajustamento razoável para os preços, apesar de existirem algumas opções em que os preços do modelo divergiram dos de mercado.

O estudo do algoritmo da TRF e respectiva aplicação no cálculo do preço das opções usando dados de mercado, constitui, tal como no modelo de Mürmann, um desenvolvimento do artigo (não se conhecem estudos prévios que tratem desta questão). As principais limitações do modelo anterior mantêm-se válidas, excepto o facto de agora considerarmos um período para a reestimação das perdas. A hipótese do processo de Lévy exponencial corresponder a um *Variance Gamma* pode também ser limitativa, podendo a consideração de outros modelos de Lévy permitir obter melhores resultados. Além disso, o tempo computacional necessário à estimação dos preços do modelo e os erros de aproximação introduzidos podem ser limitativos.

Em termos globais é possível concluir que, ambos os modelos, apesar das diferenças e limitações apresentadas, são adequados para o cálculo do valor de opções de catástrofe.

Como sugestão de trabalhos futuros, propõe-se estudar formas alternativas para modelar o índice de perdas, por exemplo considerando que o montante de perdas segue uma distribuição de Pareto e, no caso de se incluir o factor de reestimação, testar o processo Hiperbólico Geométrico ou o processo Normal Gaussiano Inverso. A nível teórico é

interessante estudar, para os dois modelos, o problema da determinação de medidas equivalentes de martingala usando a transformada de Esscher, tal como referido em Möller (1996). No caso do modelo BBM seria também importante analisar os casos em que a distribuição do montante de perdas tem caudas pesadas, sendo neste caso necessário deduzir novas fórmulas para o preço das opções (ver Biagini *et al* (2008)).

Bibliografia

Aase, K. (1999), An Equilibrium Model of Catastrophe Insurance Futures and Spreads, *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 24: 69-96.

Biagini, F., Bregman, Y. e Meyer-Brandis, T. (2008), Pricing of catastrophe insurance options written on a loss index with reestimation, *Insurance: Mathematics and Economics*, 43: 214-222.

Black, F. e Scholes, M. (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81: 637-654.

Carr, M. e Madan, D.B. (1999), Option valuation using the fast Fourier transform, *Journal of Computational Finance*, 2: 61-73.

Carr, M., Madan, D.B. e Chang, E. (1998), The Variance Gamma Process and Option Pricing, *European Finance Review*, 2: 79-105.

Christensen, C.V. (1998), The PCS-option, an improvement of the CAT-Future, *Working Paper Series, University of Aarhus*.

Christensen, C.V. (1999), A new model for pricing catastrophe insurance derivatives, *CAF Working Paper Series, 28, CAF, University of Aarhus*.

Cont, R. e Tankov, P. (2004), *Financial Modelling With Jump Processes*, Chapman et Hall/CRC.

Cox, D.R. e Isham, V. (1980), *Point processes*, Chaptman et Hall.

Cummins, J. e Geman, H. (1993), An Asian Option Approach to the Valuation of Insurance Futures Contracts, *The Wharton Financial Institutions Center*.

Dassios, A. e Jang, J.-W. (2003), Pricing of catastrophe reinsurance and derivatives using the Cox process with shot noise intensity, *Finance and Stochastics*, 7: 73-95.

- Delbaen, F. e Haezendonck, J. (1989), A Martingale Approach to Premium Calculation Principles in an Arbitrage Free Market, *Insurance: Mathematics and Economics*, 8: 269-277.
- Dempster, M.A.H. e Hong, S.S.G. (2000), Spread option valuation and the fast Fourier transform, *University of Cambridge*.
- Geman, H. e Yor, M. (1997), Stochastic time changes in catastrophe option pricing, *Insurance: Mathematics and Economics*, 21: 185-193.
- Jacob, J. e Shiryaev, A.N. (2003), *Limit theorems for stochastic processes*, 2ª Edição, Springer.
- Klebaner, F. (2005), *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*, 2ª Edição, Imperial College Press.
- Kluge, W. (2005), *Time-inhomogeneous Lévy processes in interest rate and credit risk models*, Dissertação de doutoramento, Freiburg: Universidade Albert-Ludwigs.
- Kreps, D.M. (1981), Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities, *Journal of Mathematical Economics*, 8: 15-35.
- Möller, M. (1996), Pricing PCS-options with the use of Esscher-transforms, *Afir Colloquium Nürnberg*.
- Mürmann, A. (2001), Pricing Catastrophe Insurance Derivatives, *Financial Markets Group-London School of Economics*.
- Øksendal, B. (2000), *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications*, 5ª Edição, Springer.
- Pina, H. (1995), *Métodos Numéricos*, New York: McGraw, Inc.
- Protter, P. (2004), *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2ª Edição, Springer.

Schachermayer, W. (2008), The Notion of Arbitrage and Free Lunch in Mathematical Finance, *Aspects of Mathematical Finance*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 15-22.

Schmidli, H. (2001), Modelling PCS options via individual indices, *CAF Working Paper Series*, 157, CAF, University of Aarhus.

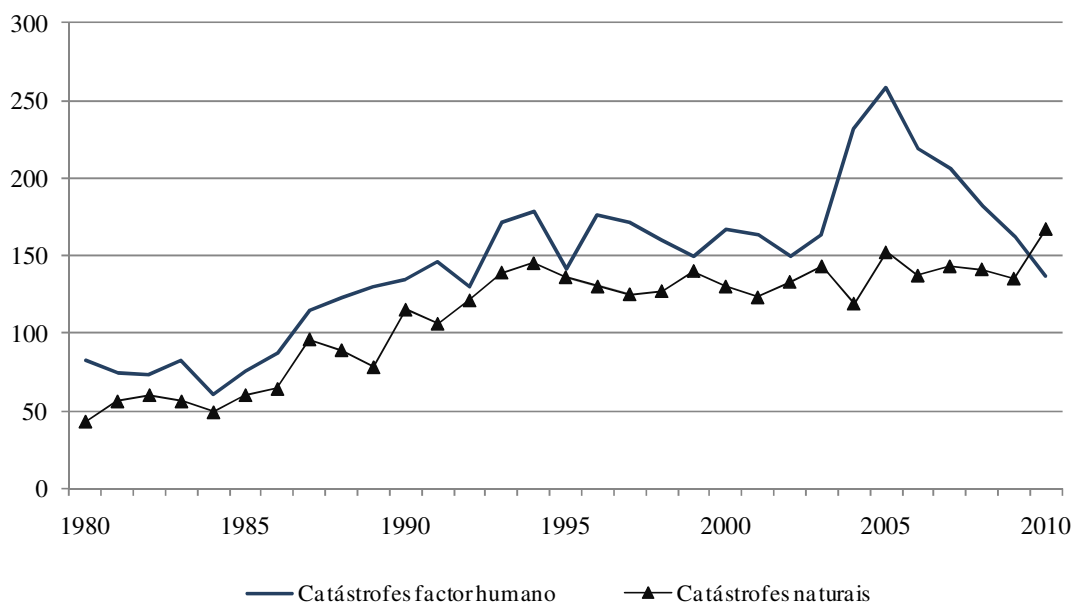
Schoutens, W. (2003), *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*, John Wiley & Sons, Ltd.

Shreve, S. (1997), *Stochastic Calculus and Finance*.

Sigma Nr. 7 (2006), Securitization: New Opportunities for Insurers and Investors, *Swiss Re*.

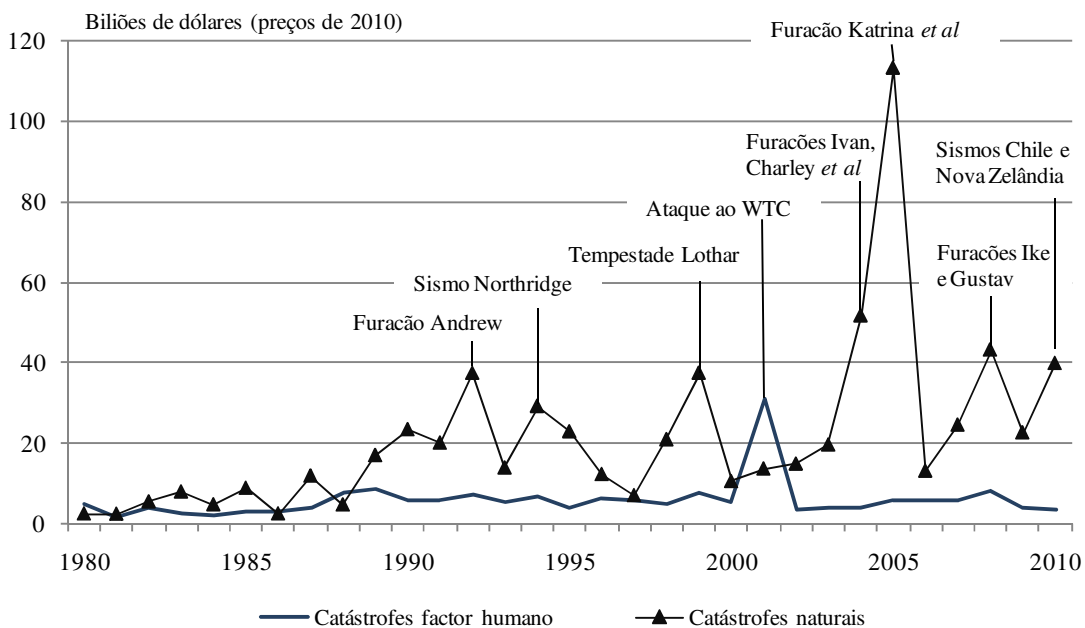
Sigma Nr. 4 (2009), The Role of Indices in Transferring Insurance Risks to the Capital Market, *Swiss Re*.

Anexo A - Catástrofes



fonte: Swiss Re

Figura A.1 – Número de catástrofes ocorridas entre 1980 e 2010



fonte: Swiss Re

Figura A.2 – Perdas suportadas pelo sector segurador entre 1980 e 2010

Anexo B – Transformada rápida de Fourier, modelo

Mürmann

O preço do derivado no modelo de Mürmann pode ser aproximado de forma alternativa considerando a TRF em função do valor do índice de perdas. Em conformidade com o capítulo 3.1.5 considere-se a grelha de discretização definida por

$$u_m = (m+1)\Delta u, \quad m = 0, \dots, NP-1,$$

em que Δu representa o passo de integração e NP o número de passos. As opções em análise dependem do valor do índice no instante t, s . O algoritmo da TRF devolve NP valores para s , com espaçamento Δs , pelo que os seus valores são dados por

$$s_p = a + p\Delta s, \quad p = 0, \dots, NP-1.$$

Assim o preço da opção *call spread* definido em (9) é aproximado por

$$\begin{aligned} \pi_{CS}^Q(t) &\approx \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\sum_{m=0}^{NP-1} e^{iu_m s_p} \underbrace{\frac{1}{(u_m)^2} \chi_{T-t}^Q(u_m) (e^{-iu_m K_2} - e^{-iu_m K_1} + iu_m k)}_{z_j} \Delta u \right] + k \\ &\approx \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[e^{is_p \Delta u} \sum_{m=0}^{NP-1} e^{imp\Delta s \Delta u} (e^{iam\Delta u} z_j) \right] + k, \end{aligned}$$

com $k = K_2 - K_1$. De forma a aplicar a TRF, é necessário que se verifique

$$\Delta s \Delta u = \frac{2\pi}{NP}.$$

A aproximação numérica no caso das opções *put spread* vem

$$\pi_{PS}^Q(t) \approx \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[e^{is_p \Delta u} \sum_{m=0}^{NP-1} e^{i\frac{2\pi}{NP}mp} e^{iam\Delta u} \frac{1}{(u_m)^2} \chi_{T-t}^Q(u_m) (e^{-iu_m K_1} - e^{-iu_m K_2} - iu_m k) \Delta u \right].$$

Aplicando os pressupostos assumidos no capítulo 4 à expressão alternativa para o preço de uma opção *call spread* obtém-se para os casos

1. $\Delta u = 0,00153398$ e $\Delta s = 0,125$;
2. $\Delta u = 0,00076699$ e $\Delta s = 0,25$,

os seguintes resultados:

Quadro B.1 – Parâmetros estimados

	λ^Q	c	δ	<i>err</i>
Caso 1	1,4824	0,0596	3,2189	1,0324
Caso 2	1,5434	0,0422	2,3613	0,7304

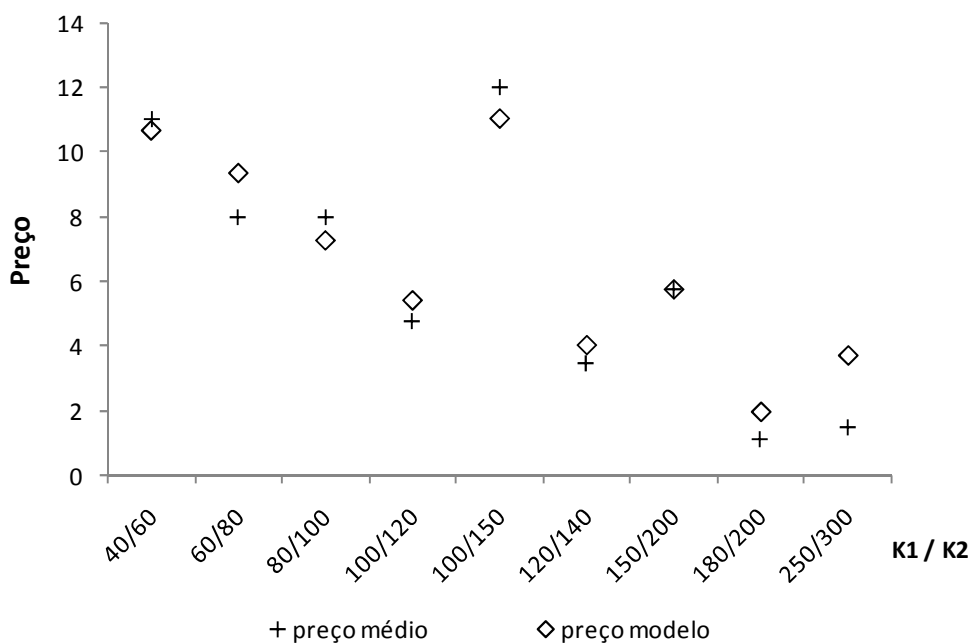


Figura B.1 – Calibragem do modelo de Mürmann – Caso 1

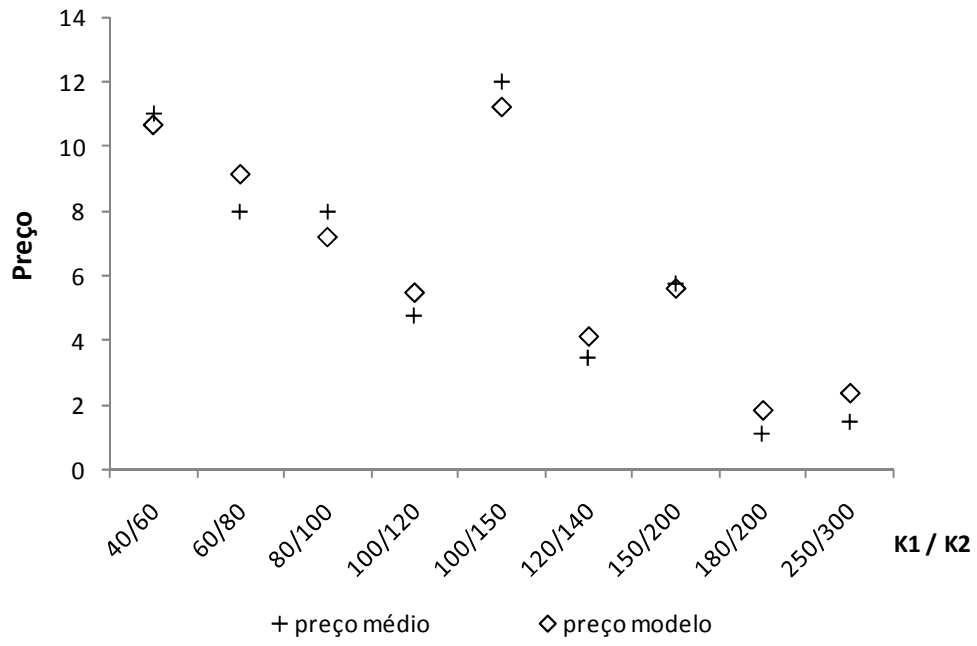


Figura B.2 – Calibragem do modelo de Mürmann – Caso 2