



**UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA**  
**INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO**

**Mestrado em Ciências Actuariárias**

**Aplicação do *Tail Conditional Expectation* à determinação do requisito  
de capital de uma Empresa de Seguros Não Vida**

**Ricardo Bruno Rogado Garcia**

**Orientação: Doutor Alfredo Duarte Egídio dos Reis**  
**Doutor João Luís Correia Duque**

**Júri:**

**Presidente: Doutor João Luís Correia Duque**

**Vogais: Doutor Manuel Leote Tavares Inglês Esquível**  
**Doutor Alfredo Duarte Egídio dos Reis**  
**Doutora Maria da Nazaré Rala Esparteiro Barroso**

**Junho/2004**

# APLICAÇÃO DO *TAIL CONDITIONAL EXPECTATION* À DETERMINAÇÃO DO REQUISITO DE CAPITAL DE UMA EMPRESA DE SEGUROS NÃO VIDA



Ricardo Bruno Rogado Garcia

Mestrado em: Ciências Actuarias

Orientadores: Professor Doutor Alfredo Duarte Egídio dos Reis

Professor Doutor João Luís Correia Duque

Provas concluídas em:

## Resumo

A questão da determinação do requisito de solvência das empresas de seguros assume uma importância primordial dada a natureza da actividade seguradora, a sua importância para a economia e o papel das seguradoras como investidores institucionais.

A presente dissertação pretende evidenciar que é possível formular um modelo de solvência que, através da medida de risco *Tail Conditional Expectation*, determine o requisito de solvência de uma empresa de seguros, que explore o Ramo Automóvel e que mantenha a sua actual estrutura de activos e responsabilidades, para o horizonte temporal de um ano.

O requisito de capital será calculado a partir da função de distribuição dos possíveis resultados futuros, que será gerada com recurso a simulação dos principais factores de risco que afectam a actividade seguradora, através da técnica de Monte Carlo, e que são susceptíveis de influenciarem as rubricas que determinam o valor de uma empresa de seguros.

Assim, é apresentada a medida de risco *Tail Conditional Expectation* e formulado o modelo de solvência, sendo para tal definidos os diversos factores de risco considerados, estudada a sua modelação individual e conjunta e apresentados os respectivos mecanismos de simulação. O modelo proposto é aplicado a uma seguradora não vida, calculando-se o seu requisito de capital e comparando-se este resultado com o capital próprio existente.

Palavras chave: modelo de solvência, *tail conditional expectation*, *value-at-risk*, factores de risco, simulação de Monte Carlo, distribuição dos resultados futuros.

# **APPLICATION OF THE TAIL CONDITIONAL EXPECTATION TO THE DETERMINATION OF THE CAPITAL REQUIREMENT OF A GENERAL INSURANCE COMPANY**

Ricardo Bruno Rogado Garcia

Master in: Actuarial Science

Advisors: Professor Doutor Alfredo Duarte Egídio dos Reis

Professor Doutor João Luís Correia Duque

Approved in:

## **Abstract**

Setting the solvency requirement of an insurance company is a major question, due to the nature of the insurance activity, its importance in the economy and the role played by insurance companies as institutional investors.

The present dissertation intends to emphasize that is possible to formulate a solvency model that calculates, applying the Tail Conditional Expectation risk measure, the solvency requirement of an insurance company that operates solely in the Automobile Branch, given that its present structure of assets and liabilities remains unchanged, for a one year time horizon.

The solvency requirement is calculated from the distribution of possible future values generated through Monte Carlo simulation of the main risk factors that affect the insurance activity and influence the assets and liabilities that determine the value of an insurance company.

First, we present the Tail Conditional Expectation risk measure. Second, formulate the solvency model, namely through the definition of risk factors involved, the explanation of the individual and joint behaviour risk factors modelling and the description of the simulation mechanisms considered. The proposed model is tested in a general insurance company, in particular, we calculate the capital requirement and compare the equity values.

**Keywords:** solvency model; tail conditional expectation, value-at-risk, risk factors, Monte Carlo simulation, future profit and loss distribution.

# Índice

<b>1. Introdução</b>	8
<b>2. <i>Value-at-Risk</i> e <i>Tail Conditional Expectation</i> como medidas de risco</b>	10
2.1. <i>Value-at-Risk</i>	10
2.2. <i>Tail Conditional Expectation</i>	10
2.3. Especificidades da actividade seguradora relativamente à aplicação das medidas de risco <i>Value-at-Risk</i> e <i>Tail Conditional Expectation</i>	11
<b>3. Modelo Teórico de Solvência</b>	12
3.1. Pressupostos base do modelo	12
3.2. Modelação dos riscos individuais	14
3.2.1. Risco de Preço	14
3.2.1.1. Descrição do risco	14
3.2.1.2. Mecanismo de simulação	18
3.2.2. Risco Cambial	19
3.2.3. Risco de Taxa de Juro	20
3.2.3.1. Descrição do risco	20
3.2.3.2. Mecanismo de simulação	23
3.2.4. Risco de Crédito	24
3.2.4.1. Descrição do risco	24
3.2.4.2. Mecanismo de simulação	29
3.2.5. Risco de Desenvolvimento Adverso de Reservas	30



3.2.5.1. Descrição do risco	30
3.2.5.2. Mecanismo de simulação	40
3.2.6. Risco de Sinistralidade Futura	42
3.2.6.1. Descrição do risco	42
3.2.6.2. Mecanismo de simulação	44
3.3. Agregação dos Riscos	45
3.3.1. Considerações gerais	45
3.3.2. Coeficiente de correlação linear	46
<b>4. Aplicação Prática</b>	<b>47</b>
4.1. Modelo utilizado	47
4.2. Resultados	56
<b>5. Conclusão</b>	<b>63</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>66</b>

**Anexo 1: Histogramas e funções de distribuição empírica dos resultados simulados**

**Anexo 2: Cálculos e testes efectuados**

**Anexo 3: Código dos programas utilizados**

## Lista de Quadros

Quadro 1 – Exemplo de exposição ao risco de diversas rubricas susceptíveis de influenciarem o valor da Seguradora	12
Quadro 2 – Exemplo de matriz de probabilidades de transição para um crédito	28
Quadro 3 – Exemplo de matriz de probabilidades de transição para três créditos	29
Quadro 4 – Exemplo de matriz de correlação entre três créditos	29
Quadro 5 – Exemplo de simulação de novos <i>ratings</i> para três créditos	29
Quadro 6 – Matriz de dados	31
Quadro 7 – Matriz de dados a preços constantes do ano de pagamento $N$	32
Quadro 8 – Estimativas dos montantes incrementais futuros a preços constantes do ano de pagamento $N$	33
Quadro 9 – Estimativas dos parâmetros dos índices accionistas	56
Quadro 10 – Estimativas dos <i>betas</i> individuais e da carteira	56
Quadro 11 – Teste da nulidade do coeficiente de correlação entre o índice accionista e a taxa de juro de curto prazo	57
Quadro 12 – Resultados risco de preço	57
Quadro 13 – <i>Rating</i> e duração das sub-carteiras obrigacionistas	57
Quadro 14 – Estimativas dos parâmetros do modelo de taxa de juro	58
Quadro 15 – Matriz de variância-covariância das rendibilidades dos activos dos emitentes	58
Quadro 16 – Teste da nulidade do coeficiente de correlação de Pearson	58
Quadro 17 – Resultados risco de taxa de juro e risco de crédito	58
Quadro 18 – Estatísticas obtidas do modelo de Poisson com sobre-dispersão	59
Quadro 19 – Estimativas dos parâmetros do modelo de Poisson com sobre-dispersão	59
Quadro 20 – Teste da <i>deviance</i> à escala	60
Quadro 21 – Resultados desenvolvimento da provisão para sinistros	60
Quadro 22 – Distribuições candidatas à modelação do número de sinistros por apólice	60
Quadro 23 – Distribuição do número de sinistros da carteira	60

Quadro 24 – Distribuições candidatas à modelação dos montantes individuais dos sinistros	61
Quadro 25 – Resultados do teste de Kolmogorov-Smirnov	61
Quadro 26 – Resultados risco de sinistralidade futura	61
Quadro 27 – Resultados globais da Seguradora	62

## **Agradecimentos**

Aos Professores Alfredo Duarte Egídio dos Reis e João Luís Correia Duque pela orientação e aconselhamento prestados, imprescindíveis para a concretização da presente dissertação.

Ao Conselho Directivo do Instituto de Seguros de Portugal, Dr. António Egídio dos Reis e Dr.<sup>a</sup> Maria Amélia Vicente por me terem proporcionado a frequência deste Mestrado.

Ao Conselho de Administração da Empresa de Seguros, cujos dados foram testados na parte prática deste documento, pela autorização e fornecimento dos mesmos, que em muito enriqueceram o trabalho desenvolvido. Ao quadro responsável pela disponibilização dos referidos dados, pela celeridade no seu fornecimento e esclarecimentos prestados.

Ao Dr. Hugo Borginho pelos conselhos, esclarecimentos prestados e referências bibliográficas fornecidas.

Ao Dr. Jeferino dos Santos, Dr. Gabriel Bernardino, Dr. Francisco Alves, Dr.<sup>a</sup> Filipa Ramos e Dr.<sup>a</sup> Gabriela Antunes, pelos esclarecimentos prestados e referências bibliográficas fornecidas.

Aos meus pais e amigos pelo apoio e compreensão.

## 1. Introdução

O sector segurador sofreu na última década profundas transformações em consequência da globalização dos mercados e que se traduziram no aumento da concorrência e no estreitamento das margens comerciais. A redução dos resultados técnicos foi compensada, em meados da década, pelo crescimento dos resultados provenientes da carteira de investimentos das empresas de seguros, tendo-se assistido à alteração da sua composição tipicamente conservadora, designadamente, o aumento da exposição aos mercados accionistas e de derivados.

A situação alterou-se, contudo, nos últimos anos em virtude da prolongada crise dos mercados accionistas, dos baixos níveis das taxas de juro na zona Euro, do abrandamento do crescimento económico e do agravamento das condições do resseguro. Todo este contexto desfavorável conduziu à degradação dos resultados do sector e à consequente descapitalização das empresas de seguros.

A determinação do capital necessário de forma a assegurar com elevada probabilidade a persecução das operações de uma empresa de seguros, mesmo em condições adversas, trata-se de uma questão fulcral, dado o papel das seguradoras na actividade económica e a importância das empresas de seguros como investidores institucionais.

O actual sistema de solvência Europeu não é suficientemente sensível aos diversos factores de risco que influenciam o valor das empresas de seguros, focando-se essencialmente, na questão da suficiência dos prémios e no montante dos custos dos sinistros. Actualmente, e em linha com o sistema de solvência em vigor para o sector bancário, estabelecido pelo acordo de Basileia, encontra-se em desenvolvimento um projecto de revisão do sistema de solvência para as empresas de seguros, denominado Solvência II. Este novo sistema dá particular ênfase ao desenvolvimento de modelos internos que capturem e quantifiquem os principais factores de risco que afectam as empresas de seguros.

O objectivo da presente dissertação é evidenciar que é possível a formulação de um modelo que determine o requisito de capital necessário de modo a que uma empresa de seguros, que explore exclusivamente o Ramo Automóvel e que mantenha a sua actual estrutura de activos e responsabilidades, permaneça solvente, com elevada probabilidade, durante o próximo exercício económico.

O requisito de capital corresponderá ao *Tail Conditional Expectation* da função de distribuição dos resultados futuros. Esta função será determinada com recurso à simulação de Monte Carlo da evolução dos factores de risco susceptíveis de influenciarem as rubricas passíveis de alterarem o valor da empresa de seguros.

O trabalho realizado efectua a conjugação e aplicação de metodologias existentes a um caso concreto, pelo que, não serão realizadas demonstrações de resultados, indicando-se, contudo, as fontes bibliográficas onde estes podem ser consultados. A presente dissertação não pretende ser um estudo exaustivo sobre a modelação individual e agregada dos diversos factores de risco que influenciam a actividade seguradora, sendo, no entanto, sempre que entendido oportuno, apresentadas soluções alternativas às escolhidas.

O corpo da dissertação encontra-se dividido em três capítulos. No primeiro capítulo serão apresentadas as medidas de risco *Value-at-Risk* e *Tail Conditional Expectation*, enunciadas as suas vantagens e desvantagens e expostas as especificidades que a actividade seguradora coloca relativamente à aplicação destas medidas de risco.

No segundo capítulo é formulado o modelo de solvência proposto, para tal, são apresentados os diversos factores de risco individuais considerados, a sua modelação e mecanismos de simulação, e estudada a questão da interdependência entre os factores de risco.

No último capítulo é aplicado o modelo formulado a uma seguradora não vida, determinando-se o requisito de capital para o horizonte temporal de um ano e comparando-se este resultado com o capital próprio existente.



## 2. Value-at-Risk e Tail Conditional Expectation como medidas de risco

### 2.1. Value-at-Risk

O *Value-at-Risk* (*VaR*) pode ser definido como o valor mínimo de uma variação patrimonial estimada verificada após determinado período de tempo, ocorrendo em circunstâncias normais de funcionamento e com um determinado nível de confiança. Fornece, portanto, uma estimativa para o valor mínimo que pode ocorrer dentro de todos os cenários possíveis, com exceção de uma percentagem específica de cenários.

Matematicamente, o *VaR* pode ser definido como um quantil de ordem  $\alpha$ , de uma distribuição de probabilidades, tal que

$$\Pr(X \leq VaR_\alpha) \geq \alpha \Leftrightarrow VaR_\alpha(X) = Q_X(\alpha),$$

onde  $X$  é a variável aleatória que representa o resultado futuro da seguradora e  $Q_X(\alpha) = \text{Inf}[x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \alpha]$ , com  $F_X(x)$  denotando a função de distribuição de  $X$ . Note-se que, de acordo com a definição acima apresentada, o *VaR* será geralmente um número negativo, na medida em que a aba esquerda da distribuição geralmente assumirá valores negativos (perdas económicas-financeiras).

O *VaR* como medida de risco apresenta diversas vantagens, designadamente: é um conceito facilmente assimilável; fornece um valor concreto sendo facilmente comparável; é uma ferramenta eficaz para a compreensão do risco global das empresas, dado que permite levar em consideração os riscos dos activos e das responsabilidades, bem como as interligações entre ambos.

O *VaR* apresenta, contudo, algumas desvantagens: não é uma medida de risco coerente segundo a definição proposta por Artzner (1999), porque só em determinadas circunstâncias é que o *VaR* satisfaz o requisito da sub-aditividade, pelo que a utilização do *VaR* como medida de risco poderá motivar a separação de riscos de forma a diminuir o *VaR* global; existem situações em que o *VaR* poderá ser inferior ao montante da perda esperada, tal como exemplificado em Wirch (1999); o *VaR* não diferencia riscos/carteiras de riscos com comportamentos distintos na cauda.

### 2.2. Tail Conditional Expectation

O *Tail Conditional Expectation* (*TCE*) representa o valor esperado condicionado da variação patrimonial estudada para a determinação do *VaR*. O seu valor será, naturalmente, inferior ao *VaR*. Em termos analíticos,  $TCE_\alpha(X) = E[X \mid X < VaR_\alpha(X)]$ .

O *TCE* possui diversas vantagens em relação ao *VaR*, nomeadamente, satisfaz todos os axiomas de coerência enunciados em Artzner (1999); fornece uma estimativa do montante médio da perda superior ao *VaR*; é uma medida de risco mais conservadora que o *VaR*; o *TCE* é coerente com a teoria económica da decisão, designadamente, com a curva de utilidade de investidores avessos ao risco ( $U' > 0$  e  $U'' < 0$ ), o *VaR* é menos

restritivo, sendo uma medida adequada para qualquer investidor com  $U' > 0$ , tal como exposto em Schröder (1996).

Em virtude das vantagens do *TCE* em relação ao *VaR*, será esta a medida escolhida para efeitos da determinação do requisito de capital. Contudo, dado que o *VaR* é, actualmente, a medida mais utilizada e visto que para a determinação do *TCE* é necessário o cálculo do *VaR* para o nível de significância desejado, serão apresentadas ambas as medidas para efeitos comparativos.

### 2.3. Especificidades da actividade seguradora relativamente à aplicação das medidas de risco *Value-at-Risk* e *Tail Conditional Expectation*

A actividade seguradora coloca alguns desafios no cálculo do *VaR* e do *TCE*, designadamente, em contraposição à actividade bancária. Deverão ser tidos em consideração os seguintes aspectos na determinação do *VaR* e do *TCE*:

- os investimentos das seguradoras não são mantidos com a finalidade de *trading*, mas sim, no contexto de assegurar a cobertura das responsabilidades, tendo que ser analisados no contexto da gestão activo-passivo;
- as responsabilidades das seguradoras são de médio e longo prazo, pelo que, o horizonte temporal de análise que é tipicamente de curto prazo na actividade bancária, necessita de ser expandido;
- existe o risco de modificações de adaptação, visto que, quando a análise decorre num período temporal mais longo, os activos e as responsabilidades da seguradoras dificilmente permanecerão estáticas, sendo alteradas em resultado de tomadas de decisões explícitas ou implícitas, impulsionadas pela mudança de contexto, tal como mencionado em Panning (1999). Em cenários extremos, os decisores dificilmente adoptarão uma postura passiva, procurando ao invés, alterar a sua exposição ao risco, designadamente, ao nível dos riscos dos activos, dado que a sua estrutura é mais facilmente modificável e
- existe falta de consenso acerca do justo valor das responsabilidades. As responsabilidades são calculadas mediante o uso de técnicas actuariais, que geralmente não levam em consideração as taxas de juro de mercado. As responsabilidades são difíceis de transaccionar, não existindo, excepto no caso de riscos muito específicos, um mercado líquido.

### 3. Modelo Teórico de Solvência

#### 3.1 Pressupostos base do modelo

Para efeitos de formulação do modelo é necessário identificarem-se os principais activos, responsabilidades e operações que criam incerteza acerca do valor económico da empresa de seguros. A incerteza, para efeitos do presente modelo, será medida através do impacto a nível dos resultados da seguradora.

Os principais activos susceptíveis de influenciarem o valor de uma seguradora que explore os ramos não vida são os seguintes: acções e partes de capital; obrigações e outros activos de rendimento fixo; unidades de participação em fundos de investimento; derivados; depósitos bancários; empréstimos hipotecários e imóveis e créditos sobre tomadores de seguros e resseguradores.

Saliente-se que actualmente, em Portugal, os investimentos financeiros na actividade seguradora são avaliados ao valor de mercado, pelo que, as alterações do seu valor influenciam directamente a situação líquida das seguradoras.

No que concerne às responsabilidades das seguradoras Não Vida, as principais são as denominadas provisões técnicas, a saber: provisão para sinistros; provisão para prémios não adquiridos; provisão para insuficiência de prémios e provisão para desvios de sinistralidade.

Em relação às principais operações levadas a cabo pelas seguradoras, estas prendem-se com a subscrição de contratos de seguro e com a obrigação de regularizar os sinistros ocorridos relativos a esses contratos, durante o período de vigência destes.

Na actividade seguradora existem diversos tipos de riscos que afectam os activos, as responsabilidades ou ambos, designadamente: risco de preço; risco cambial; risco de taxa de juro; risco de crédito; risco de desenvolvimento adverso das reservas e risco de insuficiência dos prémios.

Existem outros tipos de risco, que não obstante a sua potencial relevância, não serão abordados na presente dissertação, a saber: riscos catastróficos; risco de liquidez; risco operacional; risco de negócio (alterações no volume de negócios e nas margens de preços); risco de evento (ocorrência de erros, fraudes, interrupções de sistemas); risco político e risco legal.

Assim, para cada activo e responsabilidade deverá ser detalhada a sua exposição aos diversos tipos de riscos, como *infra* exemplificado na figura 1.

Quadro 1 - Exemplo de exposição ao risco de diversas rubricas susceptíveis de influenciarem o valor da Seguradora

	Risco de crédito	Risco de taxa de juro	Risco de preço	Risco cambial	Risco de sinistralidade futura	Risco de desenvolvimento adverso das reservas
Obrigações governamentais nacionais	X	X				
Obrigações empresariais estrangeiras	X	X		X		
Acções nacionais			X			
Acções estrangeiras			X	X		
Provisão para prémios não adquiridos					X	

O objectivo do presente capítulo é o de formular um modelo de solvência, utilizando a técnica de simulação de Monte Carlo, que permita determinar o capital que as seguradoras deverão ter para permitir fazer face ao resultado mínimo provável decorrente da presente estrutura de activos e responsabilidades, num dado horizonte temporal e a um certo grau de confiança. O horizonte temporal escolhido será de um ano. No que concerne aos ramos/grupos de ramos em estudo, será estudado exclusivamente o Seguro Automóvel.

Trata-se de uma análise estática, que deverá ser efectuada periodicamente, na medida em que, não é expectável, que nesse intervalo temporal, a estrutura dos activos (designadamente, a composição dos activos financeiros) e dos passivos (haverá subscrição de novas apólices, bem como anulações de apólices em vigor) permaneça imutável.

O modelo proposto na presente dissertação considera o risco decorrente da detenção da actual carteira de activos e responsabilidades. Os únicos pressupostos previsionais dizem respeito à estimação do desenvolvimento da Provisão para Sinistros e da sinistralidade futura associada às apólices actualmente em vigor.

A distribuição dos resultados futuros da seguradora, a partir da qual será calculado o requisito de solvência, será gerada com recurso a simulação de Monte Carlo. O processo de simulação consiste nos seguintes passos:

1. Especificação dos processos estocásticos para os factores de risco e seus parâmetros estimados;
2. Geração de uma sequência de  $n$  variáveis para os factores de risco no horizonte temporal considerado;
3. Avaliação dos valores futuros dos activos, passivos e operações geradores de alterações no valor da empresa de seguros, com o intuito de se determinar o resultado futuro no horizonte temporal escolhido;
4. Repetição dos passos 2 e 3 um número  $m$  de vezes suficientemente elevado com vista à obtenção de  $m$  valores para os resultados agregados da empresa de seguros e
5. Cálculo do  $VaR$  e do  $TCE$  a partir da distribuição empírica dos resultados simulados.

## 3.2. Modelação dos riscos individuais

### 3.2.1. Risco de Preço

#### 3.2.1.1. Descrição do risco

Para efeitos da presente dissertação, considerar-se-á o risco de preço, como o risco associado à flutuação do valor de mercado das acções detidas em carteira pela seguradora, equivalendo à terminologia anglo-saxónica *equity risk*.

Naturalmente, que em termos genéricos e em última análise, todos os instrumentos financeiros detêm risco de preço, isto é, risco do seu valor de mercado variar, designadamente, as obrigações. Reafirma-se, porém, a definição mais restrita de risco de preço, estando para o presente efeito, somente ligada ao valor de mercado das acções. Tomando como exemplo as obrigações, o valor futuro das mesmas será primordialmente determinado pelo risco de taxa de juro e pelo risco de crédito e não pelo risco de preço.

Nesta secção, não obstante estar a estudar-se o risco de preço, a variável modelada será a taxa de rendibilidade do activo, e não o seu preço, em virtude desta apresentar propriedades estatísticas e económicas mais desejáveis. A taxa de rendibilidade em regime de capitalização contínua ou taxa de rendibilidade instantânea, define-se num horizonte temporal unitário como sendo

$$R_t = \ln[(P_t + D_t) / P_{t-1}], \quad (1)$$

onde  $P_t$  representa o preço do activo após pagamento de dividendo na data  $t$ ,  $D_t$  o dividendo distribuído nessa data, e  $P_{t-1}$  o preço do activo ante-dividendo.

Considerando uma análise multiperíodo e assumindo que não são pagos quaisquer dividendos no período em análise, a rendibilidade acumulada em  $k$  períodos temporais é

$$R_t(k) = R_t + R_{t-1} + \dots + R_{t-k+1}.$$

Todo o raciocínio subsequente será efectuado com base no pressuposto de que a taxa de rendibilidade instantânea do activo segue uma distribuição Normal e que as observações são independentes e identicamente distribuídas. Os motivos que levam à adopção da distribuição Normal prendem-se essencialmente com a simplicidade calculatória, proporcionada por esta distribuição, designadamente:

- pelo facto da distribuição ser caracterizada por apenas dois parâmetros (média e variância);
- ao assumir-se que a taxa de rendibilidade instantânea do activo segue uma distribuição Normal, implicitamente está a assumir-se que o preço do activo segue uma distribuição Lognormal, distribuição que assegura que o preço do activo nunca será negativo;

- devido à soma de  $n$  variáveis aleatórias Normais independentes e identicamente distribuídas ter também distribuição Normal, o que facilita os cálculos quer em termos de modelação de carteiras de activos, quer em termos da determinação das estimativas dos parâmetros e
- finalmente, em virtude desta distribuição ser consistente com a fórmula de avaliação de opções de Black-Scholes.

A utilização da distribuição Normal implica a necessidade de estimação dos parâmetros relativos à média e à variância e adicionalmente da covariância, caso se esteja a modelar carteiras de activos.

Considerando a taxa de rendibilidade instantânea definida por (1), um estimador não enviesado para a variância no momento  $n$ , assumindo os pressupostos anteriores, baseado numa amostra de dimensão  $T$ , será

$$S_n^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{n-t} - \bar{R})^2, \quad (2)$$

onde  $\bar{R}$  designa a taxa de rendibilidade média tal que

$$\bar{R} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{n-t}. \quad (3)$$

A correspondente estimativa para a covariância entre os activos  $i$  e  $j$ , define-se como

$$S_{ij,n} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{i,n-t} - \bar{R}_i)(R_{j,n-t} - \bar{R}_j). \quad (4)$$

Por conseguinte, o coeficiente de correlação linear será dado por

$$\rho_{ij} = \frac{S_{ij}}{S_i S_j}. \quad (5)$$

Estudada a questão da estimação dos parâmetros da distribuição, abordar-se-á em seguida, a questão da determinação do  $VaR$  para um activo.

A taxa de rendibilidade instantânea correspondente ao  $VaR$ , a um nível de confiança  $1 - \alpha$ , será dada pela expressão

$$P(R_t < R^*) = \alpha,$$

com  $R_t$  a representar a taxa de rendibilidade no horizonte temporal a considerar e  $R^*$  a representar a taxa de rendibilidade correspondente ao  $VaR$ . Sendo que,  $R_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ . O  $VaR$  é dado pela seguinte expressão

$$VaR \cong R^* P_t = P_t (\mu + Z_\alpha \sigma),$$

onde  $P_t$  representa o preço do activo no momento  $t$ ,  $Z_\alpha$  representa o valor do quantil de ordem  $\alpha$  de uma função de Distribuição Normal Reduzida.

Com a finalidade de calcular-se o  $VaR$  para um dado horizonte temporal diferente do diário, a distribuição Normal assume que as taxas de rendibilidade são temporalmente independentes ( $Cov(R_t, R_{t-1}) = 0$ ) e identicamente distribuídas ( $E(R_t) = E(R_{t-1}) = \mu$ ;  $V(R_t) = V(R_{t-1}) = \sigma^2$ ). Um estudo mais profundo implicaria verificar a presença de heteroscedasticidade e autocorrelação nas séries temporais. A existência de heteroscedasticidade, violará o pressuposto que as rendibilidades são identicamente distribuídas. A existência de autocorrelação nas séries temporais violará a suposição que as rendibilidades dos activos são independentes.

Assim, os ajustamentos temporais para transformar a média e a volatilidade unitárias num horizonte temporal de  $k$  períodos, considerando o dia como a unidade, são calculados do seguinte modo

$$\mu_k = E[R_t(k)] = E(R_t + R_{t-1} + \dots + R_{t-k+1}) = k\mu_{dia};$$

$$\sigma_k = \sqrt{V[R_t(k)]} = \sqrt{V(R_t + R_{t-1} + \dots + R_{t-k+1})} = \sqrt{k\sigma_{dia}^2} = \sqrt{k}\sigma_{dia}.$$

Até aqui foi abordada a questão da modelação de um activo, a modelação de carteiras poderá ser efectuada através do denominado *Full Model*. A taxa de rendibilidade da carteira é geralmente aproximada à média ponderada das taxas de rendibilidade individuais,

$$R_{pt} = \sum_{i=1}^N w_i R_i,$$

onde  $R_i$  denota a taxa de rendibilidade do título  $i$ , e  $w_i$  representa o peso relativo de cada componente da carteira.

A taxa de rendibilidade média é dada pela média das rendibilidades médias dos activos individuais ( $\mu_i$ ),

$$E[R_p] = \mu_p = \sum_{i=1}^N w_i \mu_i.$$

A variância da taxa de rendibilidade, considerando que o comportamento conjunto dos activos segue uma distribuição Normal Multivariada, é dada por

$$V[R_p] = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij},$$

com  $\sigma_{ij}$  a representar a covariância entre as taxas de rendibilidade do activo  $i$  e do activo  $j$ .

O  $VaR$  da carteira é dado pela expressão

$$VaR = V_t(\mu_p + Z_\alpha \sigma_p), \quad (6)$$

com  $V_t$  a representar o valor da carteira na data  $t$ .

Na presente dissertação será utilizado o modelo *Capital Asset Pricing Model (CAPM)* de Sharpe (1964) e Lintner (1965).

Considerando-se que o mercado de capitais se encontra em equilíbrio e estando preenchido um conjunto alargado de pressupostos descritos em, por exemplo, Elton e Gruber (1995), a rendibilidade esperada da carteira, de acordo com o *CAPM*, será dada por

$$\mu_p = R_f + \beta_p (E(R_m) - R_f), \quad (7)$$

com  $R_f$  a denotar a rendibilidade do activo sem risco na economia,  $R_m$  a representar a rendibilidade de mercado,  $\beta_p = \sum_{i=1}^N w_i \beta_i$  a representar o *beta* da carteira e  $\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$  a representar o *beta* da acção  $i$  em relação a um dado índice accionista tido como representativo do comportamento de mercado. O  $\beta_i$  é, desta forma, uma medida da variação expectável de  $R_i$  em função da variação de  $R_m$ . O *beta* da carteira é uma medida da variação expectável de  $R_p$  em função da variação de  $R_m$ .

Por seu turno, considerando-se uma carteira com elevado número de activos pode assumir-se que  $\sigma_p \cong \beta_p \sigma_m$ . Consequentemente, o  $VaR$  será dado por (6). Constata-se, assim, que uma vez determinado o *beta* da carteira em relação ao índice accionista considerado como representativo do comportamento de mercado, apenas ter-se-á que modelar o comportamento deste último para se determinar o  $VaR$  da carteira. As estimativas para os parâmetros do modelo obtêm-se através do método dos mínimos quadrados.

No que concerne aos activos financeiros derivados, não obstante estes assumirem uma importância crescente na carteira de investimentos das empresas de seguros, não será tratada na presente dissertação a questão da sua modelação, a mesma encontra-se exposta, por exemplo, em Dowd (1998).

### 3.2.1.2. Mecanismo de simulação

Assume-se que o valor do índice accionista segue um movimento Browniano Geométrico,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (8)$$

onde  $S_t$  representa o preço do índice no momento  $t$ ,  $W_t$  representa um movimento Browniano Estandar, em que  $dW_t = Z(dt)^{1/2}$ , são os incrementos do processo que tem distribuição Normal de média zero e variância  $dt$ .

O parâmetro  $\mu$  representa a deriva instantânea, sendo interpretado como a taxa de rendibilidade esperada do índice

$$E(dS_t / S_t) = \mu dt .$$

O parâmetro  $\sigma$  simboliza a volatilidade instantânea, representando o desvio padrão da taxa de rendibilidade do índice

$$V(dS_t / S_t) = \sigma^2 dt .$$

Com o intuito de se simular o processo estocástico, tem que se proceder à discretização do processo em intervalos temporais curtos,  $\Delta_t = k / p$ , em que  $p$  designa o número de incrementos e  $k$  o horizonte temporal escolhido. Assim, a versão discreta do processo estocástico representa-se por

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t z \sqrt{\Delta t},$$

com  $\Delta S_t$  e  $z$  denotando a variação do preço do activo e uma variável aleatória Normal Reduzida, respectivamente.

O preço do índice no momento  $t + \Delta t$  será  $S_{t+\Delta t} = S_t + \Delta S_t$ . Se o objectivo for modelar a taxa instantânea de rendibilidade, o processo estocástico dado por (8) assumirá a seguinte forma

$$d \ln(S_t) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t,$$

sendo o preço do índice no momento  $t + \Delta t$  dado por

$$S_{t+\Delta t} = S_t \cdot \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma z \sqrt{\Delta t} \right\} \quad (9)$$

A realização do processo de simulação para um índice implica a necessidade de geração de  $n \times p$  variáveis aleatórias discretas Normais Estandarizadas. Existem diversos métodos de geração de variáveis aleatórias Normais, sendo que a maioria parte da geração de  $x$  variáveis aleatórias uniformemente distribuídas no intervalo (0,1), transformando-as, em seguida, em variáveis Normais. Os métodos mais utilizados para concretização do último passo são as seguintes:

1. Soma de doze variáveis aleatórias uniformes diminuída de seis unidades. As variáveis uniformes poderão ser geradas, por exemplo, através do método *multiplicative congruential generator* constante em Klugman, Panjer e Wilmot (1998);
2. Recurso à inversa da função de distribuição Normal, designadamente,  $z = \Phi^{-1}(x)$  e
3. Método Polar, exposto em Klugman, Panjer e Wilmot (1998).

O raciocínio exposto deverá ser estendido a todos os factores de risco que sigam um processo semelhante, se os factores em questão forem independentes, será apenas necessário repetir este processo para as  $n$  variáveis. Se as variáveis não forem independentes, ter-se-á que gerar em cada ciclo  $n$  variáveis aleatórias correlacionadas provenientes de uma distribuição Normal Estandarizada Multivariada com matriz de variância-covariância  $\Sigma_{n \times p}$ .

A geração de variáveis aleatórias correlacionadas, efectua-se através da geração de um vector  $Z$  de  $n$  variáveis aleatórias Normais independentes e da sua combinação com vista a acomodarem a desejada estrutura de correlação. Tal combinação poderá ser efectuada com recurso ao método da Decomposição de Cholesky, ou alternativamente, através dos métodos da Decomposição dos Valores Próprios ou do método da Decomposição dos Valores Singulares. Todos os referidos métodos encontram-se pormenorizadamente descritos em J.P. Morgan e Reuters (1996).

### 3.2.2. Risco Cambial

A detenção de activos/responsabilidades em moeda estrangeira submete a Seguradora ao denominado risco cambial. No caso particular dos activos, este risco encontra-se associado à possibilidade de, no horizonte temporal em apreço, a divisa em que se encontram expressos os activos alterarem o seu valor em relação à divisa nacional.

No cálculo do *VaR* de posições cambiais *spot*, pode ser utilizada exactamente a mesma metodologia utilizada para as acções, designadamente, a modelação da taxa de rendibilidade instantânea da cotação da divisa estrangeira através da distribuição Normal e a sua simulação através de um movimento Browniano Geométrico.

### 3.2.3 Risco de Taxa de juro

#### 3.2.3.1 Descrição do risco

O valor de mercado de um instrumento de dívida é função das características técnicas desse produto e essencialmente da estrutura temporal de taxas de juro e do risco de crédito desse instrumento. A estrutura temporal de taxas de juro, consiste num conjunto de taxas de juro em vigor para investimentos de diferentes maturidades (e sem *cash flows* intermédios), pertencentes à mesma classe de risco, numa dada economia. A representação gráfica da estrutura temporal das taxas de juro designa-se por *yield curve*.

Deste modo, para modelar o risco associado à detenção de instrumentos de dívida, torna-se necessário modelar o risco de taxa de juro a que estes instrumentos se encontram sujeitos. Em virtude das restrições legais ao endividamento das empresas de seguros existentes em Portugal, será analisado apenas o risco de taxa de juro dos instrumentos de dívida detidos pela seguradora no activo. O risco de taxa de juro no activo encontra-se associado à subida das taxas de actualização, que provocam a redução do valor actual dos fluxos financeiros futuros proporcionados por estes instrumentos, diminuindo, conseqüentemente, o seu valor de mercado.

Nesta secção utilizar-se-á, genericamente, o termo obrigação para designar um título de dívida. Contudo, deve ter-se presente que uma obrigação é apenas uma classe específica de instrumentos de dívida.

Teoricamente, pode ser utilizado a mesma metodologia de modelação do risco de preço para o risco de taxa de juro. Porém, a modelação de instrumentos de taxa de juro requer um tratamento mais complexo que as acções, em virtude da taxa de rendibilidade destes instrumentos apresentar as seguintes características:

- com o aproximar da maturidade, o preço das obrigações converge para o valor nominal, este fenómeno denomina-se de *pull to par phenomenon*. Conseqüentemente, a volatilidade da taxa de rendibilidade da obrigação converge para zero, característica vulgarmente denominada em terminologia anglo-saxónica por *roll down effect* e
- a maturidade da obrigação vai decrescendo com o tempo, pelo que a base da sua avaliação também se altera. Assim, mesmo que existam séries históricas de obrigações, estas séries não serão comparáveis, saliente-se que o risco de taxa de juro da obrigação encontra-se fortemente relacionado com a maturidade, na medida em que, geralmente, quanto maior for o prazo para a maturidade, maior será o risco de taxa de juro.

Um método de modelação do risco de taxa de juro consiste na determinação da volatilidade a partir de séries históricas de obrigações de cupão zero para as diferentes maturidades.

O risco de taxa de juro de uma obrigação de taxa fixa é modelado considerando que a detenção da obrigação é equivalente a possuir uma obrigação/carteira de obrigações de cupão zero. Para tal, efectua-se em primeiro lugar, a representação gráfica das posições

detidas em termos de *cash flows*. Este processo é denominado de *mapping*. Os métodos de *mapping* de maior divulgação são o *principal mapping*, *duration mapping* e o *cash flow mapping*.

Será apresentado apenas o método utilizado na parte prática, o *duration mapping*, onde o risco da obrigação é associado à obrigação de cupão zero com maturidade igual à *duração* da obrigação/carteira de obrigações em análise. Para descrição dos outros métodos *vide* J.P. Morgan e Reuters (1996).

A duração de uma obrigação corresponde ao tempo médio ponderado (pelo valor actual dos *cash flows*) que o detentor de uma obrigação tem de esperar até receber todos os pagamentos. Considerando o regime de capitalização discreta, a duração de Fisher-Weil, define-se como

$$DFW = \frac{\sum_{t=1}^T t \frac{CF_t}{(1+y_t)^t}}{P_0}, \quad (10)$$

com  $CF_t$  designando o *cash flow* a ser recebido no momento  $t$ ;  $y_t$  designando a taxa de juro *spot* a  $t$  períodos para a classe de risco da obrigação e  $P_0 = \sum_{t=1}^T \frac{CF_t}{(1+y_t)^t}$  designando o valor actual da obrigação.

Decomposta a carteira obrigacionista numa carteira de obrigações de cupão zero, através do *duration mapping*, simular-se-á o comportamento da taxa de juro de curto prazo diária durante um ano, através do modelo de taxa de juro de curto prazo a um factor de Cox, Ingersoll e Ross (1985), (modelo CIR). Este modelo possui a vantagem de ser de implementação relativamente fácil e de assegurar que a taxa de juro é sempre positiva. A principal desvantagem deste modelo é que utiliza apenas um factor (a taxa de juro de curto prazo) para explicar o comportamento de toda a estrutura temporal das taxas de juro. Contudo, não será seguido o modelo original, mas sim, a variante proposta por Fisher, May e Walther (2002) sendo a notação, método de estimação dos parâmetros e processo de simulação, o proposto por estes autores.

O comportamento da taxa de juro de curto prazo é dado pelo processo estocástico

$$dr = (b - a \cdot r)dt + \sigma \sqrt{r}dW, \quad (11)$$

onde  $b$ ,  $a$  e  $\sigma$  são constantes positivas e  $W$  designa um movimento Browniano Estandard.

No que concerne aos preços das obrigações de cupão zero para as diversas maturidades, estes são dados por

$$p(t, r(t), T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (12)$$

$$\text{com } A(t, T) = \left[ \frac{2he^{(a+h)(T-t)/2}}{2h + (a+h)(e^{(T-t)h} - 1)} \right]^{2b/\sigma^2}; \quad B(t, T) = \left[ \frac{2(e^{(T-t)h} - 1)}{2h + (a+h)(e^{(T-t)h} - 1)} \right];$$

$$h = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}.$$

A *yield curve* implícita ao modelo CIR obtém-se através de

$$R(t, T) = -\frac{\log p(t, T)}{T - t}. \quad (13)$$

Assumindo-se (11), existe o problema deste processo não ser directamente observável. Contudo dado o referido processo, uma estimativa aceitável deve ser determinada pelo mercado, visto que os preços de mercado em teoria devem tendencialmente coincidir com os preços teóricos. Será utilizado o método proposto por Fisher, May e Walther (2002) para a estimação do parâmetro  $a$ , mediante o ajuste dos preços teóricos das obrigações de cupão zero,  $p$ , aos correspondentes preços de mercado  $p^M$ .

No que respeita ao processo de estimação dos parâmetros do modelo, a partir dos dados empíricos são estimados os parâmetros  $b$ ,  $\tilde{a}$  e  $\sigma$ , sendo  $\tilde{a}$  a estimativa do mercado para o parâmetro  $a$ . Dada a taxa de juro de curto prazo actual,  $r(0)$ , e as estimativas de  $b$  e  $\sigma$  obtém-se a estimativa para o parâmetro  $a$  através do ajuste do preço teórico das obrigações de cupão zero à data actual  $t = 0$ ,  $p(0, r(0), T)$ , obtido através de (12), aos preços de mercado à data actual  $p^M(0, T)$ .

O método de estimação dos parâmetros  $b$ ,  $\tilde{a}$  e  $\sigma$  assenta nas Funções de Estimação de Martingalas exposto em Fisher, May e Walther (2002), para efeitos da presente dissertação serão apresentados apenas os resultados finais:

$$\hat{\tilde{a}} = \frac{1}{\Delta} \ln \left\{ \frac{n^2 - \left( \sum_{i=1}^n r_{i-1} \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_{i-1}} \right)}{n \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{r_{i-1}} - \left( \sum_{i=1}^n r_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_{i-1}} \right)} \right\}; \quad (14)$$

$$\hat{b} = \frac{\hat{\tilde{a}} \left( ne^{-\hat{\tilde{a}}\Delta} - \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{r_{i-1}} \right)}{\left( e^{-\hat{\tilde{a}}\Delta} - 1 \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_{i-1}}}; \quad (15)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_{i-1}} \left( r_i - F(\Delta, r_{i-1}; \hat{\tilde{a}}, \hat{b}) \right)^2}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{r_{i-1}} \phi(\Delta, r_{i-1}; \hat{\tilde{a}}, \hat{b})}, \quad (16)$$

onde  $n$  representa o número de observações históricas;  $r_i$  representa o valor da taxa de juro de curto prazo da  $i$ -ésima observação;  $\Delta$  representa o intervalo temporal entre observações (assume-se  $\Delta := \Delta_i$ , constante para todo  $i = 1, \dots, n$ ) e

$$F(\Delta, r; \tilde{a}, b) = (b - (b - ar)e^{-\tilde{a}\Delta}) / \tilde{a};$$

$$\phi(\Delta, r; \tilde{a}, b) = \frac{1}{2\tilde{a}^2} [(b - 2\tilde{a}r)e^{-2\tilde{a}\Delta} - 2(b - \tilde{a}r)e^{-\tilde{a}\Delta} + b].$$

Suponha-se então, que se encontram disponíveis os seguintes preços de mercado  $p^M_i := p^M(0, T_i)$  de  $i$  obrigações,  $i = 1, \dots, n$ , com maturidade  $T_i$  à data actual  $t = 0$  e considere-se que o tempo é medido em anos (ou seja  $T_i = i$ ). Os preços teóricos  $p_i$  obtidos no modelo em análise são dados por

$$p_i = p(0, r(0), T_i) = A(0, T_i)e^{-B(0, T_i)r(0)}. \quad (17)$$

Com base nas estimativas calculadas anteriormente para os parâmetros  $b$  e  $\sigma$  e na taxa  $r(0)$  obtém-se a estimativa para o parâmetro  $a$ , doravante referida como  $\hat{a}$ , através da minimização da seguinte função em ordem a  $a$

$$\sum_{i=1}^n \{p_i - p_i^M\}^2. \quad (18)$$

### 3.2.3.2 Mecanismo de simulação

A simulação dos preços futuros das obrigações de cupão zero depende da simulação do valor futuro da taxa de curto prazo. Ter-se-á que simular a taxa de juro de curto prazo utilizando o parâmetro  $\tilde{a}$  e não o parâmetro  $a$ , dado que estamos interessados em gerar cenários do comportamento real de  $r$ , de acordo com o exposto em Fisher, May e Walther (2002).

Dada a discretização em lapsos temporais equidistantes  $\Delta = T/N$  do intervalo de tempo  $[0, T]$ , para  $n = 1, \dots, N$  e o ponto de partida  $r(0)$ , simulam-se os valores futuros da taxa de juro de curto prazo,  $r_n$ , através do seguinte esquema iterativo

$$r_n = r_{n-1} + (\hat{b} - \tilde{a}r_{n-1})\Delta + \hat{\sigma}\sqrt{r_{n-1}}\Delta\tilde{W}_n \quad (19)$$

com  $\Delta\tilde{W}_n$  a denotar uma variável aleatória Normal de média nula e variância  $\Delta$ . Utilizando (19) e tendo presente as estimativas obtidas por (15), (16) e através da minimização de (18) é possível simular a evolução da taxa de juro de curto prazo. Simulado o valor para a taxa de juro, os preços das obrigações de cupão zero sem risco para as diversas maturidades serão dados por (12). Note-se que a maturidade dentro de um ano será igual à maturidade actual diminuída de um ano. A diferença entre o valor simulado e o valor actual da obrigação (actualizado à taxa de juro sem risco) constituirá

uma aproximação do resultado futuro derivado do risco de taxa de juro (sem consideração do risco de crédito). A interligação entre o risco de taxa juro e o risco de crédito será explicada no ponto 3.2.4.2.

### 3.2.4. Risco de Crédito

#### 3.2.4.1 Descrição do risco

Todos os instrumentos de dívida, titulados ou não, além de estarem sujeitos ao risco de taxa de juro, possuem também risco de crédito. O risco de crédito pode ser decomposto em duas componentes:

1. *Credit spread risk*: define-se como o prémio de risco adicional em relação ao rendimento do activo sem risco, exigido pelo mercado, em virtude de assumir uma determinada exposição de crédito;
2. Risco de incumprimento: define-se como o risco da contraparte de um determinado contrato entrar em incumprimento das suas obrigações financeiras. A definição de incumprimento abrange geralmente três tipos de eventos, falha ou atraso no pagamento do serviço da dívida (capital ou juros), falência da entidade devedora e reestruturação da dívida de modo a favorecer a entidade devedora.

As perdas associadas ao risco de incumprimento dependem de três factores:

1. Exposição de crédito: montante máximo da perda em que se pode incorrer num dado momento;
2. Probabilidade de incumprimento: probabilidade da contraparte constituir-se em incumprimento e
3. Taxa de recuperação de crédito: parte do montante devido passível de ser recuperado em caso de incumprimento.

O risco de crédito pode ser classificado em função do tipo da contraparte. Segundo a tipologia utilizada pelo Comité de Basileia, em Basel Committee on Banking Supervision (2001), existem quatro tipos de riscos:

1. Risco estatal: a contraparte é um Estado;
2. Risco bancário: a contraparte é um banco ou uma sociedade de investimento;
3. Risco empresarial: a contraparte é uma instituição não financeira e
4. Risco de retalho: a contraparte é um particular.

Para efeitos da presente dissertação foi escolhido o modelo *CreditMetrics* de J.P. Morgan (1997) para efectuar a modelação do risco de crédito na aplicação prática. Será efectuada uma breve descrição da abordagem paramétrica deste modelo, recorrendo-se à

sua aplicação a casos concretos, para uma descrição pormenorizada deverá consultar-se J.P. Morgan (1997).

Optou-se por escolher este modelo, em virtude de ser um modelo de simples compreensão, com um suporte sólido em termos da teoria financeira, de considerar quer o risco de incumprimento quer o risco de *spread* e por último, mas não menos importante, disponibilizar os *inputs* necessários à sua aplicação prática.

A metodologia *CreditMetrics* tem como objectivo quantificar as potenciais perdas decorrentes da exposição ao risco de crédito, gerando para tal, a distribuição do valor futuro da carteira num dado horizonte temporal. A volatilidade do valor futuro de um crédito decorre, essencialmente, das alterações na qualidade de crédito da contraparte devido quer a alterações da notação do crédito quer à ocorrência de incumprimento.

O valor futuro de um crédito vai ser função:

- da qualidade actual do crédito da contraparte, medido através da sua notação de risco (*rating*);
- da matriz das probabilidades de transição de *rating*, ou seja, da possibilidade de num dado horizonte temporal a contraparte mudar de classe de *rating*;
- taxa de recuperação de crédito em caso da ocorrência de incumprimento e
- taxas de actualização do activo sem risco e *credit spreads* exigidos para o horizonte de pagamento dos *cash flows*.

A matriz das probabilidades de transição de *rating* é construída com base em séries históricas publicadas pelas principais agências de *rating*, designadamente, a Standard and Poor's e a Moody's Investors Service (Moody's), estimando-se a probabilidade de num dado horizonte temporal (geralmente um ano) a entidade transitar da actual classe de *rating* para outra ou de entrar em incumprimento. A referida matriz assume que a probabilidade de um crédito mudar de *rating* num período dado o seu *rating* actual, é independente do seu *rating* no período anterior. O estado de incumprimento é considerado como um estado absorvente. O ponto com maior massa de probabilidade será o correspondente ao *rating* actual, ou seja, é mais provável que um dado crédito permaneça com o seu *rating* inalterado dentro de um ano.

As taxas de recuperação de crédito (em percentagem do par) dependem dos seguintes factores: tipo do crédito; nível de subordinação do crédito; *ratings* anteriores ao evento de incumprimento; sector de actividade da contraparte e fase do ciclo económico.

As taxas de recuperação de crédito apresentam elevada volatilidade, o modelo *CreditMetrics* utiliza a distribuição Beta para representar o comportamento das taxas de recuperação, em virtude de se tratar de uma distribuição flexível capaz de tomar variadas formas, assumir valores entre 0 e 1 e poder ser totalmente determinada através da especificação da média e do desvio padrão desejado.



Os *credits spreads* são determinados em função do *rating*, quanto maior (melhor) o *rating* da entidade emitente, menor o *credit spread* exigido e consequentemente maior o valor actual da dívida.

O valor de um crédito passado um ano (em milhões de euros), no caso de manutenção da actual estrutura temporal das taxas de juro e imediatamente antes do recebimento do cupão, considerando o regime de capitalização discreta, será dado por

$$P_1 = \sum_{i=1}^T cf_i + \frac{cf_{t+1}}{[1 + f(0,1,t+1) + s_i]} \quad (20)$$

onde,  $f(0,1,t+1)$  representa a taxa *forward* (cupão zero) dentro de um ano para investimentos sem risco e com maturidade de  $t$  anos;  $s_i$  representa o *credit spread* (cupão zero) para  $t$  anos para cada classe de *rating*.

Uma taxa *forward* é uma taxa de juro, esperada à data actual, para vigorar numa data futura e por um determinado período de tempo. Formalmente, a taxa *forward* esperada no momento 0 para vigorar entre os momentos  $t$  e  $T$  ( $0 < t < T$ ) define-se como  $f(0,t,T)$  e é calculada com base nas taxas de juro *spot* em vigor no momento 0,  $r(0,\cdot)$ , através da resolução de

$$[1 + r(0,t)]^t [1 + f(0,t,T)]^{(T-t)} = [1 + r(0,T)]^T$$

ou seja,

$$f(0,t,T) = {}^{(T-t)}\sqrt{\frac{[1 + r(0,T)]^T}{[1 + r(0,t)]^t}} - 1.$$

Assim, com base nos dados referentes à *yield curve* sem risco, inferem-se as correspondentes taxas *forward* sem risco, adicionando-se em seguida os *credit spreads* do sector económico do emitente para os respectivos prazos e diversas escalas de *rating* possíveis, obtendo-se assim a *yield curve* com risco.

É então determinado o valor futuro do crédito, através de (20) para cada *rating* possível, obtendo-se assim, no caso das matrizes de probabilidades de transição da Standard and Poor's ou da Moody's, 8 montantes possíveis para o valor do crédito, sendo as suas probabilidades de ocorrência as constantes das matrizes de probabilidades de transição. O valor de mercado do crédito em caso de incumprimento resultará do produto entre a taxa de recuperação do crédito e o valor facial do crédito.

Num mercado eficiente e sem risco de taxa de juro, se o *rating* da obrigação se mantivesse inalterado, então o valor da obrigação dentro de um ano, seria igual ao seu valor actual (descontado à taxa de juro com risco) capitalizado um ano à taxa de juro sem risco, adicionada do *credit spread* associado ao *rating* actual. Ou alternativamente, o valor da obrigação dentro de um ano, actualizado à taxa de juro sem risco *spot* a um ano adicionada do *credit spread* associado ao *rating* actual, seria igual ao seu valor

actual; contudo, em função da existência do risco de crédito o seu valor poderá ser diferente.

A diferença entre o valor simulado daqui a um ano descontado à taxa de juro com risco *spot* a um ano e o seu valor actual dará o resultado (ganhos/perdas) provenientes do risco de crédito da obrigação (sem consideração do risco de taxa de juro).

O raciocínio anterior pode ser generalizado para carteiras de crédito com  $n$  componentes. A expressão genérica que permite calcular o risco de uma carteira é a seguinte

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sigma^2(V_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sigma(V_i, V_j),$$

com  $\sigma^2(V_i)$  a representar a variância do valor futuro do crédito  $i$ ; e  $\sigma(V_i, V_j)$  a representar a covariância entre o valor futuro dos créditos  $i$  e  $j$ .

Assim, é necessário determinar as matrizes de probabilidades de transição. Considere-se um exemplo composto por uma carteira de dois créditos ambos com o valor facial de 100 milhões de euros, possuindo o primeiro crédito *rating* BB e o segundo A. Dado os 8 estados possíveis de *rating* para ambos os créditos, obtém-se uma matriz com 64 probabilidades de migração conjunta. Saliente-se que a matriz de probabilidade de transição conjunta só será igual ao produto das matrizes de probabilidades de transição individuais, se se considerar que os dois créditos são independentes.

O modelo assume que, caso o valor de mercado dos activos da entidade emitente descer abaixo de um dado limiar, esta entrará em incumprimento. Este raciocínio é estendido no sentido de determinar uma relação entre o valor dos activos e o *rating* da empresa. Tal como para os activos financeiros considera-se que a rendibilidade do valor de mercado dos activos da empresa comporta-se segundo uma distribuição Normal. Assumindo-se que o valor esperado é nulo, determinam-se os diversos quantis da distribuição que correspondem aos *ratings* possíveis para a empresa da seguinte forma

$$P(\text{default}) = P(R < Z_{Def}) = \Phi(Z_{Def} / \sigma),$$

$$P(\text{CCC}) = P(Z_{Def} < R < Z_{CCC}) = \Phi(Z_{CCC} / \sigma) - \Phi(Z_{Def} / \sigma),$$

e assim sucessivamente, onde,  $P(\text{default})$  representa a probabilidade da empresa entrar em incumprimento,  $P(\text{CCC})$  representa a probabilidade do *rating* da empresa ser CCC,  $R$  representa a rendibilidade dos activos da empresa;  $Z_{Def}$  representa o quantil da distribuição da rendibilidade dos activos abaixo do qual ocorre o evento de incumprimento;  $Z_{CCC}$  representa o quantil da distribuição da rendibilidade dos activos abaixo do qual a empresa vê o seu *rating* baixar para CCC ou pior;  $\Phi$  representa a função de distribuição de uma variável aleatória Normal Reduzida;  $\sigma$  representa o desvio padrão da rendibilidade dos activos da empresa.

Efectuando-se este raciocínio para todos os *ratings* possíveis obtém-se a seguinte tabela para a empresa com *rating* actual BB:

**Quadro 2 – Exemplo de matriz de probabilidades de transição para um crédito**

Rating inicial	Probabilidades da matriz de transição	Probabilidades segundo o modelo do valor dos activos	Limiar	Valor
AAA	0,0003	$1 - \Phi(Z_{AA}/\sigma)$		
AA	0,0014	$\Phi(Z_{AA}/\sigma) - \Phi(Z_A/\sigma)$	$Z_{AA}$	$3,43\sigma$
A	0,0067	$\Phi(Z_A/\sigma) - \Phi(Z_{BBB}/\sigma)$	$Z_A$	$2,93\sigma$
BBB	0,0773	$\Phi(Z_{BBB}/\sigma) - \Phi(Z_{BB}/\sigma)$	$Z_{BBB}$	$2,39\sigma$
BB	0,8053	$\Phi(Z_{BB}/\sigma) - \Phi(Z_B/\sigma)$	$Z_{BB}$	$1,37\sigma$
B	0,0884	$\Phi(Z_B/\sigma) - \Phi(Z_{CCC}/\sigma)$	$Z_B$	$-1,23\sigma$
CCC	0,01	$\Phi(Z_{CCC}/\sigma) - \Phi(Z_{Def}/\sigma)$	$Z_{CCC}$	$-2,04\sigma$
Default	0,0106	$\Phi(Z_{Def}/\sigma)$	$Z_{Def}$	$-2,30\sigma$

Dado que as probabilidades resultantes da matriz de probabilidades de transição devem ser idênticas às obtidas através do modelo baseado no valor de mercado dos activos, os respectivos valores fronteira que determinam o *rating* da empresa obtêm-se calculando em primeiro lugar o valor correspondente ao estado de incumprimento  $Z_{Def} = \Phi^{-1}(0,0106) \cdot \sigma = -2,30\sigma$ . Utilizando-se este valor é possível calcular recursivamente os restantes limiares com base no mesmo raciocínio.

Para se calcular a evolução conjunta dos dois créditos, assume-se que estes seguem uma distribuição Normal Bivariada. Especificando a questão, por exemplo, a probabilidade de ambos os crédito permanecerem nos seus *ratings* actuais, corresponderá à probabilidade da rendibilidade do valor de mercado dos activos do emitente com *rating* BB situar-se entre  $Z_B$  e  $Z_{BB}$  e da correspondente rendibilidade do emitente com *rating* A situar-se entre  $Z'_{BBB}$  e  $Z'_A$ . Se se considerar que os dois créditos não são independentes, ter-se-á

$$P(Z_B < R < Z_{BB}, Z'_{BBB} < R' < Z'_A) = \int_{Z_B}^{Z_{BB}} \int_{Z'_{BBB}}^{Z'_A} f(r, r'; \Sigma) dr' dr ,$$

onde  $f(r, r'; \Sigma)$  corresponde à função de densidade Normal Bivariada com matriz de covariância,  $\Sigma$ , das rendibilidades dos activos dos emitente, com *rating* BB ( $r$ ) e com *rating* A ( $r'$ ).

É necessário estimar-se o coeficiente de correlação entre os dois créditos, teoricamente, este deveria corresponder ao coeficiente de correlação entre a rendibilidade dos activos, contudo, não existe frequentemente informação histórica para tal. O modelo contorna esta questão utilizando como variável representativa a correlação entre a rendibilidade das acções das duas empresas emitentes.

Uma vez calculados todos os dados necessários à construção da matriz das probabilidades conjuntas de transição, procede-se ao cálculo dos valores possíveis da carteira, efectuando-se o cálculo anteriormente enunciado para cada um dos créditos e para cada um dos cenários. O resultado final será uma matriz com 64 valores possíveis.

### 3.2.4.2 Mecanismo de simulação

Será simulado o modelo *CreditMetrics* de J.P. Morgan (1997), o processo será ilustrado com o recurso a um exemplo.

Tome-se o seguinte exemplo com uma carteira composta por três créditos, considere-se as seguintes probabilidades de transição e os limites de rendibilidade dos activos que determinam os *ratings* atribuídos:

**Quadro 3 - Exemplo de matriz de probabilidades de transição para três créditos**

Rating	Probabilidades de transição			Limiares da rendibilidade dos activos	Empresa 1 Empresa 2 Empresa 3		
	Empresa 1	Empresa 2	Empresa 3		Empresa 1	Empresa 2	Empresa 3
AAA	0,0002	0,0009	0,0020				
AA	0,0033	0,0227	0,0001	$Z_{AA}$	3,54	3,12	2,86
A	0,0595	0,9105	0,0022	$Z_A$	2,78	1,98	2,86
BBB	0,8693	0,0552	0,0130	$Z_{BBB}$	1,53	-1,51	2,63
BB	0,0530	0,0074	0,0238	$Z_{BB}$	-1,49	-2,30	2,11
B	0,0117	0,0026	0,1124	$Z_B$	-2,18	-2,72	1,74
CCC	0,0012	0,0001	0,6486	$Z_{CCC}$	-2,75	-3,19	1,02
Default	0,0018	0,0006	0,1979	$Z_{Def}$	-2,91	-3,24	-0,85

Supondo que a rendibilidade dos activos dos emitentes dos créditos segue uma distribuição Normal Multivariada de média nula e que a matriz de correlações é a abaixo indicada.

**Quadro 4 - Exemplo de matriz de correlação entre três créditos**

	Empresa 1	Empresa 2	Empresa 3
Empresa 1	1	0,3	1
Empresa 2	0,3	1	0,2
Empresa 3	1	0,2	1

A geração de cenários para o retorno dos activos consistirá na geração de variáveis Normais correlacionadas. Consoante o valor do retorno simulado, assim será atribuído um novo *rating*.

**Quadro 5 - Exemplo de simulação de novos ratings para três créditos**

Cenário	Retornos estandardizados dos activos			Novo ranking		
	Empresa 1	Empresa 2	Empresa 3	Empresa 1	Empresa 2	Empresa 3
1	-0,7769	-0,8750	-0,6874	BBB	A	CCC
2	-2,1060	-2,0646	0,2996	BB	BBB	CCC
3	-0,9276	0,0606	2,7068	BBB	A	A

Com base nos novos *ratings*, apuram-se os valores dos créditos dentro de um ano para cada um dos créditos com base nas taxas *forward* e nos *credits spreads* associados ao novos *ratings*. A análise será refinada em relação aos cenários de incumprimento. Tal

como mencionado anteriormente, as taxas de recuperação de crédito exibem uma elevada volatilidade, deste modo para cada cenário de incumprimento será gerada uma taxa de recuperação de crédito a partir de uma distribuição Beta. A média e o desvio padrão da taxa de recuperação de crédito será atribuída com base no nível de subordinação do crédito. Por exemplo, um Crédito.BBB *senior unsecured* terá uma taxa de recuperação de crédito esperada de 53% e um desvio padrão de 33%, assim considerar-se-á uma distribuição Beta com esta média e desvio padrão.

O valor da carteira para cada cenário será a soma dos valores individuais. Poder-se-á então determinar o resultado futuro associado ao risco de crédito. Contudo, e não obstante considerar-se que o risco de taxa de juro e o risco de crédito são independentes, o resultado associado à detenção de uma obrigação/carteira de obrigações durante o próximo ano (diferença entre o seu valor actual descontado à taxa de juro com risco e o seu valor futuro) dificilmente será igual à soma dos resultados futuros individuais associados ao risco de crédito e ao risco de taxa de juro, tal como definidos nesta secção e em 3.2.3.2.

Desta forma, optou-se pela simulação conjunta destes dois riscos, ou seja, para cada cenário e para cada obrigação de cupão zero será gerado um preço futuro (sem risco de crédito) para cada obrigação. Através de (13) será determinada a correspondente *yield* implícita sem risco. Será simultaneamente gerado um *rating* futuro para cada obrigação.

Se o *rating* futuro for *Default*, isto é, se o emitente entrar em incumprimento então o valor futuro simulado do crédito será simplesmente o produto entre a taxa de recuperação simulada e o valor nominal do crédito. Caso contrário, adicionar-se-á o *credit spread* associado a esse *rating* à *yield* sem risco da obrigação, obtendo-se assim a *yield* com risco de cada obrigação. Com base nesta *yield* com risco e mediante a inversão de (13) é então possível determinar-se o valor futuro simulado de cada obrigação considerando ambos os riscos. A diferença entre o valor futuro simulado de cada obrigação e o seu valor actual (calculado à taxa de juro com risco) constituirá então o resultado simulado referente à detenção de cada obrigação durante o próximo ano.

### 3.2.5. Risco de Desenvolvimento Adverso de Reservas

#### 3.2.5.1. Descrição do risco

A provisão para sinistros constitui a principal rubrica do passivo das seguradoras Não Vida, correspondendo ao custo total estimado que a empresa de seguros suportará para regularizar todos os sinistros que tenham ocorrido até ao final do exercício, quer tenham sido comunicados ou não, após dedução dos montantes já pagos respeitantes a esses sinistros.

Com o objectivo de estimarem a reserva a constituir, as seguradoras devem possuir um registo histórico de dados de forma a permitir a aplicação de métodos estatísticos. A disposição desses dados é normalmente apresentada na forma de uma matriz, como a que a seguir se expõe

**Quadro 6 – Matriz de dados**

Período de ocorrência	Período de desenvolvimento						
	0	1	2	...	$N-1$	$N$	$\infty$
0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$	$X_{0,2}$	...	$X_{0,N-1}$	$X_{0,N}$	$X_{0,\infty}$
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	...	$X_{1,N-1}$		
2	$X_{2,0}$	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$	...			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$N-1$	$X_{N-1,0}$	$X_{N-1,1}$					
$N$	$X_{N,0}$						

Assim, defina-se:

- $i$  – período de ocorrência, podendo, alternativamente, considerar-se o período de participação dos sinistros. A unidade de referência usualmente considerada para a duração de cada período é de um ano;
- $j$  – período de desenvolvimento, corresponde ao número de períodos que decorrem desde a ocorrência do sinistro até a sua regularização;
- $\infty$  – abrange todos os sinistros ocorridos no período  $i$  mas cujo encerramento ocorre passado mais de  $N$  períodos de tempo e
- $k$  – período de pagamento, em que  $k = i + j$ .

As variáveis  $X_{ij}$  podem representar diversos elementos que se pretendam estimar, designadamente:

- $I_{ij}$  – pagamentos incrementais, representam os pagamentos efectuados no período de desenvolvimento  $j$  relativos a sinistros ocorridos no período  $i$ , e
- $C_{ij}$  – pagamentos acumulados, representam os pagamentos efectuados até ao período de desenvolvimento  $j$ , inclusive, relativos a sinistros ocorridos no período  $i$ .

Defina-se, ainda:

- $R$  – reserva ou provisão total;
- $\lambda'_k$  – taxa representativa da inflação dos custos com sinistros no período de pagamento  $k$ , e
- $I_{ij}^*$  – pagamentos incrementais a preços constantes de um dado período de pagamento  $k_0$ .

Constata-se que  $C_{i,j} = \sum_{K=0}^j I_{i,K}$  e  $R_i = C_{i,\infty} - C_{i,N-i}$ , com  $0 \leq i \leq N$ , onde  $C_{i,N-i}$  representa os pagamentos acumulados até à presente data, relativos a sinistros ocorridos no período  $i$ , ou alternativamente,  $R_i = \sum_{(i,j) \in \Delta_i} I_{i,j}$ , com  $\Delta_i$  a denotar o conjunto de índices associados aos montantes incrementais futuros constantes na linha  $i$  da matriz de desenvolvimento, isto é,  $\Delta_i = \{(i,j) : N-i+1 \leq j \leq N+1\}$ . Por seu turno verifica-se que

$$R = \sum_{(i,j) \in \Delta} I_{i,j}, \quad (21)$$

onde  $\Delta$  representa o conjunto dos índices associados à totalidade dos montantes incrementais futuros constantes da matriz de desenvolvimento, ou seja  $\Delta = \bigcup_{i=0}^N \Delta_i = \{(i,j) : 0 \leq i \leq N; N-i+1 \leq j \leq N+1\}$ .

Uma estimação rigorosa da provisão para sinistros deve tomar em linha de conta a inflação, na medida em que esta influencia as projecções efectuadas. Deste modo, é conveniente trabalhar com a informação a preços constantes, de forma a que os dados da matriz venham expressos em unidades comparáveis.

Desta forma verifica-se que

$$I_{i,j} = I^*_{i,j} \cdot \left( \prod_{w=k_0}^k (1 + \lambda'_w) \right);$$

$$I^*_{i,j} = I_{i,j} \cdot \left( \prod_{w=k_0}^k (1 + \lambda'_w) \right)^{-1}; \quad k = i + j.$$

Escolhido o índice representativo da inflação das indemnizações, antes da aplicação de qualquer método estatístico, os dados deverão ser convertidos para preços de um dado ano de validação, em geral o ano actual, obtendo-se assim uma matriz de montantes incrementais da seguinte forma:

**Quadro 7 – Matriz de dados a preços constantes do ano de pagamento  $N$**

Período de ocorrência	Período de desenvolvimento						
	0	1	2	...	$N-1$	$N$	$\infty$
0	$I^*_{0,0}$	$I^*_{0,1}$	$I^*_{0,2}$	...	$I^*_{0,N-1}$	$I^*_{0,N}$	$I^*_{0,\infty}$
1	$I^*_{1,0}$	$I^*_{1,1}$	$I^*_{1,2}$	...	$I^*_{1,N-1}$		
2	$I^*_{2,0}$	$I^*_{2,1}$	$I^*_{2,2}$				
...	...	...	...				
$N-1$	$I^*_{N-1,0}$	$I^*_{N-1,1}$					
$N$	$I^*_{N,0}$						

em que

$$I^*_{i,j} = I_{i,j} \cdot \left( \prod_{k=i+j}^{N-1} (1 + \lambda'_k) \right)^{-1}.$$

Após a aplicação do método estatístico escolhido obter-se-ão as seguintes estimativas:

**Quadro 8 – Estimativas dos montantes incrementais futuros a preços constantes do ano de pagamento  $N$**

Período de ocorrência	Período de desenvolvimento						
	0	1	2	...	$N-1$	$N$	$\infty$
0							$\hat{I}^*_{0,\infty}$
1						$\hat{I}^*_{1,N}$	$\hat{I}^*_{1,\infty}$
2					$\hat{I}^*_{2,N-1}$	$\hat{I}^*_{2,N}$	$\hat{I}^*_{2,\infty}$
⋮					⋮	⋮	⋮
$N-1$			$\hat{I}^*_{N-1,2}$	...	$\hat{I}^*_{N-1,N-1}$	$\hat{I}^*_{N-1,N}$	$\hat{I}^*_{N-1,\infty}$
$N$		$\hat{I}^*_{N,1}$	$\hat{I}^*_{N,2}$	...	$\hat{I}^*_{N,N-1}$	$\hat{I}^*_{N,N}$	$\hat{I}^*_{N,\infty}$

Estas estimativas deverão então ser convertidas para preços correntes dos respectivos anos de pagamento, o que obriga a efectuar estimativas para a taxa de inflação para os anos de pagamento posteriores ao ano de pagamento  $N$ :

$$\begin{cases} \hat{I}_{i,j} = \hat{I}^*_{i,j} \cdot \prod_{k=N+1}^{2N} (1 + \lambda'_k), & \text{se } j \leq N \\ \hat{I}_{i,j} = \hat{I}^*_{i,j} \cdot (1 + \lambda'_{fut})^{\psi - N + 1}, & \text{se } j = N + 1 (\infty) \end{cases},$$

onde  $\lambda'_{fut}$  é a estimativa da inflação futura para os anos de pagamento superiores a  $2N$ , taxa que se supõe constante, ou como a taxa de inflação média anual para o período  $[N + 1, \psi]$  e  $\psi$  o número máximo de anos de desenvolvimento estimado.

Em seguida será efectuado um resumo dos principais aspectos relativos à teoria dos modelos lineares generalizados (MLG). Posteriormente, será abordada a questão da aplicação dos MLGs à previsão de reservas, sendo apresentado o modelo específico que será utilizado para efeitos da presente dissertação e que tem a particularidade de gerar estimativas idênticas às do método determinístico Chain Ladder.

A análise dos MLG incide sobre a variável aleatória  $Y$ , denominada por variável resposta e sobre um vector  $X = (x_1, \dots, x_k)^T$  de  $k$  variáveis explicativas, igualmente denominadas por covariáveis.

Os MLG são caracterizados pela seguinte estrutura:

a) Componente aleatória

Considere-se um conjunto de variáveis aleatórias  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  independentes e de média  $\mu_i = E(Y_i)$ , com função de probabilidade/densidade de probabilidade  $f(y_i | \theta_i, \phi)$  pertencente à Família Exponencial de Distribuições, i.e.,

$$f(y_i | \theta_i, \phi) = \exp \left[ \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a_i(\phi)} + c(y_i, \phi) \right], \quad (22)$$

onde  $\theta_i$  e  $\phi$  são parâmetros escalares,  $a_i(\cdot)$ ,  $b(\cdot)$  e  $c(\cdot, \cdot)$  são funções conhecidas.

Na fórmula (22),  $\theta$  é a forma canónica do parâmetro de localização e  $\phi$  é um parâmetro de dispersão. Admite-se, ainda, que a função  $b(\cdot)$  é diferenciável e que o suporte da distribuição não depende dos parâmetros.

Geralmente, a função  $a_i(\phi)$  toma a forma

$$a_i(\phi) = \frac{\phi}{w_i}, \quad (23)$$

onde  $w_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) é uma constante.

b) Componente estrutural ou sistemática

Considere-se uma matriz  $X$  ( $n \times p$ ), cujos elementos  $x_{i,j}$  representam as  $n$  observações de  $p$  variáveis explicativas  $X_j$ . A  $i$ -ésima observação destas variáveis origina um predictor linear (combinação linear das variáveis explicativas)  $\eta_i$ , dado por  $\eta_i = \sum_{j=1}^p x_{i,j} \beta_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ , com os  $\beta_j$  a constituírem um vector de dimensão  $p$  de parâmetros desconhecidos, a estimar a partir dos dados. Na forma matricial tem-se  $\vec{\eta} = X\vec{\beta}$ .

As duas componentes encontram-se relacionadas através de  $\mu_i = h(\eta_i) = h(z_i^T \beta)$ ;  $\eta_i = g(\mu_i)$ , onde  $h$  é uma função monótona e diferenciável;  $g = h^{-1}$  é a função de ligação;  $z_i$  é um vector de especificação de dimensão  $p$ , função do vector de variáveis explicativas  $x_i$ .

No que concerne ao valor esperado e à variância da variável aleatória  $Y_i$ , tem-se  $E(Y_i) = \mu_i = b'(\theta_i)$ ;  $Var(Y_i) = a_i(\phi) \cdot b''(\theta_i)$ .

Constata-se, assim, que a variância de  $Y_i$  é o produto de duas funções, a primeira  $b''(\theta_i)$  que depende apenas do parâmetro canónico  $\theta_i$  e conseqüentemente de  $\mu_i$ , função

designada por função de variância e que se costuma representar por  $V(\mu_i)$ , e a segunda  $a_i(\phi)$  que depende apenas do parâmetro de dispersão.

Se o parâmetro de dispersão for da forma (23), a variância de  $Y_i$ , poderá ser escrita como

$$Var(Y_i) = \frac{\phi}{w_i} \cdot V(\mu_i) . \quad (24)$$

Nas situações em que se conhece o valor esperado e a variância das variáveis resposta e em que a variância é da forma da variância de uma distribuição da Família Exponencial, pode-se construir a designada função de *quasi-verosimilhança*. O logaritmo da função de *quasi-verosimilhança* comporta-se como o logaritmo de uma função de verosimilhança.

Assim, supondo que o conjunto das variáveis respostas  $Y_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  são i.d.d., e que se conhecem os seus valor esperados e as variâncias e que estes assumem as seguintes formas  $E(Y_i) = \mu_i$ ;  $Var(Y_i)$  como (24). As estimativas para os parâmetros  $\beta_j$  do predictor linear obtêm-se através da maximização do logaritmo da função de *quasi-verosimilhança* definido como

$$Q(\bar{y}, \bar{\mu}) = \sum_{i=1}^n w_i \int_{y_i}^{\mu_i} \frac{y_i - s}{\phi V(s)} ds ,$$

onde  $\bar{y}$  e  $\bar{\mu}$  representam, respectivamente, os vectores das observações e dos valor esperados das variáveis respostas.

As estimativas para os  $\beta_j$  serão as soluções do sistema de equações

$$\sum_{i=1}^n w_i \frac{y_i - \mu_i}{\phi V(\mu_i)} \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_j} = 0 , \quad j = 1, \dots, p,$$

obtido igualando a zero as derivadas parciais de  $Q(\bar{y}, \bar{\mu})$  em relação a cada um dos  $\beta_j$ . As estimativas encontradas denominam-se estimativas da máxima *quasi-verosimilhança* e têm propriedades semelhantes às estimativas da máxima verosimilhança.

O parâmetro de escala  $\phi$  é estimado através da minimização em ordem a  $\phi$  da expressão abaixo indicada e que envolve o logaritmo da função de *quasi-verosimilhança*

$$-2Q^*(\bar{y}, \bar{\mu}, \phi) = -2Q(\bar{y}, \bar{\mu}) + \sum_{i=1}^n \ln[\phi V(y_i)] .$$

Contudo, é usual utilizar-se a aproximação simplificada proposta por McCullagh e Nelder (1989) denominada por estatística de Pearson Generalizada

$$\hat{\phi} = \frac{\chi^2}{n-p}; \quad (25)$$

onde  $\chi^2$  é a estatística do Qui-quadrado de Pearson e apresentando esta estatística a seguinte forma

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{\mu}_i)^2}{V(\hat{\mu}_i)}. \quad (26)$$

Uma vez definido o modelo em estudo e estimado os parâmetros, é importante analisar a qualidade do ajustamento proporcionado, o que no contexto particular das provisões para sinistros, significa averiguar se o modelo escolhido produzirá estimativas da reserva fiáveis.

A análise da qualidade do modelo pode ser efectuada com base em testes de hipóteses aos parâmetros do modelo, na *quasi-deviance* à escala e pela análise dos resíduos, conforme explanado nas secções seguintes.

#### a) Testes de hipóteses

A generalidade dos problemas relacionados com testes de hipóteses sobre o vector  $\vec{\beta}$  podem ser formulados em termos de hipóteses lineares da forma, tal como descrito em Turkman e Silva (2000)

$$H_0 : C\vec{\beta} = \xi \quad \text{versus} \quad , \quad H_1 : C\vec{\beta} \neq \xi, \quad (27)$$

onde  $C$  é uma matriz  $q \times p$ , com  $q \leq p$ , de característica completa  $q$  e  $\xi$  um vector de dimensão  $q$  previamente especificado. A hipótese da nulidade de uma componente do vector parâmetro, será

$$H_0 : \beta_j = 0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \beta_j \neq 0,$$

para algum  $j$ , sendo neste caso  $q = 1$ ,  $C = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , ocupando o elemento 1 a  $j$ -ésima posição e  $\xi = 0$ .

Assim, para se testar a hipótese (27) recorre-se ao teste de *Wald*, utilizando-se a estatística  $W$ , designada por estatística de *Wald*, que sobre a hipótese nula tem uma distribuição assintótica de um  $\chi^2$  com  $q$  graus de liberdade, mais concretamente, se existir apenas uma restrição ( $q = 1$ ),  $W$  será

$$W = \frac{(C\hat{\beta} - \xi)^2}{\text{Var}(C\hat{\beta})} \approx \chi^2_{(1)}.$$

A hipótese nula é rejeitada, a um nível de significância  $\alpha$ , se o valor observado da estatística de Wald for superior ao quantil de probabilidade  $1 - \alpha$  de um  $\chi^2_{(q)}$ .

#### b) *Quasi-deviance* à escala

A estatística *quasi-deviance* à escala definida como  $D^*(\bar{y}, \hat{\mu}) = -2Q(\bar{y}, \hat{\mu})$ , pode ser aproximada à distribuição do  $\chi^2$ .

Porém, esta aproximação é geralmente má, mesmo para amostras de grande dimensão. Consequentemente, a análise da *quasi-deviance* à escala apenas pode ser encarada como um guia no estudo da adequabilidade do modelo, muito embora, seja frequente na prática fazer-se a comparação do valor observado da *quasi-deviance* à escala de um dado modelo com  $p$  parâmetros com o valor crítico de um  $\chi^2_{n-p}$ . Se o valor observado for superior a  $\chi^2_{n-p, \alpha}$ , então o modelo é considerado como não adequado.

#### c) Análise dos Resíduos

Existem diversos tipos de resíduos nos modelos lineares generalizados, para efeitos da presente dissertação apenas serão analisados os resíduos de Pearson. Os resíduos de Pearson encontram-se associados à estatística do Qui-quadrado de Pearson, exposta anteriormente. Os resíduos de Pearson definem-se da seguinte forma

$$r_i^P = \frac{(y_i - \hat{\mu}_i)}{\sqrt{V(\hat{\mu}_i)}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (28)$$

Contudo, esta definição não é uniforme, existindo diversas versões da mesma, uma delas é o resíduo de Pearson "Studentizado", conforme exposto

$$r_i^{PS} = \frac{(y_i - \hat{\mu}_i)\sqrt{w_i}}{\sqrt{\hat{\phi}V(\hat{\mu}_i)(1 - h_i)}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (29)$$

onde  $h_i$  representa o  $i$ -ésimo elemento da diagonal principal da matriz  $H$ , sendo

$H = X(X^T W X)^{-1} X^T W$ , com  $\omega_i = \frac{1}{V(y_i)} \left( \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right)^2$ , a denotar o  $i$ -ésimo elemento da matriz diagonal  $W$ .

#### d) Análise de representações gráficas

Existem diversas representações gráficas de resíduos, seguidamente serão apresentadas as mais utilizadas na análise dos modelos utilizados na estimação da provisão para sinistros e que constam de Ramos (2000).

Um modelo será adequado quando os resíduos produzidos pelo seu ajustamento seguirem aproximadamente uma distribuição Normal Reduzida, se se tratarem de resíduos estandardizados "Studentizados". Tal poderá ser averiguado através da análise de um gráfico denominado papel de probabilidades Normal (ou quantil-quantil) dos resíduos. Este gráfico obtém-se representando os resíduos dispostos por ordem crescente relativamente aos valores esperados das estatísticas de ordem de uma amostra retirada de uma população Normal. Considera-se que os resíduos possuem aproximadamente uma distribuição Normal se os pontos do gráfico se situarem aproximadamente sobre uma linha recta.

Outra representação gráfica relevante é a que representa os resíduos relativamente aos valores ajustados  $\hat{\mu}_i$ . Um modelo pode-se considerar adequado se o referido gráfico apresentar uma média nula e um intervalo de variação constante, não se devendo observar variações sistemáticas. Se o intervalo de variação apresentar uma tendência crescente (decrecente) com os  $\hat{\mu}_i$ , isso poderá significar que a distribuição das variáveis resposta não é adequada.

Adicionalmente, devem-se considerar as representações gráficas dos resíduos em relação a cada uma das variáveis explicativas presentes no predictor linear. Se o modelo for adequado, estes gráficos não apresentarão padrões sistemáticos.

Finalmente, a existência de resíduos disparees face ao valor da maioria dos restantes, designadamente, muito elevados ou reduzidos, pode indiciar a existência de valores discordantes (*outliers*), provocando desajustamentos no modelo.

É possível definir um modelo linear generalizado em que as variáveis  $I_{i,j}$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição pertencente à Família Exponencial. Considere-se um triângulo de desenvolvimento de pagamentos incrementais  $I_{i,j}$ , com a forma do Quadro 6 com  $0 \leq i \leq N$ ,  $0 \leq j \leq N+1$ . Dispõe-se, portanto, de  $\frac{(N+2)(N+1)}{2} + 1$  observações, correspondentes às variáveis aleatórias do conjunto  $D = \{C_{i,j} : 0 \leq i \leq N; 0 \leq j \leq N-i\} \cup \{C_{0,N+1}\}$ .

Suponha-se, adicionalmente, que  $a_i(\phi)$  é da forma (24) e que  $w_{i,j} = 1$  para todo o par  $(i, j)$ , assim têm-se que  $E(I_{i,j}) = \mu_{i,j}$ ;  $V(I_{i,j}) = \phi \cdot V(\mu_{i,j})$ .

A função variância é da seguinte forma  $V(\mu_{i,j}) = \mu_{i,j}^\zeta$ ,  $\zeta \geq 0$ .

A função ligação e o predictor linear são os seguintes

$$\eta_{i,j} = \ln(\mu_{i,j}) = \mu + \alpha_i + \beta_j .$$

com  $\alpha_i$  a denotar o efeito provocado pelo período de ocorrência  $i$ ;  $\beta_j$  a representar o efeito provocado pelo período de desenvolvimento  $j$ ;  $\mu$  a reflectir média global.

As estimativas dos pagamentos incrementais referentes às células por preencher da matriz  $(I_{i,j}, j \geq n-i+1)$  são dadas por

$$\hat{\mu}_{i,j} = \exp\{\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j\}, \quad (30)$$

sendo que  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\alpha}_i$ ,  $\hat{\beta}_j$  são estimadores da máxima *quasi-verosimilhança*.

Com o fim de se evitar a sobre-parametrização introduzem-se as restrições  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ , o que implica a necessidade de estimação de  $2N$  parâmetros.

As estimativas para os valores esperados dos pagamentos incrementais futuros obtêm-se através de (30). O estimador  $\hat{R}$  é obtido através de  $\hat{R} = \sum_{(i,j) \in \Delta} \hat{\mu}_{i,j}$ . O erro quadrático médio *EQM* de  $\hat{R}$ , tal como exposto em Ramos (2000), vem

$$EQM(\hat{R}) = E\left\{R - \hat{R}\right\}^2 = \sum_{(i,j) \in \Delta} EQM(\hat{\mu}_{i,j}) + \sum_{\substack{(i,j) \in \Delta \\ (x,y) \in \Delta \\ (i,j) \neq (x,y)}} \left\{ \hat{\mu}_{i,j} \hat{\mu}_{x,y} Cov(\hat{\eta}_{i,j}, \hat{\eta}_{x,y}) \right\},$$

com

$$EQM(\hat{\mu}_{i,j}) = \hat{\phi} \cdot \hat{\mu}_{i,j}^\zeta + \left\{ V(\hat{\mu}) + V(\hat{\alpha}_i) + V(\hat{\beta}_j) + 2\{Cov(\hat{\mu}, \hat{\alpha}_i) + Cov(\hat{\mu}, \hat{\beta}_j) + Cov(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j)\} \right\} \cdot \hat{\mu}_{i,j}^2$$

As parcelas da *supra* exposta igualdade são obtidas a partir da matriz de variância-covariância dos parâmetros  $W_{\hat{\beta}} = (X^T W X)^{-1}$ , com  $W$  definido tal como (29). As estimativas para o erro padrão (*EP*) de cada estimador, correspondem à raiz quadrada do respectivo *EQM*.

Foi proposto por Renshaw e Verrall (1998) uma versão estocástica do método determinístico Chain Ladder, tendo por base a teoria dos modelos lineares generalizados, que produz as mesmas estimativas do referido método, para além de permitir calcular estimativas do erro quadrático médio associado a essas previsões. O enunciado MLG assume que os montantes incrementais seguem uma distribuição de Poisson com sobre-dispersão, um predictor linear da forma (30) e uma função de ligação logarítmica.

O motivo de se considerar que os  $I_{i,j}$  seguem uma distribuição de Poisson com sobre-dispersão e não uma distribuição de Poisson, prende-se com o facto da distribuição de Poisson só tomar valores nos números inteiros não negativos, condição que não se torna viável quando se procura modelar montantes de indemnizações (que podem ser negativos devido à existência de salvados, ou de reembolsos de elevado montante, especialmente nos últimos anos de desenvolvimento).

Com o objectivo de ultrapassar o citado inconveniente da distribuição de Poisson, considera-se um MLG onde o parâmetro  $\zeta$  da função variância toma o valor 1, mas onde o parâmetro de escala  $\phi$  é estimado ao invés de se encontrar pré-definido. O modelo terá então as seguintes hipóteses:  $E(I_{i,j}) = \mu_{i,j}$  ;  $V(I_{i,j}) = \phi \cdot V(\mu_{i,j}) = \phi \cdot \mu_{i,j}$  ;  $\zeta = 1$  ;  $\phi > 0$  ;  $i = 0, \dots, n$  ;  $\sum_{i=0}^{N-j} I_{i,j} \geq 0$  ;  $0 \leq j \leq N$ . (31)

A restrição (31) impõe que a soma dos montantes de cada coluna de desenvolvimento seja não negativa, só se verificar esta restrição é que este modelo será equivalente ao método Chain Ladder.

### 3.2.5.2. Mecanismo de simulação

Será aplicado o método Bootstrap em associação com o MLG de Poisson com sobre-dispersão, sendo o processo iniciado através da aplicação do modelo de Poisson aos dados históricos com o intuito de se obter a estimativa para  $\hat{R}$ .

A aplicação da metodologia Bootstrap exige a existência de um conjunto de observações de variáveis independentes e identicamente distribuídas. Contudo, os montantes incrementais  $I_{i,j}$  não satisfazem este pressuposto, na medida em que dependem dos parâmetros do modelo de cálculo. Consequentemente, o modelo base de cálculo da provisão para sinistros terá que permitir calcular o conjunto dos resíduos, de forma a que os mesmos possam ser encarados como observações de variáveis aleatórias i.d.d., e sobre as quais incidirá o método Bootstrap.

Assim, obtém-se o conjunto de resíduos do modelo, denotados por  $r_{i,j}$ ,  $0 \leq i \leq N$ ,  $0 \leq j \leq N - i$  Poderão ser considerados os resíduos de Pearson, conforme (28) ou dados ou por (29). Por motivos de facilidade calculatória é comum utilizarem-se os resíduos de Pearson na sua versão base. Desta forma, os resíduos a utilizar serão definidos do seguinte modo

$$r_{i,j} = \frac{I_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{\hat{\mu}_{i,j}}}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq j \leq N - i, \quad (32)$$

onde  $I_{i,j}$  representam os montantes incrementais observados e  $\hat{\mu}_{i,j}$  os valores modelados.

No MLG de Poisson com sobre-dispersão, existem três resíduos que à partida terão valor nulo, mais especificamente,  $r_{0,N}$ ,  $r_{N,0}$  e  $r_{0,\infty}$ , uma vez, que da forma como o modelo está definido resulta:  $I_{0,N} = \hat{\mu}_{0,N}$ ,  $I_{N,0} = \hat{\mu}_{N,0}$ ,  $I_{0,\infty} = \hat{\mu}_{0,\infty}$ .

De acordo com Pinheiro, Silva e Centeno (2000), os citados resíduos não devem fazer parte da amostra sobre a qual incide o processo de reamostragem, na medida em que o seu valor será sempre constante, não sendo, por conseguinte, razoável considerá-las como observações de variáveis aleatórias. Uma vez eliminados tais resíduos, ter-se-á

uma amostra composta por  $\{(N+1)(N+2)/2\} - 2$  observações que servirão de base à realização de um processo de extracção com reposição.

O novo triângulo de valores residuais será convertido num triângulo de pseudo-dados  $I_{i,j}^{bs}$  através da seguinte fórmula, que não é nada mais que a inversão de (32),  $I_{i,j}^{bs} = r_{i,j}^{bs} \sqrt{\hat{\mu}_{i,j}} + \hat{\mu}_{i,j}$ , com  $r_{i,j}^{bs}$  tal que  $\{(i,j): 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N-i\} \cup \{(0, N+1)\}$ .

Posteriormente, será aplicado ao triângulo de pseudo-dados o MLG de Poisson com sobre-dispersão com o intuito de se obter a estimativa para a reserva a constituir, esta estimativa será denominada de pseudo-reserva. Será utilizada a notação de  $\hat{R}_{(b)}^{bs}$ ,  $1 \leq b \leq B$ , para as pseudo-reservas, e  $\hat{R}$  para a estimativa original. Todo este processo é repetido um número  $B$  de vezes suficientemente elevado.

Uma vez obtidas as  $B$  estatísticas simuladas para  $\hat{R}_{(b)}^{bs}$ , proceder-se-á ao cálculo da sua média e desvio padrão definidos, respectivamente, como  $\hat{R}_{(c)}^{bs} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{R}_{(b)}^{bs}$ ,

$$\hat{\sigma}_{bs}(\hat{R}) = \sqrt{\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B (\hat{R}_{(b)}^{bs} - \hat{R}_{(c)}^{bs})^2}, \quad 1 \leq b \leq B.$$

Contudo, no caso particular da estimação das reservas, a medida de variabilidade empregue é o erro quadrático médio, pelo que, ao desvio padrão calculado pelo método Bootstrap terá de ser adicionada uma medida de variabilidade do processo estocástico inerente ao modelo base de previsão de reservas.


Segundo England e Verral (1999), no MLG de Poisson com sobre-dispersão, essa medida de variabilidade é dada, respectivamente, por  $\hat{\phi} \cdot \hat{R}$ , em que  $\hat{\phi}$  é uma estimativa do parâmetro de escala associado ao modelo, que por razões de coerência e dado que se utilizaram os resíduos de Pearson na obtenção das estimativas Bootstrap, se propõe que seja estimado através da fórmula (25). Assim, de forma equivalente, tem-se

$$\hat{\phi} = \frac{1}{n-p} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} r_{i,j}^2.$$

Finalmente, obtém-se a estimativa para o erro padrão dos estimadores Bootstrap para  $\hat{R}$ ,

$$EP_{bs}(\hat{R}) = \sqrt{\hat{\phi} \cdot \hat{R} + \frac{n}{n+p} \hat{\sigma}_{bs}^2(\hat{R})}.$$

Para finalizar a presente secção, destaque-se que com base nas  $B$  estatísticas simuladas  $\hat{R}_{(b)}^{bs}$  pode-se construir a respectiva função de distribuição empírica associada.



Dado que a reserva total a constituir se trata de uma soma de pagamentos aleatórios futuros, o valor total da reserva a constituir deverá ser o valor actual dos montantes incrementais futuros, descontados à taxa de actualização apropriada. Não obstante tratar-se de uma questão pertinente e actual a escolha da taxa de actualização futura, para efeitos da presente tese e numa óptica prudencial, utilizar-se-á a taxa de juro sem risco.

A diferença entre a provisão constituída e o valor actual da provisão simulada, constituirá então o resultado associado ao desenvolvimento da provisão para sinistros (suficiência/insuficiência). Construindo-se a função de distribuição empírica dos referidos resultados é então possível a determinação do *VaR* e o *TCE* individuais associados a este risco.

### 3.2.6. Risco de Sinistralidade Futura

#### 3.2.6.1. Descrição do risco

No Seguro Automóvel os contratos de seguro costumam ter um período de vigência igual a um ano, findo o qual poderão ser renovados ou não. A Seguradora recebe os prémios e compromete-se a pagar os montantes dos sinistros relativos às apólices em vigor.

Tendo presente que para uma dada apólice existe um desfasamento entre o momento do encaixe do prémio e o momento da ocorrência dos eventuais sinistros, por motivos de prudência, as seguradoras são obrigadas a reservarem parte do montante dos prémios recebidos com o intuito de fazerem face aos sinistros futuros. Assim, as seguradoras têm de constituir a chamada provisão para prémios não adquiridos, que não é mais do que a aplicação do princípio contabilístico da especialização do exercício. Esta provisão é calculada, contrato a contrato, através do método *pro rata temporis*.

Desta forma, numa determinada data teremos um volume de prémios emitidos, os quais poderão ser divididos em prémios adquiridos e em prémios não adquiridos.

Os prémios adquiridos deverão ser suficientes para assegurar a cobertura do custo total dos sinistros ocorridos (participados ou não), ou seja, quer dos montantes já pagos quer dos pagamentos futuros (aos quais as empresas de seguros são obrigadas legalmente a constituírem reservas). Considerando uma determinada data, existe o risco da provisão para sinistros constituída não ser suficiente para cobrir o desenvolvimento futuro dos sinistros ocorridos.

Por outro lado, existe o risco dos prémios não adquiridos (isto é, da provisão para prémios não adquiridos) não serem suficientes para fazer face aos sinistros, relativos às apólices em vigor a essa data, que ocorrerão no período em análise. Com vista a acautelar esta situação, as entidades reguladoras obrigam normalmente à constituição de uma provisão para insuficiência de prémios. Em Portugal, esta provisão é denominada por provisão para riscos em curso e corresponde ao montante necessário para fazer face a prováveis indemnizações e encargos a suportar após o termo do exercício e que excedam o valor dos prémios não adquiridos e dos prémios exigíveis relativos aos contratos em vigor.

Deste modo, torna-se importante e necessário modelar os sinistros que ocorrerão no próximo ano, estes sinistros serão modelados separadamente dos sinistros já ocorridos. Ressalva-se, novamente, que não se entrará em consideração com a produção nova.

O objectivo será determinar a distribuição das indemnizações agregadas no intervalo de tempo  $(0, t]$ . O método utilizado será o do Modelo de Risco no Colectivo. As indemnizações agregadas podem ser escritas como a soma,  $S(t)$ , de um número aleatório,  $N(t)$ , de pagamentos particulares  $(X_1, X_2, \dots, X_{N(t)})$ , ou seja

$$S(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} X_i, \quad X_0 \equiv 0. \quad (33)$$

O processo estocástico  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  possui as seguintes características:

1.  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  é um processo estocástico de valores inteiros não negativos e
2.  $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,N(t)}$  é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição  $G(x_i)$  e independentes de  $N(t)$ .

O processo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é, portanto, um processo composto. A variável aleatória  $S(t)$  será discreta se as variáveis  $X_i$  forem discretas, ou uma variável aleatória mista se as variáveis  $X_i$  forem contínuas, uma vez que a probabilidade na origem é positiva, ou seja  $P[S(t) = 0] = P[N(t) = 0] > 0$ .

Por seu turno, os dois primeiros momentos em relação à média de  $S(t)$  são respectivamente,

$$E[S(t)] = \mu_s = E[N(t)] \cdot E(X);$$

$$V[S(t)] = \sigma_s^2 = E[N(t)] \cdot V(X) + V[N(t)] \cdot E^2(X).$$

Na presente dissertação não será considerado o efeito do resseguro, os principais tratados bem como as consequentes alterações nas distribuições dos montantes individuais e das indemnizações agregadas podem ser consultados em Centeno (2001).

No que respeita ao processo  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ , geralmente assume-se em Teoria do Risco que se trata de um Processo de Poisson Homogéneo ou de um Processo de Poyla. Deste modo, as distribuições mais usuais para a modelação do número de sinistros são a distribuição de Poisson e a Binomial Negativa. Para mais detalhes acerca dos referidos processos de Poisson e de Poyla, consulte-se, respectivamente, Reis (2001) e Centeno (2001). As principais características das distribuições de Poisson e Binomial Negativa encontram-se expostas em Klugman, Panjer, e Wilmot (1998).

As distribuições de Poisson e Binomial Negativa pertencem à classe de distribuições  $(a, b, 0)$ , tal como definida em Centeno (2003), pelo que, a sua função de probabilidade pode ser escrita de forma recursiva. Seja  $p_k = \Pr(N = k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , a função de probabilidade de uma variável aleatória  $N$ , esta função pode ser obtida através de

$$p_k = \left( a + \frac{b}{k} \right) p_{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

onde  $a$  e  $b$  são duas constantes. No caso da distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$ , tem-se  $a = 0$  e  $b = \lambda$ . No que concerne à distribuição Binomial Negativa de parâmetros  $(\alpha, p)$ , verifica-se que  $a = 1 - p$  e  $b = (\alpha - 1)(1 - p)$ .

A escolha da distribuição que melhor se ajusta ao número de indemnizações é geralmente obtida com recurso a um teste do Qui-Quadrado a partir de uma amostra classificada.

No que respeita à distribuição das indemnizações individuais, as distribuições Gama, Pareto e Lognormal contam-se, entre outras, como as distribuições teóricas geralmente escolhidas para modelar os montantes das indemnizações. Para mais informações acerca das mencionadas distribuições remete-se para Klugman, Panjer, e Wilmot (1998).

Em relação à problemática da selecção da distribuição que melhor se ajusta aos dados dos montantes individuais será conveniente, em primeiro lugar, a construção do histograma dos dados empíricos, o modelo escolhido deverá apresentar uma função de densidade de probabilidade similar ao histograma. Contudo, a escolha do modelo deverá ser efectuada com recurso a testes hipóteses, na presente dissertação serão utilizados o teste da bondade do ajustamento do Qui-quadrado e o teste de Kolmogorov-Smirnov.

O teste da bondade do ajustamento do Qui-quadrado requer o agrupamento dos dados, mas não necessita que os parâmetros da distribuição a ser testada sejam estimados a partir dos agrupados.

### 3.2.6.2. Mecanismo de simulação

Determinadas, as funções de distribuição do número de sinistros e das perdas individuais, simulam-se os valores para o processo composto dado por (33).

O processo de simulação é simples, em cada simulação gera-se um número  $n$  proveniente da distribuição de  $N(t)$ , gerando em seguida  $n$  valores da distribuição de  $X$ . Para tal é necessário recorrer-se a mecanismos de simulações de variáveis aleatórias provenientes de distribuições discretas ( $N(t)$ ) e de distribuições contínuas ( $X$ ). As primeiras, poderão ser geradas através de métodos genéricos como o método da transformada inversa ou da aceitação-rejeição, ambos expostos em Hilier e Lieberman (1995). As segundas, podem ser simuladas através do método da transformada inversa, existindo porém, métodos mais eficientes de simulação, cuja escolha dependerá da distribuição em causa, consulte-se por exemplo Hilier e Lieberman (1995).

Os resultados simulados associados à sinistralidade futura do próximo ano da carteira actualmente em vigor, obtêm-se subtraindo ao valor da provisão para prémios não adquiridos e da provisão para riscos em curso, os valores das indemnizações agregadas simulados. A partir da construção da função de distribuição empírica é então possível determinar-se o *VaR* e o *TCE*.

### 3.3. Agregação dos Riscos

#### 3.3.1. Considerações Gerais

Uma vez definidos todos os factores de risco individuais deverá ser estudada a interdependência entre estes. Considerando que o comportamento individual de cada risco se trata de uma variável aleatória contínua, o vector aleatório  $k$ -dimensional  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  define-se como um vector aleatório contínuo  $k$ -dimensional se e só se existir uma função  $f_{X_1, \dots, X_k}(\cdot, \dots, \cdot) \geq 0$  tal que

$$F_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_k} f_{X_1, \dots, X_k}(\mu_1, \dots, \mu_k) d\mu_1 \dots d\mu_k,$$

para todo  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ . A função  $f_{X_1, \dots, X_k}(\cdot, \dots, \cdot)$  é definida como uma função de densidade de probabilidade conjunta e  $F_{X_1, \dots, X_k}(\cdot, \dots, \cdot)$  como uma função de distribuição conjunta.

Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  um vector aleatório contínuo  $k$ -dimensional, as variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_k$  definem-se como sendo estocasticamente independentes se e só se

$$F_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k F_{X_i}(x_i), \text{ para todo } x_1, x_2, \dots, x_k.$$

Assim, teoricamente deveria proceder-se à determinação analítica ou através do recurso a métodos numéricos da função de distribuição conjunta dos riscos, tal, porém, na prática revelar-se-ia uma tarefa extremamente difícil e morosa, ou mesmo impossível.

Uma solução com forte suporte teórico consiste em modelar a estrutura de dependência entre os riscos com recurso ao conceito matemático das funções Cópula, dado que, para funções de distribuição multivariadas contínuas, as marginais univariadas e a estrutura de dependência multivariada podem ser separadas. Verifica-se, assim, que a estrutura de dependência pode ser representada por uma função Cópula. Esta não foi, porém, a solução adoptada por indisponibilidade de dados históricos que permitissem estimar com fiabilidade os parâmetros das funções Cópula.

Para efeitos da presente dissertação assumiu-se que a função de distribuição conjunta dos factores de risco é uma distribuição multivariada pertencente à Família de Distribuições Elípticas, família exposta em Embrechts, McNeil, e Straumann (1999) e Embrechts, Lindskog, e McNeil (2003). Assim a interdependência entre factores de

riscos, foi medida através do seu coeficiente de correlação linear e considerada nos mecanismos de simulação, quando aplicável (tal como já havido sido exposto nos pontos 3.2.1. e 3.2.4.).

Por falta de informação histórica para aferir o comportamento conjunto dos riscos, assumiu-se que todos os factores de riscos são independentes, com excepção dos riscos de preço e de taxa de juro onde foi estudada a sua interdependência através do seu coeficiente de correlação linear. Esta suposição é algo forçada no caso particular dos riscos de taxa de juro e risco de crédito. Foi igualmente considerada a interdependência entre o risco de preço das diversas acções que compunham a carteira accionista. Finalmente, foi também modelada a interdependência entre o risco de crédito das diversas obrigações que compunham a carteira obrigacionista resultante do processo de *mapping*.

### 3.3.2. Coeficiente de correlação linear

O coeficiente de correlação linear é uma das medidas de dependência mais utilizadas na prática, em virtude de ser, geralmente, fácil de calcular e por ser a medida de dependência natural da distribuição Normal Multivariada.

Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias com variâncias finitas. O coeficiente de correlação linear ou coeficiente de correlação de Pearson entre  $X$  e  $Y$  define-se como sendo

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}},$$

onde  $\text{Cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E(XY) - E(X)E(Y)$ , representa a covariância entre  $X$  e  $Y$ ;  $V(X)$  e  $V(Y)$  representam as variâncias de  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

A estimativa do coeficiente de correlação será dada por (5), devendo contudo ser efectuado o teste estatístico da nulidade do coeficiente de correlação, que consiste no seguinte ensaio de hipóteses  $H_0 : \rho = 0$  versus  $H_1 : \rho \neq 0$ , sendo a estatística de teste

$$t = \rho \sqrt{\frac{n-2}{1-\rho^2}} \quad (37)$$

que possui distribuição  $t$ -Student com  $n-2$ , graus de liberdade, com  $n$  a representar a dimensão da amostra. A hipótese nula é rejeitada, a um nível de significância  $\alpha$ , se o módulo do valor observado da estatística  $t$  for superior ao quantil de probabilidade  $1-\alpha/2$  de uma distribuição  $t_{n-2}$ .

O conceito de correlação entre duas variáveis aleatórias é facilmente generalizável. Sejam  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  e  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ , dois vectores aleatórios em  $\mathcal{R}^n$ . As covariâncias e os coeficientes de correlação podem ser agregados em matrizes  $n \times n$ ,

$Cov[X, Y]$  e  $\rho[X, Y]$ , simétricas e semi-definidas positivas, desde que as variâncias dos componentes individuais sejam positivas. Tem-se, deste modo

$$Cov[X, Y]_{ij} := Cov[X_i, Y_j],$$

$$\rho[X, Y]_{ij} := \rho[X_i, Y_j], \quad 1 \leq i, \quad j \leq n.$$

O coeficiente de correlação apresenta diversas limitações:

- as variâncias de  $X$  e  $Y$  têm de ser finitas, caso contrário, o coeficiente de correlação linear não poderá ser definido. Este facto poderá ser particularmente limitativo se se estiver a lidar com distribuições de caudas espessas;
- se duas variáveis são independentes então o seu coeficiente de correlação linear é nulo, porém, o facto do coeficiente de correlação entre duas variáveis aleatórias ser nulo não implica necessariamente que estas sejam independentes e
- o coeficiente de correlação linear não é invariante para transformações não lineares estritamente crescentes.

## 4. Aplicação

### 4.1. Modelo utilizado

#### 4.1.1. Considerações Gerais

Com base na informação estatística e financeira da Seguradora a 31/12/2002, foram modelados com recurso a simulação de Monte Carlo, 5 tipos de riscos: risco de preço, risco de taxa de juro, risco de crédito, risco de desenvolvimento adverso das reservas e risco de sinistralidade futura.

Foram extraídas do sistema de informação da Bloomberg, L. P. as fichas técnicas das obrigações detidas pela Seguradora, bem como cotações históricas das acções que compunham a sua carteira accionista, de diversos índices accionistas, de obrigações de cupão zero Alemãs e de taxas de juro utilizadas na aplicação do modelo. Por se tratar de um volume considerável de informação, optou-se pela apresentação detalhada da informação utilizada na descrição da modelação de cada um dos riscos.

Tal como anteriormente referido, por indisponibilidade de informação histórica para aferir do comportamento conjunto dos riscos, assumiu-se que todos os riscos são independentes, com excepção dos riscos de preço e de taxa de juro onde foi estudada a sua interdependência através do seu coeficiente de correlação linear. Assumiu-se assim que o comportamento conjunto destes riscos seguia uma distribuição bidimensional pertencente à Família Elíptica de distribuições.

Porém como adiante apresentado e com base na informação histórica, nos modelos seguidos e pressupostos assumidos, os mencionados riscos apresentaram um coeficiente

de correlação considerado estatisticamente nulo, o que não implica necessariamente que estes riscos sejam independentes.

Em função do comportamento simulado de cada um dos factores de risco, foram obtidas as respectivas funções de distribuição empíricas dos resultados da seguradora decorrentes de cada um dos factores de risco. Finalmente, apurou-se a função global dos resultados da seguradora, que corresponde à soma das funções das perdas individuais.

Nas secções seguintes é exposta toda a metodologia empregue, os pressupostos assumidos e os dados utilizados. Os resultados concretos obtidos são apresentados em detalhe na secção 4.2.

Não foram modelados os riscos referentes às seguintes rubricas: imóveis, depósitos bancários, unidades de participação em fundos de investimento mobiliário e imobiliário, acções não cotadas e obrigações não cotadas no Bloomberg, obrigações convertíveis em acções e créditos sobre tomadores de seguros. A maioria dos depósitos tratavam-se de depósitos à ordem, dado os mecanismos de protecção dos depositantes em vigor na União Europeia, optou-se por não modelar o risco de crédito e de taxa de juro associado a estes depósitos.

Os activos financeiros modelados não se encontravam sujeitos a risco cambial. Os activos sujeitos a risco cambial e não modelados representavam uma percentagem residual da carteira de activos e encontravam-se a ser alvo de cobertura através de dois *forwards* cambiais com vencimento em Fevereiro de 2002. Não foi, igualmente, modelado o risco destes dois derivados devido ao seu inexpressivo montante e propósito de cobertura do risco de preço.

Não foi tomado em consideração o efeito do resseguro. No que concerne aos riscos de desenvolvimento adverso de reservas e de sinistralidade futura foram considerados apenas os dados referentes ao Seguro Automóvel, a empresa de seguros explora outros ramos, muito embora estes possuam um peso residual na sua carteira.

Todo o trabalho foi desenvolvido em *software* Mathematica 4.0 da Wolfram Research, Inc. e em Microsoft Excel.

#### 4.1.2. Risco de Preço

As acções modeladas eram oriundas de um só país da Zona Euro, tendo sido escolhido o principal índice accionista desse país como variável representativa do comportamento de mercado. Apuraram-se os *betas* das acções através da regressão linear entre a taxa instantânea de rendibilidade de cada uma das acções e do índice. Realizaram-se para todas as regressões o teste da validade global do modelo (teste F-Snedcor) e o teste da nulidade dos parâmetros (teste t-Student) ambos a um nível de significância de 5%, tendo sido aceite todas as regressões e estimativas dos parâmetros.

Determinou-se o *beta* da carteira de acções através da média ponderada (pelo valor de mercado) dos *betas* individuais. Assumiu-se que a taxa instantânea de rendibilidade diária do índice accionista seguia uma distribuição Normal e calcularam-se as habituais estimativas para a média e desvio padrão amostrais de acordo com (3) e (4). A partir da

média e desvio padrão diários calcularam-se as respectivas médias e desvios padrão anuais. Calculou-se o coeficiente de correlação de Pearson entre a taxa instantânea de rendibilidade diária da *yield* da taxa de juro de curto prazo e a taxa instantânea de rendibilidade diária do índice. O referido coeficiente foi positivo mas de reduzido valor, tendo-se realizado o teste de hipóteses (37) e concluído pela nulidade do mesmo.

Estimada a média e o desvio padrão da rendibilidade anual do índice, simulou-se o valor diário (*time step* = 1/260) do índice através de (9). Dada a nulidade do coeficiente de correlação entre a taxa de juro de curto prazo e o índice accionista, a componente aleatória do processo de simulação assentou na geração de variáveis aleatórias Normais Reduzidas independentes, através da soma de 6 variáveis aleatórias Uniformes em [0,1] subtraídas de 6 unidades.

Determinado o valor do índice dentro de um ano (260 dias de negociação), calculou-se a evolução anual percentual do índice e através de (7) obteve-se a rendibilidade anual da carteira accionista da Seguradora, tendo-se considerado como estimativa para a taxa de juro sem risco a *yield* a 31/12/2001 dos bilhetes de Tesouro Alemães com prazo igual a um ano. Multiplicando a rendibilidade anual da carteira accionista pelo seu valor de mercado a 31/12/2002, determinou-se então o resultado (ganho/perda) anual associado à detenção da referida carteira durante o próximo ano. Todo este processo foi repetido 5000 vezes.

#### 4.1.3. Risco de taxa de juro e risco de crédito

##### 4.1.3.1. Simulação das *yields* sem risco

O primeiro passo efectuado foi a divisão da carteira de obrigações modeladas em três sub-carteiras, em função do tipo de emitente, todos estes da Zona Euro, a saber: obrigações governamentais; obrigações de bancos e empresas financeiras; obrigações de empresas de telecomunicações.

Procedeu-se ao cálculo da duração de Fisher-Weil, dado por (10), para cada uma destas sub-carteiras a partir das suas fichas técnicas. A estrutura temporal das taxas de juro sem risco foi obtida através das *yields* em 31/12/2002 das obrigações de cupão zero Alemãs (*Coupon Strips*) para as diversas maturidades (de 1 a 27 anos), tendo as maturidades intermédias (diárias) sido obtidas por interpolação linear. Para os 3 e 6 meses considerou-se a *yield* dos Bilhetes de Tesouro Alemães com as referidas maturidades.

As *yields* das *Coupon Strips* não se tratam na realidade de cupões zero implícitos, uma vez que são activos transaccionáveis em mercado, sujeitos à lei da oferta e da procura. Os cupões zero implícitos são funções de puro desconto estimadas a partir de obrigações do tesouro com cupão, geralmente com o recurso a um mecanismo de Bootstrap como o exposto em Sundaresan (2002). Este mecanismo torna-se, contudo, de difícil aplicação quando não existem obrigações do Tesouro com maturidade/data de pagamento de cupões nas datas exactas sobre as quais se pretendem extrair os zeros implícitos (situação bastante comum na prática).

Com base no princípio de não arbitragem e na teoria dos mercados eficientes, o preço das *Coupon Strips* tende a convergir para os cupões zero implícitos, caso contrário existirão oportunidades de arbitragem tal como descrito em Sundaresan (2002).

Optou-se pelo cálculo das *yields* para as maturidades intermédias através de interpolação linear, por se tratar de um método simples e devido ao facto de se possuir informação sobre as *yields* anuais de obrigações de cupão zero com maturidade até 27 anos. A alternativa teoricamente mais sólida, mas de morosa implementação, seria o ajustamento da *yield curve* com recurso a funções *splines* (junções de vectores polinomiais) de forma a evitar os pontos de descontinuidade entre observações.

No cálculo da duração das obrigações de taxa variável, assumiu-se que as taxas de cupão futuras seriam as taxas *forward* ou o máximo entre estas e a taxa de cupão mínima, quando existente. Especificando, no caso de uma obrigação cuja taxa de cupão é o mínimo entre uma taxa fixa e a taxa *Eurolibor* a 3 meses adicionada de um prémio de risco, foi aplicado o procedimento *infra* exposto.

Calcularam-se as taxas de juro sem risco *forward* para as datas de pagamento dos cupões, adicionou-se o *spread* de risco entre a *Eurolibor* a 3 meses e os Bilhetes de Tesouro com maturidade dentro de 3 meses e o prémio face à *Eurolibor* que as obrigações ofereciam. Em seguida, comparou-se a taxa obtida com a taxa mínima de cupão e seleccionou-se a maior destas.

Determinou-se a duração de cada sub-carteira através da média ponderada (pelo valor actual à taxa de juro com risco) das durações das obrigações individuais que compunham cada sub-carteira. Para cada *cash flow* actualizado, a taxa de actualização utilizada resultou da soma da *yield* sem risco com o respectivo *credit spread* para o sector e *rating* do emitente da obrigação e para a maturidade do *cash flow*.

Os *credit spreads* exigidos para os diversos sectores económicos, *ratings* e maturidades, são os disponibilizados pelo Banco J.P. Morgan no site [www.riskmetrics.com](http://www.riskmetrics.com). Como a informação disponibilizada não fornecia *credit spreads* para as obrigações governamentais, as durações destas obrigações foram calculadas somente com base nas *yields* sem risco.

De todas as obrigações modeladas apenas duas possuíam uma opção de (re)compra por parte dos seus emitentes. Teoricamente, estas obrigações deveriam ser analisadas como uma carteira composta por um determinado montante investido numa obrigação idêntica mas sem a opção de compra e uma posição curta numa opção de compra sobre essa obrigação. Esta opção de compra pode ser avaliada através do modelo de Black, conforme exposto em Hull (2000), só que para tal seria necessário ter-se uma estimativa do desvio padrão do preço *forward* (e não *spot*) da obrigação sem a opção de compra, informação não disponível. Assim e dado o reduzido montante investido nestas duas obrigações com opção de compra, assumiu-se, por simplificação, que a sua duração seria idêntica à de obrigações sem opção de compra.

Obtidas as durações das três sub-carteiros, assumiu-se que para efeitos de mensuração do risco de taxa de juro e de crédito, a detenção daquelas sub-carteiros era equivalente à detenção de três obrigações de cupão zero com maturidades iguais à duração das

respectivas sub-carteiras e com risco de crédito idêntico ao risco de crédito das referidas sub-carteiras.

Procedeu-se à simulação dos preços das 3 mencionadas obrigações através do modelo de taxa de juro exposto no ponto 3.2.3.. Utilizou-se como variável representativa da taxa de juro de curto prazo sem risco, a *yield* dos bilhetes do Tesouro Alemães com maturidade de 3 meses. Foi recolhida a série histórica das *yields* diárias (em regime de capitalização contínua) desde 01/01/1998 a 31/12/2002.

Foram estimados os parâmetros do modelo através de (14), (15), (16) e da minimização de (18). Na estimação do parâmetro  $a$  utilizou-se o preço de mercado dos bilhetes do Tesouro Alemães com maturidade dentro de 3 e 6 meses e o preço de mercado das *Coupon Strips* com maturidades dentro de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 anos.

Estimados os parâmetros do modelo, utilizou-se a equação (19) para simular o comportamento diário da taxa de juro de curto prazo sem risco, tendo-se considerado 260 dias para a simulação da cotação da taxa ( $time\ step = 1/260$ ). A componente aleatória do processo estocástico assentou na simulação de variáveis aleatórias Normais Reduzidas.

Obtida a taxa de juro de curto prazo dentro de um ano, determinou-se o preço das três obrigações de cupão zero dentro de igual período através da equação (12) considerando que estas não possuíam risco de crédito. Através de (13) obtiveram-se as respectivas *yields* sem risco. Todo este processo foi repetido 5000 vezes, tendo-se gerado 5000 valores possíveis para *yields* sem risco das obrigações de cupão zero dentro de um ano.

#### 4.1.3.2. Simulação dos *ratings* futuros

Aplicou-se o modelo *Credit Metrics*, tendo sido analisado o risco de crédito associado às 3 sub-carteiras resultantes do processo de *mapping*. Para tal, em primeiro lugar, calculou-se o *rating* médio de cada sub-carteira, correspondente à média ponderada (pelo valor actual) dos *rating* individuais de cada obrigação. Os *ratings* foram retirados do sistema de informação Bloomberg. Os *ratings* individuais utilizados foram os da Standard and Poor's, pelo que, todo o modelo utiliza a classificação desta agência de *rating*.

Com base num ficheiro disponibilizado pelo Banco JP Morgan no site [www.riskmetrics.com](http://www.riskmetrics.com) construiu-se a matriz das probabilidades de transição de *rating* a um ano.

O modelo utilizado assume que se o valor de mercado dos activos da entidade emitente descer abaixo de um dado limiar, esta entrará em incumprimento. Este raciocínio é alargado no sentido de determinar uma relação entre a rendibilidade dos activos e o *rating* da empresa. Tal como para os activos financeiros, considera-se que a rendibilidade do valor de mercado dos activos da empresa comporta-se segundo uma distribuição Normal. Assumindo-se que o valor esperado é nulo, determinaram-se os diversos quantis (limiares) da distribuição da rendibilidade dos activos que correspondem aos *ratings* possíveis.

Foi necessário estimar-se o desvio padrão e o coeficiente de correlação entre o risco de crédito das 3 sub-carteiras, teoricamente estes deveriam corresponder ao desvio padrão e ao coeficiente de correlação entre a rendibilidade dos activos das entidades emitentes das 3 sub-carteiras. Contudo, não se dispôs de informação histórica para tal. A questão foi contornada utilizando-se como variável representativa para a rendibilidade dos activos:

- a rendibilidade do índice accionista Dow Jones Euro Stoxx Bank Index para a rendibilidade dos activos dos emitentes da carteira de obrigações de bancos e empresas financeiras;
- a rendibilidade da acção da empresa de telecomunicações, entidade emitente das obrigações que compõem a sub-carteira de obrigações de empresas de telecomunicações e
- a rendibilidade do preço das *Coupons Strips* Alemãs com maturidade de 2,5 anos para a sub-carteira de obrigações governamentais com duração de 2,71 anos.

Dado que se concluiu pela não nulidade de todos os coeficientes de correlação apurados, com base nas cotações históricas diárias de 05/01/1999 a 31/12/2002, para cada sub-carteira de obrigações foram geradas variáveis aleatórias Normais correlacionadas, variáveis essas que representam a rendibilidade futura dos activos. Estas variáveis foram obtidas a partir da geração de variáveis aleatórias Normais Reduzidas correlacionadas e da sua multiplicação pelo respectivo desvio padrão da taxa instantânea de rendibilidade da variável representativa.

As mencionadas variáveis Normais correlacionadas calcularam-se através da geração de variáveis aleatórias Normais Reduzidas independentes e da aplicação da decomposição de Chelosky à matriz de variância-covariância estimada para a rendibilidade dos activos.

Em função dos valores da rendibilidade futura dos activos, dos limiares da rendibilidade dos activos e da matriz das probabilidades de transição, foi atribuído o *rating* futuro para cada sub-carteira. Foram simulados 5000 *ratings* futuros para cada sub-carteira de obrigações.

#### 4.1.3.3. Obtenção dos preços futuros simulados das obrigações

Em função do *rating* no próximo ano simulado determinou-se o *credit spread* associado ao *rating* futuro. Com base na referida informação disponibilizada pelo Banco J.P. Morgan foram retirados os *credit spreads* exigidos para os diversos *ratings* de obrigações emitidas por bancos e *utilities* com a maturidade (duração) estimada anteriormente. Como o ficheiro utilizado não dispunha de *credit spreads* para as obrigações governamentais foi assumido para a sub-carteira de obrigações governamentais um *credit spread* nulo para o *rating* AAA, sendo adicionado sucessivamente 10 pontos base para cada um dos *ratings* inferiores.

Adicionou-se o *credit spread* simulado à *yield* sem risco simulada para cada obrigação, obtendo-se assim a respectiva *yield* com risco. A partir desta *yield* com risco e mediante

a inversão de (13) determinou-se o valor futuro simulado de cada obrigação considerando ambos os riscos de crédito e de taxa de juro.

Excepção feita quando a empresa entra em incumprimento, nesse caso o seu valor considerou-se simplesmente como a multiplicação da taxa de recuperação do crédito em caso de incumprimento pelo valor nominal.

As taxas de recuperação de crédito não são constantes, assim para cada cenário de incumprimento foi gerada uma taxa de recuperação de crédito a partir de uma distribuição Beta. A média e o desvio padrão da taxa de recuperação de crédito deveria ser atribuída com base no nível de subordinação do crédito. Contudo, como essa informação não se encontra disponível, assumiram-se determinados valores para a média e o desvio padrão da taxa de recuperação de crédito de cada sub-carteira e consideraram-se três distribuições Beta com as assumidas médias e desvios padrão.

Em seguida, comparou-se cada resultado simulado com o preço inicial de cada obrigação respectiva e obteve-se a taxa de rendibilidade aritmética anual do preço de cada obrigação. Multiplicando a respectiva taxa de rendibilidade pelo valor de mercado a 31/12/2002 de cada sub-carteira, determinaram-se os resultados (ganhos/perdas) associados à detenção de cada sub-carteira de obrigações durante o próximo ano.

Como não se dispunha do preço de mercado de cada sub-carteira, mas apenas do seu valor de mercado, e também por uma questão de coerência metodológica (e de forma a tentar corrigir o enviesamento do ajuste do modelo aos preços históricos efectivamente registados a 31/12/2002), calcularam-se os preços de cada sub-carteira a 31/12/2002 de acordo com o modelo utilizado.

Em primeiro lugar determinaram-se através de (12) os preços das obrigações a 31/12/2002 não considerando o risco de crédito, em função da taxa de juro de curto prazo sem risco que vigorava em 31/12/2002. Seguidamente, determinam-se as respectivas *yields* sem risco através de (13), somaram-se a estas os respectivos *credit spreads* associados aos *ratings* a esta data e mediante a inversão de (13) foi então apurado o preço inicial (considerando o risco de crédito) de cada sub-carteira a 31/12/2002.

#### **4.1.4. Risco de desenvolvimento adverso de reservas**

A carteira da Seguradora é recente, não se encontrando ainda estabilizada e tendo registado um crescimento considerável nos últimos anos. Assim, para se poder aplicar métodos estatísticos aos montantes pagos, excluíram-se os montantes pagos referentes a sinistros ocorridos nos anos de 1997 e 1998, em virtude da ordem de grandeza dos montantes pagos referente a estes anos ser claramente diferente dos restantes anos. Consequentemente, assumiu-se que a provisão respeitante a estes anos está correctamente constituída, pressuposto que é não irrealista, visto que já decorreram diversos anos sobre a ocorrência desses sinistros e que o Seguro Automóvel não é um seguro de cauda longa em termos do número de anos de desenvolvimento dos sinistros, especialmente, no que concerne aos sinistros que envolvam apenas danos materiais.

Aplicou-se à matriz dos montantes pagos de sinistros ocorridos entre 1999 e 2002 um modelo generalizado de Poisson com sobre-dispersão. Efectuou-se o teste da *quasi-deviance* à escala tendo o modelo revelado-se globalmente válido.

Realizou-se igualmente o teste da nulidade dos parâmetros, tendo todos os parâmetros revelado-se significativos, com excepção do parâmetro associado ao efeito provocado pelo ano de ocorrência de 1999 (1º ano de ocorrência). A possível justificação económica poderá prender-se com o facto dos sinistros deste ano já se encontrarem quase todos completamente desenvolvidos. De facto, a provisão de balanço em 31/12/2002 para sinistros ocorridos em 1999 representava apenas 4,7% da provisão total. Contudo, dado que a carteira não se encontra totalmente estabilizada e que se consideraram apenas 4 anos de ocorrência (incluindo 1999), optou-se pela manutenção do referido parâmetro.

O desvio padrão da reserva total estimada é da ordem dos 14%, valor considerado aceitável visto que a carteira não se encontra totalmente estabilizada.

No que concerne à análise dos resíduos, verificou-se que o seu comportamento segue aproximadamente uma distribuição Normal. A representação gráfica dos resíduos relativamente aos valores ajustados  $\hat{\mu}_i$ , apresentam uma média aproximadamente nula e um intervalo de variação quase constante, não se observando variações sistemáticas. Por último, as representações gráficas dos resíduos relativamente a cada uma das variáveis explicativas, não parece apresentar nenhum padrão sistemático.

Assim, com base na análise efectuada conclui-se pela validade global do modelo generalizado de Poisson com sobre-dispersão.

Posteriormente, aplicou-se um procedimento de Bootstrap à matriz dos montantes pagos associado ao modelo de Poisson com sobre-dispersão. Foram simulados 5000 matrizes dos montantes pagos e apurados 5000 valores possíveis para o valor actual da provisão para sinistros. Subtraindo ao valor da provisão para sinistros à data de 31/12/2002 (para sinistros ocorridos a partir de 1999) o valor simulado, obtiveram-se os resultados (suficiência/insuficiência) da provisão para sinistros.

Relativamente aos resultados da aplicação do procedimento Bootstrap, importa referir que o desvio padrão da reserva estimada é da ordem dos 15%, valor considerado aceitável. No que concerne à análise dos resíduos, a representação gráfica dos resíduos relativamente a cada uma das variáveis explicativas não evidenciou nenhum padrão sistemático.

#### **4.1.5. Risco de sinistralidade futura**

Assumiou-se que as indemnizações agregadas seguiam um processo composto e que a distribuição do número de sinistros era independente da distribuição do montante dos sinistros individuais. Assumiou-se também que os sinistros são independentes e identicamente distribuídos.

Em primeiro lugar, averiguou-se qual a distribuição teórica que melhor descrevia o número de sinistros da carteira. Assim, com base numa listagem agregada com o número de sinistros ocorridos no último ano por apólice, investigou-se através de um teste do Qui-quadrado a um nível de significância de 5% qual das distribuições, Poisson ou Binomial Negativa, melhor se adaptava ao número de sinistros por apólice. Os parâmetros destas distribuições foram estimados através do método da máxima verosimilhança, a partir dos dados agregados.

A distribuição de Poisson foi rejeitada. A distribuição Binomial Negativa foi aceite tendo apresentado um aceitável ajustamento aos dados ( $p$ -value de 24,3%). Assumindo que a distribuição do número de sinistros por apólice seguia uma Binomial Negativa determinaram-se os parâmetros da distribuição do número de sinistros da carteira de apólices em vigor em 31/12/2002, que não é mais que a distribuição da soma de  $n$  Binomiais Negativas independentes e identicamente distribuídas ( $n$  = número de apólices em vigor em 31/12/2002).

Em segundo lugar, investigou-se a distribuição que melhor se adaptava aos montantes dos sinistros individuais com base na listagem do custo total (montantes pagos mais provisão para sinistros) sinistro a sinistro de todos os sinistros ocorridos e declarados no exercício de 2002.

Foram testadas as distribuições Lognormal, de Pareto e Gama. Utilizaram-se as estimativas da máxima verosimilhança para a Lognormal e da máxima verosimilhança e do método dos momentos para a Pareto e a Gama. Efectuou-se o teste do Qui-quadrado ao nível de significância de 5% para todas as distribuições. A distribuição Gama foi claramente rejeitada bem como a estimativa obtida através do método da máxima verosimilhança para a distribuição de Pareto. A distribuição que melhor se adaptou aos dados foi a de Pareto com os parâmetros obtidos pelo método dos momentos registando um  $p$ -value de 19%, tendo presente o valor da estatística formulada em (36), apresentando, porém, apenas um grau de liberdade. A distribuição Lognormal foi rejeitada, apresentando um  $p$ -value de apenas 0,7%.

Se se excluir a cauda da distribuição (montantes individuais superiores a 30.000 euros) constata-se que a Lognormal apresenta um melhor ajustamento que a Pareto. Assim, efectuou-se um teste do Qui-quadrado para uma distribuição Lognormal truncada em 30.000 (parâmetros obtidos pelo método da máxima verosimilhança) e com cauda seguindo a distribuição de Pareto com os parâmetros obtidos pelo método dos momentos. Esta distribuição apresentou um  $p$ -value de 20% e dois graus de liberdade.

Efectuou-se, igualmente, o Teste de Kolmogorov-Smirnov, ao nível de significância de 5%, para os decis das distribuições Lognormal e de Pareto e Lognormal truncada com cauda Pareto. Todas as distribuições foram aceites. Com base nos resultados de ambos os testes escolheu-se a distribuição Lognormal truncada em 30.000 euros com distribuição Pareto a partir deste montante.

Assumindo que o número de sinistros segue uma distribuição Binomial Negativa e que o montante dos sinistros individuais segue uma Lognormal truncada com cauda Pareto, simularam-se, através de (33), os montantes das indemnizações agregadas, tendo sido simulados 5000 valores para as indemnizações agregadas do próximo ano referentes às

apólices em vigor em 31/12/2002. Ao valor da provisão para prémios não adquiridos e da provisão para riscos em curso subtraíram-se os valores das indemnizações agregadas simuladas, obtendo-se assim os resultados (suficiência/insuficiência das provisões constituídas) associados à sinistralidade futura no próximo ano.

#### 4.1.6 Agregação dos resultados e determinação do *VaR* e *TCE* da Seguradora

O resultado global da seguradora, tendo presente os diversos tipos de riscos e rubricas modeladas, será igual à soma dos resultados individuais derivados de cada um dos factores de risco.

Assim, foram somados risco a risco, cada um dos valores simulados, apurando-se então 5000 valores possíveis para os resultados da seguradora no próximo ano, mantendo a sua estrutura de activos e passivos inalterada. Construiu-se então a função de distribuição empírica dos resultados globais e apurou-se o *VaR* e o *TCE* aos níveis de confiança de 95%, 97,5% e 99%, respectivamente, determinando-se o requisito de capital da seguradora. Finalmente, comparou-se este valor com o capital próprio da seguradora. Para efeitos de salvaguarda da entidade fornecedora dos dados, todos os valores monetários encontram-se multiplicados por uma constante.

## 4.2. Resultados

### 4.2.1. Risco de Preço

Foram obtidas as seguintes estimativas para os parâmetros do modelo:

Quadro 9 - Estimativas dos parâmetros dos índices accionistas

Índice	Estimativas
Média anualizada	3,59%
Desvio padrão anualizado	18,46%

Com base no teste da nulidade dos regressores, concluí-se pela validade estatística de todas as estimativas para os *betas* a um nível de significância de 5%.

Quadro 10 - Estimativas dos *betas* individuais e da carteira

Acção	<i>Beta</i>	Validade do regressor
		<i>t</i> observado
1	0,43	11,38
2	0,83	28,33
3	0,75	29,52
4	0,85	25,12
5	0,48	14,28
6	0,72	22,95
7	0,95	21,59
8	1,76	24,13
9	1,24	14,34
10	1,12	28,23
11	1,30	29,45
<i>Beta</i> da carteira	0,81	-

Calculou-se e testou-se a correlação entre a taxa de rendibilidade do índice accionista tido como representativo do comportamento de mercado e a taxa de rendibilidade da taxa de juro de curto prazo, dado que com base no modelo empregue, toda a estrutura temporal das taxas de juro é determinada por esta taxa, tendo-se concluído pela sua nulidade. Tal não implica necessariamente que o risco de preço e de taxa de juro sejam independentes. Porém é possível, caso se testasse a correlação entre o índice accionista e uma *yield* de médio ou longo prazo que os valores obtidos fossem estatisticamente mais significativos.

**Quadro 11 - Teste da nulidade do coeficiente de correlação entre o índice accionista e a taxa de juro de curto prazo**

<i>t</i> observado	1,217
<i>t</i> crítico (10%)	1,645
Conclusão:	$ t \text{ obs}  < t \text{ crit} (2,5\%)$ Aceita-se a nulidade do coeficiente de correlação linear

A partir dos resultados simulados obtiveram-se as seguintes estatísticas não considerando as interligações com os outros riscos:

**Quadro 12 - Resultados risco de preço** (valores em euros)

Nível Confiança	95,0%	97,5%	99,0%
<i>VaR</i>	-21.437	-29.686	-39.189
<i>TCE</i>	-31.885	-38.571	-45.432
Média dos resultados simulados	19.264		
D. Padrão dos resultados simulados	25.901		

Constata-se que os resultados são coerentes com o modelo assumido (modelo não reversivo em relação à média) e parâmetros estimados (tendência positiva mas com elevado desvio padrão). Dada a reduzida exposição ao mercado accionista e com base nos resultados obtidos, o risco de preço dos activos modelados não se apresenta como potencialmente condicionador da situação da solvência da seguradora.

#### 4.2.2. Risco de Taxa de Juro e Risco de Crédito

Obtiveram-se os seguintes resultados do processo de *mapping* e as *infra* expostas estimativas:

**Quadro 13 - *Rating* e duração das sub-carteiras obrigacionistas**

Carteira	<i>Rating</i>	Duração (em anos)
Obrig. Governamentais	AAA	2,71
Obrig. Bancos e Financeiras	AA	5,08
Obrig. Empresa Telecomunicações	A	2,05

**Quadro 14 - Estimativas dos parâmetros do modelo de taxa de juro**

Parâmetros	Valores
$\hat{a} =$	3,0411
$\hat{b} =$	0,1068
$\hat{a} =$	2,9210
$\hat{\sigma} =$	0,0947

Por seu turno, foram calculados os valores *infra* apresentados para a variável representativa da rendibilidade dos activos:

**Quadro 15 - Matriz de variância-covariância das rendibilidades dos activos dos emitentes**

Matriz de variância-covariância	Obrig. Governamentais	Obrig. Bancos	Obrig. Empresa Telecomunicações
Obrig. Governamentais	0,00052	-0,00253	-0,00197
Obrig. Bancos	-0,00253	0,06446	0,04020
Obrig. Empresa Telecomunicações	-0,00197	0,04020	0,16080

Tendo-se efectuado os seguintes testes estatísticos, concluiu-se pela não nulidade dos coeficientes de correlação.

**Quadro 16 - Teste da nulidade do coeficiente de correlação de Pearson**

	Valor observado	Valor crítico (5%)	Conclusão
O. Gover.- O. Bancos e Fin.	-10,86	1,96	Coef. de correl. estatisticamente significativo
O. Gover. - O. Emp. Telec.	-4,88	1,96	Coef. de correl. estatisticamente significativo
O. Bancos e Fin. - O. Emp. Telec.	13,48	1,96	Coef. de correl. estatisticamente significativo

Do processo de simulação obtiveram-se os seguintes resultados:

**Quadro 17 - Resultados risco de taxa de juro e risco de crédito** (valores em euros)

Estatísticas	O. Governamentais	O. Bancos e Fin.	O. Emp. Telecomunicações
Média (res. simulados)	434.435	149.909	35.668
D. Padrão (res. simulados)	3.223	26.657	16.276
<i>VaR</i>			
95%	429.139	84.444	29.883
97,5%	428.076	83.523	29.604
99%	426.668	82.561	29.206
<i>TCE</i>			
95%	427.684	67.355	20.294
97,5%	426.694	50.734	10.846
99%	425.490	2.164	-17.093

Da análise do quadro 17, e não considerando interdependência com os outros factores de risco, excepto o risco de preço, conclui-se pelo reduzido risco de taxa de juro e de crédito da carteira obrigacionista modelada. Os valores obtidos são uma consequência directa dos modelos utilizados, da natureza da carteira e do processo de *mapping*. Não obstante o facto dos valores simulados da taxa de juro de curto prazo sejam um pouco

superiores aos actuais, este efeito é largamente compensado pelo *pull to par effect*, especialmente para as carteiras de obrigações governamentais e de empresas de telecomunicações, que dentro de um ano terão uma duração média de apenas um ano.

Verifica-se, assim, que os valores mais gravosos são essencialmente resultado da degradação do *rating* das entidades emitentes e do conseqüente aumento do *credit spread* exigido. Contudo, dado que a maior massa de probabilidade nas matrizes de probabilidade de transição concentra-se no *rating* actual, as alterações na qualidade de crédito não são muito frequentes.

#### 4.2.3 Risco de Desenvolvimento Adverso de Reservas

Foi aplicado um modelo de Poisson com sobre-dispersão à matriz dos montantes pagos tendo sido obtidos os *infra* apresentados resultados que sustentam a aceitação do referido modelo:

Quadro 18 - Estatísticas obtidas do modelo de Poisson com sobre-dispersão

Quasi-deviance	111.217
Qui-Quadrado de Pearson	110.555
Parâmetro de Escala	36.852
Nº de graus de liberdade	3
Erro padrão total da Reserva	14%

Quadro 19 - Estimativas dos parâmetros do modelo de Poisson com sobre-dispersão

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	Teste de Nulidade dos Parâmetros		
			$W$	$\chi^2_{(1)}$ a 5%	Conclusão
U	15,4555	0,0737	44.025,2947	3,84	Parâmetro significativo
$\beta_1$	-0,8152	0,0828	97,0127	3,84	Parâmetro significativo
$\alpha_1$	0,1298	0,0932	1,9385	3,84	Parâmetro não significativo
$\beta_2$	-2,2827	0,1890	145,8386	3,84	Parâmetro significativo
$\alpha_2$	0,2337	0,0933	6,2735	3,84	Parâmetro significativo
$\beta_3$	-2,8761	0,3637	62,5367	3,84	Parâmetro significativo
$\alpha_3$	0,5434	0,0979	30,8301	3,84	Parâmetro significativo
$\beta_4$	-2,3506	0,2836	68,7002	3,84	Parâmetro significativo

**Quadro 20 - Teste da deviance à escala**

H0: O modelo é adequado	
Deviance à escala ( $D^*$ )	3,02
n	16
p	8
$\chi^2_{(n-p)}$ a 2,5%	15,50
$D^* < \chi^2_{(n-p)}$ a 2,5%: $\Rightarrow$ Aceita-se H0	

Da aplicação do procedimento de Bootstrap resultaram as seguintes estatísticas:

**Quadro 21 - Resultados desenvolvimento da provisão para sinistros** (valores em euros)

Nível Confiança	95,0%	97,5%	99,0%
VaR	289.383	-52.275	-419.817
TCE	-139.775	-396.563	-662.912
Média (res. simulados)	2.184.418		
D. Padrão (res. simulados)	1.137.462		

Constata-se, assim, que não obstante a reserva actual ser suficiente em termos médios, em cenários de desenvolvimento mais adversos, a mesma poderá não ser suficiente para fazer face ao valor actual dos pagamentos futuros.

**4.2.4. Risco de Sinistralidade Futura**

Fôram obtidas as abaixo indicadas estimativas e valores para as distribuições candidatas para modelar o número de sinistros por apólice:

**Quadro 22 - Distribuições candidatas à modelação do número de sinistros por apólice**

N.º de sinistros por apólice				
Distribuição	Parâmetros	Estimativa parâmetros	p-value	Graus de liberdade
Poisson ( $\lambda$ )	$\lambda =$	0,066	0,000	2
Binomial Negativa ( $\alpha, p$ )	$\alpha =$	0,809	0,244	3
	$p =$	0,925		

Por seu turno para o número de sinistros da carteira, obtiveram-se os valores expostos no seguinte quadro:

**Quadro 23 - Distribuição do número de sinistros da carteira**

Binomial Negativa	
$\alpha =$	58.211
$p =$	0,925
Valor Esperado	4.754
Desvio Padrão	72

Em relação à escolha da distribuição dos montantes individuais, foram apurados os seguintes valores para as distribuições candidatas:

**Quadro 24 - Distribuições candidatas à modelação dos montantes individuais dos sinistros**

Distribuição	Parâmetros	Estimativa parâmetros	p-value	Graus de liberdade
Lognormal est. Máxima Verosimilhança	$\mu =$ $\sigma =$	6,702 1,346	0,007	2
Pareto Método dos Momentos	$\alpha =$ $k =$	2,051 2.357,180	0,192	1
Pareto Máxima Verosimilhança	$\alpha =$ $k =$	0,194 4,670	0	2
Gama Método dos Momentos	$\alpha =$ $\beta =$	0,025 89.374,516	0	2
Gama Máxima Verosimilhança	$\alpha =$ $\beta =$	7,483 299,604	0	2
Lognormal est. Máxima Verosimilhança truncada em € 30.000 com cauda Pareto est. Método dos Momentos a partir deste Montante	$\mu =$ $\sigma =$ $\alpha =$ $\beta =$	6,702 1,346 2,051 2.357,180	0,199	2

Foi ainda efectuado o teste de Kolmogorov-Smirnov para as distribuições Lognormal, de Pareto e Lognormal truncada com cauda de Pareto:

**Quadro 25 - Resultados do teste Kolmogorov-Smirnov**

Distribuição	Estatística de teste	Valor crítico (5%)	Conclusão
Lognormal est. Máxima Verosimilhança	20,75%	33,84%	Distribuição aceite
Pareto Método dos Momentos	16,33%	33,84%	Distribuição aceite
Lognormal est. Máxima Verosimilhança truncada em € 30.000 com cauda Pareto est. Método dos Momentos a partir deste Montante	20,75%	33,84%	Distribuição aceite

Finalmente calcularam-se as seguintes estatísticas referentes aos resultados futuros simulados:

**Quadro 26 - Resultados risco de sinistralidade futura** (valores em euros)

Nível Confiança	95,0%	97,5%	99,0%
<i>VaR</i>	-965.429	-1.284.296	-1.946.351
<i>TCE</i>	-1.656.059	-2.197.545	-3.156.590
Média (res. simulados)	350.671		
D. Padrão (res. simulados)	811.324		

Constata-se, assim, que este factor de risco é aquele que apresenta resultados futuros simulados mais gravosos para a seguradora, em virtude da distribuição das indemnizações agregadas ter uma cauda algo gravosa, embora não particularmente extensa.

#### 4.2.5. Resultados Globais

Determinados os resultados futuros simulados decorrentes dos diversos factores de risco, procedeu-se ao cálculo da distribuição dos resultados globais da seguradora no próximo ano e determinou-se o requisito de capital com base nos valores do *VaR* e do *TCE*.

Recorde-se que cada resultado global simulado será igual à soma dos resultados individuais simulados de cada um dos factores de risco. Obtidos os 5000 valores possíveis para os resultados da seguradora no próximo ano, mantendo a sua estrutura de activos e passivos inalterada, apurou-se a função de distribuição empírica dos resultados globais e apurou-se o *VaR* e o *TCE* aos níveis de confiança de 95%, 97,5% e 99%, respectivamente, determinando-se o requisito de capital da seguradora.

**Quadro 27 - Resultados globais da Seguradora** (valores em euros)

Nível Confiança	95,0%	97,5%	99,0%
<i>VaR</i>	330.145	-219.838	-1.156.046
<i>TCE</i>	-826.944	-1.727.295	-3.515.244
Média	2.565.792		
D. Padrão	1.499.867		

Como se pode constatar no quadro 27, o *TCE* é uma medida de risco mais conservadora que o *VaR*, apresentando requisitos de capital, neste caso concreto, consideravelmente mais elevados, devido ao facto da cauda da distribuição dos resultados futuros ser gravosa, apesar de curta.

Assim, tomando o *TCE* como medida de risco e com base nos activos, responsabilidades e factores de risco modelados, nos modelos e pressupostos assumidos, a 31/12/2002 a seguradora necessitaria de um capital de € 3.515.244, para a um nível de confiança de 99%, assegurar a solvência, mantendo a actual estrutura de activos e responsabilidades inalteradas. Tendo presente que o capital próprio da Empresa de Seguros a essa data era de € 4.378.078, conclui-se que de acordo com o modelo formulado a Seguradora encontrava-se adequadamente capitalizada a 31/12/2002.

## 5. Conclusão

O modelo formulado na presente dissertação teve como objectivo evidenciar que é possível a construção de um modelo de solvência que, com base nos principais factores de risco que influenciam a actividade seguradora e na estrutura de activos e passivos a uma dada data, determine o requisito de solvência, a partir do *TCE*, para um determinado horizonte temporal.

A elaboração do modelo requer a identificação das principais rubricas geradores de valor para a empresa de seguros e dos riscos que afectam estas rubricas, bem como, a consideração da sua interdependência, processo que por si só levará a um conhecimento mais profundo de toda a actividade e organização da seguradora. O modelo permite verificar se a empresa de seguros se encontra adequadamente capitalizada à data da avaliação e fornece uma base objectiva para a alocação do capital pelas diversas áreas, uma vez determinado o requisito de capital.

A construção e aplicação prática do modelo permitiu constatar que os resultados obtidos dependem fortemente das estimativas para os parâmetros e dos dados históricos a partir dos quais os parâmetros são estimados. Assim, conclui-se que a aplicação de modelos internos obrigará a um considerável investimento das empresas de seguros em formação técnica dos quadros de pessoal, em meios informáticos e no acesso a bases de dados que disponham informação relevante e fiável.

Constatou-se, igualmente, que a questão da interdependência entre os riscos é igualmente uma questão primordial na determinação dos requisitos de capital, ao qual as administrações das empresas de seguros e as entidades de supervisão deverão dar especial atenção, visto que a consideração de excessivos benefícios de diversificação poderá resultar em requisitos de capital consideravelmente mais reduzidos.

No que concerne aos resultados obtidos na parte prática, verificou-se que a empresa de seguros apresentava uma carteira de activos conservadora com reduzido risco de taxa de juro e risco de crédito. Dado os parâmetros do modelo considerado e a reduzida exposição aos mercados accionistas, o risco de preço não se afigura como condicionante da solvência da empresa de seguros. Porém, em virtude da instabilidade registada nos últimos anos no mercado accionista, é possível que os resultados sejam menos favoráveis que os resultados simulados.

Da aplicação do mecanismo de Bootstrap em conjugação com o modelo linear generalizado de Poisson com sobre-dispersão conclui-se pela suficiência da provisão para sinistros descontada à taxa de juro sem risco em termos de valor esperado, mas detectou-se algum risco de desenvolvimento adverso de reservas. Em termos individuais, o risco potencialmente mais exigente em termos de requisito de capital é o associado à sinistralidade futura da carteira actualmente em vigor. Tal deve-se ao facto da distribuição das indemnizações agregadas possuir uma cauda, que apesar de não ser particularmente espessa, é algo gravosa.

No que concerne aos resultados globais, constata-se que o capital próprio da seguradora seria suficiente, a um nível de confiança de 99% de probabilidade, para fazer face ao

requisito de solvência determinado pelo *TCE*, a 31/12/2002. Ressalve-se, contudo, que se trata de uma análise estática que pressupõe a manutenção da actual estrutura de activos e responsabilidades, não considerando, nomeadamente, a subscrição de novos contratos de seguro, pelo que, a mesma deve ser realizada periodicamente.

Refira-se ainda que o *TCE* afigurou-se claramente como uma medida mais prudente que o *VaR* em termos de requisitos de solvência e que os benefícios de diversificação apurados têm um impacto relevante em termos da redução dos requisitos de capital.

O modelo proposto assumiu diversos pressupostos e dado o carácter académico deste trabalho foram efectuadas simplificações de forma a facilitar os cálculos. Em seguida são expostas as principais limitações do modelo e apresentadas soluções para as mesmas.

Assumiui-se que a taxa de rendibilidade das acções e dos índices accionistas seguia uma distribuição Normal. Um estudo mais realista implicaria verificar se é razoável assumir-se que as rendibilidades históricas dos activos são independentes e identicamente distribuídas. A existência de heteroscedasticidade nas séries históricas, violará o pressuposto que as rendibilidades são identicamente distribuídas. A existência de autocorrelação nas séries temporais violará a suposição que as rendibilidades dos activos são independentes.

Caso se detectasse a presença de autocorrelação nas séries temporais, uma adaptação possível seria a utilização de um modelo *Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, designadamente, o modelo *Exponentially Weighted Moving Average*, exposto em J.P. Morgan e Reuters (1996).

Em relação à carteira obrigacionista foi efectuado o seu *mapping* para obrigações de cupão zero através da duração. A duração possui diversas limitações, a saber: assume que as alterações na *yield curve* são paralelas, ou seja, pressupõe que as *yields* para todas as maturidades são perfeitamente correlacionadas; a duração é uma aproximação linear da variação percentual do valor de uma obrigação em função de uma variação na *yield*, desprezando todos os termos do desenvolvimento em série de Taylor de ordem superior à primeira, sendo assim a aproximação via duração é apenas válida para pequenas variações na *yield*.

Com a finalidade de se evitar as limitações da duração, deverá ser efectuado o *mapping* da carteira obrigacionista através do *cash flow mapping*, ressalve-se, contudo, que este processo é mais exigente em termos do número de parâmetros a serem estimados.

Assumiui-se, por falta de dados, que a distribuição conjunta dos riscos pertence à Família Elíptica de distribuições e que o coeficiente de correlação linear é uma medida adequada da interdependência entre os factores de risco. Teoricamente, deveria proceder-se à determinação analítica ou através do recurso a métodos numéricos da função de distribuição conjunta dos riscos, procedimento contudo, impraticável na maioria das situações.

A solução consistirá em modelar a estrutura de dependência entre os riscos com recurso ao conceito matemático das funções Cópula, dado que, para funções de distribuição

multivariadas contínuas, as marginais univariadas e a estrutura de dependência multivariada podem ser separadas, sendo a estrutura de dependência representada por uma função Cópula.

Por último, refira-se que o raciocínio subjacente à aplicação do *TCE* é efectuado sobre condições normais de mercado, isto é, os parâmetros são estimados com base numa amostra histórica que cobre um período suficientemente alargado e que poderá conter, ou não, a ocorrência de acontecimentos extremos. É importante frisar que o comportamento conjunto dos factores de risco tende a alterar-se em contextos extremamente desfavoráveis. Deste modo, uma vez formulado o modelo, e independentemente do nível de confiança escolhido, torna-se importante testar os resultados fornecidos por este em contextos adversos, com vista a incorporação de uma carga adicional de prudência. Este processo é vulgarmente designado por *stress testing*.

Em termos ideais a estrutura de dependência, deveria incorporar o conceito de dependência caudal, ou seja, o grau de dependência na cauda da distribuição, de forma a aferir-se o comportamento particular dos valores extremos. As distribuições elípticas pressupõem a independência caudal, contudo, o modelo formulado permite a simulação de resultados em situações extremas através da estimativa dos parâmetros (em particular dos desvios padrão e das correlações entre riscos) em períodos de elevada incerteza ou de crise económica, potencialmente geradores de elevadas perdas conjuntas, como por exemplo, o período referente à crise dos mercados asiáticos ou período pós 11 de Setembro de 2001.

Como proposta de trabalho futuro fica a modelação da interdependência entre os riscos através de funções Cópula e a utilização de medidas alternativas ao coeficiente de correlação linear, designadamente, o  $\tau$  de Kendall e o  $\rho$  de Spearman.

## Bibliografia

- Artzner, P. (1999), Application of Coherent Risk Measures to Capital Requirements in Insurance, *North American Actuarial*, vol. 2, n.º 2, pp. 11-25.
- Basel Committee on Banking Supervision (2001), *Consultative Document: The Internal Ratings-Based Approach*, Bank for International Settlements.
- Centeno, M. (2003), *Teoria do Risco na Actividade Seguradora*, Oeiras: Celta Editora.
- Cox, J., Ingersoll, J. e Ross, S. (1985), A Theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, vol. 53, n.º 2, pp. 373-407.
- Dowd, K. (1998), *Beyond Value at Risk, The New Science of Risk Management*, Chichester: John Wiley & Sons.
- Elton, E. e Gruber, M. (1995), *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 5ª Edição, New York: John Wiley & Sons.
- Embrechts, P., McNeil, A. e Straumann D. (1999), Correlation: Pitfalls and Alternatives, *RISK* n.º 5, pp. 69-71.
- Embrechts, P., Lindskog, F. e McNeil, A. (2003), Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, in: *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Karlsruhe: S. Rachev, Elsevier.
- England, P. e Verral, R. (1999), Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving, *Insurance: Mathematics and economics*, vol.º 25, n.º 3, pp. 281-293.
- Fischer, T., May, A. e Walther, B., (2002), *Simulation of the Yield Curve: Checking a Cox-Ingersoll-Ross Model*, Darmstadt: Stochastik und Operations Research, Technische Universität Darmstadt.
- Hilier, S. e Lieberman, G. (1995), *Introduction to Operations Research*, New York: McGrae-Hill, Inc..
- Hull, J. (2000), *Options, Futures and Other Derivatives*, 4ª Edição, New Jersey: Prentice Hall.
- J.P. Morgan e Reuters (1996), *Risk Metrics<sup>TM</sup> – Technical Document*, 4ª Edição, New York: Morgan Guaranty Trust Company.
- J.P. Morgan (1997), *CreditMetrics<sup>TM</sup> – Technical Document*, New York: J. P. Morgan & Co Incorporated.
- Klugman, S., Panjer, H. e Wilmot G. (1998), *Loss Models, From Data to Decisions*, New York: John Wiley & Sons, Inc..
- Lintner, J. (1965), Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification, *Journal of Finance*, pp. 587-615.

McCullagh, P. e Nelder, J. (1989), *Generalised Linear Models*, 2.<sup>a</sup> Edição, London: Chapman and Hall.

Panning, W. (1999), The Strategic Uses of Value at Risk: Long Term Capital Management for Property/Casualty Insurers, *North America Actuarial Journal*, vol. 3, n.º 2, pp. 84-105.

Pinheiro, P., Silva J., e Centeno M. (2000), *Bootstrap Methodology in Claims Reserving*, Lisboa: Centro de Matemática Aplicada à Previsão de Decisão Económica, Instituto Superior de Economia e Gestão.

Ramos, F. (2000), *Aplicação dos Modelos Lineares Generalizados à Previsão de Reservas para Sinistros*, Tese de Mestrado, Lisboa: Instituto Superior de Economia e Gestão.

Reis, A. (2001), *Teoria da Ruína*, Lisboa: Centro de Matemática Aplicada à Previsão de Decisão Económica, Instituto Superior de Economia e Gestão.

Renshaw, A. e Verrall, R. (1998), A Stochastic Model Underlying the Chain Ladder Technique, *British Actuarial Journal*, vol. 4, n.º 4, pp. 903-923.

Schröder, M. (1996), The Value at Risk Approach, in: *Proceedings of 6<sup>th</sup> International AFIR-Colloquium*, vol. 1, Nürnberg: AFIR.

Sharpe, W. F. (1964), Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Condition of Risk, *Journal of Finance*, pp. 425-442.

Sundaresan, S. (2002), *Fixed Income Markets and Their Derivatives*, 2.<sup>a</sup> Edição, Cincinnati, South Western.

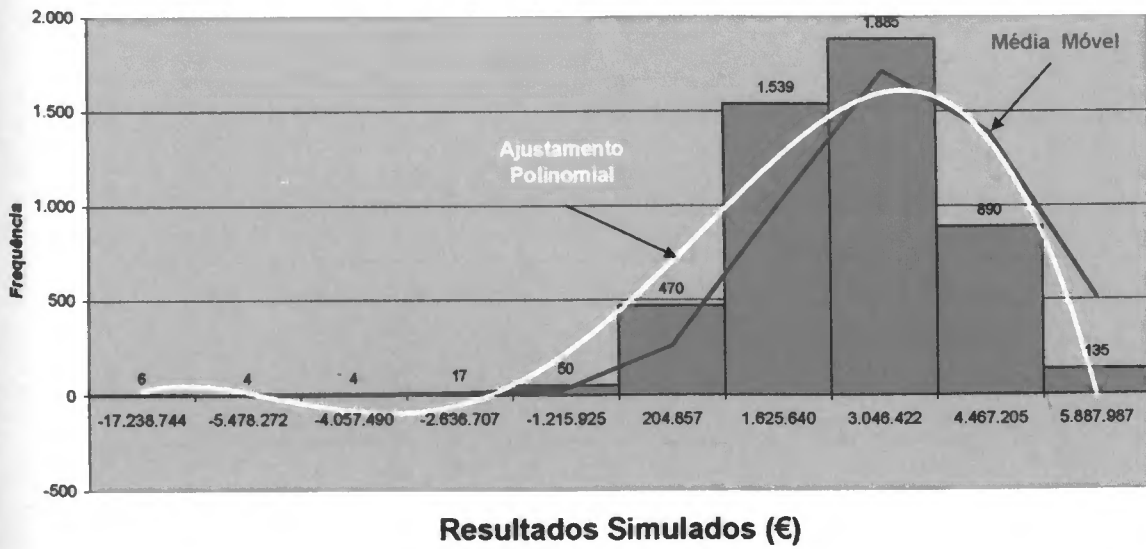
Turkman M. e Silva, G. (2000), *Modelos Lineares Generalizados - da teoria à prática*, Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística.

Wirch, J. (1999), A synthesis of risk measures for capital adequacy, *Insurance: Mathematics and Economics*, vol.º 25, n.º 3, pp. 337-347.

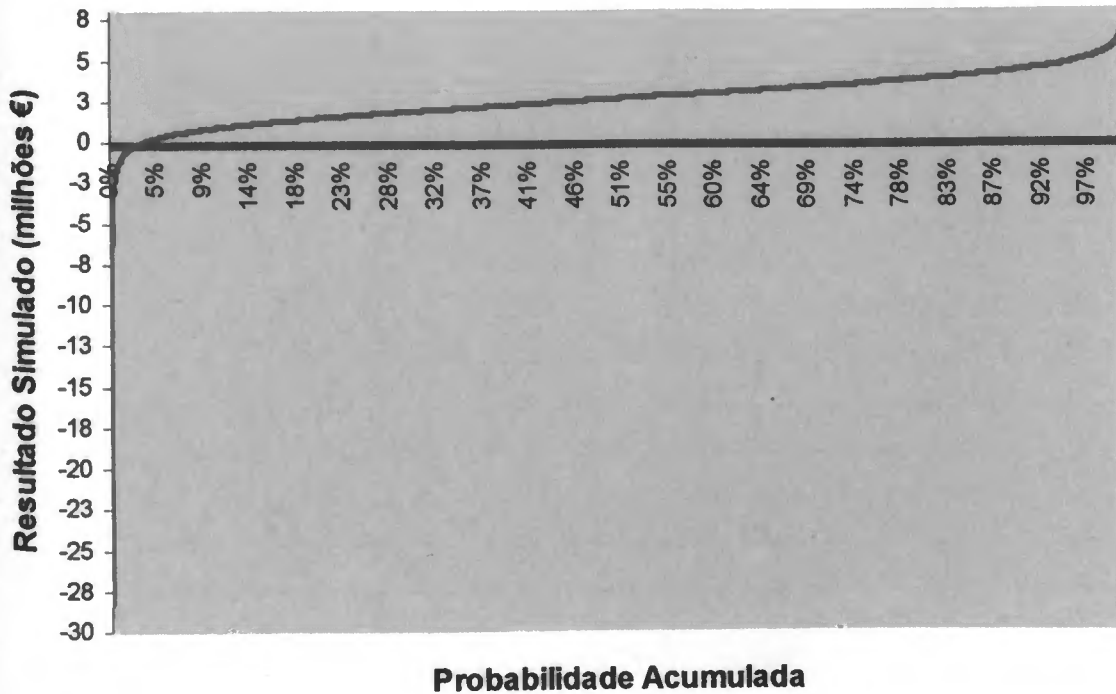
# **Anexo 1**

## **Histogramas e Funções de Distribuição Empírica dos Resultados Obtidos**

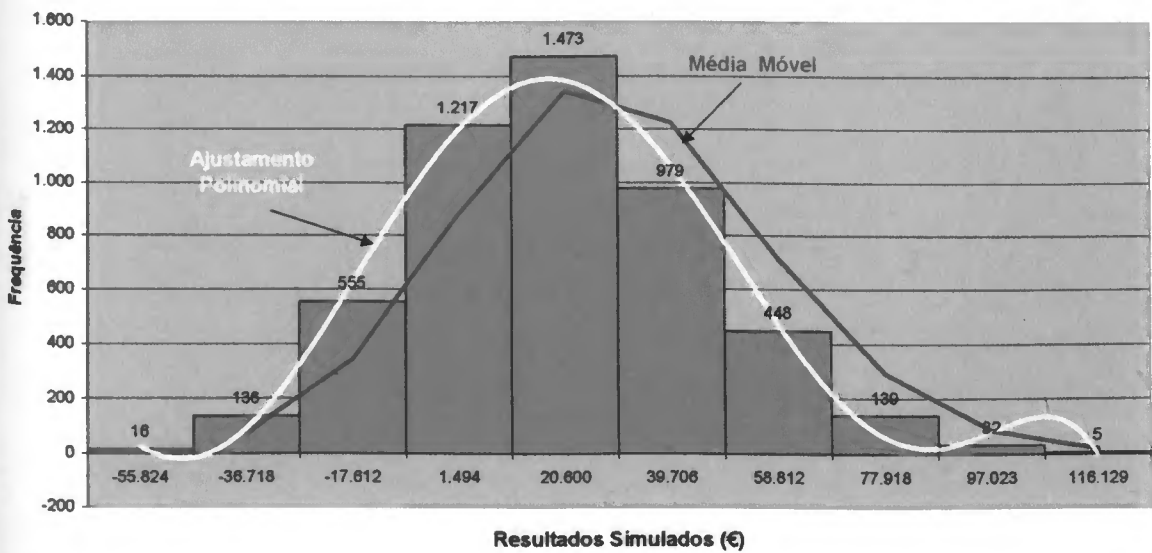
## Histograma dos Resultados Futuros Simulados



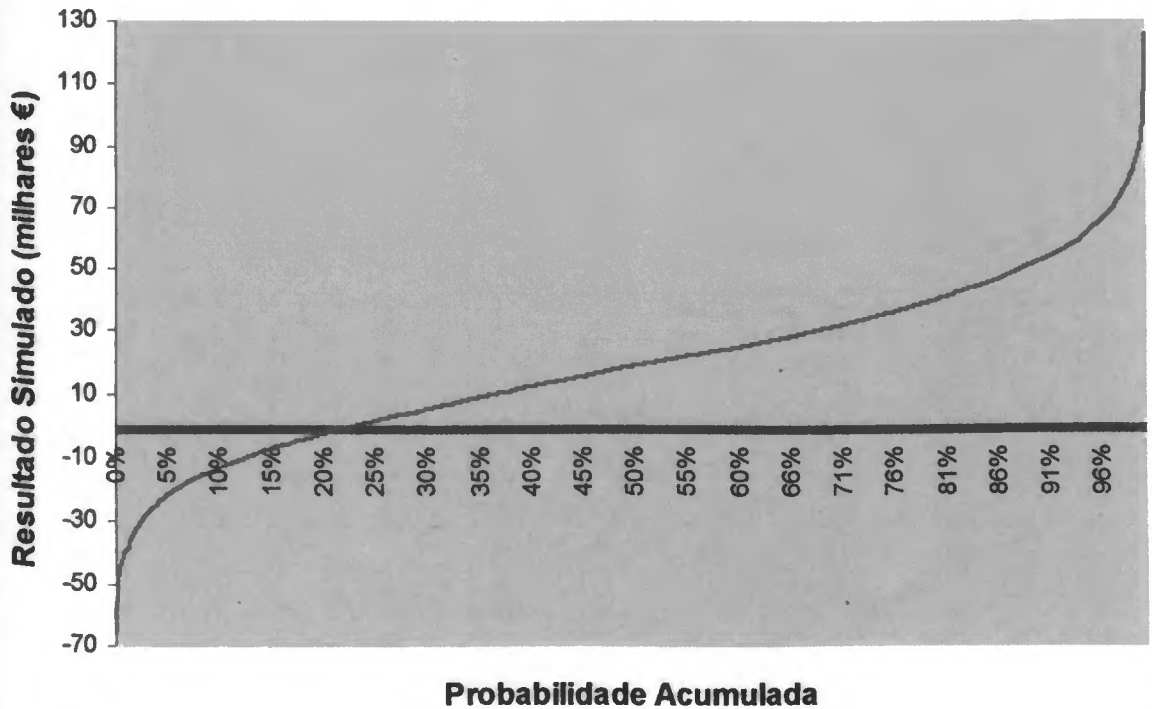
## Função de Distribuição Empírica dos Resultados Futuros Simulados



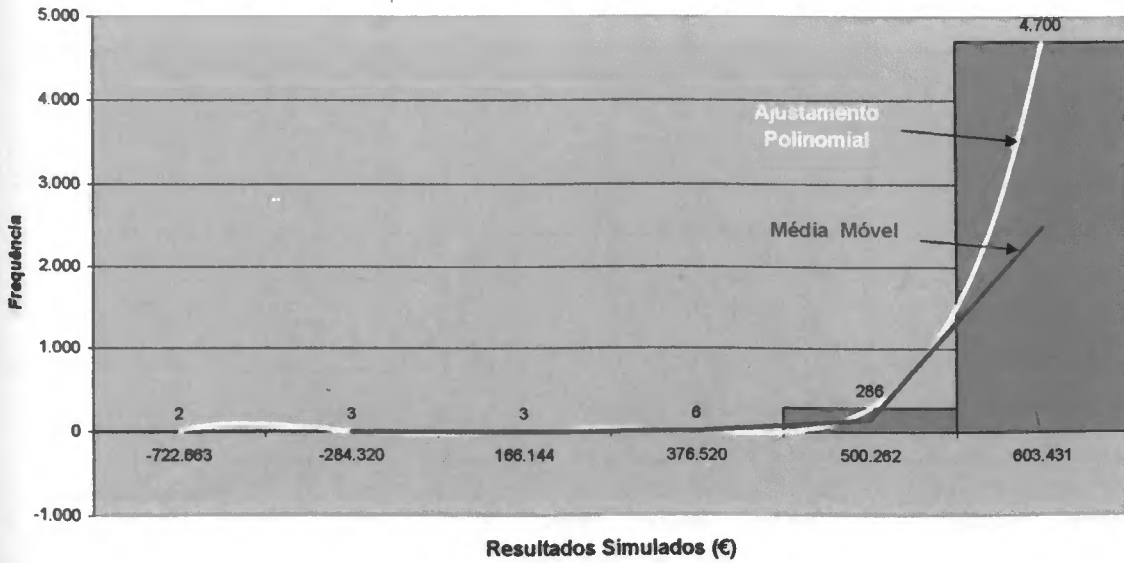
## Histograma dos Resultados do Risco de Preço



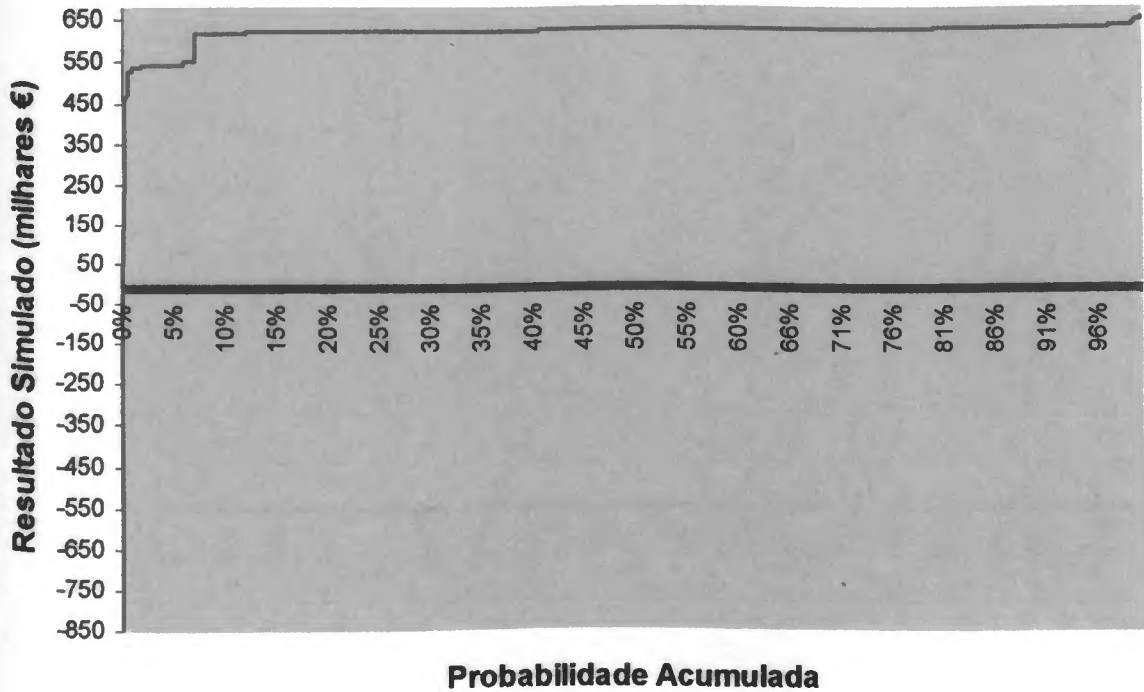
## Função de Distribuição Empírica dos Resultados do Risco de Preço

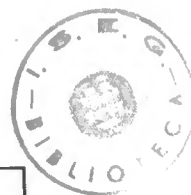


### Histograma dos Resultados do Risco de Taxa de Juro e de Crédito

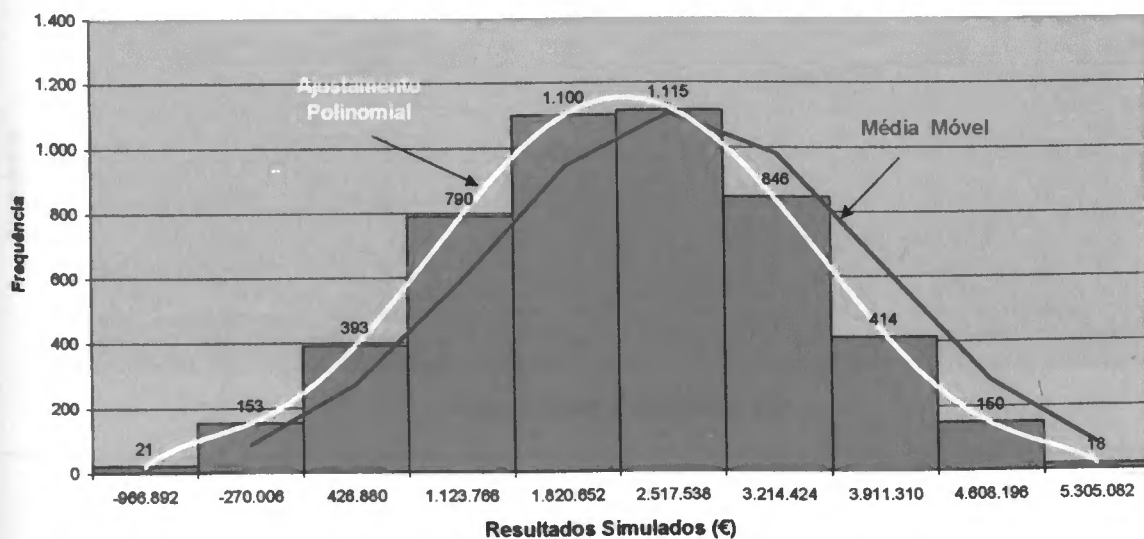


### Função de Distribuição Empírica dos Resultados do Risco de Taxa de Juro e de Crédito

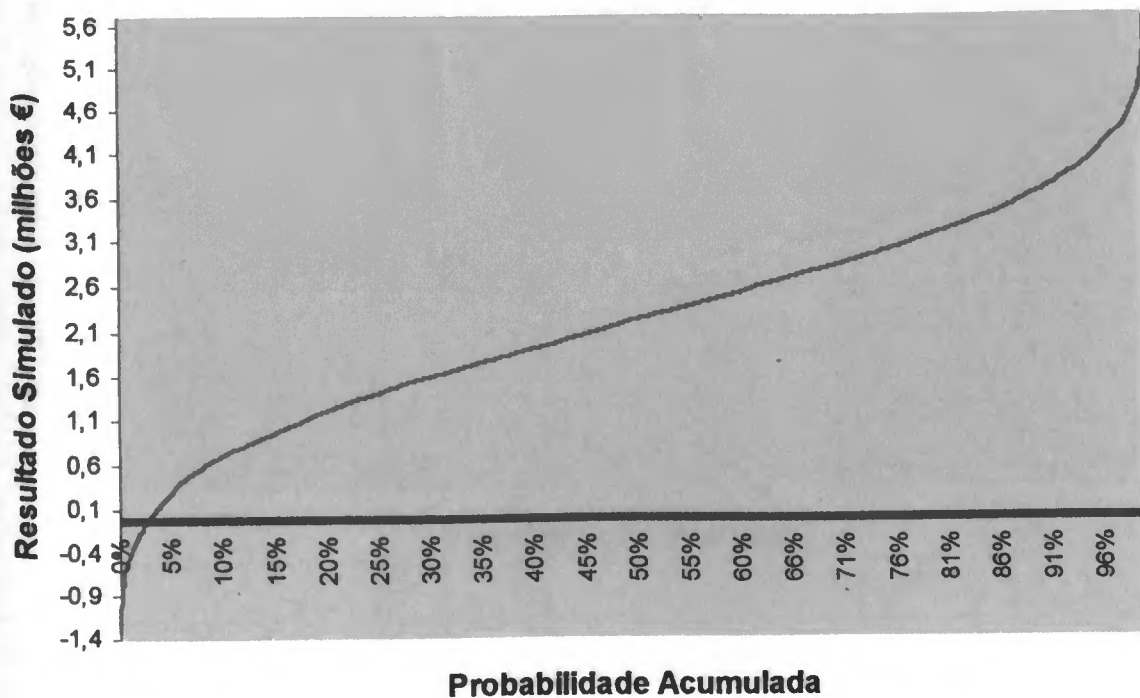




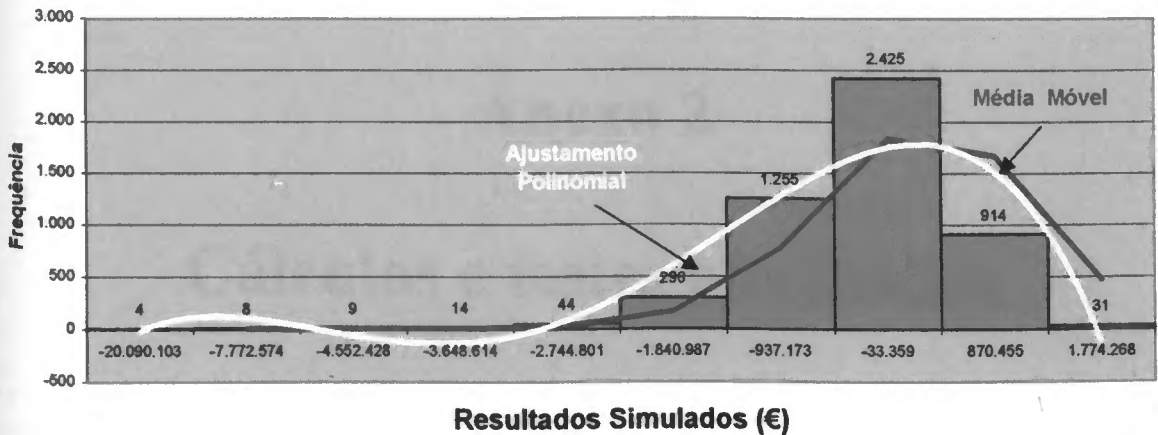
### Histograma dos Resultados do Risco de Desenvolvimento de Adverso de Reservas



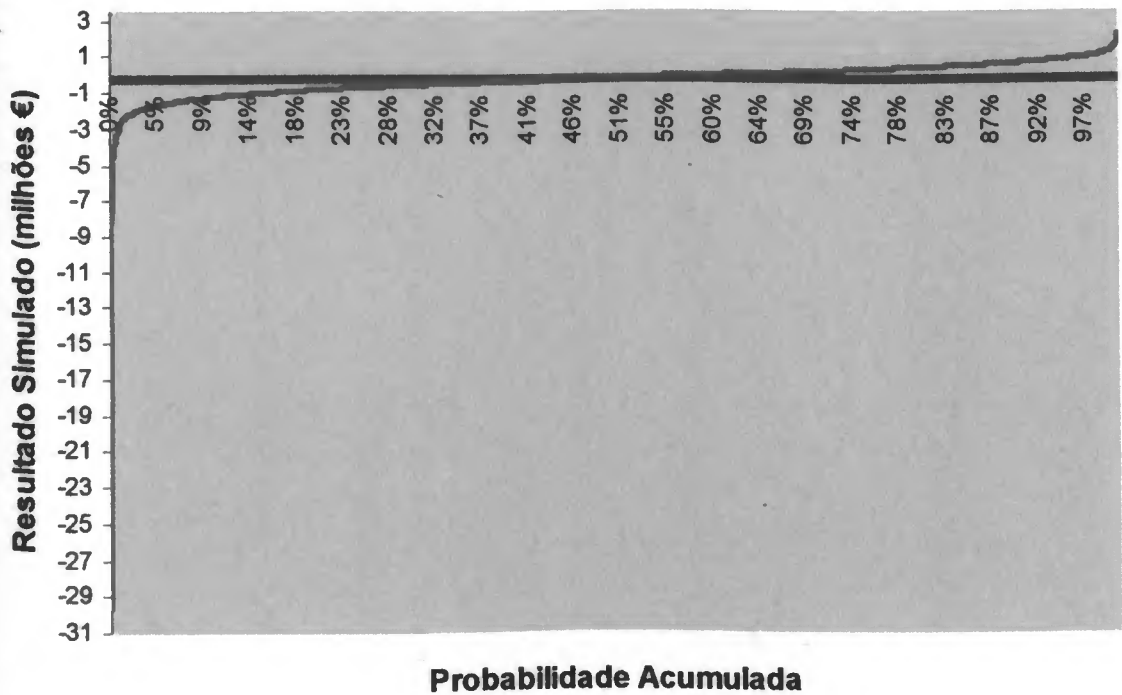
### Função de Distribuição Empírica dos Resultados do Risco de Desenvolvimento de Reservas



### Histograma dos Resultados do Risco de Sinistralidade Futura



### Função de Distribuição Empírica dos Resultados do Risco de Sinistralidade Futura



## **Anexo 2**

### **Cálculos e testes efectuados**

# Risco de Preço

### Beta da carteira Accionista

Acção	Beta	Preço 31-12-02	Quantidade	Valor de mercado carteira a 31-12-02	Beta Ponderado
1	0,4296	4,89	6.700	32.763	0,0271
2	0,8298	2,036	64.695	131.719	0,2103
3	0,7519	12,5	3.056	38.200	0,0553
4	0,8516	2,18	68.073	148.399	0,2432
5	0,4818	3,2	16.960	54.272	0,0503
6	0,7170	1,59	41.500	65.985	0,0910
7	0,9529	6,95	700	4.865	0,0089
8	1,7617	10,02	1.620	16.232	0,0550
9	1,2439	1,57	1.240	1.947	0,0047
10	1,1158	0,4	16.906	6.762	0,0145
11	1,2994	7,4	2.500	18.500	0,0463
				519.645	0,8067

**Valor mercado da carteira**    **519.645**

**Beta médio da carteira**    **0,8067**

# Resultados da Regressão: Acção 1

## SUMÁRIO DOS RESULTADOS

Estatística de regressão	
múltiplo	0,311301474
padrão de R	0,096908607
padrão de R ajustado	0,096159775
erro-padrão	0,017866465
servações	1208

## Testes de validade

Validade global do modelo: H0: B1=B2=0

F obs 129,4130157  
F crit (5%) 0,003933742

Conclusão: F obs > F crit (5%)

=> Rejeita-se H0, ou seja, o modelo é globalmente válido

Validade do regressor: H0: B2=0

t obs 11,37598416  
t crit (5%) 0,031344598

Conclusão: |t obs| > t crit (2,5%)

=> Rejeita-se H0, ou seja, o regressor é significativo

OVA	gl	SQ	MQ	F	F de significância
regressão	1	0,041310004	0,04131	129,4130157	1,48226E-28
residual	1206	0,384967965	0,00031921		
total	1207	0,426277969			

	Coefficientes	Erro-padrão	Stat t	valor P	95% inferior	95% superior	Inferior 95,0%	Superior 95,0%
Interceptar	-6,1957E-05	0,000514233	-0,12048449	0,904119435	-0,001070848	0,000946934	-0,001070848	0,000946934
Variável X 1	0,429645787	0,037767791	11,3759842	1,48226E-28	0,355547849	0,503743725	0,355547849	0,503743725

# Resultados da Regressão: Acção 2

## SUMÁRIO DOS RESULTADOS

Estatística de regressão	
Múltiplo	0,627849885
drado de R	0,394195478
drado de R ajustado	0,393704152
-padrão	0,01382134
eravações	1235

## Testes de validade

Validade global do modelo: $H_0: B_1=B_2=0$		Validade do regressor: $H_0: B_2=0$	
F obs	802,3099976	t obs	28,32507719
F crit (5%)	0,003933742	t crit (5%)	0,031344598
Conclusão:	F Obs > F crit (5%)	Conclusão:	$ t_{obs}  > t_{crit} (2,5\%)$
=> Rejeita-se $H_0$ , ou seja, o modelo é globalmente válido		=> Rejeita-se $H_0$ , ou seja, o regressor é significativo	

	gl	SQ	MQ	F	F de significância
ressão	1	0,153264833	0,153264833	802,3099976	2,3226E-136
idual.	1233	0,235539305	0,000191029		
il	1234	0,388804138			

	Coefficientes	Erro-padrão	Stat t	valor P	95% inferior	95% superior	Inferior 95,0%	Superior 95,0%
reptar	-2,79074E-06	0,000393431	-0,007093334	0,994341533	-0,000774659	0,000769077	-0,000774659	0,000769077
ável X 1	0,829766488	0,029294412	28,32507719	2,3226E-136	0,772294097	0,887238879	0,772294097	0,887238879

# Resultados da Regressão: Acção 3

## SUMÁRIO DOS RESULTADOS

Estatística de regressão	
Múltiplo	0,643483911
Padrão de R	0,414071544
Padrão de R ajustado	0,413596339
Erro-padrão	0,012007515
Servações	1235

## Testes de validade

Validade global do modelo: $H_0: B_1=B_2=0$		Validade do regressor: $H_0: B_2=0$	
F obs	871,3524817	t obs	29,51868022
F crit (5)	0,003933742	t crit (5%)	0,031344598
Conclusão:	F Obs > F crit (5%)	Conclusão:	$ t_{obs}  > t_{crit} (2,5\%)$
=> Rejeita-se $H_0$ , ou seja, o modelo é globalmente válido		=> Rejeita-se $H_0$ , ou seja, o regressor é significativo	

DVA	gl	SQ	MQ	F	F de significância
Regressão	1	0,125631961	0,125632	871,3524817	2,6517E-145
Residual	1233	0,17777445	0,000144		
Total	1234	0,30340641			

Coefficientes	Erro-padrão	Stat t	valor P	95% inferior	5% superior	Inferior 95,0%	Superior 95,0%
Interceptar	0,00029059	0,0003418	0,850177	0,395391935	0,000961	-0,000379983	0,000961164
Nível X 1	0,751902102	0,025472077	29,51868	2,6517E-145	0,701928709	0,701928709	0,801875496

## Resultados da Regressão: Ação 4

### SUMÁRIO DOS RESULTADOS

Estatística de regressão	
Último	0,581812262
drado de R	0,338505509
drado de R e	0,337969017
-padrão	0,015982901
eravações	1235

### Testes de validade

Validade global do modelo: $H_0: B_1=B_2=0$		Validade do regressor: $H_0: B_2=0$	
F obs	630,9611005	t obs	25,11893908
F crit (5%)	0,003933742	t crit (5%)	0,031344598
Conclusão:	F Obs > F crit (5%)	Conclusão:	$ t_{obs}  > t_{crit} (2,5\%)$
=> Rejeita-se $H_0$ , ou seja, o modelo é globalmente válido		=> Rejeita-se $H_0$ , ou seja, o regressor é significativo	

DVA	gl	SQ	MQ	F	F de significância
ressão	1	0,161180991	0,161180991	630,9611005	8,8171E-113
idual	1233	0,314973715	0,000255453		
il	1234	0,476154705			

Coeficientes	Erro-padrão	Stat t	valor P		95% superior		95% inferior		Superior 95,0%	
			valor P	95% inferior	95% superior	Inferior 95,0%	Superior 95,0%			
receptar	4,34156E-05	0,000454961	0,095426981	0,923991192	-0,000849168	0,000936	-0,000849168	0,000935999	0,000849168	0,000935999
ável X 1	0,851643142	0,033904423	25,11893908	8,8171E-113	0,78512642	0,91815986	0,78512642	0,91815986	0,78512642	0,91815986

# Resultados da Regressão: Acção 5

## SUMÁRIO DOS RESULTADOS

Estatística de regressão	
Último	0,376543607
Coeficiente de R	0,141785088
Coeficiente de R ajustado	0,141090177
Erro-padrão	0,01591033
Observações	1237

## Testes de validade

Validade global do modelo: H0: B1=B2=0		Validade do regressor: H0: B2=0	
F obs	204,0334903	t obs	14,2840292
F crit (5%)	0,003933742	t crit (5%)	0,031344598
Conclusão:	F Obs > F crit (5%)	Conclusão:	t obs  > t crit (2,5%)
	=> Rejeita-se H0, ou seja, o modelo é globalmente válido		=> Rejeita-se H0, ou seja, o regressor é significativo

DVA	gl	SQ	MQ	F	F de significância
Regressão	1	0,05164875	0,05164875	204,0334903	5,93839E-43
Residual	1235	0,312626159	0,000253139		
Total	1236	0,36427491			

Coeficientes	Erro-padrão	Stat t	valor P	95% inferior		95% superior		Superior 95,0%	
				inferior	superior	inferior	superior	inferior	superior
Interceptar	0,000200947	0,000452529	0,444054078	0,65708128	-0,000686864	0,001088758	-0,000686864	0,001088758	
Nível X 1	0,481761475	0,033727282	14,2840292	5,93839E-43	0,415592285	0,547930664	0,415592285	0,547930664	

# Resultados da Regressão: Acção 6

## SUMÁRIO DOS RESULTADOS

Estatística de regressão	
Múltiplo	0,546754973
Adaptado de R	0,298941001
Adaptado de R ajustado	0,298373341
Erro-padrão	0,014738829
Observações	1237

## Testes de validade

Validade global do modelo: H0: B1=B2=0	Validade do regressor: H0: B2=0
F obs 526,6206354	t obs 22,94821639
F crit (5%) 0,003933742	t crit (5%) 0,031344598
Conclusão: F Obs > F crit (5%)	Conclusão:  t obs  > t crit (2,5%)
=> Rejeita-se H0, ou seja, o modelo é globalmente válido	=> Rejeita-se H0, ou seja, o regressor é significativo

DVA	gl	SQ	MQ	F	F de significância
Regressão	1	0,114399422	0,1143994	526,6206354	2,34884E-97
Residual	1235	0,268282852	0,0002172		
Total	1236	0,382682274			

Coeficientes	Erro-padrão	Stat t	valor P	95% inferior		95% superior	
				Inferior 95,0%	Superior 95,0%		
Interceptar	-0,000387754	0,000419208	-0,9249665	0,355164006	-0,001210194	0,000435	0,000434687
Nível X 1	0,71699161	0,031243893	22,948216	2,34884E-97	0,655694554	0,778289	0,655694554

# Resultados da Regressão: Acção 7

## SUMÁRIO DOS RESULTADOS

Estatística de regressão	
R múltiplo	0,523652104
Quadrado de R	0,274211526
Quadrado de R a	0,273623367

Erro-padrão	0,020818438
Observações	1236

## ANOVA

	gl	SQ	MQ	F	F de significância
Regressão	1	0,202063135	0,202063135	466,2198912	5,70214E-88
Residual	1234	0,534824689	0,000433407		
Total	1235	0,736887824			

	Coefficientes	Erro-padrão	Stat t	valor P	95% inferior	95% superior	Inferior 95,0%	Superior 95,0%
Interceptar	-0,000624317	0,000592367	-1,053936023	0,292118523	-0,001786475	0,000537841	-0,001786475	0,000537841
Variável X 1	0,95289216	0,044131466	21,59212567	5,70214E-88	0,866311113	1,039473207	0,866311113	1,039473207

## Testes de validade

Validade global do modelo: H0: B1=B2=0		Validade do regressor: H0: B2=0	
F obs	466,2198912	t obs	21,59212567
F crit (5%)	0,003933742	t crit (5%)	0,031344598
Conclusão:	F Obs > F crit (5%)	Conclusão:	t obs  > t crit (2,5%)
=> Rejeita-se H0, ou seja, o modelo é globalmente válido		=> Rejeita-se H0, ou seja, o regressor é significativo	

# Resultados da Regressão: Acção 8

## SUMÁRIO DOS RESULTADOS

Estatística de regressão	
múltiplo	0,656698577
adrado de R	0,431515741
adrado de R ajustac	0,430774562
o-padrão	0,024976676
servações	769

## Testes de validade

Validade global do modelo: H0: B1=B2=0		Validade do regressor: H0: B2=0	
F obs	582,2018244	t obs	24,12885875
F crit (5%)	0,003934741	t crit (5%)	0,031348009
Conclusão:	F Obs > F crit (5%)	Conclusão:	t obs  > t crit (2,5%)
=> Rejeita-se H0, ou seja, o modelo é globalmente válido		=> Rejeita-se H0, ou seja, o regressor é significativo	

	gl	SQ	MQ	F	F de significância
gressão	1	0,363197505	0,363197505	582,2018244	3,76431E-96
sidual	767	0,478480957	0,000623834		
al	768	0,841678462			

	Coefficientes	Erro-padrão	Stat t	valor P	95% inferior	95% superior	Inferior 95,0%	Superior 95,0%
arceptar	-0,000231159	0,000902422	-0,256153413	0,797901065	-0,00200267	0,00154035	-0,00200267	0,001540353
riável X 1	1,761730982	0,07301344	24,12885875	3,76431E-96	1,618401039	1,90506092	1,618401039	1,905060925

# Resultados da Regressão: Acção 9

## SUMÁRIO DOS RESULTADOS

Estatística de regressão	
nútiplo	0,494531669
adrado de R	0,244561572
adrado de R ajustado	0,243371905
o-padrão	0,024754442
servações	637

## Testes de validade

Validade global do modelo: H0: B1=B2=0  
 F obs 205,5714828  
 F crit (5%) 0,003935297  
 Conclusão: F Obs > F crit (5%)  
 => Rejeita-se H0, ou seja, o modelo é globalmente válido

Validade do regressor: H0: B2=0  
 t obs 14,33776422  
 t crit (5%) 0,031350282  
 Conclusão: |t obs| > t crit (2,5%)  
 => Rejeita-se H0, ou seja, o regressor é significativo

OVA	gl	SQ	MQ	F	F de significância
gressão	1	0,125970589	0,125970589	205,5714828	1,35617E-40
sidual	635	0,389116832	0,000612782		
total	636	0,515087421			

Coefficientes	Erro-padrão	Stat t	valor P	95% inferior	95% superior	Inferior 95,0%	Superior 95,0%
Interceptar	-0,001471723	0,000985899	0,135993358	-0,003407742	0,000464295	-0,003407742	0,000464295
variável X 1	1,243860424	0,086754141	1,35617E-40	1,073500605	1,414220242	1,073500605	1,414220242

# Resultados da Regressão: Acção 10

## SUMÁRIO DOS RESULTADOS

<i>Estadística de regressão</i>	
Múltiplo	0,626245389
Adaptado de R	0,392183287
Adaptado de R ajustado	0,391691127
p-padrão	0,018645626
servações	1237

Testes de validade	
Validade global do modelo: H0: B1=B2=0	Validade do regressor: H0: B2=0
F obs 796,8625222	t obs 28,22875347
F crit (5%) 0,003933742	t crit (5%) 0,031344598
Conclusão: F Obs > F crit (5%)	Conclusão:  t obs  > t crit (2,5%)
=> Rejeita-se H0, ou seja, o modelo é globalmente válido	=> Rejeita-se H0, ou seja, o regressor é significativo

OVA	gl	SQ	MQ	F	F de significância
Regressão	1	0,277036722	0,277036722	796,8625222	1,0923E-135
Residual	1235	0,4293359321	0,000347659		
Total	1236	0,706396044			

Coefficientes	Erro-padrão	Stat t	valor P	95% inferior	15% superior	Inferior 95,0%	Superior 95,0%
Interceptar	-0,000752357	0,000530327	0,156248977	-0,0017928	0,000288	-0,0017928	0,000288086
variável X 1	1,115760106	0,03952566	1,0923E-135	1,03821514	1,193305	1,03821514	1,193305071

# Resultados da Regressão: Acção 11

## SUMÁRIO DOS RESULTADOS

Estatística de regressão	
Múltiplo	0,642326223
Padrão de R	0,412582977
Padrão de R ajustado	0,412107336
Erro-padrão	0,020812907
Servações	1237

OVA	gl	SQ	MQ	F	ε de significância
Regressão	1	0,375748485	0,375748485	867,4246007	7,4515E-145
Residual	1235	0,534973735	0,000433177		
Total	1236	0,91072222			

Coeficientes	Erro-padrão	Stat t	valor P	95,0%		
				inferior	superior	Superior 95,0%
Interceptar	0,00020136	0,340152917	0,733799218	-0,000960019	0,00136274	0,00136274
Variável X 1	1,299423683	29,45207294	7,4515E-145	1,21286525	1,385982117	1,385982117

## Testes de validade

Validade global do modelo: H0: B1=B2=0		Validade do regressor: H0: B2=0	
F obs	867,4246007	t obs	29,45207294
F crit (5%)	0,003933742	t crit (5%)	0,031344598
Conclusão:	F Obs > F crit (5%)	Conclusão:	t obs  > t crit (2,5%)
	=> Rejeita-se H0, ou seja, o modelo é globalmente válido		=> Rejeita-se H0, ou seja, o regressor é significativo

# **Risco de Taxa de Juro**

### Duração da sub-carteira de obrigações governamentais

Obrigação	Duração	Valor actual da carteira a 31-12-02	Duração Ponderada	Rating
1	1,5391	126.810	0,0248	AA
2	2,7104	423.180	0,1457	AA
3	0,3096	37.701	0,0015	AA
4	5,7815	398.371	0,2926	AA
5	1,6008	93.120	0,0189	AA
6	4,1976	537.728	0,2868	AA
7	6,0500	152.371	0,1171	AAA
8	1,9691	1.389.554	0,3476	AAA
9	4,4491	377.446	0,2133	AAA
10	1,5386	1.903.049	0,3720	AAA
11	1,7726	1.864.940	0,4200	AAA
12	6,4619	566.905	0,4654	AAA
		7.871.176	2,7058	AAA

Valor mercado da carteira **7.871.176**

Duração da carteira **2,7058**

Rating da carteira **AAA**

**Duração da sub-carteira de obrigações de bancos e de empresas financeiras**

Obrigação	Duração	Valor actual da carteira a 31-12-02	Duração Ponderada	Rating
1	9,2269	239.107	0,8218	AAA
2	2,7189	198.116	0,2006	AAA
3	4,4345	297.231	0,4910	A
4	7,0514	299.353	0,7863	A
5	1,3225	326.514	0,1608	AAA
6	7,3434	772.654	2,1134	AAA
7	4,3786	312.601	0,5098	A
		2.445.575	5,0838	AA

**Valor mercado da carteira**      **2.445.575**

**Duração da carteira**      **5,0838**

**Rating da carteira**      **AA**

# **Risco de Crédito**

**Credit spreads para os diversos sectores**

<b>Credit Spread</b>	<b>Sub-carteiras obrigacionistas</b>		
	<b>Governamentais</b>	<b>Bancos</b>	<b>Telecomunicações</b>
AAA	0,0000	0,0026	0,0018
AA	0,0001	0,0033	0,0022
A	0,0002	0,0075	0,0047
BBB	0,0003	0,0110	0,0114
BB	0,0004	0,0198	0,0228
B	0,0005	0,0372	0,0471
CCC	0,0006	0,0619	0,0834
D	0,0000	0,0000	0,0000

**Matriz de probabilidades de transição de *rating***

<b>Rating futuro</b>	<b>Rating actual</b>		
	<b>AAA</b>	<b>AA</b>	<b>A</b>
AAA	0,919391939	0,00639936	0,0007
AA	0,074607461	0,918008199	0,0227
A	0,00480048	0,067493251	0,9169
BBB	0,00080008	0,0059994	0,0511
BB	0,00040004	0,00059994	0,0056
B	0	0,00119988	0,0025
CCC	0	0,00029997	0,0001
D	0	0	0,0004

# **Risco de Desenvolvimento Adverso de Reservas**

**Modelo Linear Generalizado de Poisson com sobre dispersão (com inflação)**

	0	1	2	3	∞
1999	8.055.436	4.150.982	765.254	508.422	859.873
2000	9.407.745	4.568.407	1.179.941		
2001	11.618.213	4.473.266			
2002	15.533.663				

**Valores previstos e respectivo erro padrão**

	0	1	2	3	4
1999				1.057.535	409.582
2000			596.264	1.240.249	479.645
2001		1.197.421	366.059	881.369	1.417.271
2002	7.080.978	1.681.096	477.203	956.595	1.989.749
	1.070.976			438.461	712.251

Reserva	% Res.
1.057.535	39%
409.582	0
1.836.514	31%
575.075	0
3.286.061	23%
761.955	0
11.708.418	13%
1.570.328	
<b>17.898.528</b>	<b>14%</b>
<b>2.453.906</b>	

<b>Reserva Total</b>	<b>17.898.528</b>	<b>14%</b>
	<b>2.453.906</b>	

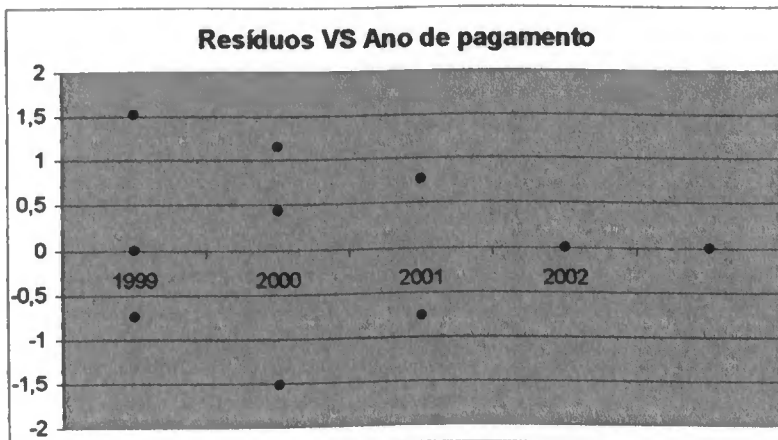
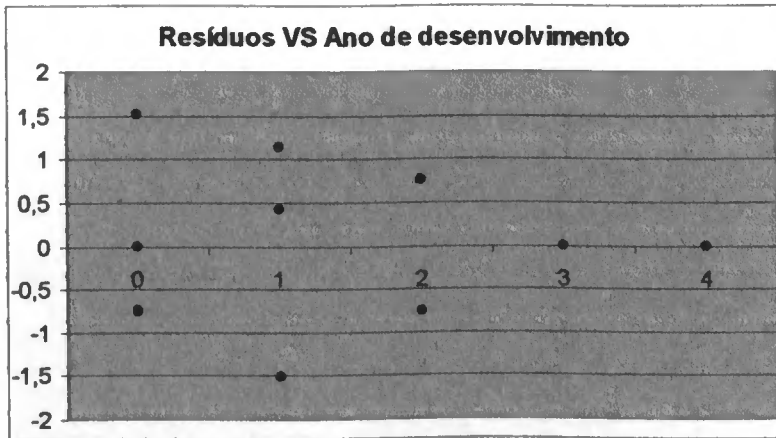
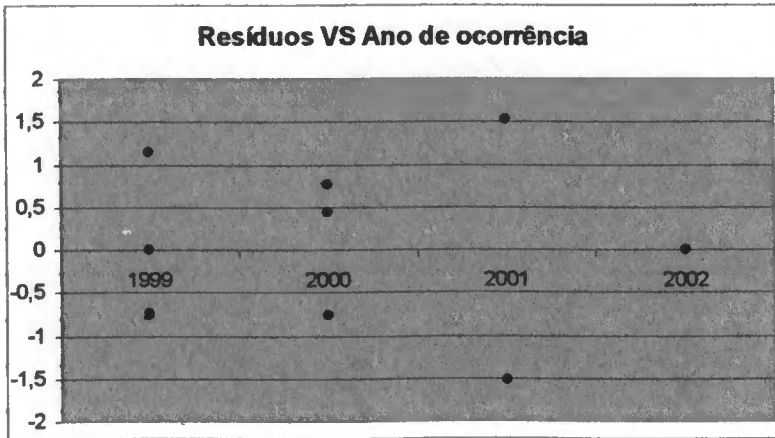
Ano de Pagamento:	2003	2004	2005	2006
Montante:	9.932.198	3.602.714	2.373.866	1.989.749
Desvio Padrão:	1.170.382	761.879	701.855	712.251
% Erro	12%	21%	30%	36%

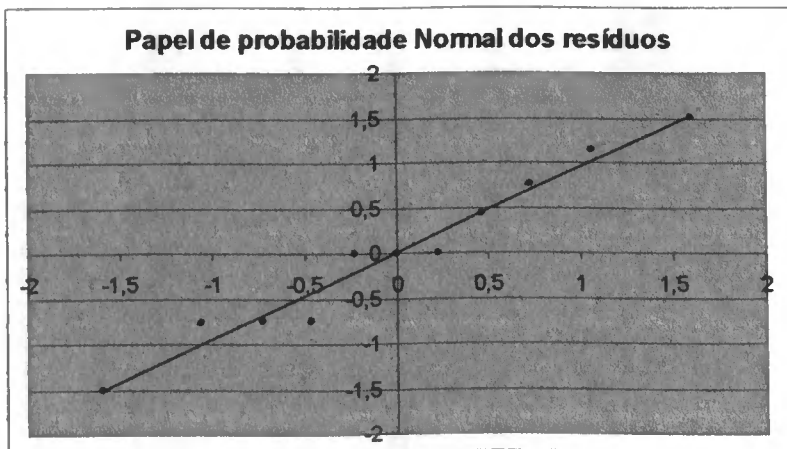
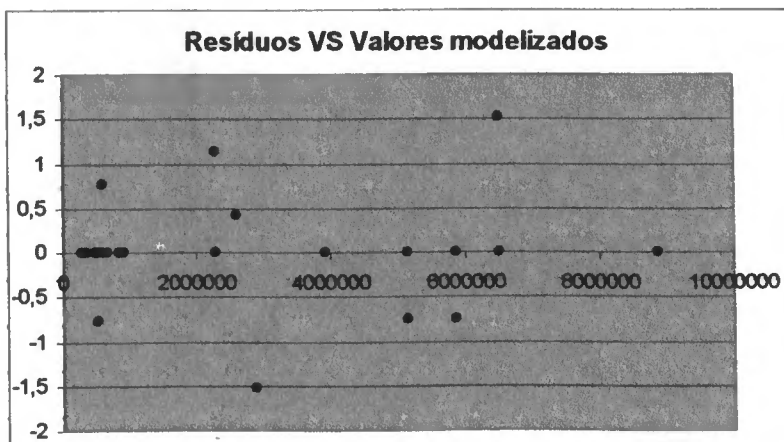
Tempo	0	1	2	3	4
Tx atualização	0,000	0,027	0,027	0,030	0,033
Factor Desconto	1,000	0,974	0,948	0,915	0,878
				1.057.535	
			596.264	1.240.249	
		1.197.421	681.369	1.417.271	
	7.080.978	1.681.096	956.595	1.989.749	

	Total				
Pagamentos futuros não atualizados	9.932.198	3.602.714	2.373.866	1.989.749	17.898.528
Pagamentos atualizados	9.674.338	3.413.652	2.170.901	1.747.531	17.006.423

Duração= 1,76

# Modelo Linear Generalizado de Poisson com sobre dispersão



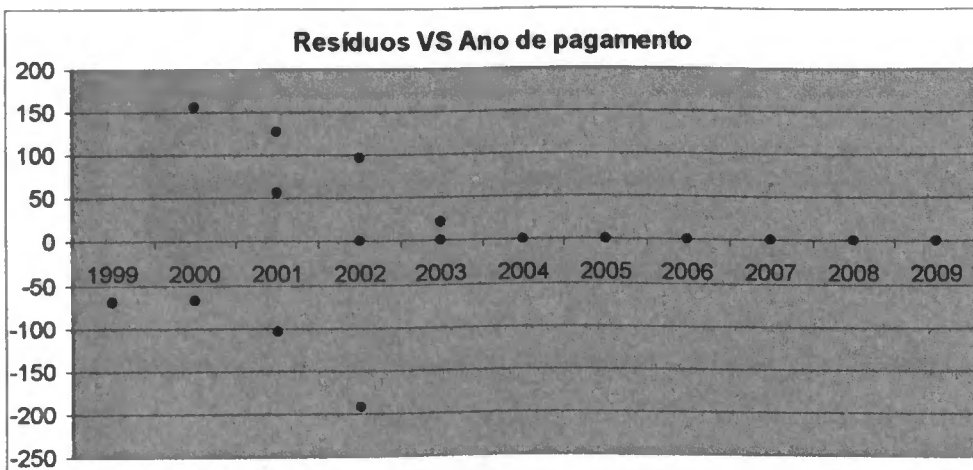
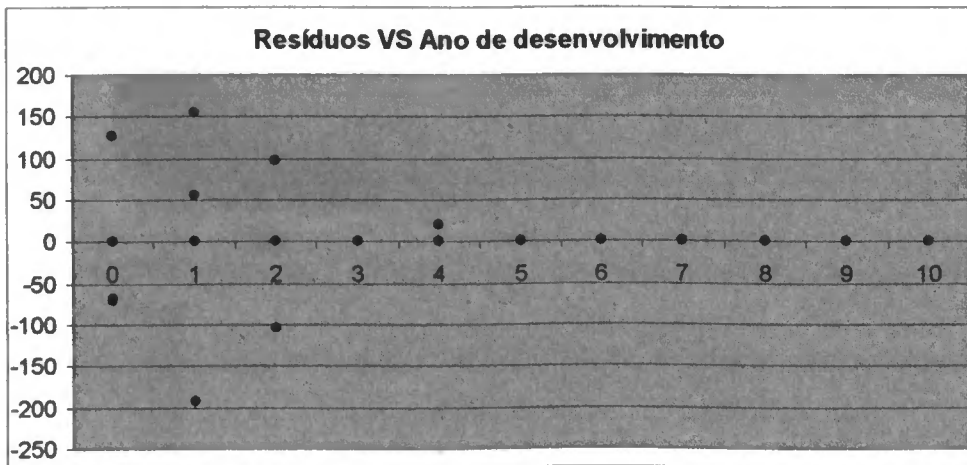
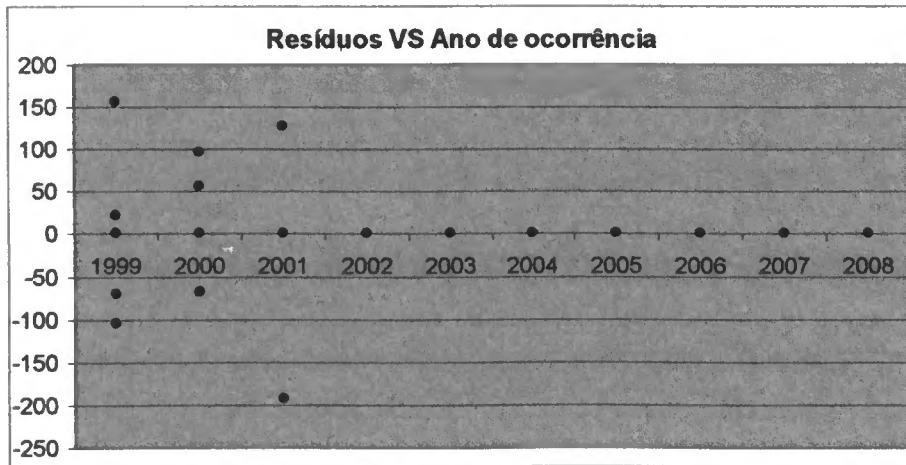


## Modelo Bootstrap (com inflação)

	Valores previstos e respectivo erro padrão				Reserva	% Res.
	0	1	2	3		
1999	8.742.571	13.146.327	13.934.538	14.442.961	885.669	42%
2000	9.980.676	14.686.135	15.866.076	16.462.340	370.647	
2001	11.966.760	16.440.026	17.637.447	18.318.816	0	
2002	15.533.663	22.614.641	24.295.737	25.252.331	1.634.954	34%
					561.614	
					0	
					3.065.732	25%
					767.445	
					0	
					11.385.052	15%
					1.678.506	
					16.971.407	
					2.549.417	15%
					16.971.407	
					2.549.417	15%

Taxa de inflação histórica	IPC
Taxa de inflação futura	3%

## Resultados Bootstrap



# **Risco de Sinistralidade Futura**

**Poisson**

k	n_k	p_k	np_k	n_kln(p_k)	Dif. Quadrática
0	89906	0,936104797	89680,71	-5.936,30	0,57
1	5503	0,061808984	5921,42	-15.318,74	29,57
2	357	0,002040557	195,49	-2.211,45	133,44
3	36	4,56624E-05	4,37	-359,79	228,63
n	95802	1	soma=	-23.826,28	
		lambda=	0,066027846		qui-quadrado=
					p-value=
					0,000000

**Binomial Negativa**

k	n_k	p_k	np_k	n_kln(p_k)	Dif. Quadrática
0	89906	0,936481382	89908,39	-5708,33520	6,37132E-05
1	5503	0,057307649	5490,19	-15734,84445	0,02990129
2	357	0,003912943	374,87	-1979,01718	0,85165322
3	36	0,000298026	28,55	-292,25990	1,943180135
n	95802	1	soma=	-23714,45672	2,824798358
		alpha=	0,808851872	beta=	12,2459181
		a=	0,075494955	b=	-0,01443072
		p=	0,924505045		p-value=
					0,243558242

**teste do X<sup>2</sup>: Poisson**

H0: O n.º de sinistros por apólice tem uma distribuição de Poisson de parâmetro (lambda)

H1: O n.º de sinistros p/ apólice não tem uma dist. de Poisson de parâmetro (lambda)

Chi-quadrado observado

nível de significância do teste

5,99

conclusão:

**Chi-quadrado observado > Chi-quadrado alfa**

**=> Rejeita-se H0 ao nível de significância de 5%**

**teste do X<sup>2</sup>: Binomial Negativa**

H0: O n.º de sinistros por apólice tem uma distribuição Binomial Negativa de

parâmetros H1: O n.º de sinistros por apólice não tem uma distribuição Binomial Negativa de parâmetros (alfa, Beta / (1+Beta))

Chi-quadrado observado

nível de significância do teste

5,99

conclusão:

**Chi-quadrado observado < Chi-quadrado alfa**

**=> Aceita-se H0 ao nível de significância de 5%**

## Teste do Qui-quadrado

montantes individuais seguem uma distribuição Lognormal de parâmetros ( $\mu$ ,  $\sigma$ ) truncada em € 29.999 com cauda de Pareto de parâmetros ( $\alpha$ ,  $k$ )

### Lognormal com cauda Pareto

Classe	Freq. Observada: $n_j$	Freq. Estimada: $E_j$	$[(n_j - E_j)^2] / E_j$
4,67	999	3.577	0
999	9999	2541	1
9999	29999	183	0
29999	34858	8	0
34858	44700	9	0
44700	76254	11	1
76254	750000	7	1
	<hr style="border-top: 3px double #000;"/>	<hr style="border-top: 3px double #000;"/>	
	6.336	6.342	

6.336

Qui-quadrado observado = 3

7

p-value = 0,199

Qui-quadrado (5%, 2) = 5,99

estimado 6,702462484

estimado 1,345522288

estimado 2,051457636

estimado 2357,18006

Conclusão: Qui-quadrado observado < Qui-quadrado ( 5%, 2) => Aceita-se H0 a um nível de 5%

## Teste do Qui-quadrado

Os montantes individuais seguem uma distribuição Lognormal de parâmetros ( $\mu$ ,  $\sigma$ )

### Lognormal

Classe	Freq. Observada: $n_j$	Freq. Estimada: $E_j$	$[(n_j - E_j)^2]/E_j$
4,67	999	3.577	0
999	9999	2541	1
9999	19999	158	2
19999	29999	25	1
29999	750000	35	6
	6336	6.336	

6.336

Qui-quadrado observado= 10

5

p-value= 0,007

Qui-quadrado (5%, 2)= 5,99

estimado 6,702462484

estimado 1,345522288

Conclusão: Qui-quadrado > Qui-quadrado ( 5%, 2) => Rejeita-se H0 a um nível de 5%

## Teste do Qui-quadrado

H0: Os montantes individuais seguem uma distribuição de Pareto de parâmetros (alfa, k)

### Pareto Método dos Momentos

Classe	Freq. Observada: $n_j$	Freq. Estimada: $E_j$	$[(n_j - E_j)^2] / E_j$	
4,67	9999	6.118	6.099	0
9999	29999	183	182	0
29999	49999	19	18	0
49999	750000	16	11	2
		6.336	6.310	

6.336

Qui-quadrado observado = 2

4

p-value = 0,19

Qui-quadrado (5%, 1) = 3,84

alfa estimado 2,051457636

k estimado 2357,18006

Conclusão: Qui-quadrado observado < Qui quadrado ( 5%, 1) => Aceita-se H0 a um nível de 5%

## Teste do Qui-quadrado

H0: Os montantes individuais seguem uma distribuição de Pareto de parâmetros (alfa, k)

Pareto Método da Máxima Verosimilhança

Classe	Freq. Observada: $n_j$	Freq. Estimada: $E_j$	$[(n_j - E_j)^2] / E_j$	
4,67	9999	6.118	4.902	242
9999	19999	158	180	3
19999	29999	25	95	194
29999	49999	19	109	428
49999	750000	16	429	10.638

6.336

Qui-quadrado observado= 11.505

5

p-value= 0,00

Qui-quadrado (5%,2)= 5,99

0,193749509

4,67

- Qui-quadrado observado > Qui quadrado ( 5%, 2) => Rejeita-se H0 a um nível de 5%

## Teste do Qui-quadrado

H0: Os montantes individuais seguem uma distribuição Gama de parâmetros (alfa, beta)

### Gama Método dos Momentos

Classe		Freq. Observada: $n_j$	Freq. Estimada: $E_j$	$[(n_j - E_j)^2] / E_j$
4,67	999	3577	721	2.280
999	4999	2310	230	1.873
4999	9999	231	97	78
9999	19999	158	91	29
19999	29999	25	48	21
29999	49999	19	52	58
49999	750000	16	80	253
		6336	1.319	

N= 6.336

Qui-quadrado observado= 4.591

K= 7

p-value= 0

Qui-quadrado ( 5%, 5)= 11,1

alfa estimado 0,02508345

Beta estimado 89374,51583

Conclusão: Qui-quadrado > Qui-quadrado ( 5%, 11) => Rejeita-se H0 a um nível de 5%

## Teste do Qui-quadrado

montantes individuais seguem uma distribuição Gama de parâmetros (alfa, beta)

### Gama Método da Máxima Verosimilhança

Classe	Freq. Observada: $n_j$	Freq. Estimada: $E_j$	$[(n_j - E_j)^2] / E_j$	
4,67	999	3577	218	3.155
999	4999	2310	6.092	6.193
4999	9999	231	26	182
9999	19999	158	0	158
19999	29999	25	0	25
29999	49999	19	0	19
49999	750000	16	0	16
		6336	6.336	
	6.336			
		Qui-quadrado observado=		9.748
	7			
		p-value=		0
		Qui-quadrado ( 5%,5)=		11,1
estimado	7,4826			
estimado	299,604			

Conclusão: Qui-quadrado > Qui-quadrado ( 5%, 11) => Rejeita-se H0 a um nível de 5%

## Teste de Kolmogorov-Smirnov

<=	N.º obser. Acumuladas	Frequência acumulada	(1) = FD Empírica-	(2) = FD Empírica+	(3) = FD do modelo	(4) =  (3)-(1)	(5) =  (3)-(2)	Diferença Máxima = Máximo [(4), (5)]
189	634	10,01%	0,00%	10,01%	13,90%	13,90%	3,89%	13,90%
328	1.267	20,00%	10,01%	20,00%	24,99%	14,98%	4,99%	14,98%
523	1.901	30,00%	20,00%	30,00%	37,13%	17,13%	7,12%	17,13%
635	2.535	40,01%	30,00%	40,01%	50,75%	20,75%	10,74%	20,75%
978	3241	51,15%	40,01%	51,15%	55,40%	15,39%	4,25%	15,39%
1.001	3968	62,63%	51,15%	62,63%	56,09%	4,94%	6,53%	6,53%
1.225	4435	70,00%	62,63%	70,00%	61,92%	0,71%	8,08%	8,08%
1.955	5077	80,13%	70,00%	80,13%	74,24%	4,24%	5,89%	5,89%
3.771	5704	90,03%	80,13%	90,03%	87,27%	7,14%	2,76%	7,14%
0.000	6336	100,00%	90,03%	100,00%	100,00%	9,97%	0,00%	9,97%
	6.336						D =	20,75%

Os montantes individuais seguem uma distribuição Lognormal de parâmetros (mui, sigma)

or crítico (20%; 1,07/(n^(1/2)))

33,84%

Valor Crítico => Aceito H0 ao nível de significância de 20%

## **Anexo 3**

### **Código dos programas utilizados**

# Risco de Preço

```
(*Inicio_Atribuicao_de_valores: número de activos,  
número de dias, número de simulações*)
```

```
n = 2;  
dias = 260  
numSimulacao = 5000
```

```
(*Fim_Atribuicao_de_valores*)
```

```
(*Inicio_Criacao_matriz_CI, RM,  
DP e AD: Carteira com preço inicial dos activos primitivos  
ou das taxas de juro iniciais, rendibilidades médias anuais dos  
primitivos ou taxa de juro média de longo prazo das taxas de juro,  
desvios padrões anuais das rendibilidades dos activos primitivos ou  
das taxa de juro, e matriz com os preços/taxa diários simulados*)
```

```
ci = 5824.7;  
r = 0.035852851;  
dp = 0.184562951;
```

```
(*Inicio_Criacao_gerador  
_Z: Geração de v.a. Normais estandardizadas independentes*)
```

```
geradorZ = Function[  
  z =  $\left( \left( \sum_{j=1}^{12} \text{Random}[] \right) - 6 \right)$ ;  
  (*Print["Matriz Z=" ,MatrixForm[matrizZ]]*)  
];
```

```
(*FIM_Criacao_gerador_Z*)
```

```
(*Inicio_Criacao_matriz_Yinicial*)
```

```
geradorZ[];  
w = dp*z;
```

```
AD = Array[ad, {1, dias}];  
(*Print["AD=" ,MatrixForm[AD]]*)
```

```

incremento = 1 / dias;

For[cenario = 1, cenario ≤ numSimulacao,

ad[1, 1] = ci * Exp[(r - (dp^2) / 2.0) * incremento + dp * w * incremento^(1/2)];
AD = Array[ad, {1, dias}];
(*Print["AD=" , MatrixForm[AD]]*)

For[k = 2, k ≤ dias,

geradorZ[];
w = dp * z;
ad[1, k] =
  ad[1, k - 1] * Exp[(r - (dp^2) / 2.0) * incremento + dp * w * incremento^(1/2)];
AD = Array[ad, {1, dias}];
(*Print["AD=" , MatrixForm[AD]]*)

k++];

(*Fim_Criacao_matriz_CI, RM, DP e AD*)

(*Inicio_Criacao_matriz
  _resultados: resultados simulados - cada coluna corresponde a um activo,
  cada linha corresponde a uma simulação*)

res[cenario, 1] = ad[1, dias];

resultados = Array[res, {numSimulacao, 1}];

cenario++]

(*Print["Resultados=" , MatrixForm[resultados]]*);

(*Fim_Criacao_matriz_resultados*)

(*Inicio_Criacao_matriz_PrecoFinalPrimitivos*)

;

For[i = 1, i ≤ numSimulacao,

  pf[i, 1] = res[i, 1];

  i++];

matrizPrecoFinalPrimitivos = Array[pf, {numSimulacao, 1}];
(*Print["PrecoFinalIndice=" , MatrixForm[matrizPrecoFinalPrimitivos]]*);

```

```
(*Fim_Criacao_matriz_PrecoFinalPrimitivos*)
```

```
(*Inicio_Criacao_matriz  
_PrecoI: matriz com o preco inicial dos activos primitivos*)
```

```
pi = 5824.7;
```

```
Print["PrecoI=" , pi]
```

```
(*Fim_Criacao_matriz_PrecoI*)
```

```
(*Inicio_Criacao_matriz_Rendibilidade_Primitivos*)
```

```
For[i = 1, i ≤ numSimulacao,
```

```
rp[i, 1] = pf[i, 1] / pi - 1;
```

```
i++];
```

```
matrizRendPrimitivos = Array[rp, {numSimulacao, 1}];
```

```
(*Print["RendIndice=" , MatrixForm[matrizRendPrimitivos]]*);
```

```
(*Fim_Criacao_matriz_Rendibilidade_Primitivos*)
```

```
(*Inicio_Criacao_matriz_Beta*)
```

```
beta = 0.80666;
```

```
Print["Beta=" , beta]
```

```
(*Fim_Criacao_matriz_Beta*)
```

```
(*Inicio_Criacao_matriz_Rendibilidade_Carteira:  
rendibilidade da carteira de activos efectivamente detida pela seguradora*)
```

```
txrf = 0.026655
```

```
Print["Taxa de juro sem risco=" , txrf]
```

```
For[i = 1, i ≤ numSimulacao,
```

```
rc[i, 1] = txrf + beta * ( rp[i, 1] - txrf);

i++;

matrizRendCarteira = Array[rc, {numSimulacao, 1}];
(*Print["RendCarteira=" , MatrixForm[matrizRendCarteira]]*);

(*Fim_Criacao_matriz_Rendibilidade_Carteira*)

(*Inicio_Criacao_matriz_Portofolio
  _inicial: valores iniciais investidos por activo*)

porti = 519645;

Print["Portofolio Inicial=" , porti]

(*Fim_Criacao_matriz_Portofolio_inicial*)

(*Inicio_Criacao_matriz_Resultado
  _Carteira: resultados (valorização/desvalorização) monetária de cada activo *)

For[i = 1, i ≤ numSimulacao,

  resCart[i, 1] = rc[i, 1] * porti;

  i++];

matrizResultadoCarteira = Array[resCart, {numSimulacao, 1}];
(*Print["Resultado Carteira=" , MatrixForm[matrizResultadoCarteira]]*);

(*Fim_Criacao_matriz_Resultado_Carteira*)

(*Inicio_Criacao_ficheiros_txt_com_resultados_carteira*)

For[t = 1, t ≤ numSimulacao, RRPAccaos[t, 1] = resCart[t, 1]; t++];
matrizRRPAccaos = Array[RRPAccaos, {numSimulacao, 1}];
MatrixForm[matrizRRPAccaos] ; matrizRRPAccaos >> matrizResPortAccaos.txt ;

(*Fim_Criacao_ficheiros_txt_com_resultados_carteira*)
```

(\*Fim\_Programa\*)

260

5000

PrecoI=5824.7

Beta=0.80666

0.026655

Taxa de juro sem risco=0.026655

Portofolio Inicial=519645

# **Risco de Taxa de Juro e de Crédito**

```
(*Início_Atribuição_de_valores: número de créditos*)
Remove[z];
n = 3;

cenariosusados = 5000;

(*Fim_Atribuição_de_valores*)

(*Início_Criação_matriz_PT: Matriz de probabilidades de transição*)

prob[1, 1] = 0.919391939; prob[1, 2] = 0.00639936; prob[1, 3] = 0.0007;
prob[2, 1] = 0.074607461; prob[2, 2] = 0.918008199; prob[2, 3] = 0.0227;
prob[3, 1] = 0.00480048; prob[3, 2] = 0.067493251; prob[3, 3] = 0.9169;
prob[4, 1] = 0.00080008; prob[4, 2] = 0.0059994; prob[4, 3] = 0.0511;
prob[5, 1] = 0.00040001; prob[5, 2] = 0.00059994; prob[5, 3] = 0.0056;
prob[6, 1] = 0.00000001; prob[6, 2] = 0.00119988; prob[6, 3] = 0.0025;
prob[7, 1] = 0.00000001; prob[7, 2] = 0.00029996; prob[7, 3] = 0.0001;
prob[8, 1] = 0.00000001; prob[8, 2] = 0.00000001; prob[8, 3] = 0.0004;

PT = Array[prob, {8, n}];
Print["PT=" , MatrixForm[PT]];

(*Fim_Criação_matriz_PT*)

(*Início_Criação_matrizDP:
Matriz dos desvios padrão da rendibilidade
dos activos das entidades emittentes dos créditos*)

desv[1, 1] = 0.02280;
desv[2, 1] = 0.25389;
desv[3, 1] = 0.40100;
DP = Array[desv, {n, 1}];
Print["DP=" , MatrixForm[DP]]

(*Fim_Criação_matriz_DP*)

(*Início_Criação_matriz_aux:
Matriz cujas colunas correspondem à função de distribuição Normal
Estandarizada em cada limiar estandarizado para cada crédito*)

For[i = 1, i ≤ n, au[8, i] = prob[8, i]; i++];
aux = Array[au, {8, n}];
(*Print["aux=" , MatrixForm[aux]]*)

For[i = 1, i ≤ n,
  For[w = 7, w ≥ 2, au[w, i] = prob[w, i] + au[w + 1, i]; w--];
  i++]
aux = Array[au, {8, n}];
```

```

(*Print["aux=" ,MatrixForm[aux]]*)

(*Fim_Criação_matriz_aux*)

(*Início_Criação_matriz
  _limiar: cada coluna representa os limiares de cada crédito,
  isto é os limites da rendibilidade dos activos dos emitentes
  dos quais depende a sua notação decrédito*)

mlimiar = Array[limiar, {8, n}];
(*Print["matriz limiar=" ,MatrixForm[mlimiar]]*)

<< Statistics`ContinuousDistributions`

For[i = 1, i ≤ n,
  limiar[8, i] = Quantile[NormalDistribution[0, 1], au[8, i]] * desv[i, 1]; i++];
mlimiar = Array[limiar, {8, n}];
(*Print["matriz limiar=" ,MatrixForm[mlimiar]]*)

For[i = 1, i ≤ n,
  For[w = 7, w ≥ 2, limiar[w, i] =
    Quantile[NormalDistribution[0, 1], au[w + 1, i] + prob[w, i]] * desv[i, 1]; w--];
  i++]
mlimiar = Array[limiar, {8, n}];
Print["matriz limiar=" , MatrixForm[mlimiar]]

(*Fim_Criação_matriz_limiar*)

(*Início_Criação_matriz_S: matriz das variâncias-covariâncias entre os créditos*)

n = 3;
S = Array[s, {n, n}];
s[1, 1] = 0.00052; s[1, 2] = -0.00253; s[1, 3] = -0.00197;
s[2, 1] = -0.00253; s[2, 2] = 0.06446; s[2, 3] = 0.04020;
s[3, 1] = -0.00197; s[3, 2] = 0.04020; s[3, 3] = 0.16080;
S = Array[s, {n, n}];
(*Print["S=" ,MatrixForm[S]]*)

(*Fim_Criação_matriz_S*)

(*Início_Criação_matriz_A e A transposta*)

<< LinearAlgebra`Cholesky`
A = CholeskyDecomposition[S];
(*Print["A=" ,MatrixForm[A]]*)
At = Transpose[A];
(*Print["At=" ,MatrixForm[At]]*)

```

```
(*Fim_Criação_matriz_A e A transposta*)
```

```
(*Início_Criação_matrizRating: matriz das notações possíveis*)
```

```
rating[1, 1] = "AAA";
rating[2, 1] = "AA";
rating[3, 1] = "A";
rating[4, 1] = "BBB";
rating[5, 1] = "BB";
rating[6, 1] = "B";
rating[7, 1] = "CCC";
rating[8, 1] = "default";
```

```
matrizRating = Array[rating, {8, 1}];
Print["rating=" , MatrixForm[matrizRating]]
```

```
(*Fim_Criação_matrizRating*)
```

```
(*Início_Processo_de_Simulação de ratings futuros*)
```

```
For[cenario = 1, cenario ≤ cenariosusados,
```

```
  (*Início_Criação_matriz_Z:
```

```
    Matriz de variáveis aleatórias independentes e idênticamente distribuídas*)
```

```
  (*For[i=1, i ≤ n, z[i, 1] = (( $\sum_{j=1}^{12}$  Random[]) - 6) ; i++]*)
```

```
  For[i = 1, i ≤ n, z[i, 1] = Random[NormalDistribution[0, 1]]; i++]
```

```
  matrizZ = Array[z, {n, 1}];
```

```
(*Print["Zfinal=" , MatrixForm[matrizZ]]*)
```

```
(*Fim_Criação_matriz_Z*)
```

```
(*Início_Criação_matriz_Yinicial:
```

```
  matriz das rendibilidades simuladas dos activos para a primeira simulação*)
```

```
y = At.matrizZ;
```

```
(*Fim_Criação_matriz_Yinicial*)
```

```
(*Início_Criação e Preenchimento_matriz
  _Resultados: matriz de ratings simulados*)
```

```
matrizResultados = Array[resultados, {cenariosusados, n}];
```

```

(*Início_Criação_matriz_auxiliar:
matriz auxiliar que guarda a
posição simulada de cada crédito na matriz de rating*)

matrizAuxiliar = Array[auxiliar, {cenariosusados, n}];

(*Fim_Criação_matriz_auxiliar*)

For[j = 1, j ≤ n,

If[y[[j, 1]] < limiar[8, j],

resultados[cenario, j] = rating[8, 1];
matrizResultados = Array[resultados, {cenariosusados, n}];
auxiliar[cenario, j] = 8;
matrizAuxiliar = Array[auxiliar, {cenariosusados, n}]
,];

For[i = 8, i ≥ 2,

If[y[[j, 1]] ≥ limiar[i, j],

resultados[cenario, j] = rating[i - 1, 1];
matrizResultados = Array[resultados, {cenariosusados, n}];
auxiliar[cenario, j] = i - 1;
matrizAuxiliar = Array[auxiliar, {cenariosusados, n}]
,];

i--];

j++];

(*Fim_Criação e Preenchimento_matriz_Resultados*)

(*Print["auxiliar= ", MatrixForm[matrizAuxiliar]];*)

(*Print[cenario];
Print["matriz limiar=" , MatrixForm[mlimiar]];
Print["Yini=" , MatrixForm[y]];
Print["resultados=" , MatrixForm[matrizResultados]];
Print["matrizAuxiliar=" , MatrixForm[matrizAuxiliar]];*)

cenario++];

(*Print["Ratings futuros=" , MatrixForm[matrizResultados]];*)

(*Fim_Processo_de_Simulação de ratings futuros*)

```

```
(*Início_Criação_matriz_taxa_atualizacao*)
```

```
txact[1, 1] = 0; txact[1, 2] = 0.0025667; txact[1, 3] = 0.001811;
txact[2, 1] = 0.0001; txact[2, 2] = 0.0033292; txact[2, 3] = 0.0022303;
txact[3, 1] = 0.0002; txact[3, 2] = 0.0074934; txact[3, 3] = 0.0047207;
txact[4, 1] = 0.0003; txact[4, 2] = 0.0109974; txact[4, 3] = 0.0114431;
txact[5, 1] = 0.0004; txact[5, 2] = 0.0197536; txact[5, 3] = 0.0228496;
txact[6, 1] = 0.0005; txact[6, 2] = 0.037242; txact[6, 3] = 0.0470732;
txact[7, 1] = 0.0006; txact[7, 2] = 0.0618886; txact[7, 3] = 0.0834009;
txact[8, 1] = Null; txact[8, 2] = Null; txact[8, 3] = Null;
```

```
taxaAtualizacao = Array[txact, {8, n}];
```

```
(*Print["tx atualizacao=" , MatrixForm[taxaAtualizacao]]*)
```

```
(*Fim_Criação_matriz_taxa_atualizacao*)
```

```
(*Início_Criação_matriz_parametros:
```

```
matriz com parametros da distribuição Beta referente
```

```
à taxa de recuperação de cada crédito em caso de default*)
```

```
(*Início_Atribuição_valores:  $\mu$  valor esperado da taxa recuperação do crédito,  
 $\sigma$  desvio padrão da taxa recuperação do crédito*)
```

```
 $\mu_1 = 0.5;$ 
```

```
 $\mu_2 = 0.4;$ 
```

```
 $\mu_3 = 0.3;$ 
```

```
 $\sigma_1 = 0.1;$ 
```

```
 $\sigma_2 = 0.2;$ 
```

```
 $\sigma_3 = 0.25;$ 
```

```
Solve[{ $\mu_1 = m_1 / (m_1 + \beta_1)$ ,  $\sigma_1^2 = (m_1 * \beta_1) / ((m_1 + \beta_1)^2 * (m_1 + \beta_1 + 1))$ }, {m1,  $\beta_1$ }]
```

```
Solve[{ $\mu_2 = m_2 / (m_2 + \beta_2)$ ,  $\sigma_2^2 = (m_2 * \beta_2) / ((m_2 + \beta_2)^2 * (m_2 + \beta_2 + 1))$ }, {m2,  $\beta_2$ }]
```

```
Solve[{ $\mu_3 = m_3 / (m_3 + \beta_3)$ ,  $\sigma_3^2 = (m_3 * \beta_3) / ((m_3 + \beta_3)^2 * (m_3 + \beta_3 + 1))$ }, {m3,  $\beta_3$ }]
```

```
(*Fim_Atribuição_valores*)
```

```
param[1, 1] = 11.999999999999996`; param[1, 2] = 11.999999999999996`;
```

```
param[2, 1] = 1.9999999999999996`; param[2, 2] = 2.9999999999999996`;
```

```
param[3, 1] = 0.708`; param[3, 2] = 1.652`;
```

```
matrizParametros = Array[param, {n, 2}];
```

```
Print["Parâmetros da distribuição da taxa de recuperação",
```

```
MatrixForm[matrizParametros]];
```

```
(*FIM_Criacão_matriz_parametros*)
```

```
(*Início_Criação_matriz_taxa_atualizacao_simulada:
```

```
matriz das taxa de atualização para crédito em função dos ratings simulados*)
```

```
taxaActSim = Array[txactsim, {cenariosusados, n}];  
Remove[i];  
  
For[i = 1, i <= cenariosusados,  
  
  For[j = 1, j <= n,  
  
    txactsim[i, j] = txact[auxiliar[i, j], j];  
    taxaActSim = Array[txactsim, {cenariosusados, n}];  
  
    j++];  
  
  i++];  
  
(*Print["Credit Spread Futuro" ,MatrixForm[taxaActSim]]*)  
  
(*Fim_Criação_matriz_taxa_atualizacao_simulada*)
```

```
(* *****Taxa
de Juro***** *)
(*Inicio_Atribuicao_de_valores: número de activos,
número de dias, número de simulações*)

dias = 260;

Print["Num dias simulados=" , dias]

numSimulacao = cenariosusados;

(*Fim_Atribuicao_de_valores*)

(*Inicio_Criacao_matriz_CI, RM,
DP e AD: Carteira com taxa de juro de curto prazo inicial,
taxa de juro média de longo prazo das taxas de juro,
desvio padrão de taxa de juro, e matriz com as taxas diários simulados*)

ci = 0.0273463090359537;
r = 0.035106976;
dp = 0.0947434503562156;
alpha = 3.04113428646531; Print["Coef rever = " , alpha];

(*Inicio_Criacao_matriz_DuracaoI: matriz com as durações das obrigações,
terá o valor zero se não for um título de rendimento fixo*)
n = 3;

di[1, 1] = 2.70576967941243;
di[2, 1] = 5.08375648795376;
di[3, 1] = 2.05312656857148;
DuracaoI = Array[di, {n, 1}];
Print["Duracao=" , MatrixForm[DuracaoI]]

(*Fim_Criacao_matriz_DuracaoI*)

porti[1, 1] = 7504445;
porti[2, 1] = 2442656;
porti[3, 1] = 551172;
matrizPortInicial = Array[porti, {n, 1}];
Print["Portofolio Inicial=" , MatrixForm[matrizPortInicial]]

(*Fim_Criacao_matriz_Portofolio_inicial*)

(*Inicio_Gráfico Preço e yield curve das Obrigações Cupão Zero*)
```

$$W = 100 * \left( \left( \frac{2 * h * e^{\frac{(a+h)*T}{2}}}{(a+h) (e^{h*T} - 1) + 2 * h} \right) ^ \left( \frac{2 * a * r}{dp * dp} \right) \right) * e^{\left( - \frac{2 * (e^{h*T} - 1)}{(a+h) (e^{h*T} - 1) + 2 * h} \right) * ci};$$

```
Print["Preço Inicial Obrigações Cupão Zero por maturidade=" , Plot[W, {T, 0.5, 10}]]
```

```
H = -(Log[W/100] / T);
```

```
Print["Yield Curve Inicial=" , Plot[H, {T, 0.01, 15}]]
```

```
(*Fim_Gráfico Preço e yield curve das Obrigações de Cupão Zero*)
```

```
(*Inicio_Criacao_matriz_PrecoInicialrf*)
```

```
a = 2.9210439506003;
```

```
h = sqrt(a^2 + 2 * dp * dp);
```

```
For[j = 1, j ≤ n,
```

$$\text{pirf}[j, 1] = 100 * \left( \left( \frac{2 * h * e^{\frac{(a+h)*di[j,1]}{2}}}{(a+h) (e^{h*di[j,1]} - 1) + 2 * h} \right) ^ \left( \frac{2 * a * r}{dp * dp} \right) \right) * e^{\left( - \frac{2 * (e^{h*di[j,1]} - 1)}{(a+h) (e^{h*di[j,1]} - 1) + 2 * h} \right) * ci};$$

```
j++];
```

```
matrizPrecoInicialrf = Array[pirf, {n, 1}];
```

```
Print["PrecoInicialsemRisco=" , MatrixForm[matrizPrecoInicialrf]];
```

```
(*Fim_Criacao_matriz_matriz_PrecoInicialrf*)
```

```
For[j = 1, j ≤ n,
```

```
yieldrfinicial[j, 1] = -(Log[pirf[j, 1] / 100] / di[j, 1]);
```

```
j++];
```

```
matrizYieldsrInicial = Array[yieldrfinicial, {n, 1}];
```

```
Print["YieldsemRiscoInicial=" , MatrixForm[matrizYieldsrInicial]];
```

```
(*Inicio_Criação_PremioCreditoInicial:
```

```
Matriz dos desvios padrão da rendibilidade
```

dos activos das entidades emitentes dos créditos\*)

```
prem[1, 1] = 0;
prem[2, 1] = 0.0033292;
prem[3, 1] = 0.0047207;
```

```
PremioCreditoInicial = Array[prem, {n, 1}];
Print["PremioCreditoInicial=", MatrixForm[PremioCreditoInicial]]
```

(\*Fim\_Criação\_matriz\_DP\*)

(\*Inicio\_Criacao\_matriz  
\_PrecoI: matriz com o preco inicial dos activos primitivos\*)

```
For[j = 1, j ≤ n,
  pi[j, 1] = 100 * Exp[-Log[(eyieldrfinicial[j,1] - 1 + prem[j, 1]) + 1] * di[j, 1]];
  j++];
```

```
PrecoI = Array[pi, {n, 1}];
Print["Preco com Risco Inicial=", MatrixForm[PrecoI]]
```

(\*Fim\_Criacao\_matriz\_PrecoI\*)

(\*Início\_Criação\_matriz\_valor\_nominal\*)

```
For[j = 1, j ≤ n,
  nominal[j, 1] = porti[j, 1] * Exp[Log[(eyieldrfinicial[j,1] - 1 + prem[j, 1]) + 1] * di[j, 1]];
  j++];
```

```
ValorNominal = Array[nominal, {n, 1}];
Print["Valor Nominal=", MatrixForm[ValorNominal]];
```

(\*Fim\_Criação\_matriz\_valor\_nominal\*)

(\*Inicio\_Criacao\_matriz\_Portofolio  
\_inicial: valores iniciais investidos por activo\*)

(\*Inicio\_Criacao\_gerador  
\_Z: Geração de v.a. Normais estandardizadas independentes\*)

```

geradorQ = Function[ ,
  q =  $\left( \left( \sum_{j=1}^{12} \text{Random}[] \right) - 6 \right)$ ;
  (*Print["Matriz Z=" , MatrixForm[matrixQ]]*)
];

(*FIM_Criacao_gerador_Z*)

(*Inicio_Criacao_matriz_Yinicial*)

geradorQ[];
w = dp * q;

AD = Array[ad, {1, dias}];
(*Print["AD=" , MatrixForm[AD]]*)

incremento = 1 / dias;

For[simulacao = 1, simulacao <= numSimulacao,

  ad[1, 1] = ci +  $\alpha$  * (r - ci) * incremento + dp * (ci ^ (1 / 2)) * w * incremento ^ (1 / 2);
  AD = Array[ad, {1, dias}];
  (*Print["AD=" , MatrixForm[AD]]*)

  For[k = 2, k <= dias,

    geradorQ[];
    w = dp * q;
    ad[1, k] = ad[1, k - 1] +  $\alpha$  * (r - ad[1, k - 1]) * incremento +
      dp * (ad[1, k - 1] ^ (1 / 2)) * w * incremento ^ (1 / 2);
    AD = Array[ad, {1, dias}];
    (*Print["AD=" , MatrixForm[AD]]*)

    k++;

  (*Fim_Criacao_matriz_CI, RM, DP e AD*)

  (*Inicio_Criacao_matriz
  _resultados: resultados simulados - cada coluna corresponde a um activo,
  cada linha corresponde a uma simulação*)

  simres[simulacao, 1] = ad[1, dias];

```

```

simresultados = Array[simres, {numSimulacao, 1}];

simulacao++]

(*Print["Tx juro c/ prazo futura=", MatrixForm[simresultados]]*);

(*Fim_Criacao_matriz_resultados*)

(*Inicio_Criacao_matriz_PrecoFinalsemRisco*)

a = 2.9210439506003;
h =  $\sqrt{a^2 + 2 * dp * dp}$ ;

For[i = 1, i ≤ numSimulacao,

  For[j = 1, j ≤ n,
    pf[i, j] =
      100 *  $\left( \left( \frac{2 * h * e^{\frac{(a+h) * (di[j,1]-1)}{2}}}{(a+h) (e^{h * (di[j,1]-1)} - 1) + 2 * h} \right)^{\left( \frac{2 * a * r}{dp * dp} \right)} * e^{\left( -\frac{2 * (e^{h * (di[j,1]-1)} - 1)}{(a+h) (e^{h * (di[j,1]-1)} - 1) + 2 * h} \right) * simres[i,1]} \right)$ ;
    j++;
  i++];

matrizPrecoFinalsemRisco = Array[pf, {numSimulacao, n}];
(*Print["PrecoFinalsemRisco=" , MatrixForm[matrizPrecoFinalsemRisco]]*);

(*Fim_Criacao_matriz_PrecoFinalsemRisco*)

For[i = 1, i ≤ numSimulacao,

  For[j = 1, j ≤ n,
    yieldrf[i, j] = -(Log[pf[i, j] / 100] / (di[j, 1] - 1));
    j++;
  i++];

matrizYieldsemRisco = Array[yieldrf, {numSimulacao, n}];
(*Print["YieldsemRisco=" , MatrixForm[matrizYieldsemRisco]]*);

For[i = 1, i ≤ cenariosusados,

  For[j = 1, j ≤ n,

    yieldannualrs[i, j] =  $e^{yieldrf[i,j]} - 1 + txactsim[i, j]$ ;
    matriztaxaRiscoanual = Array[yieldannualrs, {cenariosusados, n}];

```

```

If[txactsim[i, j] = Null,
  yieldannualrs[i, j] = 0;
  matriztaxaRiscoanual = Array[yieldannualrs, {cenariosusados, n}];
  ,
];

j++;

i++;
(*Print["Taxa de Risco Anual=" ,MatrixForm[matriztaxaRiscoanual]]*)

For[i = 1, i <= cenariosusados,

  For[j = 1, j <= n,

    yieldcomrisco[i, j] = Log[yieldannualrs[i, j] + 1];
    matrizYieldRisco = Array[yieldcomrisco, {cenariosusados, n}];

    j++;

    i++;
  (*Print["Yield com credit spread=" ,MatrixForm[matrizYieldRisco]]*)

  For[i = 1, i <= cenariosusados,

    For[j = 1, j <= n,

      precofinalrisco[i, j] = 100 * e-yieldcomrisco[i,j]*(di[j,1]-1);
      matrizprecofinalrisco = Array[precofinalrisco, {cenariosusados, n}];

      If[txactsim[i, j] = Null,
        precofinalrisco[i, j] =
          (nominal[j, 1] * Random[BetaDistribution[param[j, 1], param[j, 2]]]) /
          (porti[j, 1] / pi[j, 1]);
        matrizprecofinalrisco = Array[precofinalrisco, {cenariosusados, n}];
        ,
      ];

      j++;

      i++;
    (*Print["Preço com risco final=" ,MatrixForm[matrizprecofinalrisco]]*)

  (*Inicio_Criacao_matriz_Rendibilidade_Carteira*)

  For[i = 1, i <= numSimulacao,

    For[j = 1, j <= n,
      rc[i, j] = precofinalrisco[i, j] / pi[j, 1] - 1;
    ]
  ]

```

```

    j++);

i++;

matrizRendCarteira = Array[rc, {numSimulacao, n}];
(*Print["RendCarteira=" ,MatrixForm[matrizRendCarteira]]*);

(*Fim_Criacao_matriz_Rendibilidade_Carteira*)

(*Inicio_Criacao_matriz_Resultado
_Carteira: resultados (valorização/desvalorização) monetária de cada activo *)

For[i = 1, i ≤ numSimulacao,

    For[j = 1, j ≤ n,

        resCart[i, j] = rc[i, j] * porti[j, 1];

        j++);

    i++];

matrizResultadoCarteira = Array[resCart, {numSimulacao, n}];
(*Print["Resultado Carteira=" ,MatrixForm[matrizResultadoCarteira]]*);

(*Fim_Criacao_matriz_Resultado_Carteira*)

(*Inicio_Criação_ficheiros_txt_com_resultados_carteira*)

For[t = 1, t ≤ numSimulacao, RTxJGovernamentais[t, 1] = resCart[t, 1]; t++];
matrizRTxJGovernamentais = Array[RTxJGovernamentais, {numSimulacao, 1}];
MatrixForm[matrizRTxJGovernamentais];
matrizRTxJGovernamentais >> matrizResTxJGovernamentais.txt

For[t = 1, t ≤ numSimulacao, RTxJBancos[t, 1] = resCart[t, 2]; t++];
matrizRTxJBancos = Array[RTxJBancos, {numSimulacao, 1}];
MatrixForm[matrizRTxJBancos];
matrizRTxJBancos >> matrizResTxJBancos.txt

For[t = 1, t ≤ numSimulacao, RTxJPT[t, 1] = resCart[t, 3]; t++];
matrizRTxJPT = Array[RTxJPT, {numSimulacao, 1}];
MatrixForm[matrizRTxJPT];
matrizRTxJPT >> matrizResTxJPortugalTelecom.txt

(*Fim_Criação_ficheiros_txt_com_resultados_carteira*)

```



# Risco de Sinistralidade Futura

```
(*Inicio_Atribuicao_de_valores: parâmetros distribuição número de sinistros,
parâmetros distribuição indenizações individuais, provisão inicial*)
```

```
numeroSimulacoes = 5000;
alfa = 58211.45155;
prob = 0.924505044501648;
miu = 6.702462484;
sigma = 1.345522288;
alpha = 2.05145763595336;
k = 2357.18006013854;
rs = 7815320 + 1803230;
```

```
(*Fim_Atribuicao_de_valores:*)
```

```
<< Statistics`DiscreteDistributions`
```

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
```

```
(*Inicio_Criacao_matriz
_resultados: valores das indenizações agregadas simuladas*)
```

```
For[i = 1, i ≤ numeroSimulacoes,
```

```
NumeroSinistros[i, 1] = Random[NegativeBinomialDistribution[alfa, prob]];

```

```
For[j = 1, j ≤ NumeroSinistros[i, 1],
```

```
l = Random[LogNormalDistribution[miu, sigma]]; If[l < 30000, x[i, j] = l,];
```

```
If[l ≥ 30000, z = Random[] * (1 - 0.995362252327254) + 0.995362252327254;
```

```
If[z == 1, x[i, j] = 5000000, x[i, j] = (k / ((1 - z)^(1/alpha)) - k),];
```

```
Clear[l]; Clear[z];
```

```
j++];
```

```
s[i, 1] = Sum[x[i, j], {j, 1, NumeroSinistros[i, 1]}];
```

```
i++];
```

```
matrizIndemnizacoesAgregadas = Array[s, {numeroSimulacoes, 1}];
```

```
NSIN = Array[NumeroSinistros, {numeroSimulacoes, 1}];
```

```
(*Print["Indemnizacoes agregadas = ", MatrixForm[matrizIndemnizacoesAgregadas]]*);
```

```
(*Print["Numero Sinistros = ", MatrixForm[NSIN]]*);
```

```
(*Fim_Criacao_matriz_resultados*)
```

```
(*Inicio_Criacao_matriz_matrizReservSinistFut:
```

```
diferença entre Provisão constituída e indenizações agregadas simuladas*)
```

```
For[i = 1, i <= numeroSimulacoes,  
  reservSinistFut[i, 1] = rs;  
  i++];  
matrizReservSinistFut = Array[reservSinistFut, {numeroSimulacoes, 1}];  
  
ResultSinistFut = matrizReservSinistFut - matrizIndemnizacoesAgregadas;  
  
(*Print["Resultados Sinistros Futuros = " MatrixForm[ResultSinistFut]]*);  
ResultSinistFut >> ResFinaisLogParetoSinistFut.txt;  
  
(*Fim_Criacao_matriz_matrizReservSinistFut*)  
  
(*Fim_Programa*)
```