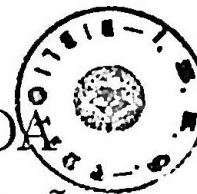


X-96-074681-0



UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM: Matemática Aplicada à Economia e Gestão

COINTEGRAÇÃO INTEIRA E FRACCIONÁRIA DAS
TAXAS DE CÂMBIO
UMA APLICAÇÃO AO CASO PORTUGUÊS

Luis Filipe Farias de Sousa Martins

Orientação: Nuno Paulo de Sousa Arrobas Crato

Júri:

- **Presidente:** Doutor Artur C. B. da Silva Lopes, professor auxiliar do Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa;
- **Vogais:** Doutor Luís M. R. Catela Nunes, professor auxiliar da Faculdade de Economia da Universidade Nova de Lisboa;

Doutor Nuno P. de S. Arrobas Crato, professor do New Jersey Institute of Technology, Estados Unidos da América;

Doutor António de Ascensão Costa, professor auxiliar convidado do Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa.

MAIO / 1998



UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM: Matemática Aplicada à Economia e Gestão

COINTEGRAÇÃO INTEIRA E FRACCIONÁRIA DAS TAXAS DE CÂMBIO
UMA APLICAÇÃO AO CASO PORTUGUÊS

Luis Filipe Farias de Sousa Martins

Orientação: Nuno Paulo de Sousa Arrobas Crato

Júri:

- **Presidente:** Doutor Artur C. B. da Silva Lopes, professor auxiliar do Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa;
- **Vogais:** Doutor Luís M. R. Catela Nunes, professor auxiliar da Faculdade de Economia da Universidade Nova de Lisboa;
Doutor Nuno P. de S. Arrobas Crato, professor do New Jersey Institute of Technology, Estados Unidos da América;
Doutor António de Ascensão Costa, professor auxiliar convidado do Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa.

MAIO / 1998

COINTEGRAÇÃO INTEIRA E FRACCIONÁRIA DAS TAXAS DE CÂMBIO - UMA APLICAÇÃO AO CASO PORTUGUÊS



RESUMO

A sustentabilidade da teoria da paridade dos poderes de compra (PPP) entre a economia portuguesa e as economias dos Estados Unidos da América e da Inglaterra é estudada através da análise dos resíduos do modelo de cointegração.

O suporte teórico é baseado num conceito generalizado de cointegração, denominado de cointegração fraccionária. Esta metodologia ambiciona complementar o procedimento de Engle e Granger cuja inferência assenta num ensaio conduzido sobre *knife-edged* - os erros de equilíbrio comportam-se estritamente como não estacionários ($I(1)$) ou estacionários ($I(0)$). Por outro lado, é conhecida e será mostrada neste trabalho, através de simulação de Monte Carlo, a reduzida potência dos testes de raízes unitárias contra a alternativa de processos de memória longa.

Pela mesma técnica de simulação são construídas distribuições de estatísticas de teste que permitem ensaiar a hipótese nula de não cointegração fraccionária. Nesta perspectiva, o estudo da PPP não se restringe à análise do valor obtido para a estimativa fraccionária.

A cointegração fraccionária, identificando os resíduos de cointegração como processos fraccionariamente integrados, permite captar um leque mais vasto de processos estacionários e com reversão à média. Estes ganhos de flexibilidade sugerem uma mais apropriada avaliação da dinâmica evolutiva das taxas de câmbio.

Para o presente século é empiricamente defensável que Portugal tem mantido a paridade dos poderes de compra com as economias da Inglaterra e dos E.U.A.. A série residual é modelizada como um processo fraccionário, revertível para o nível. Apesar de se admitir a presença de desvios no curto prazo, os resultados sustentam a teoria da PPP como um fenómeno de longo prazo.

Palavras-chave: Paridade dos Poderes de Compra; Teste de Raízes Unitárias; Cointegração Fraccionária; Integração Fraccionária; Processo de Memória Longa; Monte Carlo

Classificação J.E.L.: F41, C22 e C15

INTEGER AND FRACTIONAL COINTEGRATION OF EXCHANGE RATES - THE PORTUGUESE CASE

ABSTRACT

The purchasing power parity (PPP) hypothesis is discussed by means of residual-based cointegration tests. Two bilateral relations are considered between Portugal as the home country and the United Kingdom and the United States of America.

A generalized concept of cointegration is used - the fractional cointegration. This method aims to be a complement of the Engle-Granger procedure, whose test for cointegration assumes that the equilibrium error is strictly $I(1)$ (nonstationary) or $I(0)$ (stationary). It is known and it will be shown in this work by a Monte Carlo experiment, that the unit root tests turn out to perform poorly against long memory alternatives.

To perform a test for fractional cointegration, empirical distributions are obtained through a Monte Carlo experiment. This means that the PPP hypothesis is not confined to the value of the fractional estimate. By allowing equilibrium errors to follow a fractional integrated process, the fractional cointegration analysis capture a wider range of stationary and level reversion behavior. This flexibility is important to a proper evaluation of the exchange rate dynamics.

For this century, the empirical results provide some support for the PPP between Portugal and the two other countries. Deviations from equilibrium can be modelled by a level-reverting fractionally integrated process. Although short run deviations can occur, the results support the PPP as a long run phenomenon.

Key words: Purchasing Power Parity; Unit Roots Test; Fractional Cointegration; Fractional Integration; Long Memory Process; Monte Carlo Experiment

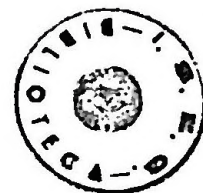
J.E.L. classification: F41, C22 e C15

Índice

LISTA DE TABELAS	8
LISTA DE FIGURAS	9
1 INTRODUÇÃO	12
2 COINTEGRAÇÃO E A TEORIA DA PARIDADE DOS PODERES DE COMPRA	17
2.1 Cointegração	17
2.2 Modelização da Taxa de Câmbio. A PPP e Cointegração	19
2.2.1 Outras Modelizações	24
2.3 Abordagem Univariada da Paridade dos Poderes de Compra	27
3 COINTEGRAÇÃO INTEIRA	30
3.1 Preliminares	30
3.2 Processo Estocástico Estacionário	30
3.3 Integração Inteira	31
3.3.1 Processos $I(d)$. Modelos ARIMA	31
3.3.2 Processos $I(0)$. Modelos ARMA	32
3.3.3 Processos $I(1)$	34
3.4 Testes Dickey-Fuller de Raízes Unitárias	35
3.5 Cointegração e Integração Inteira	41
3.6 Cointegração Inteira. Metodologia de Engle e Granger	42

3.6.1	Estimação do Modelo de Cointegração por OLS	43
3.6.2	Modelos com Variáveis Cointegradas	45
3.6.3	Testes de Cointegração Através de Testes de Raízes Unitárias	48
3.7	Regressões Espúrias	50
4	COINTEGRAÇÃO FRACCIONÁRIA	52
4.1	Notas Preliminares	52
4.2	Origens e Observações	53
4.3	Integração Fraccionária	55
4.4	Modelos ARFIMA	55
4.4.1	Processo de Ruído Fraccionário	56
4.4.2	Processos de Memória Longa. Propriedades	58
4.5	Métodos de Estimação	62
4.5.1	Estimação da Média e da Função de Autocorrelação	62
4.5.2	Estimação Semiparamétrica de d em Domínio Frequência - GPH	63
4.5.3	Estimação por Máxima Verosimilhança	66
4.6	Cointegração Fraccionária	70
4.7	Estimação do Modelo de Cointegração por OLS	73
4.8	Inferência no Modelo de Cointegração	77
5	PPP E COINTEGRAÇÃO INTEIRA E FRACCIONÁRIA: O CASO PORTUGUÊS	80
5.1	Apresentação dos Modelos e Abordagens	80
5.2	Descrição das Séries e Construção dos Resíduos	82
5.2.1	Ordem de Integração das Séries	82
5.2.2	Construção da Série Residual	86
5.3	Cointegração Inteira	87
5.4	Distribuição e Potência dos Testes GPH e MLE	89
5.5	Cointegração Fraccionária	93

5.6	Análise Univariada da PPP	97
5.6.1	Taxa de Câmbio Real como um Processo ARIMA	98
5.6.2	Taxa de Câmbio Real como um Processo ARFIMA	100
5.7	Síntese Conclusiva	103
6	NOTAS CONCLUSIVAS	105
	BIBLIOGRAFIA	108
	Apêndices	
A	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	116
A.1	Processos Cointegrados	116
A.2	Processos Independentes (Regressão Espúria)	117
A.3	Distribuições de Teste GPH e MLE	117
A.4	Potência dos Testes AEG, GPH e MLE, Contra Alternativas de $AR(1)$ Estacionário e <i>Ruído Fraccionário</i> Revertível para o Nível e para a Média (Estacionário)	118
B	ROTINAS EM GAUSS	119
B.1	Processos Cointegrados e Independentes	119
B.2	Distribuição de Teste GPH	120
B.3	Distribuição de Teste MLE	121
B.4	Kurtosis e Skewness	121
B.5	Potência de Teste GPH contra Alternativa de $AR(1)$	122
B.6	Potência de Teste GPH contra Alternativa de Ruído Fraccionário	123
B.7	Potência de Teste MLE contra Alternativa de $AR(1)$	123
B.8	Potência de Teste MLE contra Alternativa de Ruído Fraccionário	124
B.9	Potência de Teste AEG contra Alternativa de $AR(1)$	124
B.10	Potência de Teste AEG contra Alternativa de Ruído Fraccionário	125



Lista de Tabelas

5.1	Resultados dos testes de raízes unitárias para as séries.	83
5.2	Estimativas OLS dos modelos de cointegração.	86
5.3	Resultados do teste AEG aos resíduos.	88
5.4	Distribuição de teste GPH e MLE.	92
5.5	Potência dos testes AEG, GPH e MLE, contra alternativas AR(1).	92
5.6	Potência dos testes AEG, GPH e MLE, contra alternativas de ruído fraccionário.	93
5.7	Resultados da cointegração fraccionária.	95
5.8	Representação ARFIMA(p,d,q) dos resíduos de cointegração.	95
5.9	Resultados dos testes de raízes unitárias sobre a taxa de câmbio real.	99
5.10	Resultados da paridade pela análise fraccionária das taxas de câmbio reais.	101
5.11	Representação ARFIMA(p,d,q) das taxas de câmbio reais.	101

Lista de Figuras

2-1	Relação de cointegração - a) Erros de equilíbrio (topo); b) Processos cointegrados (canto inferior esquerdo); c) <i>Scatter plot</i> das variáveis cointegradas (canto inferior direito).	19
3-1	Relação espúria - a) Erros (topo); b) Processos independentes (canto inferior esquerdo); c) <i>Scatter plot</i> (canto inferior direito).	50
4-1	Processos de memória longa - a) Processo persistente (lado esquerdo); b) Processo não persistente (lado direito).	60
5-1	Séries do modelo da PPP entre Portugal e a Inglaterra - a) Séries da libra e do preço relativo n,uk (à esquerda), b) <i>Scatter plot</i> das variáveis (à direita).	85
5-2	Séries do modelo da PPP entre Portugal e os E.U.A. - a) Séries do dólar e do preço relativo n,usa (à esquerda), b) <i>Scatter plot</i> das variáveis (à direita).	86
5-3	Cronograma dos resíduos dos modelos de cointegração - a) Série residual do modelo n,uk (em baixo), b) Série residual do modelo n,usa (em cima).	87
5-4	Periodograma dos resíduos dos modelos de cointegração - a) Série residual do modelo n,uk (em baixo), b) Série residual do modelo n,usa (em cima).	88
5-5	FAC dos resíduos dos modelos de cointegração - a) Série residual do modelo n,uk (à esquerda), b) Série residual do modelo n,usa (à direita).	89
5-6	Função autocovariância teórica e empírica de $\hat{e}_t^{n,uk}$	95
5-7	Função autocovariância teórica e empírica de $\hat{e}_t^{n,usa}$	96

5-8	Cronograma das taxas de câmbio reais - a) Taxa de câmbio real da libra (em baixo), b) Taxa de câmbio real do dólar (em cima).	99
5-9	Periodograma das taxas de câmbio reais - a) Taxa de câmbio real da libra (em baixo), b) Taxa de câmbio real do dólar (em cima).	100
5-10	FAC das taxas de câmbio reais - a) Taxa de câmbio real da libra (à esquerda), b) Taxa de câmbio real do dólar (à direita).	101
5-11	Função autocovariância teórica e empírica da taxa de câmbio real da libra. . .	102
5-12	Função autocovariância teórica e empírica da taxa de câmbio real do dólar. .	102

Ao meu orientador, Nuno Crato, o meu muito obrigado. Porque não se recusou a ajudar na condução deste projecto e pelos exemplares reparos e sugestões, merece as primeiras palavras de apreço. A introdução ao mundo do L^AT_EX e do GAUSS, a ele se deve. A quem se julgava mais céptico, a *net* tratou de mostrar que o Atlântico pode não ser um obstáculo.

Os meus agradecimentos a António Costa por me ter indicado o Nuno Crato, pela cedência dos dados utilizados, pelos comentários à tese realizados e pelo tratamento de alguns aspectos formais inerentes à tese. A Pedro de Lima agradeço a pronta disponibilidade na cedência de alguns procedimentos em GAUSS.

A Clive Granger na conferência do CEMAPRE de 1997, e a Peter Brockwell e Richard Baillie no Curso da Arrábida do mesmo ano, os meus agradecimentos pelos relevantes comentários sobre o tema da tese.

Ao meu grande amigo e colega Vasco Gabriel, devo o decisivo incentivo dado na aventura do mestrado.

Finalmente, e em especial, a todos aqueles que me são mais queridos, uma palavra de gratidão pela ajuda e paciência demonstradas. Saliento muito particularmente os meus pais e irmão.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A hipótese da paridade dos poderes de compra (*purchasing power parity* ou, abreviadamente, PPP) é uma das mais importantes na economia internacional. Esta teoria considera que, medido na mesma unidade monetária, um cabaz de compras é adquirido em dois países diferentes pela mesma quantidade de moeda.

A verificação da paridade, resulta do estudo do comportamento simultâneo das variáveis taxa de câmbio nominal e índice de preços relativos, ou alternativamente, da análise da taxa de câmbio real. Na literatura econométrica, a PPP é sobretudo estudada pela análise univariada da taxa de câmbio real.

Desde sempre tem existido uma grande controvérsia sobre a validade da paridade dos poderes de compra. Esta controvérsia, encontra-se intimamente ligada com o tipo de metodologia aplicada.

A estacionaridade das séries cronológicas é um pressuposto da teoria clássica. No entanto, a maioria das séries económicas apresenta propriedades estatísticas, nomeadamente média e variância, que variam com o tempo. Estas séries são definidas como não estacionárias. A estacionaridade destas séries, pode obter-se por transformações várias, nomeadamente pela aplicação de d diferenciações. Muitas das séries económicas podem ser aproximadas por processos integrados de ordem um, $I(1)$, isto é, possuem uma raiz unitária e tornam-se estacionárias nas primeiras diferenças.



Tradicionalmente, é assumido que na problemática da presença de raízes unitárias, mais recentemente da cointegração, os processos são $I(d)$, com d inteiro. A determinação da ordem de integração das séries tem resultado na realização de um ensaio de raízes unitárias, conhecido como teste de Dickey-Fuller.

Esta última metodologia sustenta a teoria da PPP, quando a taxa de câmbio real é estacionária, $I(0)$, ou em termos de cointegração, as séries da taxa de câmbio nominal e índice de preços relativos são não estacionárias ($I(1)$) mas uma sua combinação linear apresenta características de estacionaridade. As variáveis cointegradas, apesar de individualmente serem não estacionárias, tendem a mover-se conjuntamente, ou seja, apresentam uma relação de equilíbrio de longo prazo.

Fundamentado neste método, a PPP tem sido normalmente contestada em termos internacionais. Vejam-se, por exemplo, Baillie e Selover (1987), Enders (1988), Taylor (1988) e Mark (1990), através da análise da cointegração e Corbae e Ouliaris (1988) e Nessén (1996) através da análise univariada da taxa de câmbio real. A aceitação empírica desta teoria pode ser encontrada em Abuaf e Jorion (1990).

Este trabalho procura estudar a paridade dos poderes de compra da nossa economia relativamente às da Inglaterra e dos Estados Unidos da América. Duas motivações para a escolha destas economias: uma, de índole estatística, que assenta na incapacidade de construção de séries longas para outras economias e outra, porque estas economias são das maiores potências mundiais em termos económicos.

Procurar-se-á conciliar este objectivo com a demonstração das principais vantagens de se estudar a cointegração entre variáveis num âmbito não estritamente inteiro para d .

A PPP é analisada através de um conceito generalizado de cointegração, a cointegração fraccionária. As séries económicas a cointegrar¹ e, mais importante, os resíduos do modelo de cointegração, não admitindo estritamente uma representação ARMA ou ARIMA, são modelizáveis como um processo de memória longa ou fraccionário, ARFIMA(p, d, q).

A cointegração fraccionária incorpora a definição e modelização de processos de memória

¹Ou a taxa de câmbio real.

longa, apresentados por Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981), no conceito de cointegração apresentado por Granger (1986) e Engle e Granger (1987). Apesar de a cointegração inteira ter ganho uma grande relevância, principalmente porque Engle e Granger (1987) abordaram o caso mais simples de $C(1, 1)$, a definição apresentada por estes autores em 1986 e 1987 é válida para o caso geral em que os processos possuem uma ordem de integração real.

Diebold, Husted e Rush (1991) e Wu e Crato (1995) pela análise da taxa de câmbio real, como um processo fraccionário, e Cheung e Lai (1993) pela cointegração fraccionária, encontram evidência da PPP em termos internacionais. Para a economia nacional, a verificação da PPP resume-se a Crato e Costa (1993) ou Costa e Crato (1996), para uma análise fraccionária da taxa de câmbio real². A nível nacional, pensa-se que este trabalho é pioneiro na abordagem da cointegração fraccionária, tendo-se consciência dos riscos inerentes.

Não tendo obtido até ao momento uma grande aplicabilidade empírica, procura-se apresentar neste trabalho uma estrutura teórica que motive o estudo da PPP, ou de qualquer outro modelo, através do conceito generalizado de cointegração fraccionária.

A teoria da paridade dos poderes de compra e a noção de cointegração são conceitos definidos para amplos horizontes temporais. Os processos fraccionários além de apresentarem um vasto leque de representações em que é compatível a estacionaridade e a revertibilidade para o nível, identificam uma ampla classe de dinâmicas nas frequências baixas.

Os processos de memória longa definem uma certa persistência na correlação de observações distantes e um predomínio das frequências em torno da origem. Destaca-se a sua aplicação nas seguintes áreas:

- séries financeiras e variáveis macroeconómicas (Diebold e Rudebush (1989), Cheung (1993a) e Hassler e Wolters (1995));
- *hysteresis* no desemprego (Crato e Rothman (1996));
- previsão (Granger e Joyeux (1980), Geweke e Porter-Hudak (1983) e Crato e Ray

²Estes autores verificam que as taxas de câmbio reais da libra e do dólar apresentam características de revertibilidade para o nível.

(1996));

- cointegração (PPP, taxas de juro de curto e longo prazos, produto e moeda, consumo e rendimento, salários e preços e taxas de câmbio³).

Os testes de raízes unitárias têm pouca potência contra alternativas de processos frac-
cionariamente integrados. Confirmando-se os resultados obtidos por outros autores, mostra-
se neste trabalho que para resíduos de ruído fraccionário, estacionários e revertíveis para o
nível (evidência de cointegração), os testes de raízes unitárias têm pouca potência compara-
tivamente a outros procedimentos de estimação para processos fraccionários.

A cointegração fraccionária, sobre a qual se estudou a PPP, tem por base a seguinte
metodologia: obtém-se a série residual de mínimos quadrados do modelo de cointegração;
estima-se o modelo ARFIMA, e realiza-se um ensaio à não cointegração para a estimativa
da ordem de integração fraccionária. Conhecendo-se as propriedades dos processos frac-
cionários, admite-se a existência de cointegração quando a estimação e a inferência da ordem
de integração, apontar para a estacionaridade ou revertibilidade da série residual ($d < 1$).

Os métodos de estimação utilizados foram os de máxima verosimilhança⁴ e de Geweke,
Porter-Hudak.

Os testes de cointegração por raízes unitárias, resultam num ensaio de *knife-edged*: $d = 1$
vs $d = 0$. Por seu lado, a verificação da cointegração fraccionária pode culminar estritamente
na análise da informação que é dada pela série residual, através da ordem de integração
estimada. Este trabalho procura ser um pouco mais ambicioso e rigoroso: confere-se a esta
análise uma maior dimensão estatística, ao possibilitar a realização de um ensaio de hipóteses
à não cointegração fraccionária.

O ensaio é de $d = 1$ *vs* $d < 1$, e a distribuição da estatística de teste, por máxima
verosimilhança e pelo método de Geweke e Porter-Hudak, é obtida pela técnica de simulação
de Monte Carlo.

³Veja-se para esta última, Baillie e Bollerslev (1994).

⁴Foram utilizados dois módulos do ITSM de Brockwell e Davies.

Nos programas de simulação, em GAUSS, para a potência e distribuição de teste aplicaram-se procedimentos de estimação fraccionária que foram cedidos pelo Prof. Pedro de Lima. O texto de referência é o de Cheung e Lai (1993).

Com o objectivo de estudar a PPP para a economia nacional com informação anual, procurando confrontar os problemas econométricos da cointegração inteira e fraccionária, organizou-se este trabalho da seguinte forma:

- no segundo capítulo apresenta-se o conceito de cointegração e a teoria da paridade dos poderes de compra;
- no capítulo 3, procura-se enunciar, de uma forma sucinta e adaptada aos objectivos deste trabalho, a teoria da cointegração inteira como um caso particular da cointegração fraccionária;
- o capítulo 4 apresenta a teoria da cointegração fraccionária. Existindo uma tipologia flexível para a modelização dos resíduos, em que se conciliam as dinâmicas de curto e longo prazo, é potenciada uma mais correcta avaliação da cointegração entre variáveis;
- o capítulo nuclear da dissertação é o quinto. Mediante os resultados obtidos, procura discutir a hipótese da PPP para a nossa economia, além de enunciar e confrontar as problemáticas da teoria da cointegração num âmbito inteiro e fraccionário. O estudo da PPP através da análise univariada da taxa de câmbio real assume um carácter complementar;
- posteriormente à apresentação das principais conclusões e das pistas de investigação sobre este tema, indicam-se os procedimentos utilizados durante as fases de simulação.

Capítulo 2

COINTEGRAÇÃO E A TEORIA DA PARIDADE DOS PODERES DE COMPRA

2.1 Cointegração

O estudo da cointegração realiza-se sobre um vector de variáveis de dimensão n , superior ou igual a dois, e procura detectar, entre as mesmas, uma conexão regular (não cíclica). Trata-se de uma análise de longo prazo que, naturalmente, faz apelo ao uso de séries longas, medidas ao longo de intervalos de tempo regulares (meses, anos,...), durante um determinado período: $t=1,2,\dots,T$, sendo T a dimensão da amostra (número de observações).

Acontece frequentemente que as variáveis económicas, devido à sua natureza, não flutuam em torno de um determinado valor e têm um comportamento não estacionário. É para este tipo de séries, que se estuda a problemática da cointegração.

Granger (1991) identifica uma particularidade no comportamento entre variáveis cointegradas - a *atração*. Isto significa, muito simplesmente, que o comportamento ao longo do tempo de qualquer uma das variáveis é atraído ou condicionado pelo comportamento da(s) outra(s), através de uma combinação linear que representa a amplitude e o sentido de

dependência entre elas. Em termos de formalização matemática, a *força de atracção* presente entre as variáveis é representada pelo vector de cointegração. O vector de cointegração define, portanto, a relação linear de longo prazo que existe entre as séries cointegradas. Seja,

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & t^s & X_{1t} & \dots & X_{nt} \end{bmatrix}$$

o vector das $s + 1$ variáveis não estocásticas e n variáveis cointegradas;

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_s & \beta_1 & \dots & \beta_n \end{bmatrix}$$

o vector de cointegração, e

$$\mathbf{X}_t \boldsymbol{\alpha}' = e_t$$

o erro de equilíbrio no período t .

Por questões de simplicidade, admitamos a presença de apenas duas variáveis cointegradas ($n = 2$) sem componentes determinísticas. Neste caso, $\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} X_{1t} & X_{2t} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$ e $\beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} = e_t$. O modelo de cointegração, na forma de equação de regressão, é $X_{1t} = \delta X_{2t} + e_t$ ¹.

O vector de cointegração revela um centro de gravidade ou de equilíbrio em torno do qual as variáveis cointegradas tendem a flutuar. Mais precisamente, $E[\mathbf{X}_t \boldsymbol{\alpha}'] = E[e_t] = 0$.

A relação anterior apenas se verifica em média, pois as variáveis têm movimentos erráticos, resultantes de choques aleatórios, que influenciam o afastamento conjunto do estado de equilíbrio. Apesar de ter valor esperado nulo, o desvio em relação ao equilíbrio, e_t , num determinado período t assume normalmente uma amplitude não nula.

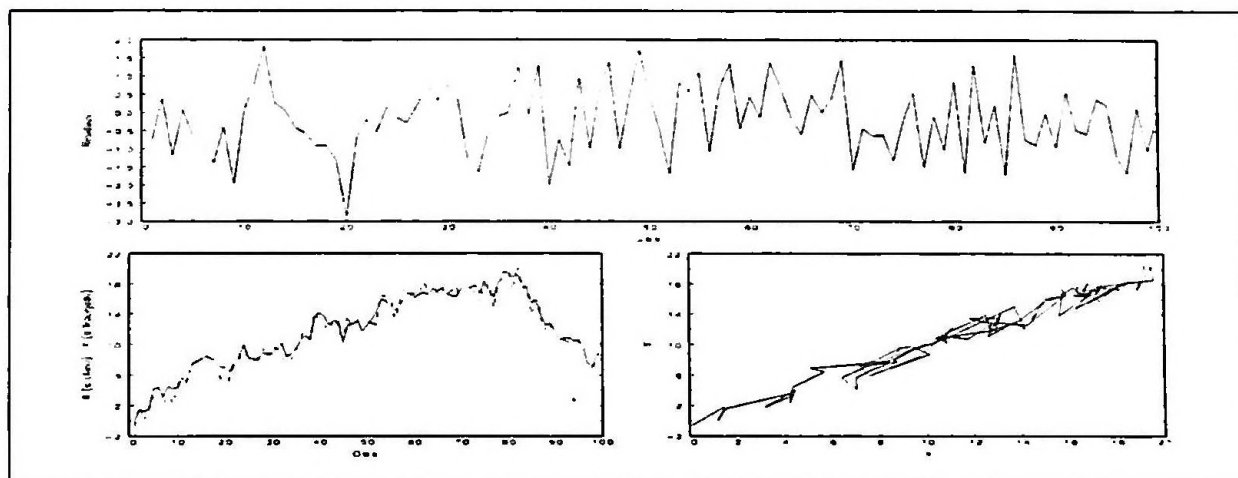
O que se garante é que, na presença de cointegração, os afastamentos do equilíbrio, e_t , não têm carácter permanente, ou seja, a existência da *força de atracção* garante que ao longo do tempo os choques tendam a dissipar-se e as variáveis oscilem em torno da trajectória de equilíbrio.

¹Para o conceito de cointegração, a escolha do parâmetro a normalizar é absolutamente arbitrária.

As figuras 2.1 ilustram as principais propriedades de dois processos cointegrados. Os resultados foram obtidos por simulação através do software GAUSS. Encontra-se em apêndice, a forma de simulação dos processos $\{X_t\}$, $\{Y_t\}$ como passeios aleatórios e $e_t = Y_t - X_t$ como um ruído branco.

A figura 2.1 c) retrata as flutuações conjuntas das variáveis cointegradas ao longo da relação linear de cointegração, $Y_t = X_t + e_t$. Nesta situação, $\{X_t\}$ e $\{Y_t\}$ apresentam movimentos sincronizados no mesmo sentido: em média, o nível das duas variáveis cresce ou decresce ao mesmo tempo.

Figura 2-1: Relação de cointegração - a) Erros de equilíbrio (topo); b) Processos cointegrados (canto inferior esquerdo); c) *Scatter plot* das variáveis cointegradas (canto inferior direito).



2.2 Modelização da Taxa de Câmbio. A PPP e Cointegração

A doutrina da paridade dos poderes de compra é um dos modelos explicativos da dinâmica das taxas de câmbio. Representando esta teoria, entre outras, uma modelização da taxa de câmbio de longo prazo, a sua fundamentação pode ser econometricamente discutida pela teoria da cointegração.

Uma análise mais completa sobre a modelização desta variável económica pode ser encontrada na forma de *survey* em MacDonald e Taylor (1992), Constâncio (1995) e MacDonald (1995). Numa perspectiva complementar, consulte-se Dornbush (1988), Krugman (1992),

Svensson (1992), Pentecost (1993), Copeland (1994) e MacDonald e Marsh (1997).

Em termos intuitivos, a hipótese da paridade dos poderes de compra afirma que, ao longo do tempo, medido na mesma unidade monetária, o mesmo cabaz de compras é comprado pela mesma quantidade de moeda, em países diferentes.

Na sua forma mais *perfeita*, a paridade é sustentada pela *lei do preço único*: todo o bem transaccionável possuiria o mesmo valor em duas economias diferentes. Considerando o bem i , homogéneo,

$$p^i = S.p_f^i, \quad (2.1)$$

onde S é a taxa de câmbio nominal (preço de uma moeda estrangeira medido em termos de moeda nacional), p^i e p_f^i são os preços interno e externo do bem i .

Esta hipótese assenta na arbitragem internacional que garante, no longo prazo, ajustamentos de preços e da taxa de câmbio, de forma a eliminar disparidades no valor do bem em países distintos. Para agentes nacionais, a obtenção de ganhos adicionais, por vender no mercado externo quando neste mercado o valor do bem é superior, vai sendo eliminada porque resultaria no aumento do preço interno e diminuição do valor externo (por diminuição do preço externo e/ou taxa de câmbio) até o valor do bem ser igual nos dois mercados.

Agregando, para cada país, os preços dos bens na forma de índice (considerando para cada bem, o mesmo peso), é obtida a condição da paridade absoluta dos poderes de compra:

$$S = \frac{P_n}{P_f}, \quad (2.2)$$

onde P_n e P_f são respectivamente o índice geral de preços interno e externo. Desta forma, e tomando o exemplo dado por MacDonald (1995), um aumento do índice de preços interno resultante de uma política monetária expansionista implicaria uma depreciação equiproporcional da taxa de câmbio.

Tal como é observado por Constâncio (1995), a paridade absoluta, dada a arbitragem internacional e a substituibilidade perfeita entre os bens produzidos internamente e os im-

portados², conduz a índices gerais de preços iguais, quando convertidos na mesma moeda.

A paridade absoluta enunciada em (2.2) é essencialmente uma referência teórica. Entre outras condicionantes, importa em primeiro lugar fazer referência a determinados impedimentos ao comércio, tais como custos de transporte, tarifas ou quotas. Supondo que estes factores, representados por C , são constantes no tempo, (2.2) resulta em.

$$S = C \cdot \frac{P_n}{P_f}. \quad (2.3)$$

Considerando a transformação logarítmica das variáveis, $s = c + p_n - p_f$, onde $s = \log(S)$, $p_n = \log(P_n)$ e $p_f = \log(P_f)$. Por aplicação de diferenciais, obtém-se uma versão *mais fraca* da PPP, a paridade relativa:

$$ds = dp_n - dp_f. \quad (2.4)$$

A paridade relativa indica que a percentagem de apreciação ou depreciação da taxa de câmbio equivale à diferença entre as taxas de inflação das economias. Uma forma alternativa a esta última, que resulta de $p_n = -c + s + p_f$, é $dp_n = ds + dp_f$. Desta forma, a inflação doméstica corresponde à inflação externa acrescida da variação percentual da taxa de câmbio nominal.

A modelização da taxa de câmbio nominal de longo prazo relativamente aos preços pode ser expressa na seguinte equação de regressão:

$$s_t = \alpha + \beta_1 \cdot p_{n,t} + \beta_2 \cdot p_{f,t} + e_t, \quad (2.5)$$

em que α , β_1 e β_2 são parâmetros e e_t é uma componente residual.

²A não especialização na produção interna de bens conduz à igualdade entre o índice geral de preços e o índice de preços produzidos internamente.

Considerando a hipótese da simetria. $\beta_1 = -\beta_2 = \beta$, este modelo resulta em,

$$s_t = \alpha + \beta \cdot p_t + e_t, \quad (2.6)$$

onde $p_t = \log\left(\frac{P_{n,t}}{P_{f,t}}\right)$ é o índice de preços relativos, em logaritmos. Certos autores, nomeadamente Cheung e Lai (1993), consideram uma forma reparametrizada da anterior:

$$(sp_f)_t = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot p_{n,t} + e_t, \quad (2.7)$$

onde $sp_f = \log(S \cdot P_f)$ é o nível de preços externos, em moeda nacional.

Enquanto que (2.7) exprime a paridade, medida em índices de preços (de dois países diferentes), os quais representam um preço médio dos bens da economia, (2.6) exprime a paridade, medida num preço médio relativo entre moedas, a taxa de câmbio.

Admitindo-se que a PPP se verifica e que as variáveis s_t e p_t de (2.6) são não estacionárias, o correspondente modelo de cointegração é dado por, $X_t \alpha' = e_t$, onde o vector das variáveis é $X_t = \begin{bmatrix} s_t & 1 & p_t \end{bmatrix}$ e o vector de parâmetros é $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & -\beta \end{bmatrix}$.

Não considerando a componente residual de (2.6), a versão absoluta da PPP exige a verificação de duas hipóteses adicionais relativamente ao modelo mais geral (2.5): a homogeneidade, $\beta = 1$ e a nulidade, $\alpha = 0$.

A versão absoluta da PPP é, no entanto e como foi dito, essencialmente uma referência teórica. De facto, apenas excepcionalmente e num determinado período (ano, mês, dia, ...) se pode observar que, por exemplo, um cabaz de bens que custa em Portugal 100 contos, também valha exactamente o mesmo em Espanha. Em rigor, existe um leque vasto de factores que podem condicionar, em diferentes graus de importância, a verificação exacta das condições de simetria, homogeneidade e nulidade.

Destes factores, destacam-se, entre outros, os impedimentos ao comércio e os erros na medição das variáveis. Como foi anteriormente referido, os impedimentos ao comércio encontram-se traduzidos no termo independente do modelo. Erros e dificuldades na medição

das variáveis encontram-se fundamentalmente na variável preços. Se por um lado, o índice geral de preços não é construído da forma enunciada em (2.2), por outro lado, e tal como é referido por Constâncio (1995), os cabazes de compras usados nos índices de preços são diferentes de país para país e englobam bens não transaccionáveis. Estes factores condicionam a verificação das hipóteses consideradas.

Além destes factores, importa referir que os preços não são totalmente flexíveis, existem diferentes regimes cambiais e que os modelos da taxa de câmbio até este momento considerados podem omitir outras variáveis explicativas.

Destas últimas considerações pode-se supor que a verificação da PPP pode ser compatível com a violação da hipótese de nulidade, desde que todo e qualquer factor reflectido numa componente residual torne esta última estacionária. A análise da paridade entre economias diferentes não se pode restringir a uma versão tão perfeita como é a da paridade absoluta. A discussão da evidência da paridade não deve ser conduzida pela verificação exacta das condições. Além da hipótese da homogeneidade, as variáveis s_t , p_t e e_t devem representar, na sua forma linear, uma relação de cointegração.

A verificação da PPP é um indicador de que a divergência de paridade entre duas economias não se mantém indefinidamente no tempo. Nesta situação, existem mecanismos económicos que conduzem a ajustamentos das variáveis fazendo-as oscilar em torno da situação de paridade.

As flutuações da taxa de câmbio nominal encontram-se ligadas, no mesmo sentido, aos movimentos dos preços relativos. Para o modelo (2.6), em termos médios, o aumento (diminuição) do índice de preços relativo em uma unidade percentual, implica uma depreciação (apreciação), de β pontos percentuais na moeda nacional.

Para determinados modelos económicos, a teoria da cointegração apresenta-se como um instrumento normativo para a condução de políticas. Em termos de PPP, a sua verificação representa uma equidade no poder aquisitivo dos consumidores de economias diferentes. Num diferente âmbito, a cointegração entre as variáveis preços e salários é um indicador da manutenção do poder aquisitivo dos consumidores de uma determinada economia.



2.2.1 Outras Modelizações

A não verificação da PPP poderá reflectir uma incorrecta ou incompleta modelização da taxa de câmbio de longo prazo. Neste ponto procura-se apresentar, de uma forma superficial, alguns modelos alternativos da taxa de câmbio. Uma análise mais aprofundada destes e de outros modelos pode ser encontrada nas referências indicadas no início desta secção.

No regime de câmbios flexíveis, a taxa de câmbio garante o equilíbrio permanente da balança de pagamentos, isto é, $BP = 0$. Seguindo MacDonald (1995), a forma reduzida da balança de pagamentos para a taxa de câmbio é dada por,

$$s_t = p_{n,t} - p_{f,t} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot z_t - \left(\frac{i_{f,t}}{\alpha}\right) \cdot A_t - \left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot CAP_t, \quad (2.8)$$

onde as variáveis em minúsculas encontram-se logaritimizadas, α é a elasticidade das exportações líquidas, z_t representa as variáveis exógenas na determinação das exportações líquidas, $i_{f,t}$ é a taxa de juro externa, A é o stock líquido de activos estrangeiros, CAP é a balança de capitais e β é um parâmetro³.

Desta condição, a paridade absoluta era atingida se, no longo prazo, a balança de capitais e as componentes da balança de transacções correntes, $\frac{i_{f,t}}{\alpha}$, A_t e z_t fossem negligenciadas. No entanto, apenas $CAP = 0$ pode ser empiricamente aceite no longo prazo.

O equilíbrio externo também pode ser analisado através da influência das taxas de juro sobre os câmbios. No pressuposto de que existe total liberdade de movimentos de capitais, com mercados organizados da taxa de câmbio à vista e a prazo⁴, é a arbitragem internacional da taxa de juro (e não a de bens) que influencia a relação entre a taxa de câmbio e os preços relativos. Neste pressuposto, a balança de pagamentos é determinada fundamentalmente pela balança de capitais⁵.

A actividade de arbitragem, até à igualdade de remunerações das aplicações em títulos

³ Esta condição resulta de $BTC + CAP = 0$, onde a balança de transacções correntes, $BTC = nx + i_f \cdot A$. As exportações líquidas $nx = \alpha(s + p_f - p_n) + \beta \cdot z$ e $\alpha > 0$.

⁴ Veja-se Constâncio (1995).

⁵ Citando MacDonald (1995), a CAP "... becomes the tail wagging the current account dog."

nacionais e estrangeiros, conduz à paridade não coberta das taxas de juro, cuja condição é.

$$i_{n,t} = i_{f,t} + \nabla s_{t+k}^e, \quad (2.9)$$

onde i_n e i_f são as taxas de juro interna e externa e ∇s^e é a taxa de variação da taxa de câmbio à vista esperada. A paridade coberta das taxas de juro é dada por, $i_n = i_f + w$, para $w = \frac{F-S}{S}$, onde F é a taxa de câmbio a prazo e w é o prémio ou desconto desta última em relação à taxa de câmbio à vista. A verificação da paridade das taxas de juro é normalmente observada como um indicador da presença de total mobilidade de capitais⁶.

A condição (2.9) admite por hipótese que os títulos nacionais e estrangeiros são perfeitamente substituíveis. Como é referido por Constâncio (1995), os modelos de escolha de carteira, ao contrário dos modelos monetaristas das taxas de câmbio, ao considerarem a não perfeita substituíbilidade dos títulos, incorporam uma componente risco, ρ , na condição (2.9).

Pela decomposição de Fisher, $i_{n,t} - i_{f,t} = (r_{n,t}^e - r_{f,t}^e) + (\nabla p_{n,t+k}^e - \nabla p_{f,t+k}^e)$, onde r é a taxa de juro real e ∇p_{t+k}^e representa a taxa de inflação esperada, da condição (2.9) resulta,

$$s_{r,t} = -(r_n^e - r_f^e)_{t,t+k} + s_{r,t+k}^e, \quad (2.10)$$

em que $s_r = s - p_n + p_f$ é a taxa de câmbio real.

Desta noção de equilíbrio, pode-se verificar que a variação da taxa de câmbio real esperada pode ser equivalente ao diferencial de taxas de juro reais esperada, isto é,

$$\nabla s_{r,t+k}^e = (r_n^e - r_f^e)_{t,t+k}. \quad (2.11)$$

Admitindo-se expectativas racionais (expectativas subjectivas iguais a expectativas objec-

⁶Para $CAP = \mu(i_{n,t} - i_{f,t} - \nabla s_{t+k}^e)$, a perfeita mobilidade é representada para $\mu \rightarrow \infty$.

tivas⁷⁾ e que as taxas de juro reais são idênticas nos países em análise⁸⁾,

$$s_{r,t} - s_{r,t-1} = \zeta_t. \quad (2.12)$$

Ao contrário da visão tradicional da PPP, a taxa de câmbio real tem um comportamento de passeio aleatório. Nesta perspectiva, e distinguindo-se da PPP relativa, os distúrbios sobre a taxa de câmbio real existem e têm um efeito permanente. Esta é a visão dos mercados eficientes da PPP na evolução da taxa de câmbio real.

Apresenta-se em seguida, de uma forma ligeira, outro dos modelos da taxa de câmbio, o modelo monetarista de preços flexíveis. Como é apontado por MacDonald e Taylor (1992), esta modelização baseia-se em duas premissas: a PPP absoluta e a existência de uma função de procura de moeda estável para cada uma das economias.

Supondo que a função procura de moeda é representada pela especificação loglinear de Cagan, o equilíbrio monetário, $m^s = m^d$, onde m^s e m^d representam a oferta e a procura de moeda respectivamente, é dado por

$$m_n^s = p_n + \phi_n y_n - \lambda_n i_n \text{ e } m_f^s = p_f + \phi_f y_f - \lambda_f i_f, \quad (2.13)$$

onde m^s , p e y são os logaritmos da oferta de moeda, preços e produto, i é a taxa de juro nominal e ϕ e λ_n são a elasticidade e a semi-elasticidade da moeda relativamente ao produto e à taxa de juro, respectivamente. As notações n e f representam termos da economia nacional e externa.

Substituindo (2.13) na condição da paridade absoluta, $s = p_n - p_f$, obtém-se,

$$s_t = (m_n^s - m_f^s)_t - \phi_n y_{n,t} + \phi_f y_{f,t} + \lambda_n i_{n,t} - \lambda_f i_{f,t}. \quad (2.14)$$

⁷Veja-se Constâncio (1995).

⁸De (2.11), $\nabla s_{r,t+k}^e = (r_n^e - r_f^e)_{t,t+k}$, se $r_n^e = r_f^e$, então $\nabla s_{r,t+k}^e = 0$. Portanto, e tal como refere Constâncio (1995), também se verifica a PPP relativa: aplicando expectativas, $\nabla s^e - \nabla p_n^e + \nabla p_f^e = \nabla s_r^e = 0$.

Este é o modelo monetário de preços flexíveis básico⁹. Admitindo-se que os coeficientes nas funções de procura de moeda são iguais nas duas economias ($\phi_n = \phi_f$ e $\lambda_n = \lambda_f$),

$$s_t = (m_n^s - m_f^s)_t - \phi(y_n - y_f)_t + \lambda(i_n - i_f)_t. \quad (2.15)$$

Este modelo indica que a taxa de câmbio é determinada pelos níveis relativos de moeda, produto e taxa de juro. A promoção de uma política monetária expansionista pelas autoridades nacionais provoca uma depreciação da moeda; o crescimento da economia interna por expansão do produto implica uma apreciação da moeda e o aumento da taxa de juro doméstica conduz à depreciação da moeda¹⁰. Estes aparentes paradoxos têm como explicação o importante papel da procura de moeda no sector monetário¹¹.

2.3 Abordagem Univariada da Paridade dos Poderes de Compra

A verificação da paridade dos poderes de compra entre economias diferentes pode ser estudada, de uma forma alternativa, no contexto univariado das taxas de câmbio reais.

A taxa de câmbio real é um preço relativo entre os bens domésticos e externos. Esta variável é normalmente interpretada como um indicador de competitividade das economias, e tem a seguinte expressão:

$$S_r = (S.P_f)/P_n, \quad (2.16)$$

onde S_r é a taxa de câmbio real, S é a taxa de câmbio nominal e P_f e P_n são os índices de preços externos e internos respectivamente. $S.P_f$ é o nível de preços externos em moeda nacional.

A paridade absoluta, que resulta da imposição das hipóteses de homogeneidade e nulidade

⁹Pela condição da paridade absoluta. $p_n - p_f = (m_n^s - m_f^s)_t - \phi_n y_{n,t} + \phi_f y_{f,t} + \lambda_n i_{n,t} - \lambda_f i_{f,t}$. Como é referido por MacDonald e Taylor (1992), neste caso, o índice de preços externo (exógeno à nossa economia) e interno são determinados pelo sector monetário.

¹⁰Estas últimas hipóteses, considerando-se *ceteribus paribus*.

¹¹Veja-se MacDonald e Taylor (1992).

(não considerando o termo residual em (2.6)), é obtida para $S_r = 1$, isto é, $S = P_n/P_f$. Considerando-se a transformação logarítmica de S_r , $s_r = \log(S_r)$, a paridade é admitida para $s_r = 0$.

Este último resultado é, mais uma vez, fundamentalmente teórico. Na realidade, a taxa de câmbio real não permanece constante e igual à unidade devido a condicionalismos inerentes à variável, principalmente de natureza económica. Supondo que estes factores, discutidos na secção anterior, apenas não se reflectem na hipótese de homogeneidade, de (2.6), $s_t = \alpha + \beta.p_t + e_t$, resulta,

$$s_{r,t} = \alpha + e_t. \quad (2.17)$$

Para $E(e_t) = 0$, $E(s_r) = \alpha$.

Não considerando a componente residual em (2.17), a PPP relativa era descrita por $\nabla s_r = 0$. Neste caso, conclui-se que a taxa de câmbio real não flutua no tempo.

A taxa de câmbio real indica a paridade se os choques se dissiparem com o tempo, isto é, se o nível da mesma, após a oscilação registada, tende a regressar ao seu valor médio, mesmo que de uma forma lenta. De uma forma mais precisa, se estatisticamente se comportar como estacionária (à semelhança dos erros de equilíbrio no modelo de cointegração).

Tal como é referido por Constâncio (1995) e MacDonald (1995), a revertibilidade para a média da taxa de câmbio real é associada à análise de Gustav Cassel sobre a PPP. Segundo este autor, a taxa de câmbio flutuaria por forma a garantir a igualdade entre os níveis de preços interno e externo, medidos na mesma unidade monetária.

A causalidade entre preços e taxa de câmbio é normalmente indicado como ocorrendo da primeira para a segunda variável. MacDonald (1995), no entanto, refere-se à determinação conjunta das variáveis. Devido à rigidez dos preços, no curto prazo, uma depreciação da taxa de câmbio (por exemplo, devido à fuga de capitais para o exterior) implica um aumento da taxa de câmbio real. O restabelecimento do nível da taxa de câmbio real resultaria de consequentes ajustamentos de preços.

Para o estudo da PPP, é realizado um ensaio à presença de uma raiz unitária na série da

taxa de câmbio real. Admitindo-se que esta série fosse descrita como um passeio aleatório, a PPP é recusada e considerar-se-ia válida a visão dos mercados eficientes da PPP¹².

¹²Para MacDonald (1995), se existisse deriva no passeio aleatório, esta poderia indicar a diferença das taxas de juro reais nos países.

Capítulo 3

COINTEGRAÇÃO INTEIRA

3.1 Preliminares

A teoria da cointegração inteira, na metodologia tradicional de Engle e Granger, surge como um caso particular da cointegração fraccionária.

Pretende-se, neste capítulo, enunciar de uma forma sintética os aspectos mais importantes desta teoria, plenamente desenvolvida na actual literatura econométrica. Uma abordagem mais pormenorizada e completa sobre integração e cointegração inteira, pode ser encontrada em Banerjee, Dolado, Galbraith e Hendry (1993), Davidson e Mackinnon (1993), Boswijk (1994), Hamilton (1994), Enders (1995) e Ribeiro (1996), entre outros.

O caso mais interessante e frequente de cointegração inteira, resulta de um conjunto de variáveis não estacionárias (integradas de ordem um) formarem uma combinação linear estacionária (integrada de ordem zero). O ensaio à cointegração admite para os erros do modelo de cointegração uma ordem de integração inteira. Para processos cointegrados existe uma representação com mecanismo de correcção de erros.

3.2 Processo Estocástico Estacionário

Uma série cronológica delimitada no tempo, pode ser encarada como uma realização particular de um processo estocástico $\{X_t, t \in T\}$.

Definição 3.1: Um processo estocástico, X_t , diz-se fracamente estacionário ou em covariância (até à 2ª ordem), se satisfizer as seguintes condições:

1. $E[X_t^2] < \infty, \forall t \in T$
2. $E[X_t] = \mu, \forall t \in T$
3. $Cov[X_t, X_{t+k}] = E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)] = \gamma_k, \forall t \in T$

Uma série cronológica estacionária em covariância caracteriza-se por ter primeiro e segundo momentos finitos e independentes do tempo. A covariância entre variáveis do processo, a chamada autocovariância, depende apenas do desfasamento existente entre elas.

3.3 Integração Inteira

3.3.1 Processos $I(d)$. Modelos ARIMA

Definição 3.2: Uma série cronológica diz-se integrada de ordem d , denominada por $I(d)$, se a mesma só se tornar estacionária ($I(0)$) depois de diferenciada d vezes:

$$X_t \sim I(d) \Leftrightarrow \nabla^d X_t \sim I(0) \text{ e } \nabla^{d-1} X_t \sim I(1)$$

A integração inteira admite apenas valores inteiros para d . Esta definição refere-se apenas a componentes não determinísticas do processo. O operador diferenciação é, $\nabla = (1 - L)$, em que L é o operador desfasamento ($LX_t = X_{t-1}$).

A diferenciação de uma série estacionária, implica o aumento da variância (considerada como espúria) e a obtenção de um processo não invertível.

A representação autoregressiva-médias móveis dos processos integrados ARIMA(p, d, q), assume a forma de

$$\phi(L)(1 - L)^d X_t = \theta(L)\varepsilon_t, \text{ com } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2), \quad (3.1)$$

onde os polinómios autoregressivo de ordem p , $\phi(L) = (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)$ e de médias

móveis de ordem q , $\theta(L) = (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q)$, têm raízes distintas e fora do círculo unitário. As condições anteriores garantem a estacionaridade e a invertibilidade de $(1 - L)^d X_t$.

Importa nesta fase destacar dois casos particulares dos processos integrados de ordem d inteira: os processos $I(0)$ e $I(1)$. A maioria das séries económicas podem ser aproximadas por estes processos (reduzida existência de processos $I(2)$) e, mais importante, na discussão da cointegração pela metodologia de Engle e Granger, os resíduos do modelo de cointegração são $I(0)$ ou $I(1)$.

3.3.2 Processos $I(0)$. Modelos ARMA

Em seguida é definido o processo estacionário não autocorrelacionado (sem memória), ruído branco. Este processo constitui uma componente básica na construção de quase todos os modelos univariados.

Definição 3.3: $\varepsilon_t, t = 0, 1, \dots, T$ é um processo de ruído branco, $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, sse

$E(\varepsilon_t) = 0$, $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$ e $\gamma_k = 0$, para $k \neq 0$.

Como casos particulares notáveis destaca-se o ruído identicamente distribuído, $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ e o ruído gaussiano, $\varepsilon_t \sim iin(0, \sigma^2)$.

Os modelos ARMA(p, q), com $p, q \in N_0$ são representados como

$$\phi(L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t, \text{ com } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2), \quad (3.2)$$

onde os polinómios autoregressivo de ordem p , $\phi(L) = (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)$ e de médias móveis de ordem q , $\theta(L) = (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q)$, têm raízes distintas e fora do círculo unitário.

As características mais eminentes destes processos $I(0)$, ditos estacionários, são as seguintes:

(i) As séries estacionárias possuem média finita e a sua variância é constante ao longo do tempo. Este tipo de séries identificam um comportamento relativamente instável, mas

flutuando regularmente em torno de um valor central. A sua configuração no tempo, pouco alisada, realça as frequentes passagens do nível da série pelo seu valor médio. Consequentemente, implica que seja particularmente curto o tempo que demora o nível da série a retomar o valor médio, na ausência de choques adicionais.

Tomemos como exemplo, o processo AR(1) estacionário: $X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t, |\rho| < 1$

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \varepsilon_{t-i},$$

$$E(X_{t+k}|X_t) \rightarrow 0; \text{Var}(X_{t+k}|X_t) \rightarrow \sigma^2/(1 - \rho^2).$$

(ii) Nos processos estacionários é possível identificar um termo que representa um mecanismo de correção dos erros (*mean reversion*). Esta evidência é uma consequência do efeito temporário que os choques têm no processo.

O processo AR(1) estacionário, $X_t = \alpha + \rho X_{t-1} + \varepsilon_t, |\rho| < 1$, tem como valor médio ou de equilíbrio de longo prazo, $X^* = E(X_t)$.

Para este processo, $X^* = \alpha + \rho X^* \Rightarrow X^* = \alpha/(1 - \rho)$. Mediante este resultado, o mecanismo de correção de erros é realçado em, $X_t - X_{t-1} = \alpha + (\rho - 1)X_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \nabla X_t = (\rho - 1)(X_{t-1} - X^*) + \varepsilon_t$.

A interpretação deste mecanismo é a seguinte: se, em determinado período, $X_{t-1} < X^*$ (valor inferior ao de longo prazo), então a variável tende posteriormente a registar um crescimento para se aproximar do valor de equilíbrio (reverter à média)¹.

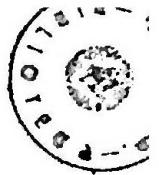
(iii) A função autocorrelação (FAC), ρ_k , resulta de uma normalização da função autocovariância (FACV), γ_k , tal que $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0, k = 0, 1, 2, \dots$

Para os processos $I(0)$, a FAC é geometricamente limitada,

$$|\rho_k| \leq C r^{|k|}, \text{ com } 0 < r < 1, C > 0. \quad (3.3)$$

Estes processos dizem-se de memória curta pois a memória ou dependência tende a dissipar-se geometricamente com o tempo.

¹ Recorde-se que $|\rho| < 1 \Rightarrow \rho - 1 < 0$.



(iv) A função espectral dos modelos ARMA(p, q) estacionários é

$$f(\omega) = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi} \right) \frac{|\theta(e^{-i\omega})|^2}{|\phi(e^{-i\omega})|^2}. \quad (3.4)$$

O espectro na origem é finito. Para baixas frequências, $f(\omega) \sim c$, quando $\omega \rightarrow 0$.

A definição do conceito referido neste ponto é teoricamente desenvolvido no capítulo 4.

3.3.3 Processos $I(1)$

Os processos ARIMA($p, 1, q$) sem componentes determinísticas, como exemplos de processos não estacionários, são representados por

$$\phi(L)(1 - L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t, \text{ com } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2), \quad (3.5)$$

onde os polinômios autoregressivo de ordem p , $\phi(L) = (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)$ e de médias móveis de ordem q , $\theta(L) = (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q)$, têm raízes distintas e fora do círculo unitário.

Destacam-se os passeios aleatórios:

a) Passeio aleatório sem deriva (tendência estocástica),

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow X_t = X_0 + \sum_{i=1}^T \varepsilon_i, \text{ com } Var(X_t|X_0) = t\sigma^2.$$

b) Passeio aleatório com deriva,

$$X_t = \alpha + X_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow X_t = X_0 + \alpha t + \sum_{i=1}^T \varepsilon_i. \text{ Com } X_0 = 0, E(X_t|X_0) = \alpha t, Var(X_t|X_0) = t\sigma^2$$

Processos $I(1)$ são estacionários nas primeiras diferenças. No caso do passeio aleatório sem deriva $X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t$; com deriva, $X_t - X_{t-1} = \alpha + \varepsilon_t$.

As propriedades mais importantes dos processos integrados de primeira ordem acima referidos são as seguintes:

(i) Nas séries $I(1)$, ao contrário das estacionárias, a sua variância condicional cresce linearmente com o tempo: $Var(X_t|X_0) = Var(X_{t-1}|X_0) + \sigma^2$. A variância não condicional

é infinita.

(ii) Ao invés do que sucede com as sucessões estacionárias, os processos integrados de primeira ordem não são reversíveis para a média, isto é, não admitem um mecanismo de correcção de erros. Os choques, não se dissipando no tempo, assumem um carácter permanente.

O tempo esperado de retoma do nível da série é infinito, mas isto não significa que o nível nunca possa ser retomado. Tal como é referido por Granger num dos seus trabalhos publicados, a densidade probabilística do tempo necessário para recuperar um determinado nível encontra-se praticamente concentrada no maior horizonte temporal.

(iii) A função autocorrelação teórica diverge (não definida) e a FAC empírica apresenta correlações positivas, com um decaimento muito lento. Os processos, neste caso, possuem aquilo a que se poderia chamar memória infinita.

(iv) O predomínio de ondas longas no processo $I(1)$, implica um pseudo-espectro divergente na origem (teoricamente não definido):

$$f_X(\omega) \sim \infty, f_{\nabla X}(\omega) \sim c > 0, \text{ quando } \omega \rightarrow 0$$

3.4 Testes Dickey-Fuller de Raízes Unitárias

Os testes de raízes unitárias desenvolvidos por Dickey e Fuller (1979) são os mais simples e mais frequentemente utilizados na literatura econométrica para identificar e ensaiar a ordem de integração inteira de qualquer processo. Estes testes têm essencialmente o objectivo de distinguir, nos processos univariados², a estacionaridade, $I(0)$, da não estacionaridade, $I(1)$. Nesta perspectiva, procura-se fazer uma referência, o mais alargada possível, aos testes de raízes unitárias propostos por Dickey e Fuller, DF.

O ensaio é feito sob a hipótese nula de não estacionaridade,

$$H_0 : X_t \sim I(1)$$

$$H_1 : X_t \sim I(0)$$

²Séries a cointegrar, resíduos do modelo de cointegração e, na teoria da PPP, a taxa de câmbio real.

A regressão auxiliar de teste tem a forma:

$$\nabla X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (3.6)$$

Esta regressão de teste resulta de um modelo geral que engloba dois processos distintos não encaixados:

$X_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \varepsilon_t$ (TSP, estacionário em tendência) e $X_t = \gamma_1 + X_{t-1} + u_t$ (DSP, estacionário por diferenciação).

O modelo geral é $X_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + v_t$, com $v_t = \rho v_{t-1} + \varepsilon_t$. Simplificando, $X_t = \gamma_0(1 - \rho) + \rho\gamma_1 + \gamma_1(1 - \rho)t + \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$.

Sob $H_0 : \rho = 1$, tem-se que $X_t = \gamma_1 + X_{t-1} + \varepsilon_t$, ou seja, $X_t \sim I(1)$, (DSP).

Sob $H_1 : |\rho| < 1$, pelo que $X_t = \beta_0/(1 - \rho) + \beta_1/(1 - \rho)L.t + u_t, u_t = 1/(1 - \rho L).\varepsilon_t$

Reparametrizando $X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$, com a vantagem de se poder testar a nulidade dos coeficientes, vem o modelo final, $\nabla X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$, onde $\phi = \rho - 1$.

O ensaio, equivalente ao primeiro, é:

$$H_0 : \phi = 0 \Rightarrow X_t \sim I(1)$$

$$H_1 : \phi < 0 \Rightarrow X_t \sim I(0)$$

Como se verifica, o teste de raízes unitárias é um ensaio à nulidade do parâmetro associado ao termo X_{t-1} , na regressão auxiliar.

A estatística de teste, $\tau_\alpha = \hat{\phi}/\hat{\sigma}_\phi$, não tem no entanto uma distribuição *t*-student³. A distribuição da estatística de teste, obtida por métodos de simulação, encontra-se tabelada em Mackinnon (1991), Davidson e Mackinnon (1993), Boswijk (1994) e Cheung e Lai (1995a). Os valores críticos encontrados por Mackinnon (1991) consideram uma correcção paramétrica para amostras finitas. Estes podem ser obtidos por:

$$\hat{C}(p, T) = \hat{\beta}_\infty + \hat{\beta}_1 T^{-1} + \hat{\beta}_2 T^{-2}, \quad (3.7)$$

³A nomenclatura, *ct*, associada à estatística, refere-se à existência de constante e tendência na regressão auxiliar.

em que, T é a dimensão da amostra e p é o nível de significância.

A distribuição não é simétrica e possui média e moda negativas. A rejeição da hipótese nula de não estacionaridade é considerada para valores inferiores aos da distribuição t -student: para o mesmo nível de significância, os valores críticos da distribuição τ_{α} são superiores em valor absoluto.

O teste a realizar é unilateral à esquerda. O processo de decisão será portanto efectuado da seguinte forma: se o valor observado para a estatística for inferior ao valor crítico associado a um determinado nível de significância p , admitimos o processo como estacionário (não aceitação de H_0); caso contrário, não rejeitando a hipótese nula, admitimo-lo como integrado de primeira ordem.

Quando na regressão de teste (3.6), o(s) coeficiente(s) associado(s) às componentes determinísticas constante e tendência não é(são) relevante(s), por observação do comportamento do processo ou pela sua nulidade estatística, deve-se utilizar um teste semelhante cuja estatística também se encontra tabelada:

$$\tau_c \text{ para } \nabla X_t = \beta_0 + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.8)$$

$$\tau_{nc} \text{ para } \nabla X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.9)$$

Os valores críticos de τ_{nc} são mais pequenos, em valor absoluto, do que os de τ_c os quais por sua vez são inferiores a τ_{α} .

A inclusão de regressores determinísticos irrelevantes baixa a potência do teste, isto é, reduz a probabilidade de correctamente não aceitarmos o processo como $I(1)$. Se consideramos incorrectamente alguma componente determinística, então o valor crítico será, em valor absoluto, superior ao que devia de ser, criando um desfasamento entre a dimensão real e nominal do teste. Nestas circunstâncias, a tendência será para aceitarmos normalmente a hipótese nula ($I(1)$), ou seja, rejeitarmos esta com menor probabilidade.

Na determinação da regressão auxiliar de teste (3.6) verificou-se que $\beta_1 = \gamma_1(1 - \rho)$. Isto

significa que se $\rho = 1$ ($\phi = 0$) $\Rightarrow \beta_1 = 0$, resultando a nulidade de ambos os parâmetros. Neste caso, é possível construir um teste à nulidade conjunta dos parâmetros ϕ, β_1 , cuja estatística é Φ_3 . A distribuição, não sendo a habitual F , encontra-se tabelada em Boswijk (1994). O ensaio, é neste caso,

$$H_0 : \nabla X_t = \beta_0 + \varepsilon_t, \text{ contra } H_1 : \nabla X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

De uma forma análoga, define-se a estatística Φ_1 , para o ensaio de $H_0 : \nabla X_t = \varepsilon_t$, na regressão (3.8) e a estatística Φ_2 , para o ensaio de $H_0 : \nabla X_t = \varepsilon_t$, na regressão (3.6).

Os testes anteriormente apresentados, partiam do pressuposto que os resíduos da regressão de teste se comportavam como ruído branco. No entanto, os resíduos encontram-se frequentemente autocorrelacionados. A resolução paramétrica deste problema é um teste DF aumentado, o teste ADF.

A equação de teste auxiliar que procura obter resíduos não autocorrelacionados após a introdução de $p - 1 = k$ termos de defasamento é,

$$\nabla X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \phi X_{t-1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \nabla X_{t-i} + \varepsilon_t. \quad (3.10)$$

Supondo-se que os resíduos da regressão de teste se representavam por um AR(1), a equação sobre a qual se faria o teste de raízes unitárias era

$\nabla X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \phi X_{t-1} + \gamma_1 \nabla X_{t-1} + \varepsilon_t$. Neste caso, é necessário introduzir um termo de defasamento de ∇X_t para que os resíduos se comportem como ruído branco. Vejamos a sua demonstração⁴:

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \rho_1 X_{t-1} + v_t, v_t = \rho_2 v_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ com } |\rho_2| < 1 \Leftrightarrow$$

$$(1 - \rho_2 L) X_t = \beta_0 (1 - \rho_2 L) + \beta_1 (1 - \rho_2 L) t + \rho_1 (1 - \rho_2 L) X_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow$$

$X_t = \pi_0 + \pi_1 t + \pi_2 X_{t-1} + \pi_3 X_{t-2} + \varepsilon_t$ (AR(2) com tendência, cujas condições de estacionaridade são $\pi_1 + \pi_2 < 1; -\pi_1 + \pi_2 < 1; |\pi_2| < 1$)

Subtraindo X_{t-1} a ambos os membros da equação e somando e subtraindo $\pi_3 X_{t-1}$ no

⁴Para a definição de $k = p - 1$, p representa a ordem da componente autoregressiva da equação de teste, em níveis.

segundo membro. resulta a equação de teste.

$$\nabla X_t = \pi_0 + \pi_1 t + \phi X_{t-1} + \gamma \nabla X_{t-1} + \varepsilon_t$$

No teste ADF, o ensaio a efectuar, a estatística de teste, a sua distribuição e o processo de decisão não sofrem qualquer alteração relativamente ao correspondente teste DF. Para que o teste seja válido, terá que ser garantida a não autocorrelação dos resíduos da regressão auxiliar de teste.

As estatísticas mais importantes que detectam problemas de autocorrelação nos resíduos são as de Durbin-Watson (DW), h -Durbin e de Breusch-Godfrey (BG).

Esta última, testa conjuntamente as primeiras p correlações dos resíduos com representação AR ou MA, utilizando como regressão auxiliar, $e_t = f(X, e_{t-1}, \dots, e_{t-p})$. Tendo a estatística TR^2 uma distribuição do qui-quadrado, indicia a inexistência de problemas de autocorrelação para valores positivos próximos de zero.

As estatísticas DW e h -Durbin apenas detectam resíduos AR(1). Enquanto a primeira é útil para testes DF, a segunda é utilizada em testes ADF porque a regressão auxiliar de teste é um modelo dinâmico. Tabelada em Greene (1993), a estatística DW assume valores entre 0 e 4 e indicia a não autocorrelação quando regista um valor próximo de 2. A h -Durbin ou a correspondente alternativa (h -alt), tem distribuição normal estandardizada, e sob H_0 os resíduos não são AR(1).

Davidson e Mackinnon (1993) referem que os testes ADF continuam a ser válidos para resíduos com representação ARMA, introduzindo-se k desfasamentos (apenas os necessários) até se garantir que os resíduos sejam bem comportados.

Resumindo, o teste de raízes unitárias é válido quando após introduzidos k desfasamentos na equação de teste, os resíduos não são autocorrelacionados. No entanto, há um "trade-off" entre a potência e o nível de significância no teste: se for introduzido um excessivo número de desfasamentos, a potência do teste baixa (perda de observações e aumento da correlação entre os regressores); se k não é suficiente para garantir resíduos não autocorrelacionados, a dimensão real do teste é superior à nominal. Em amostras de reduzida dimensão, é normal-

mente controlado o problema da potência de teste.

Até este momento, apenas foi possível testar se um processo é $I(0)$ ou $I(1)$. Em seguida é apresentado, de uma forma abreviada, o ensaio que permite detectar processos $I(2)$. O ensaio de raízes unitárias é semelhante ao anterior e tem como regressão de teste,

$$\nabla^2 X_t = \beta_0 + \phi \nabla X_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (3.11)$$

Distinguem-se as hipóteses,

$$H_0 : \phi = 0 \Rightarrow X_t \sim I(2)$$

$$H_1 : \phi < 0 \Rightarrow X_t \sim I(1)$$

Para identificar a ordem de integração de um processo, Dickey e Pantula, citados em Enders (1995), propuseram uma metodologia inversa à apresentada: admitindo-se uma ordem máxima de integração ($d = 2$), testa-se d de uma forma decrescente até se aceitar a hipótese nula ("top-down").

Os testes de Dickey e Fuller, apesar da sua simplicidade apresentam alguns problemas. Salientam-se dois casos.

Em primeiro lugar, estes testes funcionam mal quando a variável em estudo tem uma componente de médias móveis de primeira ordem, com um parâmetro negativo e próximo da unidade:

Suponha-se que $X_t = \gamma + X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.95\varepsilon_{t-1}$, integrado de primeira ordem. Neste caso, $(1 - L)X_t = \gamma + (1 - 0.95L)\varepsilon_t \Rightarrow X_t \approx \gamma + \varepsilon_t$. Nestas situações, pode-se rejeitar incorrectamente um processo $I(1)$.

Por outro lado, estes testes são pouco potentes contra alternativas de processos fracionários. Este último caso condiciona em certa medida os testes de cointegração aos resíduos propostos por Engle e Granger, a que se fará referência posteriormente.

3.5 Cointegração e Integração Inteira

Torna-se relevante para a compreensão da problemática da cointegração referir algumas regras que englobem combinações lineares entre processos integrados de ordem inteira.

(i) A transformação linear de qualquer processo mantém a sua ordem de integração:

$$X_t \sim I(0) \Rightarrow \alpha + \beta X_t = Z_t \sim I(0); Y_t \sim I(1) \Rightarrow \alpha + \beta Y_t = P_t \sim I(1); \dots \quad (3.12)$$

(ii) Se X_t e Y_t são ambos estacionários, então qualquer combinação linear entre eles também é um processo estacionário:

$$X_t \sim I(0), Y_t \sim I(0) \Rightarrow \alpha X_t + \beta Y_t = Z_t \sim I(0) \quad (3.13)$$

(iii) A combinação linear entre um processo estacionário e um processo integrado de ordem um, resulta num processo integrado de ordem um. Esta regra revela que um processo $I(1)$ é dominante perante outro(s) estacionário(s):

$$X_t \sim I(0), Y_t \sim I(1) \Rightarrow \alpha X_t + \beta Y_t = Z_t \sim I(1) \quad (3.14)$$

(iv) Geralmente, a combinação linear de dois processos integrados de ordem um, resulta num processo integrado também de ordem um:

$$X_t \sim I(1), Y_t \sim I(1) \text{ e } \alpha X_t + \beta Y_t = Z_t \sim I(1) \quad (3.15)$$

(v) No entanto, existem exceções a esta última regra. Quando a combinação linear dos processos $I(1)$ é um processo estacionário, $I(0)$, isto é, se

$$X_t \sim I(1), Y_t \sim I(1) \Rightarrow \alpha X_t + \beta Y_t = Z_t \sim I(0), \quad (3.16)$$

então encontramos na presença de processos ditos cointegrados.

Tal como foi visto no capítulo anterior, as séries definem-se como cointegradas porque apesar de cada uma delas divergir erraticamente ao longo do tempo (não estacionárias), é possível definir uma combinação linear entre elas que é estacionária. Muito simplesmente, as séries tendem a ter oscilações, ao longo do tempo, de uma forma mais ou menos coordenada.

O caso (v), descrito como $C(1, 1)$, corresponde à situação habitualmente retratada quando se estuda a cointegração. Engle e Granger (1987), apesar de apenas terem referido este último caso, definem da seguinte forma o conceito de cointegração entre variáveis,

Definição 3.4: *As n séries $X_t = (X_{1t}, \dots, X_{nt})$ dizem-se cointegradas de ordem $C(d, b)$, com $b > 0$, quando as n séries são $I(d)$ e existe um vector α , tal que $e_t = X_t \alpha' \sim I(d - b)$.*

No conceito de cointegração inteira, d e b assumem valores inteiros, $d \geq b$ e $d > 0$.

Quando $n = 2$ demonstra-se que existe apenas um único vector de cointegração linearmente independente:

Admita-se duas combinações lineares,

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 \end{bmatrix} \text{ para } X_{1t} - \beta_1 X_{2t} = u_{1t} \sim I(0) \text{ e}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 \end{bmatrix} \text{ para } X_{1t} - \beta_2 X_{2t} = u_{2t} \sim I(0).$$

Pela regra (ii), $u_{1t} - u_{2t} = u_t \sim I(0)$. De uma forma equivalente, $u_{1t} - u_{2t} = (\beta_2 - \beta_1) X_{2t} = u_t$.

Nesta situação, $u_t \sim I(0)$ sse $\beta_2 = \beta_1$ visto que $X_{2t} \sim I(1)$.

3.6 Cointegração Inteira. Metodologia de Engle e Granger

A metodologia de Engle e Granger é uma das técnicas mais populares para testar a presença de variáveis cointegradas.

Distinguem-se basicamente duas fases: primeira, testar a presença de séries não estacionárias (com idêntica ordem de integração), através de um teste de raízes unitárias; segunda, obter os resíduos do modelo de cointegração e realizar sobre estes últimos um teste de raízes unitárias, que corresponde a um teste de cointegração. Para séries cointegradas, é possível identificar uma representação com mecanismo de correcção de erros.

Esta é a metodologia que se tem o propósito de apresentar nesta secção.

3.6.1 Estimação do Modelo de Cointegração por OLS

A estimação do modelo de cointegração é conduzido sobre um conjunto de séries não estacionárias. Para os processos $C(1,1)$, os testes de raízes unitárias referidos na secção 3.4 permitem inferir sobre a possibilidade das variáveis serem $I(1)$.

Na secção anterior, foi definida a relação de longo prazo do conjunto de variáveis $X_t = (X_{1t}, \dots, X_{nt})$, como $X_t \alpha' = e_t$. O modelo de cointegração, como regressão linear, tem a forma de,

$$X_{1t} = \beta X_t^* + e_t, \quad (3.17)$$

com $X_t^* = \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & t^s & X_{2t} & \dots & X_{nt} \end{bmatrix}'$ e $\beta = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_s & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{bmatrix}$, para $t = 1, \dots, T$.

A estimativa do vector β , por mínimos quadrados, é obtida por $\hat{\beta} = (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} X_1$.

Propriedades do Estimador OLS

O estimador OLS resulta da minimização da função $e_t' e_t$, sendo $e_t' = \begin{bmatrix} e_{1t} & \dots & e_{Tt} \end{bmatrix}$. Como o mínimo de $e_t' e_t$ é idêntico ao de $e_t' e_t / T = \hat{\sigma}_e^2$, o estimador encontra $\hat{\beta}$ que torna os erros "o mais estacionários possível".

Destacando-se os resultados obtidos por Stock (1987), enunciam-se outras propriedades do estimador OLS:

(i) Quando as variáveis se encontram cointegradas o estimador é superconsistente. Isto é, a velocidade de convergência para o verdadeiro vector de cointegração é superior ao caso de regressão com variáveis estacionárias.

Para regressores estacionários, verifica-se $\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 Q^{-1})$ e $\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{p} 0$. A velocidade de convergência também pode ser representada em termos de ordem em probabilidade, $O_p(T^{-k})$ ⁵. Se $X_{it} \sim I(0)$, com $i = 1, \dots, n$, $\hat{\beta} - \beta = O_p(T^{-0.5})$.

⁵Seguindo-se Hamilton (1994), em termos gerais, $\{X_t\}_{t=1}^{\infty} = O_p(T^{-k})$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ tal que $P\{|X_{it}| > M/(T^k)\} < \varepsilon$.



Para $X_{it} \sim I(1)$, com $i = 1, \dots, n$, $T(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{p} 0$. A obtenção de uma distribuição degenerada implica a multiplicação por T , sabendo-se também que $\hat{\beta} - \beta = O_p(T^{-1})$.

Verifique-se este resultado para $X_{1t} = \lambda X_{2t} + e_t$; com $X_{it} \sim I(1)$, $e_t \sim I(0)$:

$$\hat{\lambda} = \lambda + (X_2' X_2)^{-1} X_2' e = \lambda + (\sum X_{2t} e_t) / (\sum X_{2t}^2).$$

Como $\sum X_{2t} e_t = O_p(T)$, $\sum X_{2t}^2 = O_p(T^2)$, tem-se que $\hat{\lambda} = \lambda + O_p(T^{-1}) \Leftrightarrow \hat{\lambda} - \lambda = O_p(T^{-1})$.

Na hipótese de se encontrarem cointegradas, as variáveis podem ser determinadas conjuntamente e conseqüentemente podem estar contemporaneamente correlacionadas com os erros da regressão de cointegração (não ortogonalidade entre as variáveis e os erros). Nestas circunstâncias, pode-se questionar a consistência do estimador. Vejamos o exemplo dado por

Davidson e Mackinnon (1993), página 717: Suponha-se o seguinte sistema,

$$\begin{cases} \lambda_1 X_{1t} - X_{2t} = u_{1t}, (1 - \rho_1 L)u_{1t} = \varepsilon_{1t}, \varepsilon_{1t} \sim WN(0, \sigma_{\varepsilon_1}^2) \\ X_{1t} - \lambda_2 X_{2t} = u_{2t}, (1 - \rho_2 L)u_{2t} = \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{2t} \sim WN(0, \sigma_{\varepsilon_2}^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_{1t} = u_{2t} / (1 - \lambda_2 \lambda_1) - \lambda_2 u_{1t} / (1 - \lambda_2 \lambda_1) \\ X_{2t} = \lambda_1 u_{2t} / (1 - \lambda_2 \lambda_1) - u_{1t} / (1 - \lambda_2 \lambda_1) \end{cases}$$

Neste caso, não existe cointegração se

$|\rho_1| < 1, |\rho_2| < 1$ porque $u_{it}, X_{it} \sim I(0)$, ou se

$|\rho_1| = |\rho_2| = 1$ porque $u_{it}, X_{it} \sim I(1)$.

No entanto, se $|\rho_1| = 1, |\rho_2| < 1$ (no caso contrário, o raciocínio é semelhante), $u_{2t} \sim I(0); u_{1t}, X_{it} \sim I(1)$, resultava uma relação de cointegração expressa na equação. $X_{1t} - \lambda_2 X_{2t} = u_{2t}$.

Mas verifique-se que nesta situação, como $X_{1t} = \lambda_2 X_{2t} + \rho_2 u_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}$ implica que $u_{2t} = \rho_2 (X_{1,t-1} - \lambda_2 X_{2,t-1}) + \varepsilon_{2t}$, isto é, existe correlação contemporânea entre X_{it} e u_{2t} .

O que se verifica, no entanto, é que o estimador não é inconsistente. Como as variáveis cointegradas são $I(1)$ (nomeadamente X_{2t}), a sua não estacionaridade implica que a variância deste processo exploda com o tempo, tornando-se infinita no longo prazo. Esta componente mais que compensa a que causa a correlação contemporânea⁶, tornando o erro, u_{2t} , assintoticamente negligenciável relativamente a X_{2t} . Portanto, em amostras de grande dimensão.

⁶ $X_{1,t-1} - \lambda_2 X_{2,t-1}$ e ε_{2t} são estacionários, logo, ambos com variância finita. O primeiro por ser o erro de uma relação de cointegração, o segundo por definição.

o problema da dependência entre regressores e erros não é suficiente para tornar o estimador inconsistente.

(ii) Em amostras finitas, o enviesamento do estimador poderá ser significativo. A evidência de que o seu valor esperado pode não coincidir com o verdadeiro vector de parâmetros, condiciona o estudo da cointegração para curtos períodos de tempo.

(iii) O estimador OLS não é, geralmente, assintoticamente eficiente. No exemplo anterior, constatou-se que $X_{1t} = \lambda_2 X_{2t} + \rho_2 u_{2,t-1} + \varepsilon_{2t} \Leftrightarrow X_{1t} = \lambda_2 X_{2t} + \rho_2 (X_{1,t-1} - \lambda_2 X_{2,t-1}) + \varepsilon_{2t}$. Como se observa, a perda de eficiência resulta da má especificação, por ser ignorado um termo de correcção de erro (não utilização de toda a informação existente).

(iv) Em geral, mesmo que as variáveis estejam cointegradas, a teoria da distribuição assintótica não é válida, tal como acontece nas regressões espúrias a que se fará referência posteriormente.

Como as variáveis são estocásticas $I(1)$, estas têm variância condicional crescente no tempo. Portanto, a matriz Q_{xx} dos segundos momentos tende para infinito, ao contrário da hipótese clássica do modelo de regressão linear, $\text{plim}(X'X/T) = Q_{xx}$ (matriz finita, simétrica e definida positiva). Esta propriedade impede o ensaio de hipóteses sobre o vector de cointegração (nomeadamente, a nulidade de qualquer dos parâmetros), porque a distribuição do estimador OLS não é, em geral, a habitual, o que torna a inferência errónea.

3.6.2 Modelos com Variáveis Cointegradas

O modelo de cointegração permite interpretar economicamente a relação temporal entre as variáveis cointegradas. No entanto, devido aos problemas estatísticos enunciados no ponto anterior, este modelo, quando estimado por OLS, pode não ser o mais apropriado. Por outro lado, a modelização com regressores não estacionários pode originar uma relação espúria, isto é, sem significado económico.

A solução mais imediata passa pela modelização nas primeiras diferenças:

$$\nabla X_{1t} = \beta \nabla X_{2t} + \varepsilon_t. \quad (3.18)$$

Neste modelo, as hipóteses clássicas são verificadas porque as variáveis são estacionárias. No entanto, este é um modelo não informativo: na hipótese de ser nulo o valor esperado das variáveis diferenciadas, não tem qualquer significado para a relação de longo prazo, $0 = 0$. Para contornar estas dificuldades, apresenta-se uma representação alternativa com mecanismo de correcção de erros.

Para séries cointegradas, Engle e Granger (1987) demonstraram que existe uma representação que inclui um mecanismo de correcção de erros e vice-versa. Considerando $X_{1t}, X_{2t} \sim C(1, 1)$, a representação do modelo de correcção de erros, MCE, assume a forma,

$$\begin{cases} \nabla X_{1t} = A(L)\nabla X_{1,t-1} + B(L)\nabla X_{2,t-1} - \gamma_1 e_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\ \nabla X_{2t} = C(L)\nabla X_{1,t-1} + D(L)\nabla X_{2,t-1} - \gamma_2 e_{t-1} + \varepsilon_{2t} \end{cases}, \text{ onde } A(L), B(L), C(L), D(L) \text{ são}$$

polinómios de ordem finita, e $e_t = X_t \alpha'$.

Considerada a hipótese de que uma das variáveis é fracamente exógena, X_{2t} (nulidade de γ_2), um simples MCE condicional pode ser descrito da forma,

$$\nabla X_{1t} = \delta Z_t + \gamma e_{t-1} + \beta \nabla X_{2t} + \varepsilon_t, \text{ com } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2), \quad (3.19)$$

onde Z_t inclui regressores determinísticos ou estacionários⁷ e $e_{t-1} = X_{1,t-1} - \lambda X_{2,t-1}$.

Este modelo pode ser visto como uma reparametrização do modelo ADL(1, 1):

$$X_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1,t-1} + \beta_0 X_{2t} + \beta_1 X_{2,t-1} + \varepsilon_t, \text{ com } |\alpha_1| < 1, \quad (3.20)$$

onde o equilíbrio de longo prazo é dado por, $X_1^* = \alpha_0 / (1 - \alpha_1) + (\beta_0 + \beta_1) / (1 - \alpha_1) X_2^*$, com $X_i^* = E(X_{it})$.

O modelo ADL(1, 1) é equivalente a $\nabla X_{1t} = \alpha_0 + (\alpha_1 - 1)X_{1,t-1} + \beta_0 \nabla X_{2t} + (\beta_0 + \beta_1)X_{2,t-1} + \varepsilon_t$. Considerando a solução de longo prazo,

$\nabla X_{1t} = (\alpha_1 - 1)[X_1 - \alpha_0 / (1 - \alpha_1) - (\beta_0 + \beta_1) / (1 - \alpha_1) X_2]_{t-1} + \beta_0 \nabla X_{2t} + \varepsilon_t$. Este é um MCE para $\alpha_1 - 1 = \gamma$. Pela condição de estabilidade ($|\alpha_1| < 1$), $-2 < (\alpha_1 - 1) < 0$.

A modelização MCE, definida em (3.19), é fundamentada pela presença de variáveis

⁷Pode-se incluir $\nabla X_{1,t-k}$ e $\nabla X_{2,t-k}$.

cointegradas. Além da dinâmica de curto prazo, a existência de um termo de correcção de erro, TCE, explicita a ligação de longo prazo entre as variáveis. O valor negativo do coeficiente associado ao TCE garante o ajustamento de X_{1t} de forma a que o equilíbrio conjunto seja posteriormente restabelecido. A amplitude do seu valor é um indicador da velocidade de ajustamento.

Engle e Granger, citados em Davidson e Mackinnon (1993), mostram que, em termos assintóticos, a teoria da distribuição e a consistência do estimador são válidas: os regressores são estacionários e é possível substituir e_{t-1} pela estimativa do erro de equilíbrio (resíduos do modelo de cointegração) devido à superconsistência do estimador OLS⁸. Nestas condições, é possível inferir sobre a nulidade do TCE, $\hat{\gamma}$, e consequentemente sobre a possibilidade de existir uma ligação de longo prazo entre as duas variáveis.

Davidson e Mackinnon (1993) alertam para os problemas da estimação do MCE em dois passos, para amostras finitas. O enviesamento do estimador encontra-se directamente relacionado com um baixo valor do coeficiente de determinação do modelo de cointegração.

Para corrigir os problemas de enviesamento, alguns autores propõem uma forma reparametrizada de (3.19),

$$\nabla X_{1t} = \delta Z_t + \gamma X_{1,t-1} + \mu X_{2,t-1} + \beta \nabla X_{2t} + \varepsilon_t, \text{ com } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2), \quad (3.21)$$

com $\mu = -\gamma\lambda \Rightarrow \hat{\lambda} = -\hat{\mu}/\hat{\gamma}$. Apesar deste modelo incluir regressores $I(1)$, Davidson e Mackinnon (1993) argumentam que o estimador é consistente e que a distribuição assintótica é a habitual, quando se inclui no modelo reparametrizado uma constante e os resíduos do modelo de cointegração são estacionários. No entanto, a inferência resume-se apenas a ensaios individuais sobre os parâmetros.

⁸Tal como se o vector de cointegração fosse conhecido.

3.6.3 Testes de Cointegração Através de Testes de Raízes Unitárias

Engle e Granger (1987) apresentam um teste de cointegração baseado nos resíduos do modelo de cointegração. A simplicidade deste método justifica-se pela superconsistência do estimador OLS, no referido modelo. Como o estimador goza desta propriedade, os resíduos estimados podem retratar com alguma qualidade o comportamento dos verdadeiros erros de equilíbrio, podendo-se assim estudar as características dos resíduos de forma a concluir sobre o tipo de relação de longo prazo que existe entre as variáveis.

Os testes de Engle e Granger, denominados por EG, sendo um dos testes de cointegração, constituem uma *adaptação* dos testes de raízes unitárias de DF.

Resumindo, o teste de cointegração inteira resulta de duas fases:

- (i) Estimar por OLS o vector de parâmetros do modelo $X_{t1} = \beta X_t^* + e_t$.
- (ii) Testar a cointegração inteira, utilizando um ensaio de raízes unitárias sobre \hat{e}_t .

O ensaio de hipóteses tem a seguinte forma:

$H_0 : \hat{e}_t \sim I(1)$ - não verificação da hipótese de cointegração entre as variáveis.

$H_1 : \hat{e}_t \sim I(0)$ - verificação da hipótese de cointegração entre as variáveis.

A equação auxiliar de teste tem como expressão,

$$\nabla \hat{e}_t = \phi \hat{e}_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (3.22)$$

A regressão (3.22) não incorpora termos determinísticos porque a componente residual original e diferenciada oscila em torno de zero, desde que se introduzam os componentes não estocásticos adequados na regressão de cointegração⁹.

O parâmetro de interesse, sobre o qual se testa a cointegração inteira, é ϕ . Logo, o ensaio anterior é equivante a um teste à nulidade de ϕ :

$$H_0 : \phi = 0 \Rightarrow \hat{e}_t \sim I(1)$$

$$H_1 : \phi < 0 \Rightarrow \hat{e}_t \sim I(0)$$

⁹No entanto, o mais importante é conhecer o comportamento dos resíduos, independentemente de ter ou não média nula.

A estatística de teste correspondente, τ' , não tem uma distribuição assintótica *t* de student, nem de Dickey e Fuller. Para o mesmo nível de significância, os valores críticos para o teste de cointegração são, em valor absoluto, superiores aos de DF. Isto significa que o teste é mais exigente a rejeitar a hipótese nula de não cointegração, porque o vector de cointegração não é conhecido mas sim estimado por OLS, o que torna os resíduos "o mais estacionários possível". Os valores críticos encontram-se tabelados em Mackinnon (1991), Davidson e Mackinnon (1993) e Boswijk (1994).

Além da constante e da tendência, na equação de teste, a distribuição da estatística de teste EG depende do número de variáveis a estudar. Os resultados de simulação evidenciam que, quanto maior o número de regressores, mais elevado é o valor crítico.

Se o vector de cointegração é conhecido, a componente residual é observada (não estimada). Neste caso, o teste de cointegração coincide com o de Dickey-Fuller. Um dos casos mais conhecidos é o da eficiência dos mercados cambiais, quando se admite a homogeneidade:

Nesta hipótese, $s_{t+1} - f_t = e_{t+1}$ e o vector de cointegração é $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ (os desvios entre a taxa de câmbio nominal em $t + 1$, s_{t+1} , e a taxa de câmbio a prazo, f_t , (estas últimas, $I(1)$), são estacionários).

Tal como foi explicado para os testes ADF, a correcção paramétrica dos problemas de autocorrelação nos resíduos da regressão auxiliar de teste (3.22) resulta na aplicação de testes AEG. A metodologia dos testes AEG é similiar à aplicada nos ADF, à qual se remete para uma mais clara exposição.

O teste de cointegração encerra-se no processo de decisão. Se não é possível aceitar estatisticamente a hipótese nula, ou seja, se se admitir a possibilidade de os resíduos do modelo de cointegração comportarem-se como estacionários, então concluímos que os processos em causa encontram-se cointegrados. A cointegração entre variáveis foi estudada no capítulo anterior e na secção 3.5.

Se é aceite a hipótese de que os resíduos são não estacionários, podemos admitir que o modelo (3.17) pode representar uma relação espúria entre as variáveis. Este tipo de relações será abordada na próxima secção.

Importa realçar uma última observação sobre este tipo de testes. Complementando as críticas referidas no final do ponto 3.4, evoca-se que os testes de cointegração de EG são feitos numa linha *knife-edged*. Isto significa que os erros do modelo de cointegração são estritamente $I(0)$ ou $I(1)$. A abordagem da cointegração fraccionária permite apresentar um vasto leque de modelos que identificam processos estacionários e revertíveis para o nível.

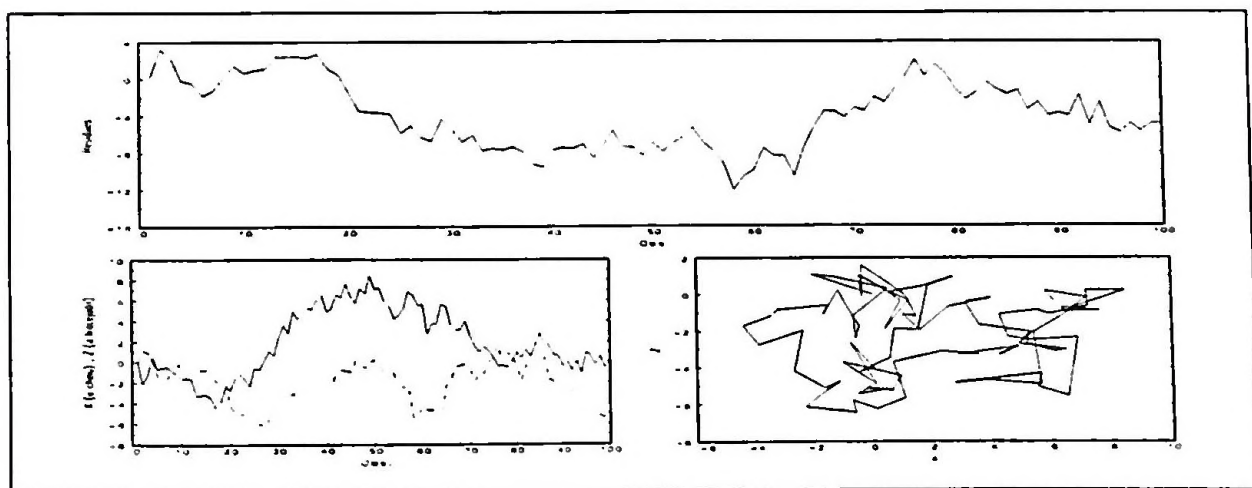
3.7 Regressões Espúrias

O fenómeno das regressões espúrias foi analisado, entre outros, por Granger e Newbold (1974) e Phillips (1986).

Nestas situações, em que é independente o comportamento de um conjunto de variáveis não estacionárias, a relação estatística obtida não tem qualquer significado económico. Não tendo qualquer sentido estudar estes processos numa perspectiva de equilíbrio de longo prazo, remete-se a sua análise para modelos não explicativos em que os regressores, sendo estacionários, representam variáveis diferenciadas.

As figuras 3.1 ilustram a relação existente entre este tipo de variáveis. Obtidos por simulação em GAUSS, $\{X_t\}$ e $\{Z_t\}$ são dois passeios aleatórios independentes. Os procedimentos utilizados encontram-se em apêndice.

Figura 3-1: Relação espúria - a) Erros (topo); b) Processos independentes (canto inferior esquerdo); c) *Scatter plot* (canto inferior direito).



Phillips (1986), enunciou os resultados das regressões espúrias, alertando para a má especificação de um modelo em níveis para variáveis não cointegradas. Considerando-se a equação $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ em que $\{X_t\}$ e $\{Y_t\}$ são passeios aleatórios independentes, $X_t, Y_t, u_t \sim I(1)$, salienta-se:

(i) Se $X_t, Y_t \sim I(0)$, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ convergem em probabilidade para os verdadeiros valores (plim $\hat{\alpha} = \alpha$, plim $\hat{\beta} = \beta = 0$).

Para variáveis $I(1)$ os estimadores não convergem em probabilidade para uma constante e, na obtenção de distribuições não degeneradas, os factores de escalamento não correspondem a \sqrt{T} .

(ii) A teoria assintótica tradicional não é válida. O rácio- t de $\hat{\beta}$ diverge para infinito, quando $T \rightarrow \infty$. Isto significa que quanto maior for T , mais fácil é a rejeição da nulidade de β , qualquer que seja o seu valor crítico ($Prob(Rej.H_0) \rightarrow 1$). Logo, a probabilidade de rejeitarmos a nulidade do parâmetro torna-se demasiadamente elevada, quando este na realidade é zero (erro de primeira espécie).

(iii) O coeficiente de determinação, R^2 , não convergindo para zero, assume com grande facilidade valores elevados.

(iv) A estatística DW é um indicador da má especificação do modelo, visto que o seu valor converge em probabilidade para zero (plim $DW = 0$).

Resumindo, os sintomas de regressões espúrias são os rácios- t e R^2 elevados e a DW próximo de zero¹⁰. Em relação a esta última estatística, Granger e Newbold (1974) propuseram um teste à detecção de regressões espúrias: se $DW < R^2$, então sugere-se uma modelização às primeiras diferenças.

¹⁰Se $DW = 0$, o processo autoregressivo de primeira ordem possui parâmetro igual à unidade. Neste caso, o processo corresponde a um passeio aleatório.

Capítulo 4

COINTEGRAÇÃO FRACCIONÁRIA

4.1 Notas Preliminares

No capítulo anterior abordaram-se os principais aspectos da metodologia tradicional da cointegração inteira. No entanto, esta metodologia possui algumas limitações que motivam a utilização de uma metodologia alternativa, a cointegração fraccionária. De facto, se a consideração de um grau de integração inteira parece restritivo na análise de variáveis macroeconómicas e se os modelos de integração fraccionária se têm revelado adequados para tais variáveis, parece natural que em relações de cointegração se deve procurar ir além de ordens de integração inteira.

Recorde-se, em primeiro lugar, que os testes usuais de raízes unitárias realizados sobre os resíduos da potencial equação de cointegração revelam-se pouco potentes perante alternativas de processos fraccionários (Diebold e Rudebusch (1991), Cheung e Lai (1993) e Hassler e Wolters (1994)). Isto significa que a probabilidade de rejeitar correctamente a hipótese nula de não cointegração é reduzida. Em segundo lugar, o ensaio de cointegração torna-se muito restritivo ao considerar apenas os resíduos do modelo de cointegração como $I(0)$ ou $I(1)$.

A alternativa proposta neste capítulo assume que, além dos processos integrados de ordem

inteira, existem os fraccionariamente integrados. Propõe-se mostrar que a estacionaridade e reversão à média se encontra presente num conjunto, bem definido, de processos de integração fraccionária.

A cointegração fraccionária, não condicionando o teste de cointegração a um nível de *knife-edged*, pretende fazer uma avaliação mais abrangente, inferindo sobre a relação de longo prazo entre as variáveis mediante as características de estacionaridade e reversão para o nível ou média, através da estimativa da ordem de integração fraccionária dos resíduos da potencial equação de cointegração.

4.2 Origens e Observações

A memória dos processos estocásticos pode situar-se entre a infinita (caso dos passeios aleatórios) e a curta (caso dos ARMA, com rápida retoma do nível da série).

As primeiras suspeitas da existência de fenómenos com comportamento típico de memória longa, remonta a meados do século com o hidrologista Harold Hurst. Hurst observou que, por longos períodos de tempo, o nível das águas do Nilo se mantinha em diferentes níveis (altos, médios e baixos). Esta grande persistência do nível das águas (longos ciclos, não periódicos) foi a motivação para o denominado fenómeno de memória longa.

Em 1968, Mandelbrot e van Ness apresentam um novo modelo estocástico, o movimento browniano fraccionario, que explicava, em tempo contínuo e no contexto dos processos estacionários, as propriedades de memória longa da série do Nilo.

A descrição de fenómenos de natureza económica e financeira, com uma elevada dependência no longo prazo, remonta à década de 80 após terem surgido os primeiros modelos de memória longa propostos por econometristas, nomeadamente Granger e Joyeux (1980), Granger (1980 e 1981) e, de forma independente, Hosking (1981).

A primeira estatística utilizada para detectar processos de memória longa foi a estatística R/S e deve-se a Hurst. De uma forma muito simples, R/S é o rácio entre a amplitude do nível da série (diferença entre o máximo e o mínimo, corrigida da tendência linear) e o desvio

padrão da mesma. A série do Nilo, indicando ser de memória longa, revela para a estatística R/S um valor superior a 0.5, realçando a pouca variabilidade da série relativamente à amplitude existente. A detecção de séries modelizáveis de uma forma diferente da tradicional (frequentemente $R/S > 0.5$), foi denominado na altura como *fenómeno de Hurst*.

A análise fraccionária dos processos permite ultrapassar algumas limitações da análise inteira. Estas problemáticas podem ser questionadas, de uma forma complementar, no domínio tempo (cronograma, FAC, pesos da função impulso-resposta, ...) e no domínio frequência (o espectro caracteriza os movimentos oscilatórios da série, indicando o contributo das diferentes frequências ou componentes periódicas para a variação do processo). Vejamos em seguida, algumas questões que se levantam quando analisamos um processo de memória longa em domínio de integração inteira.

Nos processos de memória longa, o decaimento da FAC e dos pesos da função impulso-resposta é lento, hiperbólico. Esta característica é distinta dos processos $I(0)$ e $I(1)$. Quando analisamos um processo estacionário, $I(0)$, o decaimento nos primeiros desfasamentos é brusco. Num processo não estacionário, $I(1)$, a FAC não existe mas a FAC empírica denota um decaimento bastante lento para todos os desfasamentos.

No domínio espectral, é conhecido que um processo não estacionário tem um pseudo-espectro na origem infinito. O que foi observado por Granger (1966) é que o espectro típico de uma variável económica, tem na origem um valor não finito¹. Portanto, a análise tradicional impunha a diferenciação da série. No entanto, verificava-se que esta operação tornaria nulo o espectro na origem, o que era característico das séries sobrediferenciadas². Questiona-se então se o processo seria de memória longa pois a análise espectral induzia a realização de "meias diferenças" (para $d < 1$). O que esta situação realça é a grande importância que se deve dar à análise espectral (além da FAC,...) pois, tal como se verá posteriormente, os processos de memória longa com $0 < d < 0.5$ têm espectro na origem infinito e não

¹ Observou-se que este *espectro típico* é consistente com a modelização de ruído fraccionário.

² Para um $ARMA(p, q)$: $f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-i\omega})|^2}{|\phi(e^{-i\omega})|^2}$. $f(0) = 0$ sse $\theta(e^{-i0}) = 0$, isto é, $\theta(1) = 0$. Esta condição induz a presença de uma raiz unitária na componente MA.



estacionários) e os processos de memória longa com $-0.5 < d < 0$ têm espectro na origem nulo.

Como conclusão, poder-se-á afirmar que se uma série apresenta indícios de ser fraccionalmente integrada, então deve ser estudada num âmbito fraccionário e não num âmbito inteiro. A integração fraccionária é uma generalização da integração inteira.

4.3 Integração Fraccionária

A integração fraccionária parte do pressuposto que o processo em causa tanto pode assumir uma ordem de integração, d , inteira como fraccionária. A estacionaridade de processos, que assumem uma ordem de integração não inteira, em vez de restringir-se a $I(0)$, vai passar a definir-se num espaço de valores para d , como se irá mostrar.

Um processo X_t diz-se fraccionalmente integrado de ordem d , quando este parâmetro assume um valor não inteiro no operador diferença, $(1 - L)^d$, isto é, quando $(1 - L)^d X_t = u_t$ é estacionário, invertível e de memória curta³. A determinação da ordem de integração do processo X_t é feita por recurso a métodos de estimação, visto que esta passa a ser considerada como um parâmetro.

4.4 Modelos ARFIMA

Os processos fraccionalmente integrados da forma ARFIMA(p, d, q), são processos $\{X_t\}$ satisfazendo a equação às diferenças,

$$\phi(L)(1 - L)^d X_t = \theta(L)\varepsilon_t, \text{ com } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2), \quad (4.1)$$

ou,

$$\phi(L)(1 - L)^d (X_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t, \text{ com } \mu = E(X_t), \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2), \quad (4.2)$$

³ $0 < f_u(0) < \infty$

onde os polinómios autoregressivo de ordem p , $\phi(L) = (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)$ e de médias móveis de ordem q , $\theta(L) = (1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q)$, têm raízes distintas e fora do círculo unitário.

A solução estacionária, caso exista, é dada por $X_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i \nabla^{-d} \varepsilon_{t-i}$. com $\psi(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i z^i = \theta(L)/\phi(L)$.

O operador diferença fraccionário é definido pelo desenvolvimento binomial,

$$(1 - L)^d = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{d}{i} (-L)^i, \quad (4.3)$$

ou por $(1 - L)^d = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(i-d)}{\Gamma(i+1)\Gamma(-d)} L^i = F(-d, 1, 1; L) = 1 - dL + \frac{d(d-1)}{2!} L^2 - \frac{d(d-1)(d-2)}{3!} L^3 + \dots$, onde $\Gamma(\cdot)$ é a função gamma, $F(a, b, c; L) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+i)\Gamma(b+i)}{\Gamma(c+i)\Gamma(i+1)} L^i$ é a função hipergeométrica e $d > -1$.

Os modelos (4.1) e (4.2) generalizam a representação ARIMA a valores reais de d . Por exemplo, para $d = 1$, $(1 - L)^1 = 1 - L$; para $d = 2$, $(1 - L)^2 = (1 - L)(1 - L)$; para $d = 0$, encontramos um processo ARMA.

4.4.1 Processo de Ruído Fraccionário

Devido à importância e simplicidade do processo estocástico ruído fraccionário, apresenta-se em seguida a sua definição e suas propriedades. Este processo foi apresentado por Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981).

Definição 4.1: $\{X_t, t=0,1,2,\dots\}$ é um processo de ruído fraccionário, ARFIMA(0, d , 0), se $\{X_t\}$ tem a representação

$$(1 - L)^d X_t = \varepsilon_t, \text{ com } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2). \quad (4.4)$$

Para ser estacionário e invertível, $d \in] - 0.5; 0.5[$. Se $\mu \neq 0$, $(1 - L)^d (X_t - \mu) = \varepsilon_t$ ⁴.

⁴O processo ARFIMA(p, d, q), com $d \in] - 0.5; 0.5[$ é equivalente ao ARMA(p, q) com ruído fraccionário: $\phi(L)(1 - L)^d X_t = \theta(L)\varepsilon_t \Leftrightarrow \phi(L)X_t = \theta(L)(1 - L)^{-d}\varepsilon_t$, com $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

A estacionaridade e a invertibilidade (capacidade previsional) é garantida quando os coeficientes das representações MA(∞) (coeficientes médias móveis ψ_i que permitem escrever $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$) e AR(∞) (coeficientes autoregressivos π_i que permitem escrever $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i X_{t-i} = \varepsilon_t$) são somáveis em termos quadráticos: estacionaridade para $d < 0.5$ ($\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$, para $d < 0.5$ e $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$, para $d < 0$); invertibilidade para $d > -0.5$ ($\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^2 < \infty$, para $d > -0.5$ e $\sum_{i=0}^{\infty} |\pi_i| < \infty$, para $d > 0$).

Propriedades do processo de ruído fraccionário:

(i) $X_t \sim AR(\infty) \leftrightarrow$ invertível, isto é, $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i X_{t-i} = \varepsilon_t$, com $\pi_i = \frac{\Gamma(i-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(i+1)} = \pi_{i-1} \frac{i-1-d}{i}$.

A aproximação assintótica ($i \rightarrow \infty$) é dada por, $\pi_i \sim (\Gamma(-d))^{-1} i^{-d-1}$.

Representação AR(∞): $X_t - dX_{t-1} + \frac{d(d-1)}{2!} X_{t-2} - \dots = \varepsilon_t$.

(ii) $X_t \sim MA(\infty) \leftrightarrow$ estacionário, isto é, $X_t = (1-L)^{-d} \varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$, com $\psi_i = \frac{\Gamma(i+d)}{\Gamma(d)\Gamma(i+1)} = \psi_{i-1} \frac{i-1+d}{i}$.

Em termos assintóticos, $\psi_i \sim (\Gamma(d))^{-1} i^{d-1}$.

Representação MA(∞): $X_t = \varepsilon_t + d\varepsilon_{t-1} + \frac{d(d+1)}{2!} \varepsilon_{t-2} + \dots$

(iii) Variância do processo, $\sigma_X^2 = \gamma_0 = \sigma^2 \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma^2(1-d)}$.

(iv) Função autocovariância, $\gamma_k = \sigma^2 \frac{\Gamma(k+d)\Gamma(1-2d)}{\Gamma(k+1-d)\Gamma(1-d)\Gamma(d)} = (-1)^k \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-k-d)\Gamma(k+1-d)}$, $k=0,1,2,\dots$

(v) Função autocorrelação, $\rho_k = \frac{\Gamma(k+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(k-d+1)\Gamma(d)} = \prod_{0 < i \leq k} \frac{i-1+d}{i-d}$, com $\rho_1 = \frac{d}{1-d}$, $\rho_2 = \frac{d(1+d)}{(1-d)(2-d)}$, ..., $k=0,1,2,\dots$

$\rho_k \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{2d-1}$, quando $k \rightarrow \infty$.

(vi) Função autocorrelação parcial, $\phi_{kk} = \frac{d}{k-d}$, $k=0,1,2,\dots$

(vii) Função espectral, $f(\omega) = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi}\right) |1 - e^{-i\omega}|^{-2d} = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi}\right) |2 \sin(\frac{\omega}{2})|^{-2d}$.

Como, $\sin \omega \approx \omega$, quando $\omega \rightarrow 0$,

$f(\omega) \sim c\omega^{-2d}$ (em baixas frequências, isto é, quando $\omega \rightarrow 0$), com $c = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi}\right)$.

Para $d = 0.5$, $f(\omega) \sim \omega^{-1}$, $\omega \rightarrow 0$. Este é o caso denominado de "1/f noise": " X_t just nonstationary", pois " $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2$ just fails to converge" (Hosking (1981), página 169).

Se $d = -0.5$, $f(0) = 0$ e o ruído é estacionário mas não invertível.

A demonstração destes resultados, tal como para os processos ARFIMA⁵, pode ser encontrada em Hosking (1981), Brockwell e Davis (1991) e Crato (1992).

4.4.2 Processos de Memória Longa. Propriedades

Domínio Tempo

Distinguindo-se dos processos de memória curta, ARMA, cuja função autocorrelação é geometricamente limitada, os processos fraccionários estacionários, denominados de *memória longa*, caracterizam-se por ter um decaimento lento, hiperbólico, da sua FAC.

A sua expressão, que evidencia a relativa inércia do decaimento e a reduzida mas não negligenciável dependência entre observações distantes, assume a forma de

$$|\rho_k| \sim Ck^{2d-1}, \quad (4.5)$$

quando $k \rightarrow \infty$, para $C \neq 0$ e $d < 0.5$.

A persistência temporal do nível do processo ruído fraccionário (memória longa), também pode ser observada no decaimento hiperbólico dos coeficientes das representações $AR(\infty)$ e $MA(\infty)$ (peso impulso-resposta)⁶: $\pi_i \sim c_1 i^{-d-1}$ e $\psi_i \sim c_2 i^{d-1}$, para c_1, c_2 constantes.

Domínio Frequência

A função de densidade espectral de um processo $\{X_t\}$, estacionário, é definida por

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-i\omega k}, \forall \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (4.6)$$

Sendo $\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega k} d\omega$, para k inteiro⁷, a função autocovariância do processo é, consequentemente, a transformada de Fourier inversa de $f(\omega)$. Para uma sucessão cronológica, $\{X_t\}$, $t=1,2,\dots,T$, a estimação da função espectral é feita a partir do periodograma.

⁵ As características deste processo, são uma natural extensão ARMA das do ruído fraccionário.

⁶ Através da aproximação assintótica de Stirling, $\frac{\Gamma(i+a)}{\Gamma(i+b)} \sim i^{a-b}$.

⁷ O espectro pode ser interpretado como a decomposição da variância do processo: $\gamma_0 = \sigma_X^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega$.

$$I_{X.T}(\omega) = \frac{1}{T} \left| \sum_{t=1}^T X_t e^{-i\omega t} \right|^2.$$

Uma abordagem teórica mais completa da análise espectral pode ser consultada em Hamilton (1994) e Muller (1996).

A função espectral dos modelos ARFIMA(p, d, q) estacionários é

$$f(\omega) = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi} \right) \frac{|\theta(e^{-i\omega})|^2}{|\phi(e^{-i\omega})|^2} |1 - e^{-i\omega}|^{-2d}. \quad (4.7)$$

Através da aplicação de um filtro linear e da função transferência espectral, é possível definir (4.7) através do espectro de um processo ARMA. O filtro linear é,

$X_t = (1 - L)^{-d} u_t$, com $u_t \sim I(0)$, $\phi(L)u_t = \theta(L)\varepsilon_t$. A função de transferência será portanto,

$$f_X(\omega) = |1 - z|^{-2d} f_u(\omega), \text{ para } -\pi \leq \omega \leq \pi, z = e^{-i\omega}, \quad (4.8)$$

onde $f_u(\omega) = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi} \right) \left| \frac{\phi(z)}{\theta(z)} \right|^2$. No caso particular de X_t ser um ruído fracionário, $f_u(\omega) = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi} \right)$.

O espectro, nas baixas frequências, é

$$f(\omega) \sim c\omega^{-2d}, \text{ quando } \omega \rightarrow 0, \quad (4.9)$$

com $c = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi} \right) \left[\frac{\theta(1)}{\phi(1)} \right]^2$ para os modelos ARFIMA e $c = \left(\frac{\sigma^2}{2\pi} \right)$ para o ruído fracionário.

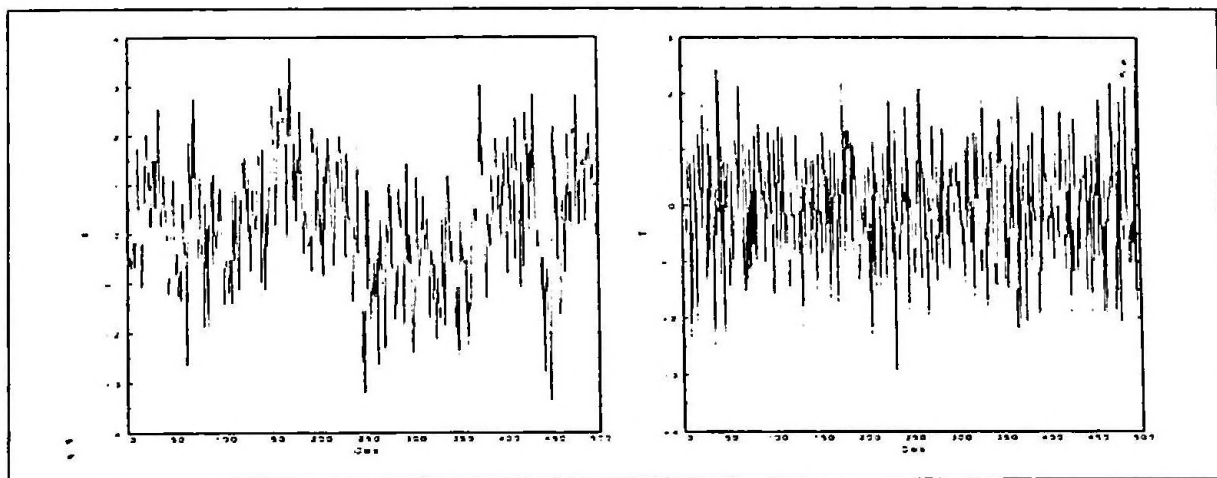
Devido à existência de duas tipologias distintas dentro dos processos de memória longa, distinguem-se os processos persistentes ("memória longa") para $0 < d < 0.5$, dos processos não persistentes ("memória intermédia") para $d < 0$.

Os processos persistentes ($0 < d < 0.5$) caracterizam-se por ter um espectro na origem infinito ($f(0) = \infty$), isto é, $f(\omega) \uparrow \infty$ quando $\omega \rightarrow 0$. Portanto, nestes processos a densidade espectral encontra-se concentrada nas baixas frequências, traduzindo uma série estacionária mas que oscila de uma forma lenta ao longo do tempo. A autocorrelação do processo (memória longa, que traduz um decaimento lento dos termos eminentemente positivos da FAC), $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\rho_k| = \infty$, confirma as propriedades do espectro na origem. Esta é a tipologia relevante dos processos de memória longa porque traduz a persistência no longo prazo.

Os processos não persistentes ($d < 0$), pelo contrário, têm o espectro na origem nulo ($f(0) = 0$), ou, em termos equivalentes, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k = 0$. O decaimento da FAC é próprio dos processos de memória longa (lento decaimento, em que para $d < 0$ existem autocorrelações significativas de valor negativo, à excepção do lag zero). No entanto, o comportamento deste tipo de séries não revela a persistência ou inércia do nível da mesma.

O comportamento destes dois tipos de processos encontra-se representado nas figuras 4.1. Por simulação, em GAUSS, foram gerados dois ruídos fraccionários com 500 observações e $\sigma^2 = 1$: um processo persistente X_t ($d = 0.4$) e um não persistente Y_t ($d = -0.2$).

Figura 4-1: Processos de memória longa - a) Processo persistente (lado esquerdo); b) Processo não persistente (lado direito).



Variância da Soma Parcial do Ruído Fraccionário

Esta dualidade nos processos fraccionários é apresentada por Sowell (1990) através da análise da variância da soma parcial do ruído branco fraccionário, X_t .

Considere-se a soma parcial de T termos de X_t , $S_T = \sum_{t=1}^T X_t$. Demonstra-se que

$$(a) \text{Var}(S_T) = \sigma^2 \Gamma(1 - 2d) \{ (1 + 2d) \Gamma(1 + d) \Gamma(1 - d) \}^{-1} c, \text{ onde } c = [\Gamma(1 + d + T) / \Gamma(T - d) - \Gamma(1 + d) / \Gamma(-d)];$$

$$(b) \lim_{T \rightarrow \infty} [\text{Var}(S_T)] T^{-(1+2d)} = \sigma^2 \Gamma(1 - 2d) \{ (1 + 2d) \Gamma(1 + d) \Gamma(1 - d) \}^{-1}.$$

Nestas condições,

$$\text{Var}(S_T) = O_p(T^{2d+1}). \quad (4.10)$$

Nos processos persistentes, $d > 0$, a taxa de crescimento da variância da soma parcial é superior à taxa linear, enquanto que nos processos não persistentes, $d < 0$, a taxa de crescimento é inferior. Isto significa que, como nos processos persistentes (não persistentes) os choques estão positivamente (negativamente) autocorrelacionados, então a variância da soma parcial cresce mais (menos) do que a variância de um choque individual.

Quando $d = 0$, $X_t \sim I(0)$, a taxa de crescimento da variância é linear ($O_p(T)$).

Função Impulso-Resposta

Uma última propriedade, mas não menos importante, revela que os processos fraccionariamente integrados de ordem $d < 1$ são revertíveis para o nível (*level-reverting*). Veja-se por exemplo Campbell e Mankiw (1987) e Baillie (1996).

A função impulso-resposta, com os respectivos pesos, A_i , equivalente à representação à Wold da série modelizada por (4.1) nas primeiras diferenças, é dada por

$$(1 - L)X_t = A(L)\varepsilon_t \text{ com } A(L) = 1 + A_1L + A_2L^2 + \dots \quad (4.11)$$

$A(L) = (1 - L)^{1-d}\phi^{-1}(L)\theta(L) = F(d - 1, 1, 1; L)\phi^{-1}(L)\theta(L)$. Para que $(1 - L)X_t$ seja estacionário, $d < 1.5$.

O impacto ou variação de X_t , no médio prazo (de t para $t + k$), resultante de um choque unitário da inovação ε_t é dado por $1 + A_1 + \dots + A_k$.

O impacto de longo prazo ($k \rightarrow \infty$) de um choque unitário em t , ou função cumulativa, é dado por $1 + A_1 + A_2 + \dots = A(1) = F(d - 1, 1, 1; 1)\phi^{-1}(1)\theta(1)$. Para $d < 1$ demonstra-se, pelas propriedades da função hipergeométrica, que $A(1) = 0$, concluindo-se que, no longo prazo, o impacto da inovação sobre o processo é nulo. Para $d = 1$, $A(1)$ converge para um valor finito, não nulo. Para $d > 1$, $A(1)$ diverge.

Quando o processo é estacionário ($d < 0.5$), é "natural" que também seja revertível para a média. Para $0.5 \leq d < 1$, a explicação reside no facto de que ∇X_t (variações do processo) é não persistente ($-0.5 \leq d < 0$), tendo por isso autocorrelações negativas não

nulas que persistem e espectro nulo na origem que tendencialmente eliminam no longo prazo um choque.

Portanto, num processo com $d < 1$, apesar de não estacionário em covariância ($0.5 \leq d < 1$), o choque aleatório da inovação tende a dissipar-se (não persiste, ao contrário dos processos $I(1)$ também não estacionários). É portanto possível definir um conjunto de modelos fraccionários para os quais a revertibilidade em nível é compatível com a não estacionaridade.

4.5 Métodos de Estimação

Relativamente aos modelos ARMA, a estimação ARFIMA(p, d, q), além de σ^2 e dos $p + q$ parâmetros, comporta a estimação de um parâmetro adicional, d . Nesta secção, pretende-se apresentar os métodos mais importantes de estimação destes modelos, plenamente desenvolvidos em Brockwell e Davis (1991) e Baillie (1996). Meramente indicativo, faz-se referência à estimação da média, quando admitida no modelo, e da função de autocorrelação.

4.5.1 Estimação da Média e da Função de Autocorrelação

Brockwell e Davis (1991), página 527, demonstram que, para o modelo (4.2), o estimador natural para $\mu = E(X_t)$, $\hat{\mu} = \bar{X}_t$ (média da amostra), tem erro quadrático médio assintoticamente nulo, isto é,

$$E(\bar{X}_t - \mu)^2 \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty, \text{ porque } \rho_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Este resultado permite concluir que à medida que a dimensão da amostra aumenta, a variância do estimador tende para zero, isto é, as estimativas concentram-se em torno do verdadeiro parâmetro.

O estimador natural da função de autocorrelação, é $\hat{\rho}_k = r_k$ (função autocorrelação empírica).

Para $-0.5 < d < 0$, $T^{1/2}(r_k - \rho_k) \xrightarrow{d} N(0, V_k)$ (V_k dada pela fórmula de Bartlett. Vide Brockwell e Davis (1991), teorema 7.2.5. página 222)⁸. Hosking mostrou a consistência do

⁸Com $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$ de $MA(\infty)$, $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ (não necessariamente gaussiano) e $E(\varepsilon_t)^4 < \infty$.

estimador para $d \in] - 0.5; 0.25[$.

Quando $d = 0.25$, $\frac{T}{\log(T)}(r_k - \rho_k) \xrightarrow{d} N(0, V_k(d))$.

Para $d \in]0.25; 0.5[$, a distribuição é desconhecida e a taxa de convergência é decrescente com d : $T^{1/2-d}(r_k - \rho_k) \xrightarrow{d} D$.

4.5.2 Estimação Semiparamétrica de d em Domínio Frequência - GPH

Geweke e Porter-Hudak (1983), a partir deste momento GPH, sugerem um método semi-paramétrico para a estimação da ordem de integração fraccionária, d , baseado na análise espectral do processo, em particular, no comportamento perto da origem. Este procedimento permite estimar a ordem de integração, independentemente da particular parametrização da componente ARMA.

Observa-se que para baixas frequências não nulas, ω_j , o periodograma definido em (4.8) é dominado pela função $|1 - z|^2$. De (4.8), resulta para a função espectral

$$f_X(\omega) = [4 \sin^2(\omega/2)]^{-d} f_u(\omega), \text{ com } u_t \sim ARMA(p, q). \quad (4.12)$$

Aplicando logaritmos a ambos os membros de (4.12), e somando e subtraindo $\ln[f_u(0)]$,

$$\ln[f_X(\omega)] = \ln[f_u(0)] - d \ln\{[4 \sin^2(\omega/2)]\} + \ln[f_u(\omega)/f_u(0)]. \quad (4.13)$$

Substituindo a densidade espectral pelo periodograma $I(\omega)$, e considerando o último termo de (4.13) negligenciável, (4.12) assume, para baixas frequências, a seguinte forma de regressão linear

$$\ln I_{X,n}(\omega_j) = a - d \ln\{[4 \sin^2(\omega_j/2)]\} + v_j, \text{ para } j = 1, 2, \dots, m, \quad (4.14)$$

onde $a = \ln[f_u(0)]$; $v_j = \ln[f_u(\omega)/f_u(0)]$ com $E(v_j) = 0$ e $Var(v_j) = \pi^2/6$; $\omega = \omega_j = 2\pi j/T$, $j = 1, 2, \dots, m \ll T/2$ e m é uma função da dimensão da amostra T .

Para este método, \hat{d} corresponde ao simétrico do declive estimado do periodograma definido nas frequências baixas. A qualidade estatística do método está relacionada com

a concentração de frequências baixas pelo aumento da dimensão amostral.

O estimador para d em amostras finitas, é sensível à dimensão espectral considerada. Por isso, têm aparecido na literatura diferentes sugestões para a truncagem dos extremos para esta última. Enunciam-se alguns:

(i) Geweke e Porter-Hudak (1983), Brockwell e Davis (1991) e Cheung (1993a), entre outros, consideram $m = T^{0.5}$. Certos autores consideram adicionalmente a truncagem na origem, por forma a garantir a consistência do estimador GPH.

(ii) Hassler e Wolters (1995) consideram que m pode não ser único. Para Cheung e Lai (1993), $m = T^\alpha$, $\alpha = 0.55; 0.575; 0.6$. Estes dois últimos autores salientam que se m é elevado, o valor da estimativa é contaminada pelas frequências médias e altas; se m é reduzido, o estimador torna-se impreciso porque decresce o número de graus de liberdade.

(iii) Wu e Crato (1995) usam uma truncagem na origem $\omega = T^{1/3}/3$.

Geweke e Porter-Hudak (1983), para $d < 0$ e Crato (1992), para $d > 0$ argumentam que o estimador dos mínimos quadrados espectral para d é consistente. Baillie (1996) acrescenta que a taxa de convergência é, no entanto, inferior a 0.5.

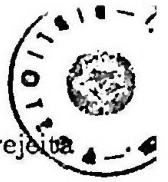
A inferência sobre d pode ser baseada no rácio- t , isto é,

$$\frac{\hat{d}_{GPH} - d}{[Var(\hat{d}_{GPH})]^{1/2}} \sim N(0, 1) \quad (4.15)$$

A determinação de $Var(\hat{d}_{GPH})$ é obtida pela habitual fórmula do método de mínimos quadrados: elemento (2,2) da matriz $s^2(X'X)^{-1}$. A variância dos resíduos da regressão espectral é estimada, ou tomando em consideração que $plim(s^2) = \pi^2/6$.

Baillie (1996), fazendo referência a outros autores, indica algumas situações em que este método se comporta mal. Destaca-se que, quando u_t (input da função transferência espectral definida em (4.8)) segue um processo AR(1) ou MA(1) com parâmetro relativamente elevado, o estimador GPH revela-se substancialmente enviesado e ineficiente.

A performance do teste GPH de (4.15) à integração fraccionária foi estudada por Cheung (1993b). Este autor mostra que quando o DGP (*data generating process*) é um processo



AR(1), com ϕ próximo de um, ou um MA(1), com θ próximo de -1 , o teste GPH rejeita espuriamente a hipótese nula de um processo não fraccionariamente integrado. Enquanto que no primeiro caso a proximidade de uma raiz unitária aponta para $d > 0$, a segunda situação revela o enviesamento para $d < 0$, como sintoma da sobrediferenciação do processo. Apesar destes resultados, concluiu-se que o estimador GPH é robusto⁹ a alterações na variância e a efeitos ARCH.

Hurvich e Ray, citados em Baillie (1996), provam que o estimador é enviesado, quando o DGP é um ARFIMA não estacionário ($d \geq 0.5$). Esta última evidência motiva, para certos casos, a estimação GPH da sucessão cronológica nas primeiras diferenças, $Y_t = X_t - X_{t-1} = \nabla X_t$. Muitas vezes as séries económicas são $I(d)$, $d < 1.5$. Por outro lado, é possível ensaiar a presença de uma raiz unitária:

Por (4.12), define-se a função espectral de $(1 - L)X_t$,

$$f_{\nabla X}(\omega) = [4 \sin^2(\omega/2)]^{-(d-1)} f_u(\omega), \text{ com } u_t \sim ARMA(p, q). \quad (4.16)$$

A regressão espectral de teste GPH para o processo $(1 - L)X_t$ é dada por

$$\ln I_{X,n}(\omega_j) = a - (d - 1) \ln\{[4 \sin^2(\omega_j/2)]\} + v_j, \text{ para } j = 1, 2, \dots, m. \quad (4.17)$$

\hat{d} corresponde à estimativa GPH de (4.17) acrescida em uma unidade¹⁰.

Nestas circunstâncias, o ensaio bilateral à nulidade de $d - 1$, para a série diferenciada, é equivalente a um ensaio de raiz unitária ($d = 1$), para a série original :

$$H_0 : d - 1 = 0 \Leftrightarrow d = 1$$

$$H_1 : d - 1 \neq 0 \Leftrightarrow d \neq 1$$

A estimação dos restantes parâmetros do processo ARFIMA(p, d, q) pode ser realizada, por exemplo, por máxima verossimilhança depois de estimado o valor para d . A modelização fraccionária por GPH é pois realizada em dois passos.

⁹ Percentagem de rejeição do teste próxima da nominal.

¹⁰ $\phi(L)(1 - L)^d X_t = \theta(L)\epsilon_t \Leftrightarrow \phi(L)(1 - L)^{d-1}(1 - L)X_t = \theta(L)\epsilon_t$,

4.5.3 Estimação por Máxima Verosimilhança

A estimação por máxima verosimilhança, MLE, dos modelos ARFIMA (p, d, q) , resulta da identificação dos $p + q$ coeficientes, de d e de σ^2 , com base na informação incorporada na amostra. Por serem normalmente estimadores eficientes apresentam-se as suas características mais importantes na estimação de processos fraccionários.

Ao contrário do método GPH, a estimação dos parâmetros por máxima verosimilhança é simultânea. Podem-se tornar explícitos os problemas de correlação entre os estimadores, nomeadamente da ordem de integração e os da componente autoregressiva. Este é um factor importante na análise do decaimento da função autocorrelação porque o comportamento da mesma é influenciado pela amplitude de ambos os coeficientes. Por exemplo, um decaimento suficientemente lento da FAC pode estar associado a uma ordem de integração relativamente baixa, mas com um parâmetro significativo na componente autoregressiva.

Para a série $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_T)'$, a função de verosimilhança, sob a hipótese de gaussianidade e de $\mu = 0$, pode ser escrita como,

$$L(\beta^*, \sigma^2) = \prod_i f(X_i | \beta^*, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-T/2} (r_0, \dots, r_{T-1})^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^T (X_j - \hat{X}_j)^2 / r_{j-1} \right\}, \quad (4.18)$$

onde $\beta^* = (d, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$, \hat{X}_j é o predictor a um passo e $r_{j-1} = \sigma^{-2} E(X_j - \hat{X}_j)^2$, $j = 1, \dots, T$ ¹¹

A função de verosimilhança logaritmicada, é

$$LL(\cdot) = -(T/2) \log(2\pi) - (1/2) \log |\Omega| - (1/2) X' \Omega^{-1} X, \quad (4.19)$$

onde $\{\Omega\}_{ij} = \gamma_{|i-j|}$ e X é o vector das T observações.

O estimador exacto de MLE, é o vector de parâmetros $(\beta^*, \sigma^2)'$ que maximiza $L(\beta^*, \sigma^2)$ em ordem a β^* e σ^2 . Brockwell e Davis (1991) e Baillie (1996) apresentam alguns resultados relativamente a este método.

¹¹Veja-se Brockwell e Davis (1991), página 527.

A estimativa da variância do processo é dada por

$$\hat{\sigma}^2 = T^{-1} S(\hat{\beta}), \text{ onde } S(\hat{\beta}) = \sum_{j=1}^T (X_j - \hat{X}_j)^2 / r_{j-1}, \quad (4.20)$$

$\hat{\beta}$ é o valor de β^* que minimiza $l(\beta^*) = \ln(S(\beta^*)/T) + T^{-1} \sum_{j=1}^T \ln r_{j-1}$.

Li e McLeod identificam a distribuição assintótica de $\beta' = (d, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma^2)$, no caso em que μ é conhecido ou nulo, como normalmente sucede na série dos resíduos do potencial modelo de cointegração. Estes autores demonstram que, neste caso, o estimador é consistente e converge à taxa de 0.5 para a distribuição normal,

$$T^{1/2} (\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N \left[0, \lim_{T \rightarrow \infty} \{I(\beta)/T\}^{-1} \right], \text{ com } I(\beta) = \begin{bmatrix} I_{p,q} & J \\ J' & \pi^2/6 \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

onde $I_{p,q}$ é a matriz de informação da componente ARMA e $J' = [\gamma_0^{ud} \gamma_1^{ud} \dots \gamma_{p-1}^{ud} \gamma_0^{vd} \gamma_1^{vd} \dots \gamma_{q-1}^{vd}]$, em que $\gamma_j^{ud} = \sum_{i=0}^{\infty} (j+i+1)^{-1} c_i$; $\gamma_j^{vd} = \sum_{i=0}^{\infty} (j+i+1)^{-1} b_i$; $\phi(L)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i L^i$; $\theta(L)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i L^i$.

No caso particular em que $\{X_t\}$ é um ruído fraccionário ($p = q = 0$) e $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, é obtido o conhecido resultado,

$$T^{1/2} (\hat{d} - d) \xrightarrow{d} N(0, 6/\pi^2). \quad (4.22)$$

Como a estimação exacta de MLE, em amostras de grande dimensão, é extraordinariamente complicada apela-se ao recurso de expressões assintoticamente aproximadas da função verosimilhança. O suporte teórico deve-se a Whittle, que em 1951 definiu uma aproximação da função de verosimilhança, em domínio frequência:

$$l_b(\beta) = l_a(\beta) + T^{-1} \sum \ln f(\omega_j; \beta), \text{ com } l_a(\beta) = \ln 1/T \sum \frac{I_T(\omega_j)}{f(\omega_j; \beta)}, \quad (4.23)$$

em que $I(\cdot)$ é o periodograma e $f(\cdot)$ o espectro, avaliados na frequência ω_j ¹².

Na generalidade, os ganhos computacionais que são obtidos cobrem a reduzida perda de qualidade na estimação. Entre outros, destacam-se dois estimadores MLE aproximados em domínio frequência, pelo bom desempenho que revelam na prática¹³:

(i) Fox e Taqqu (1986), consideram a minimização de

$$\sigma_T^2(\xi) = \sum_{k=1}^{T-1} \left(\frac{I(2\pi k/T)}{f(2\pi k/T, \xi)} \right), \xi = (d, \phi, \theta), \quad (4.24)$$

ou, de uma forma mais simplificada, $LL = \sum \left(\frac{I_T(\omega_j)}{f(\omega_j)} \right)$. A consistência de $\hat{\xi}$ é dada por

$$T^{1/2} (\hat{\xi} - \xi) \xrightarrow{d} N(0, 4\pi W^{-1}(\xi)), \quad (4.25)$$

em que $W^{-1}(\xi)$ é uma matriz de coeficientes de Fourier.

(ii) Breidt, Crato e de Lima (1994), Crato e Ray (1996) e Costa e Crato (1996), seguindo Brockwell e Davies (1991), consideram a minimização de

$$\sum_{j=1}^{\lfloor T/2 \rfloor} \left(\frac{I_T(\omega_j)}{f(\omega_j)} + \log f(\omega_j) \right). \quad (4.26)$$

A matriz de variâncias-covariâncias é estimada usando a matriz Hessiana de $\hat{f}(\omega_j)$, no seu óptimo.

Pela aproximação de Whittle, a matriz de informação, $I(\beta)$, aumentada ao espaço de parâmetros $\lambda' = (\mu, \beta')$, para o elemento (j, k) , assume a forma de

$$I_{j,k}(\lambda) = (1/4\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(\frac{2\pi}{\sigma^2} \right) \left\{ \frac{\delta \log f(\omega|\lambda)}{\delta \lambda_j} \right\} \right] \cdot \left[\left(\frac{2\pi}{\sigma^2} \right) \left\{ \frac{\delta \log f(\omega|\lambda)}{\delta \lambda_k} \right\} \right]' d\omega. \quad (4.27)$$

Demonstra-se que, quando μ é desconhecido, a distribuição assintótica de λ é normal e que $\hat{\mu}$ é consistente a uma taxa de convergência inferior à correspondente para β' . Enquanto

¹²Veja-se Brockwell e Davis, página 529.

¹³Veja-se por exemplo Cheung e Diebold (1994) para a aproximação de Fox-Taququ e Crato e Ray (1996).

$\hat{\mu}$ converge à taxa de $T^{0.5-d}$, os outros estimadores convergem à taxa habitual de $T^{0.5}$.

Quando μ é desconhecido, Cheung e Diebold (1994) concluem que o estimador de Fox-Taquu (aproximação em domínio frequência) é preferível ao de Sowell (1992) (exacto em domínio tempo), no sentido em que produz um menor enviesamento e erro quadrático médio. No entanto, quando μ é conhecido, o estimador de Sowell é bastante mais eficiente que o de Fox-Taquu. Estes resultados são para amostras finitas, onde a estimação da ordem de integração é negativamente enviesada (\hat{d} é subestimado).

A selecção do modelo ARFIMA(p, d, q) é feita sobre as estimações MLE realizadas, para os diferentes modelos. A escolha do modelo recai sobre aquele que minimiza um critério de informação tal como o AIC (*Akaike information criterion*) ou o BIC (informação Bayesiana).

Crato e Ray (1996) mostram que o primeiro critério revela melhores qualidades quando a selecção é feita sobre modelos fraccionários com componentes ARMA, isto é, $p, q > 0$. A escolha entre modelos de ruído fraccionário deve ser realizada com um critério Bayesiano. Estes autores acrescentam que o estimador Fox-Taquu apresenta melhores performances que o GPH.

Geralmente, o AIC penaliza menos a introdução de parâmetros no modelo que o SBC (*Schwartz Bayesian criterion*). Para m parâmetros,

$$AIC(m) = -2 \ln[L(\cdot)] + 2m; SBC(m) = -2 \ln[L(\cdot)] + m \ln(T). \quad (4.28)$$

Tal como foi referido para o método GPH, a estimação e inferência sobre a nulidade da ordem de integração da série nas primeiras diferenças, ∇X_t , possibilita o ensaio à presença de uma raiz unitária na série original, $H_0 : d - 1 = 0 \Leftrightarrow d = 1$.

Ao contrário do GPH, a estimação por máxima verosimilhança é computacionalmente pesada.

4.6 Cointegração Fraccionária

A cointegração fraccionária é um conceito generalizado de cointegração, definido para séries e erros de equilíbrio que seguem processos fraccionariamente integrados.

Seguindo o conceito de cointegração entre variáveis definido por Engle e Granger (1987), a cointegração fraccionária tem a seguinte definição:

Definição 4.2: *As n séries $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, \dots, X_{nt})$ dizem-se fraccionariamente cointegradas de ordem $C(d, b)$, com $b > 0$, quando, assumindo uma ordem de integração real, as n séries são $I(d)$ e $e_t = \mathbf{X}_t \alpha' \sim I(d - b)$.*

Granger (1986) refere que o vector de cointegração fraccionária \mathbf{X}_t , admite uma representação com correcção de erros da forma

$$H(L)(1 - L)^d \mathbf{X}_t = -\lambda[1 - (1 - L)^b](1 - L)^{d-b} e_{t-1} + C(L)\varepsilon_t, \quad (4.29)$$

com $H(0) = I$, $C(1) < \infty$ e $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

Registe-se que a cointegração inteira é um caso particular da cointegração fraccionária. Na cointegração inteira, a ordem de integração das séries e dos erros de equilíbrio é inteira, cujo conjunto de valores está contido no conjunto dos valores reais. O caso mais frequente, $C(1, 1)$, verifica-se quando as séries são $I(1)$ e os erros de equilíbrio são $I(0)$. A partir deste caso, pode-se considerar qualquer outro tipo de generalização.

As características de qualquer processo $\{Z_t\}$ fraccionário, conforme a sua ordem de integração, resumem-se da seguinte forma:

- $Z_t \sim I(d)$, $d \geq 1 \Leftrightarrow \{Z_t\}$ não estacionário, não revertível para o nível.
- $Z_t \sim I(d)$, $0.5 \leq d < 1 \Leftrightarrow \{Z_t\}$ não estacionário, revertível para o nível.
- $Z_t \sim I(d)$, $d < 0.5 \Leftrightarrow \{Z_t\}$ estacionário, revertível para a média.

Nestas condições, o conceito de cointegração adquire dois diferentes níveis.

(i) Forte cointegração ou cointegração em sentido restrito se

$$X_t \sim I(d_s), d_s \geq 1 \text{ e } e_t \sim I(d_r), d_r < 0.5 \quad (4.30)$$

(ii) Fraca cointegração ou cointegração em sentido lato se

$$a) X_t \sim I(d_s), d_s \geq 1 \text{ e } e_t \sim I(d_r), d_r < 1 \quad (4.31)$$

$$b) X_t \sim I(d_s), d_s \geq 0.5 \text{ e } e_t \sim I(d_r), d_r < 0.5 \quad (4.32)$$

O estudo da cointegração fraccionária, visto ser um conceito bastante abrangente, permite induzir neste tipo de metodologia uma certa flexibilidade no tipo de análise que se pretende efectuar.

Uma condição importante a garantir, prende-se com a não estacionaridade das séries. Mas uma questão pertinente se coloca: será possível garantir que todas as séries têm a mesma ordem de integração fraccionária, d ? Muito provavelmente, esta hipótese é refutada pelos dados através da simples estimação deste parâmetro. Por outro lado, não é aceite na maior parte dos casos a hipótese nula do ensaio: $H_0 : d_1 = d_2 = \dots = d_n = d$, para as n séries. Concretizando, a hipótese de $C(d, b)$ poderá ser empiricamente aceite apenas num restrito número de casos.

Perante este cenário, dois tipos distintos de análise se colocam.

Em primeiro lugar, considerar que, apesar de as séries não terem a mesma ordem de integração, é possível inferir sobre a sua não revertibilidade para o nível e/ou não estacionaridade. Relativamente a este ponto, ensaiava-se para todas as séries, se $d \geq 1$ ou $d \geq 0.5$.

Não tendo as séries a mesma ordem de integração, os resíduos do modelo de cointegração não seriam considerados como $I(d - b)$. mas passariam a ser uma série estacionária e/ou revertível para o nível (ou média). $I(d_r)$. Para este tipo de análise, retratado nos casos de (4.30) a (4.32), poder-se-ia propor como nomenclatura de cointegração $C(d_s, d_r)$, sendo $d_s \geq d_{*r}$, com $d_* \in \{0.5; 1\}$, a ordem de integração das séries e d_r a dos potenciais erros de

equilíbrio.

A alternativa a este método pretende não abandonar este conceito generalizado de cointegração e, ao mesmo tempo, potencializar uma metodologia mais simples e prática relativamente ao anterior. Esta tipologia consiste em considerar as séries não estacionárias, com ordem de integração inteira, e os erros de longo prazo estacionários e/ou revertíveis para o nível (ou média), fraccionariamente integrados.

O caso mais imediato é o das séries $C(1, b)$: conclui-se sobre a integração de ordem um das séries (não estacionaridade e não revertibilidade, tal como para $d \geq 1$), e os resíduos de longo prazo são $I(1 - b)$, com $b > 0$. Na hipótese de cointegração $C(1, b)$, esta última abordagem permite concluir se as variáveis encontram-se fracamente (4.31) ou fortemente cointegradas (4.30), mediante o valor de $d_r = 1 - b$.

Como se verifica, os erros da relação de longo prazo entre as variáveis constituem o objecto de análise mais relevante na cointegração fraccionária. Estes, podendo assumir uma ordem de integração real, distinguem-se de um comportamento estritamente $I(0)$ ou $I(1)$. O suporte teórico assenta na teoria univariada dos processos de memória longa e integração fraccionária, anteriormente estudada.

De uma forma resumida, a verificação da existência de um vector de variáveis fraccionariamente cointegradas passa por algumas fases: identificar a não estacionaridade das séries (integração inteira por raízes unitárias ou integração fraccionária por GPH ou MLE); construir a série dos resíduos dos mínimos quadrados do modelo de cointegração; estimar o modelo ARFIMA (normalmente com valor esperado nulo, isto é, $E(\hat{\epsilon}_t) = \mu = 0$) e, principalmente, identificar a ordem de integração fraccionária dos resíduos, por GPH ou MLE; finalmente, completar esta última fase com a realização de ensaios uni ou bilaterais com o objectivo de, inferindo sobre as características do processo, concluir sobre a efectiva relação de longo prazo entre as variáveis em causa. Como será explicado posteriormente, o ensaio estatístico é realizado sobre uma distribuição de teste GPH ou MLE que não tem a distribuição standard.

Tal como para a cointegração inteira, ambiciona-se procurar um modelo com correcção

de erros (além de um simples teste de cointegração), por forma a encontrar uma relação explicativa e com intuito previsional, entre as variáveis.

No entanto, a representação (4.29) possui regressores fraccionalmente integrados. Esta realidade implica que se procure uma estimação mais eficiente do que o método OLS, para o MCE com variáveis fraccionalmente cointegradas.

4.7 Estimação do Modelo de Cointegração por OLS

O modelo de cointegração, na forma de regressão linear para o vector de variáveis $X_t = (X_{1t}, \dots, X_{nt})$, é dado por $X_t \alpha' = e_t$ ou, normalizando a uma das variáveis e introduzindo regressores determinísticos,

$$X_{1t} = \beta X_t^* + e_t \quad (4.33)$$

com $X_t^* = \left[1 \quad t \quad \dots \quad t^s \quad X_{2t} \quad \dots \quad X_{nt} \right]'$ e $\beta = \left[\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_s \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n \right]$.

Como será mostrado, a estimação do vector β por mínimos quadrados é obtida de uma forma consistente e, portanto, os resíduos \hat{e}_t são uma razoável estimativa dos possíveis erros de equilíbrio entre as variáveis.

Cheung and Lai (1993) mostram a consistência do estimador de mínimos quadrados sob a hipótese de cointegração fraccionária. Estes autores consideram o simples caso de duas variáveis $C(d, b)$, $X_t, Y_t \sim I(d)$, com $d > 0.5$ e $d \geq b > 0$, cuja equação de cointegração é $Y_t = \zeta X_t + e_t$, $e_t \sim I(d - b)$. O estimador OLS é dado por,

$$\hat{\zeta} = \frac{\sum_{i=1}^T X_i Y_i}{\sum_{i=1}^T X_i^2} = \zeta + \frac{\sum_{i=1}^T X_i e_i}{\sum_{i=1}^T X_i^2}. \quad (4.34)$$

A convergência do estimador depende do rácio das taxas de convergência das duas expressões em somatório.

(i) ($d - b > 0.5$) (resíduos não estacionários, mas revertíveis para o nível, $d - b < 1$):

Sabe-se que

$$\sum_{i=1}^T X_i^2 = O_p(T^{2d}) \text{ e } \sum_{i=1}^T e_i^2 = O_p(T^{2(d-b)}) \quad (4.35)$$

e, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{i=1}^T X_t^2 \sum_{i=1}^T e_t^2 \geq \left(\sum_{i=1}^T X_t e_t \right)^2 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^T X_t^2 / T^{2d} \right) \left(\sum_{i=1}^T e_t^2 / T^{2(d-b)} \right) \geq \left(\sum_{i=1}^T X_t e_t / T^{2d-b} \right)^2. \quad (4.36)$$

Por (4.34), (4.35) e (4.36),

$$\sum_{i=1}^T X_t e_t = O_p(T^\tau), \tau \leq 2d - b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^T X_t e_t / T^{2d-b+\delta} \xrightarrow{p} 0, \forall \delta > 0, \quad (4.37)$$

$$\hat{\zeta} = \zeta + \frac{O_p(T^\tau)}{O_p(T^{2d})} = \zeta + O_p(T^{\tau-2d}) \quad (4.38)$$

resultando

$$T^{b-\delta}(\hat{\zeta} - \zeta) = \left(\sum_{i=1}^T X_t e_t / T^{2d-b+\delta} \right) / \left(\sum_{i=1}^T X_t^2 / T^{2d} \right) \xrightarrow{p} 0, \forall \delta > 0. \quad (4.39)$$

(ii) ($0.5 > d - b \geq 0$) (resíduos estacionários):

Sabe-se que

$$\sum_{i=1}^T X_t^2 = O_p(T^{2d}) \text{ e } \sum_{i=1}^T e_t^2 = O_p(T) \quad (4.40)$$

e, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{i=1}^T X_t^2 \sum_{i=1}^T e_t^2 \geq \left(\sum_{i=1}^T X_t e_t \right)^2 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^T X_t^2 / T^{2d} \right) \left(\sum_{i=1}^T e_t^2 / T \right) \geq \left(\sum_{i=1}^T X_t e_t / T^{d+0.5} \right)^2. \quad (4.41)$$

Por (4.40) e (4.41),

$$\sum_{i=1}^T X_t e_t = O_p(T^\tau), \tau \leq d + 0.5. \quad (4.42)$$

Como

$$\sum_{i=1}^T X_t e_t / T^{2d-b} = \sum_{i=1}^T \left(X_t / T^{d-0.5} \right) \left(e_t / T^{d-b-0.5} \right) / T \quad (4.43)$$

converge em distribuição para uma funcional do movimento browniano pelo teorema do limite central funcional de Herrndorf (1984), a expressão (4.43) pode ser substituída por outra mais

limitada,

$$\sum_{i=1}^T X_t e_t = O_p(T^\tau), \tau \leq 2d - b \quad (4.44)$$

resultando

$$T^{b-\delta}(\hat{\zeta} - \zeta) = \left(\sum_{i=1}^T X_t e_t / T^{2d-b+\delta} \right) / \left(\sum_{i=1}^T X_t^2 / T^{2d} \right) \xrightarrow{p} 0, \forall \delta > 0. \quad (4.45)$$

Como se constata, a consistência do estimador OLS para os dois casos apresentados é garantida a uma taxa de convergência $O_p(T^b)$.

No caso particular em que as variáveis são $C(1, 1)$, a convergência em probabilidade é conseguida à taxa $O_p(T)$, o que confirma o resultado obtido por Stock (1987).

A velocidade de convergência depende portanto da ordem de cointegração existente: dentro dos limites de integração definidos em (4.30), (4.31) e (4.32), a convergência do estimador é mais rápida quanto menor for d da série residual ou, por outras palavras, quanto mais afastadas se encontrarem as ordens de integração das séries cointegradas e residual ($d - b \rightarrow 0$ ou $b \rightarrow d$, assumindo-se que $d \geq b > 0$):

Situação A: Séries $C(d, b)$, com $0 < d - b = d_r$ ¹⁴,

(*A i*) se $b > 0.5 \Leftrightarrow e_t \sim I(d_r), d_r < d - 0.5$, então $O_p(T^{1/2}) < O_p(T^b)$.

(*A ii*) se $b > 1 \Leftrightarrow e_t \sim I(d_r), d_r < d - 1$, então $O_p(T) < O_p(T^b)$.

Nesta situação, o estimador converge a uma taxa superior a $O_p(T)$ ¹⁵, quando, dentro das suas condições de estacionaridade/revertibilidade, os erros de longo prazo têm uma ordem de integração inferior em mais de uma unidade, relativamente às séries cointegradas.

Situação B: Séries $C(1, b)$,

(*B i*) se $0 < b < 0.5 \Leftrightarrow e_t \sim I(d), 0.5 < d < 1$, então $O_p(T^b) < O_p(T^{1/2}) < O_p(T)$.

(*B ii*) se $0.5 < b < 1 \Leftrightarrow e_t \sim I(d), 0 < d < 0.5$. então $O_p(T^{1/2}) < O_p(T^b) < O_p(T)$.

Neste caso, a velocidade de convergência é sempre inferior a $O_p(T)$ e apenas supera

¹⁴Porque $d \geq b > 0$.

¹⁵Talvez não se deva cair na "tentação" de se afirmar que, nestas condições (por exemplo $d = 1.5$ e $d_r = 0.2$). o estimador é mais que superconsistente.

$O_p(T^{1/2})$ (regressores $I(0)$), quando os erros de equilíbrio são estacionários.

As duas situações anteriormente descritas permitem concluir que uma mais forte (fraca) evidência de cointegração está intimamente ligada a uma maior (menor) velocidade de convergência do estimador OLS no modelo de cointegração.

Num artigo recentemente publicado, Cappuccio e Lubian (1997) estudam a problemática das regressões espúrias envolvendo dois passeios aleatórios independentes, mas com erros que seguem um processo de ruído fraccionário com diferentes ordens de integração. Confirmando os resultados apontados por Phillips (1986), verificam que, quando $T \rightarrow \infty$, os rácios- t tendem para infinito e a estatística de Durbin-Watson tende para zero.

A principal conclusão deste trabalho é a seguinte: quando a ordem de integração da variável dependente é superior à ordem de integração da variável independente, a estimação OLS tende a considerar erradamente uma relação não independente ($\hat{\beta} \xrightarrow{P} \infty$, quando $T \rightarrow \infty$). Os pressupostos são os seguintes:

$$Y_t = \hat{\beta}X_t + \hat{u}_t, \text{ com } Y_t, X_t \text{ independentes} \quad (4.46)$$

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t, (1-L)^{d_\varepsilon} \varepsilon_t = \omega_t, \omega_t \sim W.N. \Leftrightarrow (1-L)^{d_\varepsilon+1} X_t = \omega_t$$

$$Y_t = Y_{t-1} + \eta_t, (1-L)^{d_\eta} \eta_t = v_t, v_t \sim W.N. \Leftrightarrow (1-L)^{d_\eta+1} Y_t = v_t$$

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow \hat{\beta} \xrightarrow{P} 0 \text{ se } d_\varepsilon > d_\eta \quad (4.47)$$

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow \hat{\beta} \xrightarrow{P} \infty \text{ se } d_\varepsilon < d_\eta \quad (4.48)$$

Admitindo este resultado, a construção de um modelo de cointegração pode estar condicionado pela representação fraccionária de cada série. O modelo de cointegração¹⁶, no propósito de identificar correctamente uma possível relação espúria, isto é, para que $\hat{\beta} \xrightarrow{P} 0$, deve ter como variável dependente a série com menor ordem de integração.

¹⁶Considerando a escolha das variáveis dependente e independente como apenas uma questão de normalização do vector de cointegração.

De uma forma análoga à cointegração inteira, o estimador OLS da regressão de cointegração não tendo uma distribuição standard, impossibilita a realização de qualquer ensaio sobre o vector de parâmetros da regressão, nomeadamente, testes de significância.

4.8 Inferência no Modelo de Cointegração

O processo de inferência sobre a representação ARFIMA(p, d, q) da série dos resíduos, destacando-se a ordem de integração d , é realizado em duas vertentes complementares: o valor da estimativa e o ensaio de hipóteses uni ou bilateral para a ordem de integração.

Tendo presente as propriedades apresentadas nas secções 4.5.2 e 4.5.3, a estimativa para d pode ser obtida pelo método GPH ou de uma forma mais eficiente por MLE¹⁷. Portanto, a estimativa da ordem de integração já representa um indicador à cointegração visto que são conhecidas as características dos processos fraccionários anteriormente enunciadas na secção 4.4.

A informação estatística dada pelas distribuições de teste GPH e MLE baseiam-se em métodos distintos. Enquanto que a distribuição empírica, definida nos seus quantis e dimensão empírica, por GPH é construída sobre as estimativas de um coeficiente numa regressão espectral de teste, no caso de MLE a estimação de d é feita simultaneamente com outros parâmetros.

Se a série residual fosse observada, poderia ser feito um teste de tipo Wald em que $\frac{\hat{d}-d}{[\text{Var}(\hat{d})]^{1/2}} \sim N(0,1)$. No entanto, a série é normalmente estimada por OLS. Para a cointegração fraccionária, o ensaio de hipóteses para a série dos resíduos da relação de longo prazo não é feito sobre a distribuição de teste standard. A obtenção da distribuição é feita através de simulação. Cheung e Lai (1993) encontram uma distribuição de teste GPH.

A construção da distribuição empírica do estimador da ordem de integração dos resíduos de longo prazo, permite a execução de alguns ensaios ou testes, nomeadamente a $C(1, b)$, dos quais se destacam os seguintes:

¹⁷Para a estimação por MLE, nem sempre é possível garantir a normalidade dos dados (por exemplo em dados financeiros).

(i) Teste à não cointegração em termos latos, unilateral à esquerda, em que sob a alternativa se aceita a hipótese de cointegração:

$$H_0 : d = 1$$

$$H_1 : d < 1$$

(ii) Teste à não cointegração em termos restritos, unilateral à esquerda, em que sob a alternativa se aceita a hipótese de cointegração:

$$H_0 : d = 0.5$$

$$H_1 : d < 0.5$$

(iii) Teste bilateral à nulidade do parâmetro em que, sob a hipótese nula e $C(1, b)$, encontramos no caso particular da cointegração inteira $C(1, 1)$, e sob a alternativa os resíduos são um processo fraccionário:

$$H_0 : d = 0$$

$$H_1 : d \neq 0$$

O culminar da metodologia apresentada, como teste à cointegração fraccionária, resulta no processo decisional ou conclusivo relativamente ao tipo de relação de longo prazo que se pode supor para as séries em análise.

(i) Se $e_t \sim I(d)$, $d \geq 1 \Leftrightarrow \{e_t\}$ não estacionário, não revertível para o nível \Rightarrow não existe cointegração fraccionária.

Nesta situação, a regressão linear pode ser espúria, desprovida de sentido económico.

Os desvios relativamente à relação de longo prazo têm um comportamento divergente e o equilíbrio conjunto entre as variáveis, não existindo, não é recuperado ao longo do tempo, tomando um carácter de permanente qualquer choque verificado.

Por isso, conclui-se que as variáveis em causa não se encontram cointegradas, que o modelo teórico não define uma estabilidade de longo prazo, ou que no caso concreto da teoria da paridade dos poderes de compra, a paridade entre as economias não tende a verificar-se no período considerado.

(ii) Se $e_t \sim I(d)$, $0.5 \leq d < 1 \Leftrightarrow \{e_t\}$ não estacionário, revertível para o nível \Rightarrow

existe cointegração fraccionária, em sentido lato.

A cointegração fraccionária neste caso verifica-se mas apenas em termos amplos: as variáveis apresentam uma fraca evidência de cointegração.

Admite-se que os desvios não sejam estacionários e, por isso, podem não ter valor esperado. No entanto, porque o impacto de um choque, no longo prazo, tende a dissipar-se ($A(1) = 0$), é garantido que um nível de desvio atingido num determinado período não é agravado no longo prazo por um choque individual.

É esta compatibilidade entre a não estacionaridade e a reversão para o nível que permite aceitar que um conjunto de variáveis esteja cointegrado em termos latos.

(iii) Se $e_t \sim I(d)$, $d < 0.5 \Leftrightarrow \{e_t\}$ estacionário, revertível para a média \Rightarrow existe cointegração fraccionária, em sentido restrito.

Nesta situação admite-se que as variáveis encontram-se fraccionariamente cointegradas. Esta verifica-se porque os desvios relativamente ao equilíbrio não têm carácter permanente, além de admitirem média e variância finita. As variáveis encontram-se a flutuar sobre o seu ponto de equilíbrio conjunto, garantindo-se portanto que as mesmas se encontram cointegradas.

Capítulo 5

PPP E COINTEGRAÇÃO

INTEIRA E FRACCIONÁRIA: O CASO PORTUGUÊS

5.1 Apresentação dos Modelos e Abordagens

Nos capítulos anteriores procurou-se apresentar teoricamente a problemática da cointegração, numa abordagem inteira e fraccionária. O objectivo nuclear deste trabalho passa pela discussão dos problemas econométricos resultantes do estudo da paridade dos poderes de compra, para a economia nacional.

O estudo da hipótese da paridade, ao longo do tempo, do valor do mesmo cabaz de compras expresso em duas unidades monetárias distintas, pode ser, na sua forma linear, realizado pela expressão usual,

$$s_t^f = \alpha + \beta p_t^{n,f} + e_t^{n,f}, \text{ para } t = 1, \dots, T, \quad (5.1)$$

onde $s^f = s_n^f$, $p^{n,f} = \log \frac{P_n}{P_f}$.

As variáveis são expressas em logaritmos¹ e definem a taxa de câmbio nominal expressa em escudos por moeda estrangeira (S_t^f) e o índice de preços relativo ($\frac{P_n}{P_f}$) como o rácio entre o índice de preços nacional (P_n) e o estrangeiro (P_f). A PPP verifica-se quando as variáveis s_t^f e $p_t^{n,f}$ são cointegradas.

Numa perspectiva restrita, ou seja, de cointegração inteira, os erros deveriam ser estacionários, ao passo que, numa perspectiva mais lata de cointegração, os erros podem ser revertíveis para o nível, apesar de não estacionários. Por outro lado, como foi discutido na secção 2.2. é de esperar que se verifique a hipótese de homogeneidade ($\beta = 1$). Considerando a versão absoluta, adicionalmente dever-se-ia verificar a nulidade de α (hipótese de nulidade) mas isso pode não suceder pelos motivos apresentados na secção 2.2. Note-se que foi imposta a hipótese de simetria para os preços (habitual em algumas aplicações), dado que testes preliminares mostraram alguma evidência de que pelo menos a série dos preços nacionais pode ser integrada de ordem dois. Devido a este último facto, não foi considerada a versão reparametrizada de (5.1).

A aplicação deste modelo teórico é feita bilateralmente entre Portugal e a Inglaterra e entre Portugal e os Estados Unidos da América e considera como horizonte temporal o presente século.

A componente prática, apresentada neste capítulo, encontra-se esquematizada da seguinte forma:

Na secção 5.2 descrevem-se os dados, discute-se a não estacionaridade das séries que pertencem ao modelo (5.1) através da ordem de integração inteira e fraccionária² e é construída a componente residual do modelo de cointegração (5.1). A verificação da paridade entre as economias, estudada num contexto de cointegração inteira ou fraccionária, resulta da análise estatística da série dos resíduos, $\hat{\varepsilon}_t^{n,f}$. Na secção 5.3, é ensaiada a cointegração inteira através

¹ A logaritmização das variáveis permite, em certos casos, estabilizar a variância. Mais importante as diferenças do nível da série logaritmizada constituem aproximações às taxas de variação da série original ($\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \approx p_t - p_{t-1}$) e β aparece como um parâmetro de elasticidade da taxa de câmbio em relação aos preços relativos ($\Delta P_{n,f} = 1\% \Rightarrow \Delta S_n = \beta\%$).

² A tipologia dos processos $C(d, b)$, passa previamente pela determinação de d por testes de raízes unitárias (inteira) e por estimação e ensaio de GPH e MLE (fraccionária).

do teste de raízes unitárias de EG. A determinação por simulação da distribuição dos testes GPH e MLE, e a comparação da potência dos testes AEG, GPH e MLE, são apresentadas na secção 5.4. A secção 5.5 enuncia as conclusões obtidas relativamente à paridade, num contexto de resíduos fraccionariamente integrados, por estimações e ensaios através dos métodos GPH e MLE. Na secção 5.6, estuda-se a teoria da PPP através da análise univariada da taxa de câmbio real, s_r , como um processo inteira ou fraccionariamente integrado. Na secção 5.7 elabora-se uma síntese conclusiva dos resultados obtidos neste capítulo.

5.2 Descrição das Séries e Construção dos Resíduos

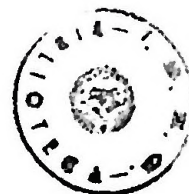
As séries cronológicas, para os três países, estão medidas em dados anuais. Em seguida enunciam-se as fontes estatísticas e os respectivos períodos amostrais.

A série do índice de preços no consumidor (IPC) em Portugal, P_n , cobre o período de 1891 a 1995. Resulta da actualização da série obtida por Mata e Valério (1994), quadro E.2. (1891-1985, com base reconvertida para 1945), com as taxas de variação anuais do INE (1986-1995, total sem habitação). O IPC da Inglaterra, P_{uk} , de 1890 a 1995, segue Siegel (1992) (1891-1990) e foi actualizada pelas taxas de variação dadas pelas publicações do International Financial Statistics (1991-1995). O IPC dos E.U.A., P_{usa} , de 1900 a 1995, tem as mesmas fontes citadas para P_{uk} . As séries dos preços, para os três países, foram convertidas à base de 1945 (1945=100). A taxa de câmbio nominal da libra, $S_{\mathcal{L}}$, foi observada de 1891 a 1995. A informação foi recolhida de Mata e Valério (1994), quadro C.2.1 (1891-1950), Neves (1994) (1951-1992) e dos relatórios do Banco de Portugal (1992-1995). A taxa de câmbio do dolar, $S_{\$}$, foi observada de 1900 a 1995 e as fontes foram: Neves (1994) (1900-1930), Mata e Valério (1994) (1931-1990) e os relatórios do Banco de Portugal (1991-1995).

5.2.1 Ordem de Integração das Séries

As séries anteriormente descritas permitem o estudo da teoria da PPP entre Portugal e a Inglaterra de 1891 a 1995 (amostra de dimensão 105, $t = 1, \dots, 105$), e entre Portugal e os

E.U.A. de 1900 a 1995 (96 observações, $t = 1, \dots, 96$).



As respectivas relações de paridade são:

$$s_t^{\mathcal{L}} = \alpha_1 + \beta_1 p_t^{n,uk} + e_t^{n,uk} \quad \text{e} \quad s_t^{\mathcal{S}} = \alpha_2 + \beta_2 p_t^{n,usa} + e_t^{n,usa}.$$

Em primeiro lugar, é necessário inferir sobre a ordem de integração das séries $s_t^{\mathcal{L}}, p_t^{n,uk}$, $s_t^{\mathcal{S}}, p_t^{n,usa}$. A não estacionaridade de uma série é garantida quando a ordem de integração da mesma é $d \geq 0.5$, enquanto a não revertibilidade para o nível é verificada para $d \geq 1$. Se admitirmos o caso particular da integração inteira, a não estacionaridade é obtida para séries $I(d)$, $d = 1, 2, \dots$

O ensaio para séries $I(1)$ (ou eventualmente $I(2)$) é realizado por testes de raízes unitárias ADF, cuja estatística de teste é τ . A identificação da ordem de integração fraccionária é feita por estimação e inferência GPH ou MLE. Os resultados obtidos encontram-se resumidos no quadro 5.1. Entre parêntesis indicam-se os respectivos p -values.

Quadro 5.1: Resultados dos testes de raízes unitárias para as séries.

Série	ADF lag	h -Durbin stat.	BG(4)	ADF stat.	\hat{d} GPH	t -rácio
$s_t^{\mathcal{L}}$	5	-1.023(0.306)	3.5(0.474)	-1.461	1.092	0.53
$s_t^{\mathcal{S}}$	1	0.935(0.35)	8.6(0.073)	-1.363	0.948	-0.25
$p_t^{n,uk}$	4	-0.52(0.604)	3.8(0.432)	-1.822*	1.417	0.85
$p_t^{n,usa}$	5	1(0.318)	1.4(0.852)	-1.54	0.874	-0.473

Nas regressões de teste ADF, foi considerado estatisticamente significativo o termo constante para as duas séries de taxa de câmbio (estatística de teste τ_c). Para $p_t^{n,uk}$ e $p_t^{n,usa}$, não foi estatisticamente relevante a inclusão de qualquer componente determinística (τ_{nc}). A escolha do lag na regressão de teste ADF, corresponde ao desfasamento mínimo que garante a não autocorrelação dos resíduos e cujo lag de ordem seguinte não é estatisticamente significativo. Pelos valores das estatísticas h -Durbin e Breusch-Godfrey (até à quarta ordem), considera-se que os resíduos das regressões de teste não se encontram autocorrelacionados.

Considerando os valores críticos de Mackinnon (1991), obtidos por $\hat{C}(p, T) = \hat{\beta}_\infty + \hat{\beta}_1 T^{-1} + \hat{\beta}_2 T^{-2}$, a estatística ADF de $p_t^{n,uk}$ é significativa apenas a 10%, indicada por * (o valor crítico a 10% é de -1.617 e a 5% é de -1.943).

No ensaio a $H_0 : X_t \sim I(2)$, o valor p da estatística DF, para as 4 séries, foi nulo, ou seja, a hipótese nula das séries serem $I(2)$ praticamente não tem qualquer suporte por parte dos dados.

Os resultados obtidos pelo teste GPH, baseiam-se nas séries às primeiras diferenças. Desta forma, é possível testar a presença de uma raiz unitária e estimar o parâmetro d no espaço de valores dos processos de memória longa:

$$\phi(L)(1-L)^d X_t = \theta(L)\varepsilon_t, \quad d \text{ real} \Leftrightarrow (d = d_{ml} + d_i)$$

$$\phi(L)(1-L)^{d_{ml}}(1-L)^{d_i} X_t = \theta(L)\varepsilon_t, \quad d_i \text{ inteiro}, \quad d_{ml} \in]-0.5; 0.5[\text{ }^3$$

As estimativas e os rácio- t são obtidos em GAUSS. A dimensão espectral da regressão de teste GPH é ω_j , $j = 0.1, \dots, T^{0.5}$ e os rácios- t , não estatisticamente significativos, reportam ao ensaio de $d = 1$ contra a alternativa de $d \neq 1$. A escolha do conjunto de valores para ω_j , resulta da inexistência de um critério óptimo para definir a truncagem.

O teste GPH, para processos fraccionários, confirma as conclusões tiradas pelo ADF: não se pode rejeitar a hipótese de presença de uma raiz unitária.

As figuras 5.1 e 5.2 ilustram o comportamento das séries.

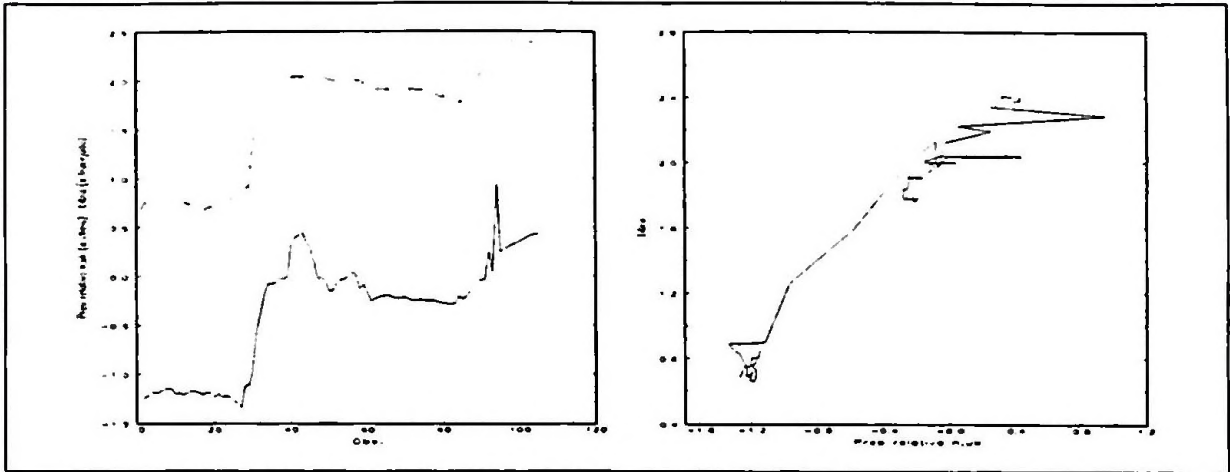
Pela simples análise do cronograma das séries, pode-se verificar que as mesmas não são estacionárias. É ainda possível identificar sub-períodos amostrais com diferentes comportamentos, nomeadamente o período relativamente estável que vai aproximadamente de 1943 a 1973 e que coincide com a aplicação do sistema de Bretton Woods de taxas de câmbio fixas. Apesar de as evidentes alterações de estrutura nas séries individuais, é possível que a relação de longo prazo entre preços e taxa de câmbio se tenha mantido relativamente estável, embora sujeita à presença de alguns *outliers* (como se nota no *scatter plot*). Podendo ser interessante explorar esta abordagem, tal não será no entanto efectuado.

³Por exemplo.

$$\phi(L)(1-L)^{0.7} X_t = \theta(L)\varepsilon_t \Leftrightarrow$$

$$\phi(L)(1-L)^{-0.3}(1-L)X_t = \theta(L)\varepsilon_t$$

Figura 5-1: Séries do modelo da PPP entre Portugal e a Inglaterra - a) Séries da libra e do preço relativo n,uk (à esquerda), b) Scatter plot das variáveis (à direita).



Apesar de as séries poderem ser fraccionariamente integradas, os testes apresentados no quadro 5.1 não permitem rejeitar a hipótese de que as séries $s_t^{\pounds}, p_t^{n,uk}$ e $s_t^{\$}, p_t^{n,usa}$ são $I(1)$, pelo que se optou pelo estudo da PPP no âmbito mais simples da cointegração fraccionária para $C(1, b)$. No entanto, seria interessante estudar esta relação mediante as outras abordagens possíveis da cointegração fraccionária.

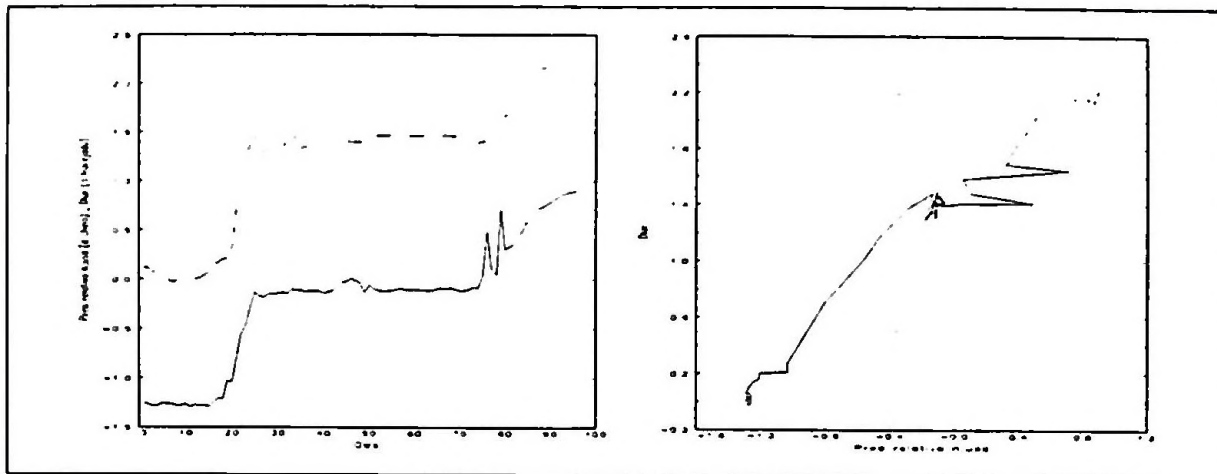
Nestas condições, o estudo da paridade dos poderes de compra será realizado por:

(i) Cointegração inteira para $C(1, 1)$.

(ii) Cointegração fraccionária para $C(1, b)$. Relativamente ao conceito geral de cointegração, $C(d, b)$, esta proposta de análise é, saliente-se, uma simplificação. No entanto, pode ser bastante reveladora das potencialidades da cointegração fraccionária, como metodologia generalizada do conceito de cointegração.

Em ambos os casos, um denominador comum: a análise dos resíduos do modelo de cointegração.

Figura 5-2: Séries do modelo da PPP entre Portugal e os E.U.A. - a) Séries do dólar e do preço relativo n,usa (à esquerda), b) Scatter plot das variáveis (à direita).



5.2.2 Construção da Série Residual

A estimação pelo método dos mínimos quadrados do modelo de cointegração é consistente nos casos de cointegração inteira e fraccionária.

As relações de paridade entre Portugal e a Inglaterra e entre Portugal e os E.U.A. e os correspondentes resíduos OLS, são respectivamente:

$$s_t^f = \alpha + \beta p_t^{n,uk} + e_t^{n,uk}, t = 1, \dots, 105 \xrightarrow{ols} \hat{e}_t^{n,uk}$$

$$s_t^s = \alpha + \beta p_t^{n,usa} + e_t^{n,usa}, t = 1, \dots, 96 \xrightarrow{ols} \hat{e}_t^{n,usa}$$

Os resultados obtidos por TSP encontram-se descritos no quadro 5.2.

Quadro 5.2: Estimativas OLS dos modelos de cointegração.

Paridade n, f	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$t_{\hat{\alpha}}$	$t_{\hat{\beta}}$	R^2	DW
Por, UK	4.78	1.06	212	72	0.98	0.37
Por, USA	3.3	1.05	130	61	0.98	0.22

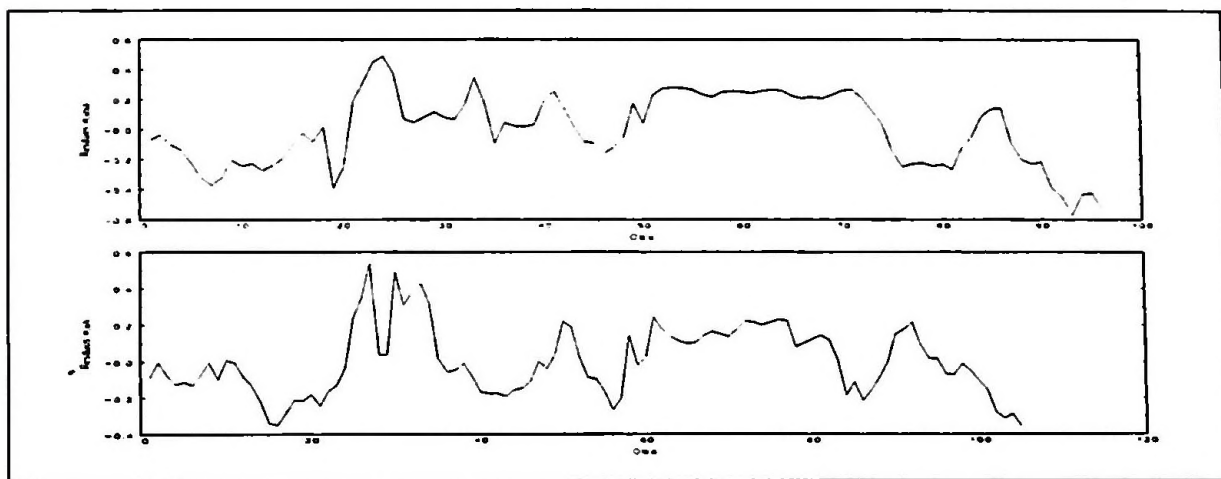
Esta informação não permite tirar grandes ilacões sobre a possibilidade de se verificar a

paridade dos poderes de compra. No entanto, importa realçar alguns aspectos.

As estimativas dos parâmetros têm sinal e magnitude economicamente esperados. Apesar do possível enviesamento do estimador OLS, os resultados indicam que β não anda longe da hipótese de homogeneidade e que α parece contrariar a hipótese da paridade absoluta, tal como foi discutido na secção 2.2. Como seria de esperar, a presença de regressores não estacionários sobreavaliou significativamente os rácios- t das estimativas e o coeficiente de determinação.

As figuras 5.3 representam o cronograma das séries residuais. O periodograma e a função autocorrelação encontram-se ilustrados nas figuras 5.4 e 5.5 respectivamente.

Figura 5-3: Cronograma dos resíduos dos modelos de cointegração - a) Série residual do modelo n,uk (em baixo), b) Série residual do modelo n,usa (em cima).

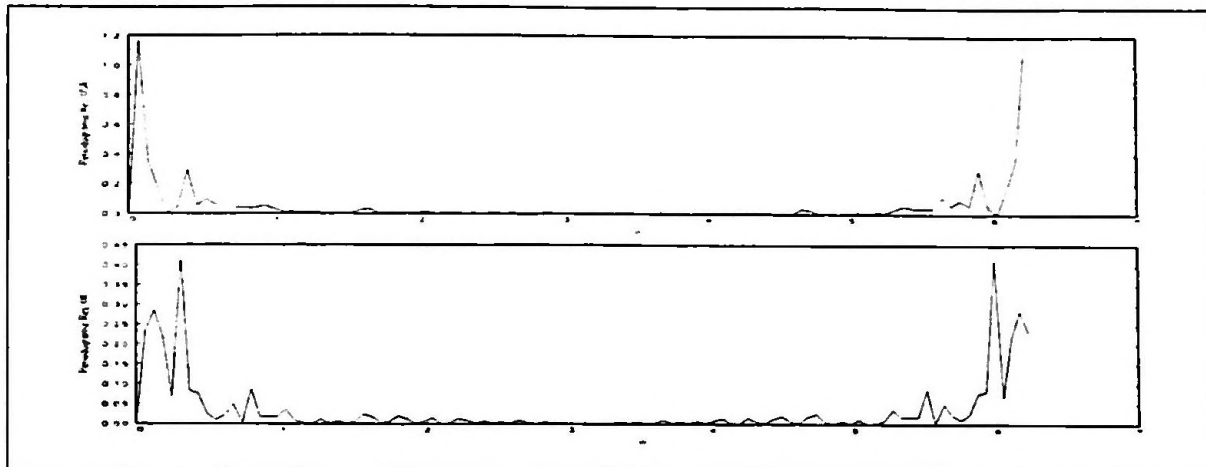


5.3 Cointegração Inteira

A cointegração inteira das variáveis que compõem a relação de paridade, $C(1,1)$, é testada pela realização de um teste de raízes unitárias aos resíduos (estatística de teste AEG, τ').

O quadro 5.3 explicita os resultados obtidos. Entre parêntesis indicam-se os respectivos p -values.

Figura 5-4: Periodograma dos resíduos dos modelos de cointegração - a) Série residual do modelo n,uk (em baixo), b) Série residual do modelo n,usa (em cima).



Quadro 5.3: Resultados do teste AEG aos resíduos.

Série	AEG lag	Estat. DW e h-D.	BG(4)	Estat. AEG
$\hat{e}_t^{n,uk}$	0	DW = 1.86	6.7(0.152)	-2.988
$\hat{e}_t^{n,usa}$	1	$h = 0.38(0.699)$	1.6(0.807)	-2.372

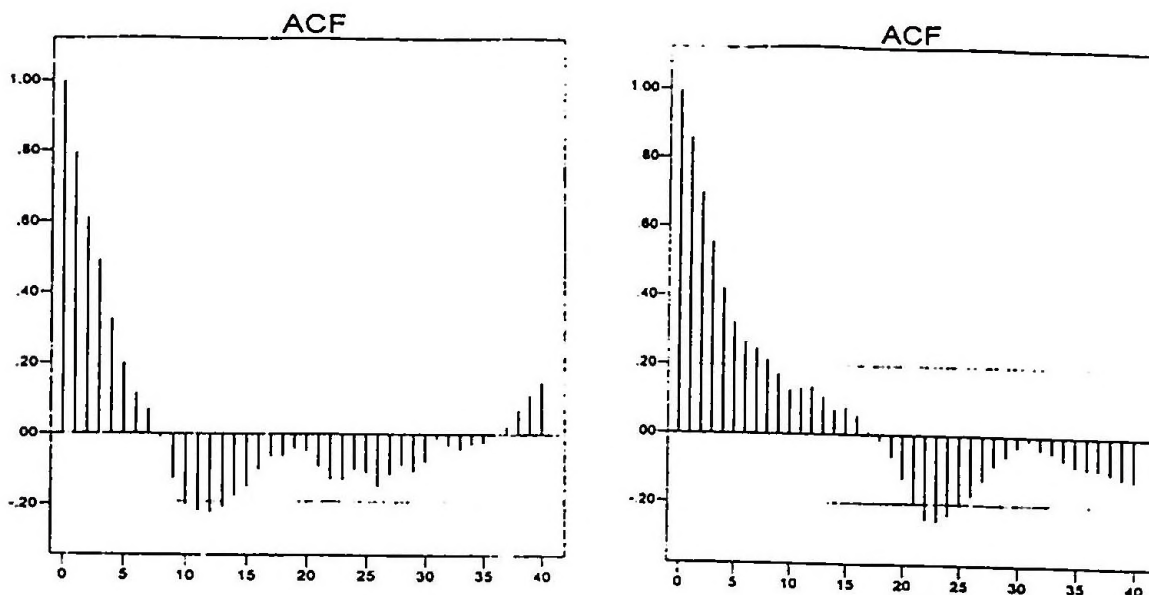
Nas regressões de teste AEG não se incluem regressores determinísticos. A introdução de um desfasamento na 2ª regressão de teste, corresponde ao desfasamento mínimo que garante a não autocorrelação dos resíduos e cujo lag de ordem seguinte não é estatisticamente significativo.

As estatísticas h -Durbin, DW e BG, apontam para a inexistência de problemas de autocorrelação nos resíduos (DW, tabelada em Greene (1993), $dU = 1.694$, para 5% de significância).

Pelas tabelas de Mackinnon (1991), as estatísticas EG, τ'_c , não são significativas e, por isso, não permitem rejeitar a hipótese nula de que os resíduos são $I(1)$.

Porque se assume que os erros não são estacionários nem revertíveis para o nível, conclui-se pela não cointegração inteira das variáveis e consequentemente pela não verificação da paridade dos poderes de compra entre Portugal e as economias da Inglaterra e dos E.U.A..

Figura 5-5: FAC dos resíduos dos modelos de cointegração - a) Série residual do modelo n,uk (à esquerda), b) Série residual do modelo n,usa (à direita).



Neste pressuposto, considera-se que as regressões anteriormente estimadas são desprovidas de qualquer significado económico.

A cointegração inteira permite sustentar que neste século o poder aquisitivo dos consumidores nacionais não acompanhou com regularidade o poder de compra dos estrangeiros. Relativamente à comparação dos casos particulares de cada paridade bilateral, é de supor que a paridade tem mais dificuldades de ser verificada no caso dos E.U.A. do que no inglês (maior evidência estatística de resíduos não estacionários).

Não obstante estes resultados, é possível que a paridade seja admitida pelo estudo do conceito mais geral de cointegração. a cointegração fraccionária.

5.4 Distribuição e Potência dos Testes GPH e MLE

Esta secção pretende mostrar as motivações para a aplicação da abordagem da cointegração em termos fraccionários. É por isso uma secção de ligação entre a cointegração inteira e a fraccionária.

Os principais argumentos para a utilização da abordagem fraccionária são os seguintes: neste método não é realizado um teste de cointegração do tipo *knife-edged* e os testes de

raízes unitárias têm pouca potência contra alternativas de processos fraccionários.

Analisemos o primeiro ponto. No capítulo anterior, foram estudadas as características dos processos fraccionários. Mostrou-se que existe um espaço de valores para a ordem de integração dos resíduos do modelo de cointegração que garantem a estacionaridade e/ou revertibilidade dos mesmos. A estimativa de d , por GPH ou MLE, pode fornecer apenas uma primeira indicação sobre as propriedades estatísticas dos resíduos.

No entanto, a realização de um ensaio à (não) cointegração, não pode ser realizado mediante a distribuição da estatística de teste τ' , definida no capítulo 3. Procurou-se neste estudo suprimir esta lacuna na teoria da cointegração fraccionária, tal como foi sugerido por Cheung e Lai (1993).

A distribuição assintótica de teste à não cointegração fraccionária encontra-se tabelada no quadro 5.4. A distribuição, definida nos diferentes percentis, foi construída sob a hipótese nula de um sistema de dois processos integrados de primeira ordem (passeios aleatórios), independentes. Procedeu-se à normalização da mesma com o objectivo de tornar possível a realização de um ensaio à hipótese nula de $d = 1$.

No contexto da cointegração, a distribuição apresentada permite, entre outros, o ensaio unilateral à esquerda sobre a série residual,

$H_0 : d = 1 \Leftrightarrow$ Não existe cointegração fraccionária

$H_1 : d < 1 \Leftrightarrow$ Existe cointegração fraccionária (fraca evidência)

Desta forma, é possível comparar os valores críticos (para qualquer nível de significância) para os testes GPH e MLE à não cointegração fraccionária, com o valor observado para o rácio- t de \hat{d} .

Como seria de esperar, as distribuições de teste obtidas são negativamente enviesadas e o valor médio é negativo.

A segunda vertente desta secção procura estudar a potência dos testes AEG com a ordem de desfasamento igual a um e para duas séries. Os quadros 5.5 e 5.6 indicam, para níveis de significância de 5% e 10%, a percentagem de vezes que foi rejeitada correctamente a hipótese

de não cointegração. Foram comparadas as performances dos testes AEG, GPH e MLE. Os valores críticos assumidos a 5% e 10% respectivamente, foram: AEG (-3.395; -3.086), GPH (-2.33; -1.902), MLE (-2.3; -1.844).

O verdadeiro sistema de dois processos encontrava-se cointegrado, para uma componente residual que assumia diferentes valores para ϕ (AR(1)) e d (ruído fraccionário) no espaço da revertibilidade e da estacionaridade (entre 0.95 e 0.05).

Destacam-se os seguintes resultados:

(i) Os testes GPH e MLE são mais potentes que os AEG, sob a alternativa de ruído fraccionário com $1 > d \geq 0.55$.

(ii) Para alternativas de ruído fraccionário, de qualquer ordem de integração, o teste MLE é o mais potente. Isto significa que para d entre 0 e 1 (não estritamente 0 ou 1 como é feito por AEG), o teste MLE é o mais apropriado.

(iii) O teste GPH apresenta melhores resultados para ϕ e d próximos da unidade.

(iv) A potência dos testes AEG e MLE são semelhantes para diferentes valores de σ .

(v) O teste AEG, contra a alternativa de ruído fraccionário, tem muito pouca potência (potência inferior à dimensão), para $d > 0.65$. Neste espaço de valores para d , o teste AEG não reconhece a revertibilidade dos resíduos.

Em apêndice, descrevem-se as hipóteses consideradas para a obtenção da distribuição e potência dos testes. Os procedimentos por simulação Monte Carlo, realizados em GAUSS encontram-se em anexo.

Para a regressão espectral GPH foi considerado ω_j , $j = 0.1, \dots, T^{0.5}$. Os processos simulados têm a dimensão empírica de 105 observações. Para a distribuição foram consideradas 50000 réplicas, enquanto que para a potência utilizou-se 20000 réplicas.

Quadro 5.4: Distribuição de teste GPH e MLE.

Percentil	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
GPH	-3.606	-3.248	-2.746	-2.33	-1.902	-1.396	-1.06	-0.785
MLE	-3.482	-3.175	-2.682	-2.3	-1.844	-1.345	-1.011	-0.733

Perc.(cont.)	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
GPH	-0.537	-0.292	-0.047	0.224	0.602	0.918	1.196	1.529	1.763
MLE	-0.485	-0.242	0.002	0.282	0.671	0.992	1.269	1.6	1.838

	média	sk.	kurt.
GPH	-0.601	-0.39	3.586
MLE	-0.545	-0.345	3.378

Quadro 5.5: Potência dos testes AEG, GPH e MLE, contra alternativas AR(1).

		ϕ									
		0.95	0.85	0.75	0.65	0.55	0.45	0.35	0.25	0.15	0.05
5%	GPH	0.09	0.38	0.60	0.72	0.77	0.81	0.82	0.83	0.83	0.84
	MLE	0.01	0.10	0.44	0.83	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	AEG	0.01	0.19	0.66	0.94	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
10%	GPH	0.15	0.50	0.72	0.82	0.87	0.89	0.90	0.90	0.91	0.91
	MLE	0.02	0.22	0.66	0.94	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	AEG	0.03	0.34	0.83	0.98	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Quadro 5.6: Potência dos testes AEG, GPH e MLE, contra alternativas de ruído fraccionário.

		<i>d</i>									
		0.95	0.85	0.75	0.65	0.55	0.45	0.35	0.25	0.15	0.05
5%	<i>GPH</i>	0.02	0.04	0.07	0.14	0.24	0.36	0.49	0.62	0.73	0.81
	<i>MLE</i>	0.00	0.01	0.10	0.42	0.86	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00
	<i>AEG</i>	0.00	0.00	0.02	0.07	0.23	0.54	0.87	0.99	1.00	1.00
10%	<i>GPH</i>	0.04	0.07	0.13	0.21	0.34	0.49	0.62	0.75	0.83	0.90
	<i>MLE</i>	0.04	0.04	0.21	0.63	0.96	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	<i>AEG</i>	0.00	0.01	0.04	0.12	0.33	0.67	0.93	1.00	1.00	1.00

5.5 Cointegração Fraccionária

Nesta fase procura-se estudar a paridade dos poderes de compra, entre as economias em estudo, inferindo sobre a possibilidade das variáveis taxa de câmbio e preços relativos encontrarem-se $C(1, b)$. A estimação e os ensaios baseiam-se nos métodos GPH e MLE, sobre a série residual. Tal como foi desenvolvido em secções anteriores, a PPP é testada por,

$H_0 : d = 1 \Leftrightarrow$ Não existe cointegração fraccionária

$H_1 : d < 1 \Leftrightarrow$ Existe cointegração fraccionária (fraca evidência)

Os resultados obtidos e indicados nos quadros 5.7 e 5.8, baseiam-se nas séries residuais nas primeiras diferenças, assumindo-se para os processos valor esperado nulo.

A estimação e ensaio por GPH é efectuada em GAUSS. Mais uma vez, $\omega_j = 0.1, \dots, T^{0.5}$. Na metodologia MLE, foi utilizada a estimação aproximada em domínio frequência de Fox-Taqqu, W , e a estimação exacta em domínio tempo, EML . Em ambos os casos, recorreu-se a módulos do software ITSM de Brockwell e Davis: Longmem para W , e ExactML para



EML⁴. A selecção do modelo ARFIMA(p, d, q),

$$\phi(L)(1-L)^d X_t = \theta(L)\varepsilon_t, \text{ com } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2), \quad (5.2)$$

resulta da minimização do critério AIC. Uma justificação para a escolha deste critério pode resultar da suposição de que os processos ARFIMA encontrados, e que não são ruídos fraccionários, são a melhor representação dos desconhecidos DGP.

A estimação MLE dos parâmetros do modelo ARFIMA é realizada de uma forma simultânea. Os valores entre parêntesis indicam: no quadro 5.7, os respectivos valores p ; no quadro 5.8, o desvio padrão das estimativas.

Os rácios- t reportam a dois ensaios distintos: o primeiro, H_a0 , ensaia a não cointegração fraccionária ($d = 1$) contra a alternativa unilateral esquerda de existência de cointegração fraccionária ($d < 1$); o segundo, H_b0 , testa a hipótese nula de uma representação ARMA estacionária e invertível, contra a alternativa bilateral de um modelo ARIMA ou ARFIMA ($d \neq 0$).

Para o primeiro ensaio, H_a0 , os valores entre parêntesis indicam os p -value (o primeiro, para a distribuição obtida por simulação e o segundo assumindo-se a hipótese de normalidade para a distribuição). Níveis de significância dos rácios- t são indicados por * a 10%, ** a 5% e *** a 2.5%, mediante a distribuição por simulação, indicada na secção anterior.

As figuras 5.6 e 5.7 ilustram as funções autocovariâncias teóricas e empíricas para as representações ARFIMA das séries residuais.

⁴Na estimação EML, gaussiana, o algoritmo foi criado pelos autores do software mas com as autocovariâncias calculadas pelo método de Sowell.

Quadro 5.7: Resultados da cointegração fraccionária.

	$H_{a0} : d = 1$		$H_{b0} : d = 0$	$H_{a0} : d = 1$		$H_{b0} : d = 0$	d_{EML}
	d_{GPH}	$t - stat$	$t - stat$	d_{11}	$t - stat$	$t - stat$	
$\hat{\varepsilon}_t^{n.uk}$	0.66	-1.96*	3.82***	0.782	-2.9***	10.41***	0.74
		(0.05; 0.1)			(0.01; 0.025)		
		(0.025)			(0)		
$\hat{\varepsilon}_t^{n.usa}$	0.66	-1.04	2.02**	0.669	-3.99***	8.07***	0.578
		(> 30; 0.15)			(0, 0)		

Quadro 5.8: Representação ARFIMA(p, d, q) dos resíduos de cointegração.

		W				EML			
		d	ϕ	θ	σ^2	d	ϕ	θ	σ^2
$\hat{\varepsilon}_t^{n.uk}$	(1, d , 1)	0.782	-0.618	0.852	0.012	0.74	-0.587	0.85	0.012
		(0.0751)	(0.0724)	(0.0619)					
$\hat{\varepsilon}_t^{n.usa}$	(1, d , 0)	0.669	0.443	.	0.012	0.578	0.503		0.012
		(0.0829)	(0.0957)						

Figura 5-6: Função autocovariância teórica e empírica de $\hat{\varepsilon}_t^{n.uk}$.

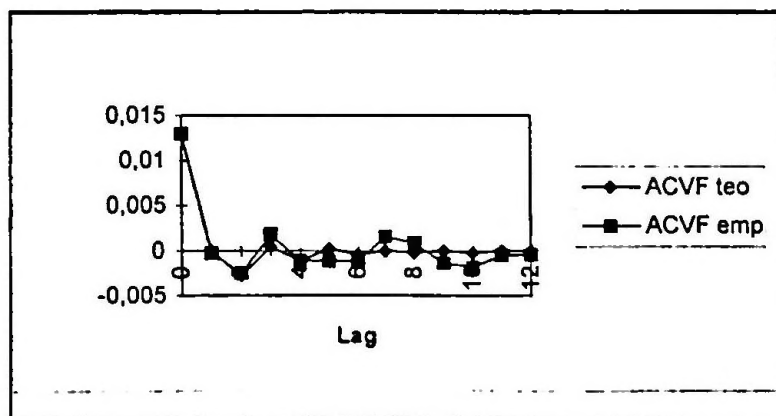
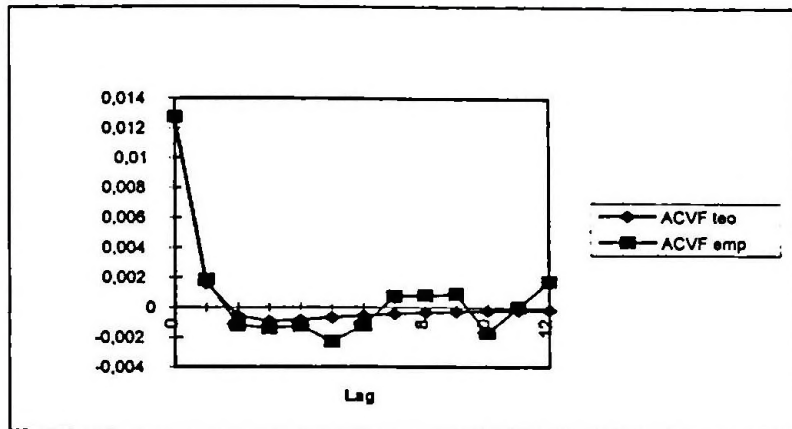


Figura 5-7: Função autocovariância teórica e empírica de $\hat{e}_t^{n,usa}$.



Como se constata, as estimativas fraccionárias são menores que a unidade.

Por sua vez, os ensaios à não cointegração fraccionária, $H_0 : d = 1$, evidenciam resultados contraditórios para os métodos GPH e MLE. Enquanto que a inferência realizada por MLE sustenta a presença de cointegração fraccionária, em termos latos, entre as variáveis taxa de câmbio e índice de preços relativos, o ensaio por GPH não permite rejeitar a hipótese de não cointegração. Para este último método, a evidência de não cointegração fraccionária é reduzida para o caso bilateral entre Portugal e a Inglaterra. Concluindo, a cointegração fraccionária não permite admitir de uma forma inequívoca que os dados sustentem a hipótese de que a economia portuguesa tem mantido uma certa paridade nos poderes de compra relativamente às economias inglesa e dos E.U.A..

Observe-se que, pelo estudo efectuado à potência dos testes, o teste MLE revelou-se mais potente que o teste GPH para $d < 0.85$ e que admite-se a existência de uma mais eficiente dimensão espectral para a regressão de teste GPH.

Da construção de intervalos de confiança, a 95%, para a ordem de integração, obtiveram-se os seguintes resultados: para $\hat{e}_t^{n,uk}$, $d_{GPH} \in [0.327; 0.993]$; para $\hat{e}_t^{n,usa}$, $d_{GPH} \in [0.02; 1.3]$.

Do ensaio $H_0 : d = 0$, é possível concluir que os resíduos do modelo de cointegração não admitem uma representação ARMA, accitando-se por isso que estes podem ser representados como um processo fraccionário.

Em termos comparativos, e apenas com base nas estimativas e ensaios a d por máxima

verossimilhança, parece verificar-se que a economia portuguesa apresenta mais evidências de paridade com a economia dos E.U.A. do que com a da Inglaterra (ao contrário dos métodos GPH e AEG). No entanto, a análise do cronograma, da FAC e do espectro das séries residuais questiona esta última evidência: a série residual $\hat{e}_t^{n,uk}$ parece ter um comportamento mais errático, o decaimento da FAC é mais rápido e as frequências em torno da origem têm um menor peso. A explicação para esta aparente contradição pode resultar da representação ARFIMA das séries residuais: é que apesar de $\hat{e}_t^{n,usa}$ ter uma estimativa inferior para a ordem de integração, o parâmetro associado à componente autoregressiva é positivo e relativamente elevado (no caso da Inglaterra, ϕ é negativo).

As qualidades do estimador MLE, em domínio frequência, pode ser observado pelas semelhantes estimativas dos modelos ARFIMA pelos métodos de Fox-Taqqu e de Sowell. Considerando as melhores qualidades estatísticas do estimador de Sowell, em amostras finitas com μ nulo, os valores mais próximos de 0.5 apresentados por este estimador podem corroborar as evidências de cointegração fraccionária.

5.6 Análise Univariada da PPP

A paridade dos poderes de compra também pode ser estudada, num âmbito univariado, pela taxa de câmbio real, S_t^r , $t = 1, \dots, T$.

A análise da paridade pela taxa de câmbio real resulta da imposição das condições de homogeneidade e nulidade (além da simetria) no modelo de cointegração que inclui as variáveis preços e taxa de câmbio nominal. Na paridade absoluta, $\beta = 1$ e $\alpha = 0$. Num conceito de paridade menos restrito, $\beta = 1$ e $\alpha \neq 0$, resultando que $E(s_t^r) = \alpha$ quando $E(e_t) = 0$. Por outro lado, e sendo economicamente mais plausível que a taxa de câmbio real logaritmizada flutue em torno de um valor não nulo, a paridade é garantida quando as propriedades estatísticas desta variável são idênticas às dos resíduos do modelo de cointegração: revertibilidade para o nível ou estacionaridade. Nestas condições, s_t^r pode ser uma "proxy" dos resíduos do modelo de cointegração.

Reconsidere-se os seguintes resultados:

$E(s_t^r)$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
$s_t^{r,\mathcal{L}} = 2.05$	4.78	1.06
$s_t^{r,\mathcal{S}} = 1.46$	3.3	1.05

Tal como foi referido e discutido em secções anteriores, o valor para β encontra-se próximo da unidade enquanto que α regista um valor distante da nulidade. O facto da estimativa da constante ser aproximadamente o dobro do nível médio da série, pode ser resultante do enviesamento do estimador OLS ou da não verificação exacta da hipótese de homogeneidade (o valor esperado dos resíduos é nulo). Tal como foi observado por Taylor (1988), a rejeição da homogeneidade pode ser resultado da má "proxy" utilizada⁵ para representar a série teórica dos preços.

Na perspectiva dos processos serem integrados de ordem inteira, zero ou um, a paridade dos poderes de compra é testada pela taxa de câmbio real através de um teste de raízes unitárias ADF. Sob a hipótese nula de que o processo é $I(1)$, a paridade é rejeitada. Caso contrário, $s_t^{r,f} \sim I(0)$, admite-se a paridade, contrariando as conclusões tiradas pela cointegração inteira.

Numa abordagem generalizada, a PPP é aceite se a série cronológica for $I(d)$, $d < 1$. A estimação e a inferência é efectuada mediante os métodos GPH e MLE.

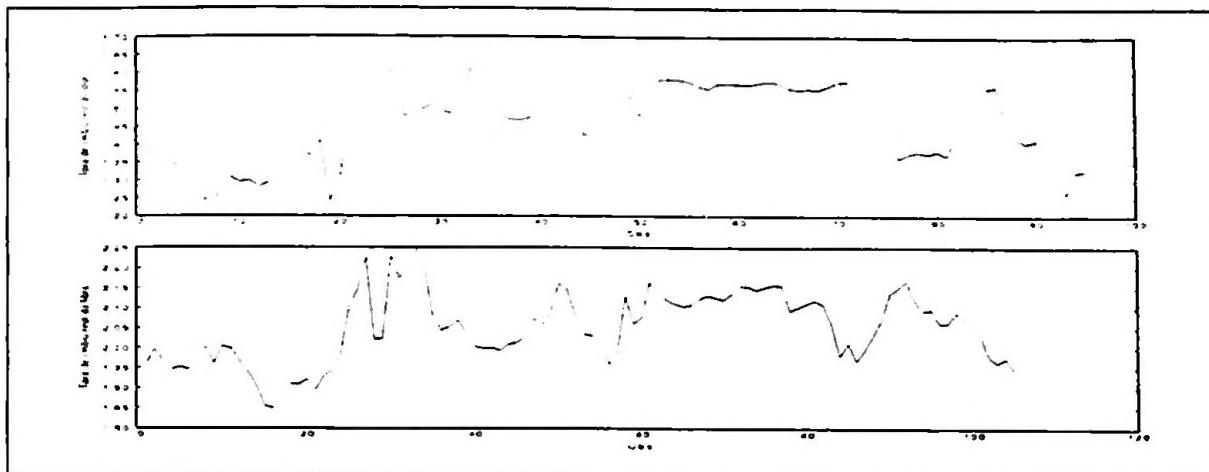
As figuras 5.8 representam as séries cronológicas das taxas de câmbio reais da libra, $s_t^{\mathcal{L}}$, e do dólar, $s_t^{\mathcal{S}}$, (expressas em logaritmos). As figuras 5.9 e 5.10 ilustram o periodograma e a FAC, respectivamente.

5.6.1 Taxa de Câmbio Real como um Processo ARIMA

Os resultados obtidos para o ensaio de raízes unitárias sobre as taxas de câmbio reais encontram-se resumidos no quadro 5.9. Entre parêntesis indicam-se os respectivos p -values.

⁵Índices de preços observados.

Figura 5-8: Cronograma das taxas de câmbio reais - a) Taxa de câmbio real da libra (em baixo), b) Taxa de câmbio real do dólar (em cima).



Os procedimentos computacionais são semelhantes aos apresentados nas secções 5.2.1. Salienta-se que nas regressões de teste, apenas a constante foi estatisticamente significativa; as estatísticas *h*-Durbin, DW ($dU = 1.694$, para 5% de significância) e BG não são estatisticamente significativas; a estatística DF, tabelada em Mackinnon (1991), para $s_t^{r,\pounds}$ é significativa a 10%, indicada por * (o valor crítico a 10% é de -2.58 e a 5% é de -2.89).

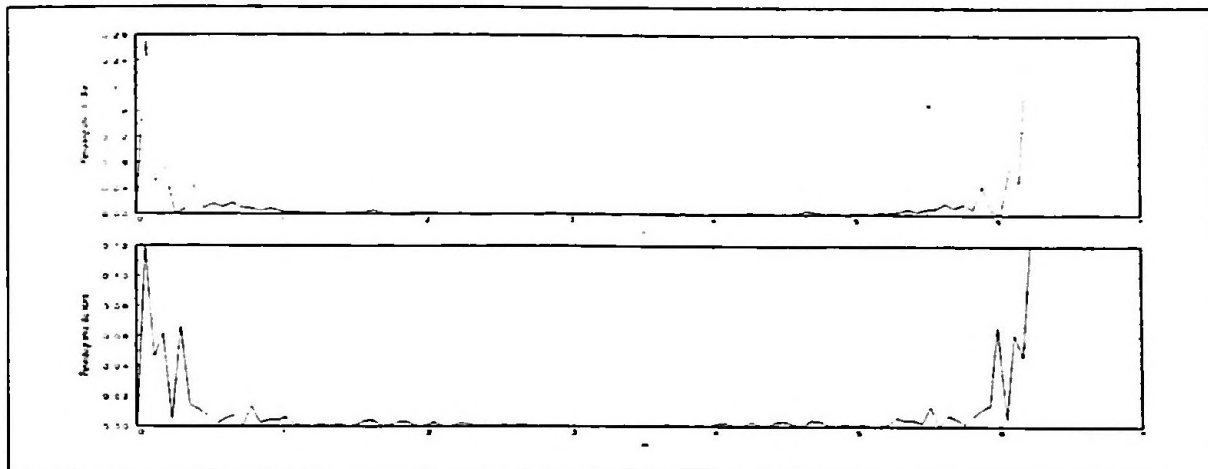
Quadro 5.9: Resultados dos testes de raízes unitárias sobre a taxa de câmbio real.

Série	ADF lag	Estat. DW e <i>h</i> -D.	BG(4)	Estat. ADF
$s_t^{r,\pounds}$	0	DW = 1.86	6.2(0.184)	-2.86*
$s_t^{r,\$}$	1	<i>h</i> = 0.51(0.61)	1.8(0.768)	-2.54

Os testes de raízes unitárias aplicados às taxas de câmbio reais confirmam as ilações tiradas pela cointegração inteira: não sendo possível rejeitar a não estacionaridade das taxas de câmbio (para a taxa de câmbio real da libra rejeita-se a 10%), a teoria da PPP não se verifica entre as economias em causa.

Comprovando os resultados obtidos pela cointegração, o nível da taxa de câmbio real do dólar apresenta maiores evidências de divergência com o tempo do que a sua congénere da libra. Apesar de as duas sucessões cronológicas supostamente se comportarem como $I(1)$.

Figura 5-9: Periodograma das taxas de câmbio reais - a) Taxa de câmbio real da libra (em baixo), b) Taxa de câmbio real do dólar (em cima).



esta hipótese não tem um apoio muito significativo por parte dos dados.

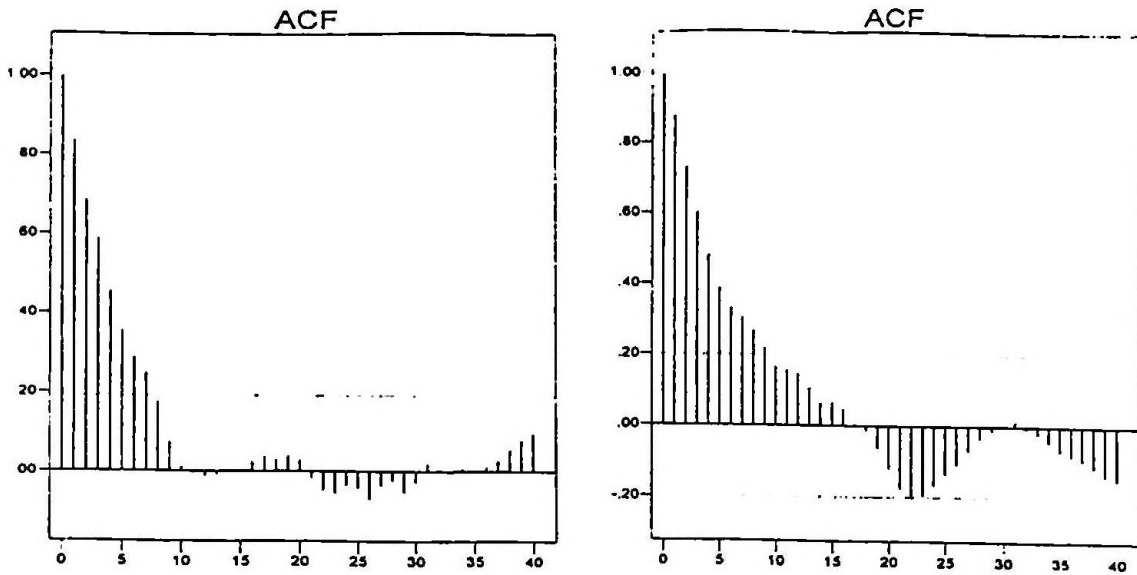
5.6.2 Taxa de Câmbio Real como um Processo ARFIMA

Os aspectos computacionais que levaram à construção dos resultados, referidos nos quadros 5.10, 5.11 e figuras 5.11 e 5.12, para a análise fraccionária das taxas de câmbio reais são praticamente idênticos aos indicados na secção 5.5. Distinguem-se os seguintes promenores: a representação ARFIMA é,

$$\phi(L)(1 - L)^d(X_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t,$$

sobre a qual se aplicou uma diferenciação simples; os valores entre parêntesis indicam o p -value assumindo-se a hipótese de normalidade (níveis de significância são indicados por * a 10%, ** a 5% e *** a 2.5%).

Figura 5-10: FAC das taxas de câmbio reais - a) Taxa de câmbio real da libra (à esquerda), b) Taxa de câmbio real do dólar (à direita).



Quadro 5.10: Resultados da paridade pela análise fraccionária das taxas de câmbio reais.

	$H_a0 : d = 1$ $H_b0 : d = 0$			$H_a0 : d = 1$ $H_b0 : d = 0$			d_{EML}
	d_{GPH}	$t - stat$	$t - stat$	d_W	$t - stat$	$t - stat$	
$s_t^{r,\mathcal{L}}$	0.655	-1.56*	2.96***	0.784	-2.466***	8.95***	0.748
		(0.06)			(0)		
$s_t^{r,\mathcal{S}}$	0.351	-1.2	0.65	0.672	-3.106***	6.36***	0.569
		(0.12)			(0)		

Quadro 5.11: Representação ARFIMA(p,d,q) das taxas de câmbio reais.

		μ	W				EML			
			d	ϕ	θ	σ^2	d	ϕ	θ	σ^2
$s_t^{r,\mathcal{L}}$	(1, d , 1)	2.05	0.784	-0.597	0.842	0.002	0.748	-0.574	0.845	0.002
			(0.0876)	(0.0701)	(0.0492)					
$s_t^{r,\mathcal{S}}$	(1, d , 0)	1.46	0.672	0.463		0.002	0.569	0.527		0.002
			(0.1056)	(0.2587)						

Figura 5-11: Função autocovariância teórica e empírica da taxa de câmbio real da libra.

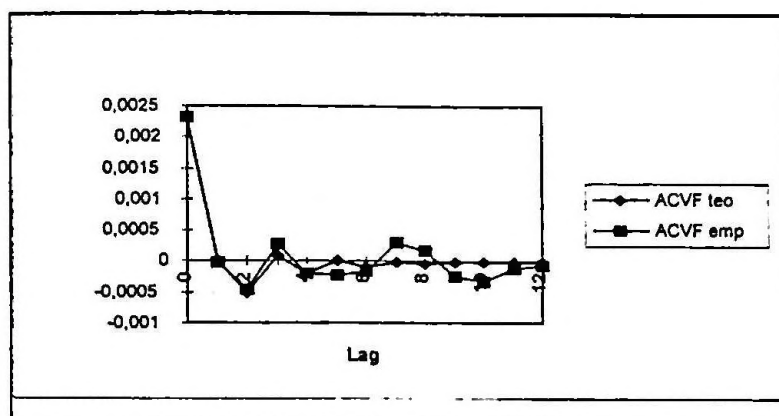
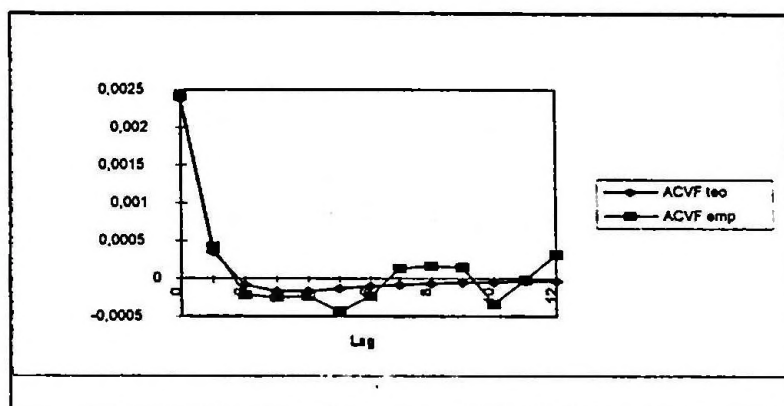


Figura 5-12: Função autocovariância teórica e empírica da taxa de câmbio real do dólar.



Confirma-se que, no essencial, o comportamento estatístico das taxas de câmbio reais é semelhante ao dos resíduos do modelo de cointegração (para cada caso bilateralmente). No geral, os resultados são um pouco ambíguos. Por GPH existem evidências de que os processos são $I(1)$, apesar de os dados fornecerem um menor suporte a esta hipótese comparativamente com os resultados obtidos pela cointegração fraccionária. Por MLE admite-se que as taxas de câmbio reais são revertíveis para o nível, aceitando-se, por isso, que a recuperação da paridade é garantida de uma forma relativamente lenta.

O método GPH pode ser questionado pelos resultados obtidos para a taxa de câmbio real do dólar. A aceitação da hipótese de representação ARMA "pode ser um pouco arriscada": o decaimento da FAC não muito pronunciado e o elevado valor do espectro na origem não são características de um processo estacionário. $I(0)$. Ao contrário do evidenciado pelo método

MLE, não se deve rejeitar totalmente a hipótese de que esta série pode ser representada por um processo de memória longa persistente.

Na estimação do modelo ARFIMA salienta-se as semelhanças nas estimativas por W e EML . Importa referir que no modelo para o dólar existem problemas de correlação entre d e ϕ . $\tau_{d,\phi} = -0.8$ (sobre a série diferenciada). Esta situação não é muito estranha para este tipo de método de estimação simultânea por MLE.

5.7 Síntese Conclusiva

O principal objectivo deste capítulo procura estudar se tem sido possível, e até que ponto, à economia portuguesa manter com as economias inglesa e dos E.U.A. uma relativa paridade dos poderes de compra. O horizonte temporal reporta ao presente século. Em termos teóricos procurou-se dar relevo a um conceito generalizado de cointegração, a cointegração fraccionária.

Numa perspectiva global, as evidências de cointegração entre as variáveis preços e taxa de câmbio são de natureza mista, isto é, pelas diferentes metodologias não é possível convergir claramente para uma determinada conclusão acerca da PPP. De uma forma mais específica, e em termos sintéticos, as principais ilações retiradas foram as seguintes:

(i) A cointegração inteira não permite validar o modelo teórico da paridade dos poderes de compra. Nesta perspectiva, não existem mecanismos que garantam a retoma da paridade do poder aquisitivo dos consumidores nacionais relativamente aos dos outros países. Esta abordagem apresenta no entanto algumas limitações.

(ii) Além de ser reconhecida a dificuldade dos testes de raízes unitárias em identificar uma ordem de integração fraccionária, para os resíduos do modelo de cointegração, foi mostrado que este tipo de ensaio possui pouca potência contra alternativas de processos fraccionariamente integrados. Para este tipo de alternativas, o teste MLE revelou-se o mais potente. Nestas condições, é apropriado estudar-se a PPP através da cointegração fraccionária.

(iii) A nova metodologia ensaiada - a cointegração fraccionária - apresenta resultados

contraditórios. Enquanto que o método GPH refuta a verificação da PPP, o método da máxima verosimilhança encontra indícios, embora que discutíveis, acerca do suporte dos dados à PPP. Por este método, admite-se que as variáveis encontram-se fracamente cointegradas porque os resíduos dos modelos de cointegração, sendo "level-reverting", garantem que não existe um agravamento assintótico de um nível de desvio ou erro da relação de paridade.

(iv) Em termos gerais, as conclusões obtidas pela análise da cointegração são semelhantes às da taxa de câmbio real. Numa análise simplista, admite-se que a taxa de câmbio real pode ser uma "proxy" válida dos resíduos do modelo de cointegração.

Capítulo 6

NOTAS CONCLUSIVAS

Mais do que procurar resumir o trabalho realizado ou enunciar conclusões definitivas, esta secção pretende reafirmar os principais objectivos atingidos e levantar algumas questões pertinentes para desenvolver em futuros trabalhos de investigação.

Realçando o valor teórico da hipótese da paridade dos poderes de compra, Mackinnon, citado em Taylor (1988), afirma que,

Until a more robust theory replaces it, I shall assume that purchasing power parity among tradeable goods tends to hold in the long run in the absence of overt impediments to trade among countries with convertible currencies.

Não se pretendendo fazer desta citação um mero dogma, a evidência deste modelo macro-económico foi econometricamente estudada. Verificou-se que apesar da cointegração inteira rejeitar a verificação da paridade dos poderes de compra da economia nacional, relativamente à inglesa e dos E.U.A., a metodologia de máxima verosimilhança na cointegração fraccionária encontra indícios de que a PPP pode ser aceite. Admite-se que os mecanismos de ajustamento das variáveis económicas tenham operado, neste século, de uma forma lenta para garantir o equilíbrio conjunto das mesmas. Este é um resultado a ter em conta pois indica que algo contraria a rejeição pura e simples do modelo económico internacional da PPP. De outra forma, este resultado é importante porque questiona, em alguma medida, o dito

comportamento explosivo das taxas de câmbio reais. A exclusiva análise através de testes de raízes unitárias tradicionais fomenta um certo "puzzle" em termos da teoria económica.

A cointegração fraccionária apresenta-se econometricamente mais viável comparativamente ao método tradicional de Engle e Granger porque, além de possuir uma maior potência de teste, resulta de um conceito generalizado que não restringe o teste de cointegração a um ensaio *knife-edged*.

O estudo da cointegração fraccionária mediante um período temporal relativamente reduzido torna-se particularmente problemático porque na teoria dos processos de memória longa muitos dos resultados são assintóticos. Por outro lado, a evidência de memória longa nos processos é retratada normalmente para um elevado número de observações.

A primeira e, ao mesmo tempo, principal linha de investigação que fica por aprofundar, resulta da identificação de um método eficiente para a estimação e inferência em modelos com mecanismo de correcção de erros para variáveis fraccionariamente cointegradas. Mostrou-se que o método OLS pode ser aplicado na estimação do modelo de cointegração, sob a hipótese de cointegração fraccionária. Para o MCE, este método não é certamente tão eficiente quanto a estimação sistémica de Johansen (1991) e Phillips (1991).

Em 1988, Sowell aplicou a estimação FIML (*full maximum likelihood*) para a cointegração fraccionária sistémica sob as hipóteses de normalidade dos erros e média dos processos conhecida. Mas tal como argumentam Cheung e Lai (1993), os pressupostos admitidos não são empiricamente apropriados e o ensaio de hipóteses não é aplicável porque o vector de cointegração não é identificado sob a hipótese de não cointegração.

Na observação das séries residuais e das taxas de câmbio reais é possível identificar um subperíodo amostral em que o comportamento das mesmas é relativamente estável. Este período corresponde sensivelmente de 1947 a 1973 e coincide com a aplicação do sistema de Bretton Woods de regime de taxas de câmbio fixas. Portanto, a análise da cointegração ou univariada das séries pode-se encontrar relacionada com os modelos de *regime switching*, ou seja, com quebras de estrutura.

Como a PPP é um modelo de longo prazo e o estudo da mesma em subperíodos conduziria

à perda de um elevado número de graus de liberdade, seria interessante estudar-se a paridade dos poderes de compra para a economia nacional num contexto de cointegração, admitindo-se a existência de alterações de estrutura. Gabriel (1997), por exemplo, apresenta evidência de alterações de estrutura nas relações aqui analisadas, num contexto de cointegração inteira. Aplicando-se neste contexto o conceito generalizado de cointegração, poderia ser interessante a exploração do tema da cointegração fraccionária, na presença de quebras de estrutura.

Igualmente interessante seria o estudo da paridade dos poderes de compra da economia portuguesa relativamente a outros países. Por outro lado, poder-se-ia verificar se a taxa de câmbio encontra-se fraccionariamente cointegrada com as variáveis produto, taxa de juro e moeda.

O estudo da cointegração entre as variáveis taxa de câmbio e índice de preços relativo pode ser realizado mediante outras metodologias. Sugere-se:

- o método de Johansen (1991);
- o teste à hipótese nula de cointegração¹ de Shin (1994);
- a aplicação de testes alternativos de raízes unitárias de Leybourne (1995) e Cheung e Lai (1995b);
- a abordagem Bayesiana de Sims (1988) e Koop, Ley, Osiewalski e Steel (1997);
- Granger e Swanson (1996) sobre alguns desenvolvimentos no estudo da cointegração.

Pensa-se que este trabalho constitui uma contribuição positiva para as referências existentes nestas temáticas. Entre outras, realça-se a discussão da verificação da PPP para a economia nacional e a construção de distribuições de teste à hipótese de não cointegração fraccionária.

¹Para a verificação do modelo, é mais relevante economicamente testar a cointegração das variáveis.

Bibliografia

- [1] Abuaf, N. e Jorion, P. (1990), Purchasing Power Parity in the Long Run, *Journal of Finance*, 45, pp. 157-174.
- [2] Baillie, R. T. (1996), Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics, *Journal of Econometrics*, 73, pp. 5-59.
- [3] Baillie, R. T. e Bollerslev, T. (1994), Cointegration, Fractional Cointegration and Exchange Rate Dynamics, *Journal of Finance*, 49, pp. 737-745.
- [4] Baillie, R. T. e Selover, D. D. (1987), Cointegration and Models of Exchange Rate Determination, *International Journal of Forecasting*, 3, pp. 43-51.
- [5] Banerjee, A., Dolado, J., Galbraith, J. W. e Hendry, D. F. (1993), *Co-Integration. Error-Correction, and the Econometric Analysis of Non-Stationary Data*, New York: Oxford University Press.
- [6] Boswijk, H. P. (1994), *Unit Roots and Cointegration: Statistical Analysis and Asymptotic Theory*, Amesterdão: Tinbergen Institute & University of Amsterdam.
- [7] Breidt, F. J., Crato, N. e de Lima, P. (1994), On the Detection and Estimation of Long Memory in Stochastic Volatility, *Journal of Econometrics*, a publicar.
- [8] Brockwell, P. J. e Davis, R. (1991), *Time Series: Theory and Methods, second edition*. New-York: Springer-Verlag.
- [9] Campbell, J. Y. e Mankiw, N. G. (1987). Are Output Fluctuations Transitory ?. *Quarterly Journal of Economics*, 102. pp. 857-880.



- [10] Cappuccio, N. e Lubian, D. (1997), Spurious Regressions Between $I(1)$ Processes with Long Memory Errors, *Journal of Time Series Analysis*, 18, pp. 341-354.
- [11] Cheung, Y.-W. (1993a), Long Memory in Foreign-Exchange Rates, *Journal of Business and Economic Statistics*, 11, pp. 93-101.
- [12] Cheung, Y.-W. (1993b), Tests for Fractional Integration: A Monte Carlo Investigation, *Journal of Time Series Analysis*, 14, pp. 331-345.
- [13] Cheung, Y.-W. e Diebold, F. X. (1994), On Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter of Fractionally-Integrated Noise with Unknown Mean, *Journal of Econometrics*, 62, pp. 301-316.
- [14] Cheung, Y.-W. e Lai, K. S. (1993), A Fractional Cointegration Analysis of Purchasing Power Parity, *Journal of Business and Economic Statistics*, 11, pp. 103-112.
- [15] Cheung, Y.-W. e Lai, K. S. (1995a), Lag Order and Critical Values of the Augmented Dickey-Fuller Test, *Journal of Business and Economic Statistics*, 13, pp. 277-280.
- [16] Cheung, Y.-W. e Lai, K. S. (1995b), Lag Order and Critical Values of a Modified Dickey-Fuller Test, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 57, 3, pp. 411-419.
- [17] Constâncio, V. (1995), Modelos de Economia Aberta, ISEG-Curso de Mestrado em Economia Monetária e Financeira, não publicado.
- [18] Copeland, L. (1994), Capítulo 11: The "News" Model and Exchange Rate Volatility e Capítulo 12: The Risk Premium, in: *Exchange Rates and International Finance*, Addison-Wesley.
- [19] Corbae, D. e Ouliaris, S. (1988), Cointegration and Tests of Purchasing Power Parity. *Review of Economics and Statistics*, 70, pp. 508-511.
- [20] Costa, A. A. e Crato, N. (1996), *A Fractional Integration Analysis of the Long-Run versus the Short-Run Behavior of the Portuguese Real Exchange Rates*, Documento n° 2-96, Lisboa: Cemapre, ISEG, UTL.

- [21] Crato, N. (1992), *Some Misspecification Problems in Long-Memory Time Series Models*, Tese de Doutorado, Delaware University
- [22] Crato, N. e Costa, A. A. (1993), Estacionaridade e Reversão nas Taxas de Câmbio Reais: o Caso Português, *Economica*, 3, pp. 321-337.
- [23] Crato, N. e Ray, B. K. (1996), Model Selection and Forecasting for Long-Range Dependent Processes, *Journal of Forecasting*, 15, pp. 107-125.
- [24] Crato, N. e Rothman, P. (1996), Measuring Hysteresis in Unemployment Rates with Long Memory Models, *submetido a Economic Letters*.
- [25] Davidson, R. e Mackinnon, J. G. (1993), *Estimation and Inference in Econometrics*, Oxford : Oxford University Press.
- [26] Dickey, D. A. e Fuller, W.A. (1979), Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root, *Journal of the American Statistical Association*, 74, pp. 427-431.
- [27] Diebold, F. X. e Nerlove, M. (1990), Unit Roots in Economic Time Series : A Selective Survey, in: Fomby TB e Rhodes GF jr (eds.), *Advances in econometrics 8: Cointegration, Spurious Regression and Unit Roots*, Greenwich CT, JAI Press
- [28] Diebold, F. X. e Rudebush, G. D. (1989), Long Memory and Persistence in Aggregate Output, *Journal of Monetary Economics*, 24, pp. 189-209.
- [29] Diebold, F. X. e Rudebusch, G. D. (1991), On the Power of Dickey-Fuller Tests Against Fractional Alternatives, *Economics Letters*, 35, pp. 155-160.
- [30] Diebold, F. X., Husted, S. e Rush, M. (1991), Real Exchange Rates Under the Gold Standard, *Journal of Political Economy*, 99, pp. 1252-1271.
- [31] Dornbush, R. (1988), Expectations and Exchange Rate Dynamics, in: *Exchange Rates and Inflation*, MIT Press.

- [32] Enders, W. (1988), ARIMA and Cointegration Tests of PPP Under Fixed and Flexible Exchange Rate Regimes, *Review of Economics and Statistics*, 70, pp. 504-508.
- [33] Enders, W. (1995), *Applied Econometric Time Series*, New York: John Wiley & Sons.
- [34] Engle, R. F. e Granger, C. W. J. (1987). Cointegration and Error Correction : Representation, Estimation and Testing, *Econometrica*, 55, pp. 251-276.
- [35] Fox, R. e Taqqu, M. (1986), Large-Sample Properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series, *Annals of Statistics*, 14, pp. 517-532.
- [36] Gabriel, V. J. (1997), *Testes de Alteração de Estrutura no Modelo de Regressão Linear*, Tese de Mestrado, ISEG, Universidade Técnica de Lisboa.
- [37] Geweke, J. e Porter-Hudak, S. (1983), The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models, *Journal of Time Series Analysis*, 4, pp. 221-238.
- [38] Granger, C. W. J. (1966), The Typical Spectral Shape of an Economic Variable, *Econometrica*, 34, pp. 150-161.
- [39] Granger, C. W. J. (1980), Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models, *Journal of Econometrics*, 14, pp. 227-238.
- [40] Granger, C. W. J. (1981), Some Properties of Time Series Data and their Use in Econometric Model Specification, *Journal of Econometrics*, 16, pp. 121-130.
- [41] Granger, C. W. J. (1986), Developments in the Study of Cointegrated Economic Variables, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 48, pp. 213-228.
- [42] Granger, C. W. J. (1991), Introduction, in: Engle, R. F. e Granger, C. W. J. (ed.), *Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration*, Oxford: Oxford University Press.
- [43] Granger, C. W. J. e Joyeux, R. (1980). An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1, pp. 15-39.

- [44] Granger, C. W. J. e Newbold, P. (1974), Spurious Regressions in Econometrics, *Journal of Econometrics*, 2, pp. 111-120.
- [45] Granger, C. W. J. e Swanson, N. (1996), Future Developments in the Study of Cointegrated Variables, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 58. 3, pp. 537-553.
- [46] Greene, W. H. (1993), *Econometrics Analysis, second edition*, New York: Macmillan.
- [47] Hamilton, J. (1994), *Time Series Analysis*, New Jersey: Princeton University Press.
- [48] Hassler, U. e Wolters, J. (1994), On the Power of Unit Root Tests Against Fractional Alternatives, *Economics Letters*, 45, pp. 1-5.
- [49] Hassler, U. e Wolters, J. (1995), Long Memory in Inflation Rates: International Evidence, *Journal of Business and Economic Statistics*, 13, pp. 37-45.
- [50] Hendry, D. F. (1984), Monte Carlo Experimentation in Econometrics, in: Griliches, Z. e Intriligator, M. D. (ed.), *Handbook of Econometrics*, Vol.2, Amsterdam: North Holland.
- [51] Hendry, D. F. (1991), Econometric Modelling with Cointegrated Variables: an Overview, in: Engle, R. F. e Granger, C. W. J. (eds.), *Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration*, Oxford: Oxford University Press.
- [52] Herrndorf, N. (1984), A Functional Central Limit Theorem for Weakly Dependent Sequences of Random Variables, *Annals of Probability*, 12, pp. 141-153.
- [53] Hosking, J. R. M. (1981), Fractional Differencing, *Biometrika*, 68, pp. 165-176.
- [54] Johansen, S. (1991), Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models. *Econometrica*, 59, pp. 1551-1580.
- [55] Koop, G., Ley, E., Osiewalski, J. e Steel, M. F. J. (1997), Bayesian Analysis of Long Memory and Persistence using ARFIMA Models, *Journal of Econometrics*, 76, pp. 149-169.

- [56] Krugman, P. (1992), Exchange Rates in a Currency Band: a Sketch of the New Approach, in: Krugman, P. e Miller, M. (ed.), *Exchange Rate Targets and Currency Bands*, Cambridge University Press.
- [57] Leybourne, S. J. (1995), Testing for Unit Roots Using Forward and Reverse Dickey-Fuller Regressions, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 57, 4, pp. 559-571.
- [58] MacDonald, R. (1995), Long-Run Exchange Rate Modeling: A Survey of the Recent Evidence, *IMF Staff Papers*, 42, 3, pp. 437-489.
- [59] MacDonald, R. e Marsh, I. W. (1997), On Fundamentals and Exchange Rates: A Casselian Perspective, *Review of Economics and Statistics*, pp. 655-664.
- [60] MacDonald, R. e Taylor, M. P. (1992), Exchange Rate Economics: A Survey, *IMF Staff Papers*, 39, 1, pp. 1-57.
- [61] Mackinnon, J. G. (1991), Critical Values for Cointegration Tests, in: Engle, R. F. e Granger, C. W. J. (ed.), *Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration*, New York: Oxford University Press.
- [62] Mark, N. C. (1990), Real and Nominal Exchange Rates in the Long Run: an Empirical Investigation, *Journal of International Economics*, 28, pp. 115-136.
- [63] Mata, E. e Valério, N. (1994), *História Económica de Portugal - Uma Perspectiva Global*. Lisboa: Editorial Presença.
- [64] Muller, D. (1996), *Análise Espectral e Modelos não Lineares em Séries Temporais*. Lisboa: Cemapre, ISEG, UTL.
- [65] Muscatelli, V. A. e Hurn, S. (1995). Econometric Modelling using Cointegrated Time Series, in: Oxley, L. et al. (ed.), *Surveys of Econometrics*, Oxford: Blackwell.
- [66] Mills, T. C. (1995), Nonlinear Time Series Models in Economics, in: Oxley, L. et al. (ed.), *Surveys of Econometrics*, Oxford: Blackwell.

- [67] Nessén, M. (1996), Common Trends in Prices and Exchange Rates. Tests of Long-Run Purchasing Power Parity, *Empirical Economics*, 21, pp. 381-400.
- [68] Neves, J. C. (1994), *The Portuguese Economy: a Picture in Figures*, Lisboa: Universidade Católica Editora.
- [69] Pentecost, E. J. (1993), Capítulo 4: The Modern Monetary Approaches e Capítulo 7: The Portfolio Balance Approach, in: Elgar, E. (ed.), *Exchange Rate Dynamics: a Modern Analysis of Exchange Rate Theory and Evidence*, Londres.
- [70] Phillips, P. C. B. (1986), Understanding Spurious Regressions in Econometrics, *Journal of Econometrics*, 33, pp. 311-340.
- [71] Phillips, P. C. B. (1991), Optimal Inference in Cointegrated Systems, *Econometrica*, 59, pp. 283-306.
- [72] Ribeiro, C. S. (1996), *Raízes Unitárias e Cointegração: uma Introdução*, Documento nº 14-96, Lisboa: ISEG, UTL.
- [73] Siegel, J. J. (1992), The Real Rate of Interest from 1800-1990: A Study of the U.S. and the U.K., *Journal of Monetary Economics*, 53, pp. 165-188.
- [74] Sims, C. A. (1988), Bayesian Skepticism on Unit Root Econometrics, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, pp. 463-474.
- [75] Shin, Y. (1994), A Residual-Based Test of the Null of Cointegration Against the Alternative of No Cointegration, *Econometric Theory*, 10, pp. 91-115.
- [76] Sowell, F. (1990), The Fractional Unit Root Distribution, *Econometrica*, 58, pp. 495-505.
- [77] Sowell, F. (1992), Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated Time Series Models, *Journal of Econometrics*, 53, pp. 165-188.
- [78] Stock, J. H. (1987), Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Cointegration Vectors. *Econometrica*, 55, pp. 1035-1056.

- [79] Svensson, L. E. O. (1992), An Interpretation of Recent Research on Exchange Rate Target Zones, *Journal of Economic Perspectives*, 6, 4, pp. 119-144.
- [80] Taylor, M. P. (1988), An Empirical Examination of Long-Run Purchasing Power Parity Using Cointegration Techniques, *Applied Economics*, 20, pp. 1369-1381.
- [81] Watson, M. W. (1986), Univariate Detrending Methods with Stochastic Trends, *Journal of Monetary Economics*, 18, pp. 49-75.
- [82] Wu, P. e Crato, N. (1995), New Tests for Stationary and Parity Reversion: Evidence on New Zealand Real Exchange Rates, *Empirical Economics*, 20, pp. 599-613.
- [83] Yajima, Y. (1988), On Estimation of a Regression Model with Long-Memory Stationary Errors, *Annals of Statistics*, 16, pp. 791-807.

Apêndice A

SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Todos os processos de simulação foram programados em GAUSS. A técnica utilizada foi a de Monte Carlo.

A.1 Processos Cointegrados

Para ilustrar o comportamento de dois processos cointegrados, procedeu-se à simulação de $\{X_t\}, \{Y_t\}$ não estacionários (passeios aleatórios sem deriva), $C(1,1)$:

$$X_t, Y_t \sim I(1); e_t \sim I(0); Y_t = X_t + e_t$$

A programação realizada encontra-se no anexo B.1.

O procedimento *rwalk* tem o objectivo de simular um processo passeio aleatório sem deriva, e constitui uma adaptação de um programa construído pelo Prof. Luis Catela Nunes da Faculdade de Economia, da Universidade Nova de Lisboa.

A.2 Processos Independentes (Regressão Espúria)

Nesta situação, $\{X_t\}, \{Z_t\}$ são dois processos não estacionários (passeios aleatórios sem deriva). independentes:

$$X_t, Z_t \sim I(1); u_t \sim I(1); Z_t = X_t + u_t$$

Os procedimentos encontram-se em B.1.

A.3 Distribuições de Teste GPH e MLE

As distribuições assintóticas foram construídas sob a hipótese nula de dois processos $I(1)$, não cointegrados fraccionariamente. Cada processo possui 105 observações (dimensão da amostra empírica para a relação bilateral com a Inglaterra). Com o objectivo de ensaiar, sobre a série residual,

$H_0 : d = 1 \Rightarrow$ Não cointegração fraccionária

$H_1 : d < 1 \Rightarrow$ Cointegração fraccionária

procedeu-se à normalização da distribuição. Os percentis (nível de significância ou dimensão do teste) resultam das distribuições de teste,

$$\tau_{cf} = \frac{\hat{d} - 1}{\sigma_{\hat{d}}}, \text{ para } cf = GPH, MLE$$

Foram utilizadas 50000 réplicas.

Os procedimentos estão descritos nos anexos B.2, B.3 e B.4. A estimação GPH é realizada pelo procedimento *geweke* e considera a dimensão espectral $\omega_j, j = 0.1, \dots, I^{0.5}$. A estimação por máxima verosimilhança espectral (MLE) resulta do procedimento *mle_spectral_arfima*. A determinação dos percentis baseou-se no procedimento *perctile*.

Os procedimentos *geweke* e *mle_spectral_arfima* foram cedidos pelo Professor Pedro de Lima.

A.4 Potência dos Testes AEG, GPH e MLE, Contra Alternativas de $AR(1)$ Estacionário e *Ruído Fraccionário* Revertível para o Nível e para a Média (Estacionário)

O teste à cointegração corresponde ao ensaio enunciado no ponto anterior.

O sistema construído para dois processos $I(1)$, cointegrados, foi o seguinte:

$$\begin{cases} X_{1t} + X_{2t} = u_{1t} \\ X_{1t} + 2X_{2t} = u_{2t} \end{cases} \quad \text{com } (1-L)u_{1t} = \varepsilon_{1t} \text{ e } u_{2t} \text{ gerado alternativamente como um proces-}$$

so $AR(1)$, $(1 - \phi L)u_{2t} = \varepsilon_{2t}$ ou como um *Ruído Fraccionário*, $(1 - L)^d u_{2t} = \varepsilon_{2t}$. Os choques aleatórios, $\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t} \sim WN$, são independentes.

$X_{1t} + 2X_{2t} = u_{2t}$ é a relação de cointegração para $|\phi| < 1$ ou para $d < 1$ (cointegração fraccionária). Para $\phi = 1$ ou $d = 1$, as duas séries não se encontram cointegradas.

Cada processo tem 105 observações. Tal como foi recomendado por Cheung e Lai (1993), como X_{it} foram gerados para $u_{i0} = 0$, criaram-se 155 observações das quais se retiraram as primeiras 50.

Foram geradas 10000 réplicas. Para cada série residual u_{2t} , para $|\phi| < 1$ ou para $d < 1$, registou-se o valor observado para as estatísticas de teste τ' e τ_{cf} . A potência de teste correspondeu à percentagem de vezes que cada um dos ensaios AEG, GPH e MLE rejeitou a hipótese nula de não cointegração.

Para a amostra de 105 observações, consideraram-se os níveis de significância para os testes a 5% e 10%.

Os anexos B.5 (alternativa $AR(1)$) e B.6 (alternativa *Ruído Fraccionário*) correspondem ao teste GPH, B.7 e B.8 para o teste MLE e B.9 e B.10 para o teste AEG. Os mesmos apenas indicam um valor para ϕ e d .

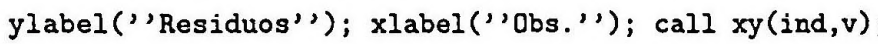
Os procedimentos *arma* e *arima* têm o objectivo de simular os processos $AR(1)$ e *Ruído Fraccionário*, respectivamente. O procedimento *adf_ls*, determina o valor observado para τ .

Apêndice B

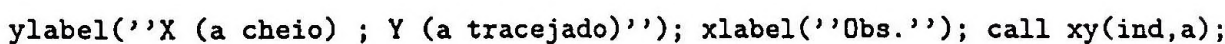
ROTINAS EM GAUSS

B.1 Processos Cointegrados e Independentes

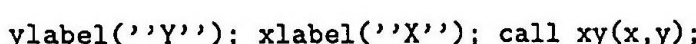
```
library pgraph; output file=tex2.out reset;
x=rwalk(99); z=rwalk(99); v=rndn(100,1);
_pnum=2; /** y numb horiz **/ _pdate=''; /** nao data **/
/** Coint. **/
y=x+v; ind=seqa(1,1,100); a=x~y;
begwind;
makewind(9,6.855/2,0,6.855/2,0);
makewind(9/2,6.855/2,0,0,0);
makewind(9/2,6.855/2,9/2,0,0);
setwind(1);
ylabel('Residuos'); xlabel('Obs.');
```



```
call xy(ind,v);
nextwind;
ylabel('X (a cheio) ; Y (a tracejado)'); xlabel('Obs.');
```



```
call xy(ind,a);
nextwind;
ylabel('Y'); xlabel('X');
```



```
call xy(x,y);
endwind;
```

```

/** Espur. **/
u=z-x; b=x~z;
begwind;
makewind(9,6.855/2,0,6.855/2,0);
makewind(9/2,6.855/2,0,0,0);
makewind(9/2,6.855/2,9/2,0,0);
setwind(1);
ylabel('Residuos'); xlabel('Obs.');
```

call xy(ind,u);

```

nextwind;
ylabel('X (a cheio) ; Z (a tracejado)'); xlabel('Obs.');
```

call xy(ind,b);

```

nextwind;
ylabel('Z'); xlabel('X');
```

call xy(x,z);

```

endwind;
```

B.2 Distribuição de Teste GPH

```

output file=tsim3.out reset; screen on;
nsimul=50000; i=1;
do while i<=nsimul;
x=rwalk(104); y=rwalk(104);
xx=ones(105,1)^x; xxi=inv(xx'*xx); beta=xxi*xx'*y; res=y-xx*beta;
{a,b}=geweke (res,0.1,rows(res)^0.5,1);
i=i+1;
y=a[1]; print y;
endo;
load z[]='tsim3.out'; z=sortc(z,1);
t=z-ones(nsimul,1); t=t./stdc(z); print t;
''valor esperado de t='' meanc(t); ''valor esperado de z='' meanc(z);
```

```

''varincia de z='' stdc(z)^2; ''desvio-padro de z='' stdc(z);
pc=perctile(t,0.005|0.01|0.025|0.05|0.1|0.2|0.3|0.4|0.5|0.6|0.7|
0.8|0.9|0.95 |0.975|0.99|0.995);
print pc;

```

B.3 Distribuição de Teste MLE

```

output file=tsim5.out reset; screen on;
nsimul=50000; i=1;
do while i<=nsimul;
u=rwalk(104); v=rwalk(104);
uu=ones(105,1)~u; uui=inv(uu'*uu); beta=uui*uu'*v; res=v-uu*beta;
{coef,ml,vcov,code}=mle_spectral_arfima(res,0,0,1,1);
i=i+1;
print coef;
endo;
load z[]=''tsim5.out''; z=sortc(z,1);
t=z-ones(nsimul,1); t=t./stdc(z); print t;
''valor esperado de t='' meanc(t); ''valor esperado de z='' meanc(z);
''varincia de z='' stdc(z)^2; ''desvio-padro de z='' stdc(z);
pc=perctile(t,0.005|0.01|0.025|0.05|0.1|0.2|0.3|0.4|0.5|0.6|0.7|
0.8|0.9|0.95 |0.975|0.99|0.995);
print pc;

```

B.4 Kurtosis e Skewness

```

output file=tsimks.out reset; screen on;
load gph[]=''tsim3k~1.txt'';
r1=rows(gph); print r1;

```

```

print meanc(gph); print stdc(gph);
g3=(gph-meanc(gph)); g3=g3.^3; g3=meanc(g3);
print ''sk gph '' g3;
g4=(gph-meanc(gph)); g4=g4.^4; g4=meanc(g4);
print ''4mom gph '' g4;
g=3*stdc(gph)^4; print ''3*std^4 gph '' g;
load mle[]=''tsim5k^1.txt'';
r2=rows(mle); print r2;
print meanc(mle); print stdc(mle);
m3=(mle-meanc(mle)); m3=m3.^3; m3=meanc(m3);
print ''sk mle '' m3;
m4=(mle-meanc(mle)); m4=m4.^4; m4=meanc(m4);
print ''4 mom mle '' m4;
m=3*stdc(mle)^4; print ''3*std^4 mle '' m;

```

B.5 Potência de Teste GPH contra Alternativa de AR(1)

```

output file=tsim6.out reset; screen on; nsimul=10000; i=1;
do while i<=nsimul;
u1=rwalk(154); u1=u1[51:155,1]; u2=arma(155,1,1,0.05,0,0,0); u2=u2[51:155,1];
x1=2*u1-u2; x2=u2-u1; res=x1+2*x2;
{a,b}=geweke(res,0.1,rows(res)^0.5,1);
st=a[1]/b[1]; t=(a[1]-1)/st; print t;
i=i+1; endo;
load z[]=''tsim6.out''; z=sortc(z,1);
vc5=counts(z,-2.33); vc10=counts(z,-1.902);
vc5=vc5/nsimul; print ''a 5% (-2.33), ''; print vc5;
vc10=vc10/nsimul; print ''a 10% (-1.902), ''; print vc10;

```

B.6 Potência de Teste GPH contra Alternativa de Ruído Fracionário

```
output file=tsim66.out reset; screen on; nsimul=10000; i=1;
do while i<=nsimul;
u1=rwalk(154); u1=u1[51:155,1]; u2=arima(155,1,1,0,0.05,0,0,0); u2=u2[51:155,1];
x1=2*u1-u2; x2=u2-u1; res=x1+2*x2;
{a,b}=geweke(res,0.1,rows(res)^0.5,1);
st=a[1]/b[1]; t=(a[1]-1)/st; print t;
i=i+1; endo;
load z[]='''tsim66.out''; z=sortc(z,1);
vc5=counts(z,-2.33); vc10=counts(z,-1.902);
vc5=vc5/nsimul; print ''a 5% (-2.33), ''; print vc5;
vc10=vc10/nsimul; print ''a 10% (-1.902), ''; print vc10;
```

B.7 Potência de Teste MLE contra Alternativa de AR(1)

```
output file=tsim7.out reset; screen on; nsimul=10000; i=1;
do while i<=nsimul;
u1=rwalk(154); u1=u1[51:155,1]; u2=arma(155,1,1,0.45,0,0,0); u2=u2[51:155,1];
x1=2*u1-u2; x2=u2-u1; res=x1+2*x2;
{beta,ml,cov,code}=mle_spectral_arfima(res,0,0,1,1);
t=(beta-1)/cov; print t;
i=i+1; endo;
load z[]='''tsim7.out''; z=sortc(z,1);
vc5=counts(z,-2.3); vc10=counts(z,-1.844);
vc5=vc5/nsimul; print ''a 5% (-2.3), ''; print vc5;
vc10=vc10/nsimul; print ''a 10% (-1.844), ''; print vc10;
```

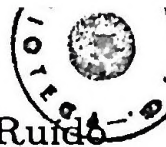


B.8 Potência de Teste MLE contra Alternativa de Ruído Fracionário

```
output file=tsim77.out reset; screen on; nsimul=10000; i=1;
do while i<=nsimul;
u1=rwalk(154); u1=u1[51:155,1]; u2=arima(155,1,1,0,0.45,0,0,0); u2=u2[51:155,1];
x1=2*u1-u2; x2=u2-u1; res=x1+2*x2;
{beta,ml,cov,code}=mle_spectral_arfima(res,0,0,1,1);
t=(beta-1)/cov; print t;
i=i+1; endo;
load z[]='''tsim77.out''; z=sortc(z,1);
vc5=counts(z,-2.3); vc10=counts(z,-1.844);
vc5=vc5/nsimul; print ''a 5% (-2.3), ''; print vc5;
vc10=vc10/nsimul; print ''a 10% (-1.844), ''; print vc10;
```

B.9 Potência de Teste AEG contra Alternativa de AR(1)

```
output file=tsim8.out reset; screen on; nsimul=10000; i=1;
do while i<=nsimul;
u1=rwalk(154); u1=u1[51:155,1]; u2=arma(155,1,1,0.45,0,0,0); u2=u2[51:155,1];
x1=2*u1-u2; x2=u2-u1; res=x1+2*x2;
{b,t,obs}=adf_ls(res,1,1);
print t[1,1];
i=i+1; endo;
load z[]='''tsim8.out''; z=sortc(z,1);
vc5=counts(z,-3.395); vc10=counts(z,-3.086);
vc5=vc5/nsimul; print ''a 5% (-3.395), ''; print vc5;
vc10=vc10/nsimul; print ''a 10% (-3.086), ''; print vc10;
```



B.10 Potência de Teste AEG contra Alternativa de Ruído

Fraccionário

```
output file=tsim88.out reset; screen on; nsimul=10000; i=1;
do while i<=nsimul;
u1=rwalk(154); u1=u1[51:155,1]; u2=arima(155,1,1,0,0.15,0,0,0); u2=u2[51:155,1];
x1=2*u1-u2; x2=u2-u1; res=x1+2*x2;
{b,t,obs}=adf_ls(res,1,1);
print t[1,1];
i=i+1; endo;
load z[]=''tsim88.out''; z=sortc(z,1);
vc5=counts(z,-3.395); vc10=counts(z,-3.086);
vc5=vc5/nsimul; print ''a 5% (-3.395), ''; print vc5;
vc10=vc10/nsimul; print ''a 10% (-3.086), ''; print vc10;
```