MESTRADO EM
CIÊNCIAS ATUARIAIS

TRABALHO FINAL DE MESTRADO
RELATÓRIO DE ESTÁGIO

ANUIDADES VARIÁVEIS COM GARANTIAS:
CÁLCULO DO PRÉMIO E *HEDGING* DOS RISCOS

PEDRO MARZAGÃO BARBUTO

JULHO – 2012

MESTRADO EM
CIÊNCIAS ATUARIAIS

TRABALHO FINAL DE MESTRADO
RELATÓRIO DE ESTÁGIO

ANUIDADES VARIÁVEIS COM GARANTIAS:
CÁLCULO DO PRÉMIO E *HEDGING* DOS RISCOS

PEDRO MARZAGÃO BARBUTO

ORIENTAÇÃO:

DOUTOR ONOFRE ALVES SIMÕES

DR. CARLOS MANUEL SOARES DOMINGUES

JULHO – 2012

Anuidades Variáveis com Garantias:
Cálculo do prémio e *hedging* dos riscos

Pedro Marzagão Barbuto

Mestrado em: Ciências Atuariais

Orientação: Onofre Alves Simões

Carlos Manuel Soares Domingues

Resumo

O objetivo do projeto é tarifar e elaborar estratégias de cobertura para dois tipos de garantias embutidas em algumas anuidades variáveis: *Guaranteed Minimum Maturity Benefit* (**GMMB**) e *Guaranteed Minimum Death Benefit* (**GMDB**).

Adicionalmente, colocou-se o desafio de verificar se é viável implementar estas garantias em um produto *Unit-Linked* já existente na companhia patrocinadora do estágio (Ocidental Seguros).

O estudo foi desenvolvido através de uma adaptação do Modelo Black-Scholes, aliado a Simulação de Monte Carlo e com base nas condições atuais do mercado.

Palavras-chave: Garantias Financeiras, Delta *Hedging*, Simulação de Monte Carlo, Modelo de Black-Scholes, Opções Financeiras.

Variable Annuities with Guaranteed Benefits: Pricing and hedging

Pedro Marzagão Barbuto

Master in: Actuarial Science

Supervisors: Onofre Alves Simões

Carlos Manuel Soares Domingues

Abstract

The purpose of this work is to quantify and devise coverage strategies for two types of guaranteed benefits embedded in certain variable annuities: Guaranteed Minimum Maturity Benefit (**GMMB**) and Guaranteed Minimum Death Benefit (**GMDB**).

An additional challenge was presented, i.e. to assess the viability to implement these guarantees in a Unit-Linked product that is already commercialized by the company that sponsored the internship (Ocidental Seguros).

The study was conducted pursuant to current market conditions and under an adaptation of the Black-Sholes Model coupled with the Monte Carlo Simulation.

Keywords: Financial Guarantees, Delta Hedging, Monte Carlo Simulation, Black-Scholes Model, Financial Options.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Onofre Alves Simões, por toda a paciência, dedicação e ajuda.

Ao meu orientador de Estágio, Dr. Carlos Manuel Soares Domingues, pela oportunidade na empresa além da disponibilidade e atenção no decorrer do estágio.

A toda equipa de Atuariado da Ocidental Seguros, que me ajudaram, de forma direta e indireta, na elaboração deste relatório: Ana Ferreira, Bruno Oliveira, Catarina Rodrigues, Concordia Cunha, Íris Crispim, Isabel Jerónimo, Liliana Silva, Marta Lourenço, Mónica Duarte e Sandra Ruivo; também ao Dr. Carlos Nunes da Direção de Investimentos.

Aos Professores João Pedro Nunes e João Andrade Silva.

Ao meu querido amigo José Sebastião Cancela de Abreu.

À minha querida família e esposa, pelo suporte e apoio durante o todo Mestrado.

1. Introdução

Os Seguros *Unit-Linked* (UL) são produtos estruturados complexos de poupança de médio/longo prazo, sob a forma de seguros de vida, que investem os seus prémios num Fundo Autónomo de Investimento, garantindo liquidez e alguns benefícios fiscais (Seguros de Vida ligados a fundos de investimento).

Estes produtos caracterizam-se também pelo fato dos valores seguros, reservas ou mesmo prémios estarem expressos em unidades de um ou mais fundos de investimento. Sem garantia, o risco é totalmente transferido ao segurado.

Ao longo do tempo, devido a crescente busca por outras oportunidades de investimento mais rentáveis fora das seguradoras, foram incorporadas garantias aos contratos de seguro de vida. A ideia era criar um investimento com atrativas rentabilidades sem abrir mão de uma proteção.

Os tipos de garantias mais comuns encontradas no mercado são:

- ***Guaranteed Minimum Maturity Benefit*** **(GMMB):** garante ao segurado um montante mínimo, na maturidade do contrato. Também é conhecido por *Guaranteed Minimum Accumulated Benefit* (GMAB)

- ***Guaranteed Minimum Death Benefit* (GMDB):** garante um montante mínimo, em caso de morte durante a vigência do contrato. Normalmente é o mesmo valor do prémio investido.
- ***Guaranteed Minimum Income Benefit* (GMIB):** Parecido com GMMB, porém o segurado tem a opção de converter o benefício, na maturidade, numa renda vitalícia com taxa técnica previamente definida.
- ***Guaranteed Minimum Withdrawal Benefit* (GMWB):** De uma forma geral, garante resgates mínimos periódicos de um determinado montante.

A avaliação e gestão do risco destes produtos são um pouco mais complexas, comparativamente com um seguro de vida tradicional. Isto deve-se ao fato de todas as apólices serem correlacionadas, pela sua ligação ao fundo de investimento; consequentemente, se o mercado começa a tornar-se desfavorável, todos os segurados serão afetados ao mesmo tempo. De uma maneira geral, dependendo do tipo de garantia oferecida, a seguradora terá prejuízo ou em todas ou em nenhuma apólice.

A venda destas garantias expõe a seguradora a múltiplos riscos. A seguir, alguns exemplos, segundo Kalberer, T. (2009):

- Mortalidade
- Tarifação inadequada
- Taxa de juro
- Volatilidade
- *Basis risk*
- Contraparte
- Liquidez
- Desempenho
- Custos de transação
- *Bid/offer spread*
- Dividendos
- Comportamental
- Operacional
- Custo do capital
- Sistemático

Normalmente, estes riscos, na sua maioria, não são eliminados por completo, mas sim transformados. O intuito é trocar por outro que a seguradora acredite que seja mais fácil de lidar.

No texto a seguir, faz-se a avaliação do preço de GMMB e GMDB, através de uma adaptação do Modelo de Black-Scholes. Entretanto, outros autores também recorrem à teoria das opções financeiras para a avaliação destas garantias, como por exemplo, Milevsky e Posner (2001), para GMDB. Para uma revisão cuidadosa da bibliografia sobre rendas variáveis, ver Frederico (2011).

No Capítulo 3, vem à apresentação de alguns tipos de estratégias de cobertura, dando ênfase à estratégia de Delta *Hedging*. O capítulo termina com a referência a alguns aspectos que visam aproximar teoria e prática e também um método de especulação. O Capítulo 4 contém elementos preparatórios da aplicação prática do modelo escolhido, utilizando os dados e condições da empresa, a fim de verificar se é possível, ou não, comercializar estas duas garantias em um produto *Unit-Linked* já existente na companhia. Os resultados e as conclusões mais significativas estão no Capítulo 5.

Não é demais salientar que toda a análise e conclusões exprimem necessariamente a interação com a equipa de atuariado da Ocidental Seguros, cuja experiência e conhecimento da companhia se revelaram de inestimável valia. Sem eles, a indispensável aderência à realidade ficaria muito mais comprometida.

1.1 Opções Financeiras

Opção financeira é um contrato em que o comprador tem o direito, não a obrigação, de vir a comprar ou vender uma quantidade de um ativo em (opção europeia), ou até (opção americana), uma data futura a um preço fixo pré-determinado. Para este direito o comprador deverá pagar um prémio ao vendedor.

Representando por S o valor do ativo subjacente e por K o preço de exercício da opção, os valores destes contratos na maturidade (opção europeia) equivalem à:

- Opção de Compra (*Call Option*): $c = \max(\mathrm{S} - \mathrm{K}; 0) = (\mathrm{S} - \mathrm{K})^{+}$
- Opção de Venda (*Put Option*): $p = \max(\mathrm{K} - \mathrm{S}; 0) = (\mathrm{K} - \mathrm{S})^{+}$

1.2 Modelo de Black-Scholes

É um dos modelos mais utilizados para estabelecer o preço de opções. Foi desenvolvido num trabalho conjunto entre Robert Merton, Myron Scholes e Fischer Black, em 1973, e baseia-se nas seguintes hipóteses:

- O valor do ativo subjacente segue um movimento Browniano Geométrico (Processo de Wiener) com *drift* e volatilidades constantes.
- As variações das cotações entre o tempo inicial e a maturidade são normalmente distribuídas e as cotações em si seguem uma distribuição log-normal.
- O ativo subjacente pode ser livremente transacionado (é permitida venda a descoberto).
- Não existem impostos nem custos de transação.
- A negociação dos ativos é realizada continuamente no tempo.
- Todos os dividendos são reinvestidos.

– Não existem possibilidades de arbitragem.

– É possível conseguir empréstimos ou financiamentos a uma taxa livre de risco.

A partir destas condições, Black-Scholes chegaram às seguintes fórmulas de avaliação para opções europeias:

$$c_t(S\,;K;\tau) = S_t\,N(d_1) - K\,e^{-r\tau}\,N(d_2) \tag{1.1}$$

$$p_t(S\,;K;\tau) = K\,e^{-r\tau}\,N(-d_2) - S_t\,N(-d_1) \tag{1.2}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \qquad \text{e} \qquad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Onde S_t é o preço do ativo no instante t de avaliação, $\tau = T - t$ é o período restante até a maturidade do contrato, r é a taxa contínua de juro sem risco, σ é a volatilidade do ativo subjacente e $N(x)$ é a Função de distribuição acumulativa da Normal padrão.

2. *Pricing* das Garantias

2.1 GMMB

Supondo que a seguradora oferece um valor mínimo (G) na forma de garantia na maturidade (T), o benefício (B_T) pago no final do contrato ao beneficiário será o maior valor entre esta garantia oferecida e o valor do Fundo (F_T):

$$B_T = \max(G\,; F_T) \iff B_T = \max(G - F_T\,; 0) + F_T, \tag{2.1}$$

B_T é o valor de direito do segurado no término do contrato. Entretanto, o custo (L_T) para a seguradora é

$$L_T = B_T - F_T \tag{2.2}$$

Usando (2.1), (2.2) é equivalente a

$$L_T = \max(G - F_T\,; 0) \tag{2.3}$$

Este passivo ocorrerá somente no final do contrato; logo, supondo que r seja a taxa de juro livre de risco, conseguida pela seguradora no mercado, o valor atual do custo será

$$L_0 = e^{-rT}\max(G - F_T\,; 0) = e^{-rT}(G - F_T)^+,$$

com valor esperado, calculado com a medida de probabilidade neutra de risco Q,

$$P = E_Q[L_0] = E_Q[e^{-rT}\,(G - F_T)^+\,] = e^{-rT}\,E_Q[(G - F_T)^+\,] \tag{2.4}$$

Vale lembrar que $(K - S_T)^+$ gera o mesmo resultado (*payoff*) de uma opção de venda sobre um ativo S e preço de exercício K; logo,

$$P = E_Q[L_0] = e^{-rT}\, E_Q\left[(G - F_T)^+\right] = p_0(F_0; G; T) \quad (2.5)$$

Ou seja, o valor do passivo deve ser igual ao preço p_0 de uma opção europeia de venda, na qual o ativo subjacente é o Fundo e o preço de exercício é a Garantia oferecida no resgate.

Com o propósito de aprimorar a avaliação, deve incluir-se no modelo os encargos, taxas e comissões que serão cobradas sobre o produto durante toda sua duração.

Desta forma, o valor do fundo no momento t ($t \leq T$) não será mais F_t mas sim $F_t\, v(m; T)$, onde $v(m; T)$ representa a função dos encargos que serão descontados ao longo do tempo, com m sendo a percentagem descontada do fundo a cada período e T a maturidade do contrato.

A função $v(m; T)$ pode assumir diferentes estruturas, dependendo do contrato do produto. Abaixo temos três exemplos de cobrança:

a) $v(m; T) = e^{-mT} \Rightarrow$ as taxas serão cobradas continuamente.

b) $v(m; T) = (1 - m)^T \Rightarrow$ as taxas serão cobradas em tempo discreto.

c) $v(m; T) = (1 - s)(1 - m)^T \Rightarrow$ as taxas serão cobradas de maneira discreta, sendo também cobrada uma comissão de subscrição.

A partir do momento em que se define a taxa de encargos e qual a maturidade do contrato, a função $v(m; T)$ torna-se uma constante. Sendo assim, agregando estes encargos ao valor do fundo, obtém-se a seguinte equação para o passivo, na maturidade:

$$L_T^* = \max(G - F_T\, v(m; T); 0)$$

Com objetivo de simplificar notações, $F_t\, v(m; T)$ será designado por F_t^*, desta forma:

$$L_T^* = \max(G - F_T^*; 0) = p_T(F_T^*; G; T) \quad (2.6)$$

Para estimar o valor atual deste passivo, podem utilizar-se os mesmos modelos de avaliação para Opções Financeiras.

$$P_{GMMB} = E_Q[L_0^*] = e^{-rT} E_Q[(G - F_T^*)^+] = p_0(F_0^*; G; T) \tag{2.7}$$

Adaptando o Modelo Black-Scholes de avaliação para o preço de uma opção de venda sobre o Fundo, obtém-se (ver (1.2)):

$$P_{GMMB} = p_0(F_0^*; G; T) = G\, e^{-rT} N(-\,d_2) - F_0^* N(-\,d_1) \tag{2.8}$$

com

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_0^*}{G}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad e \qquad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F_0^*}{G}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad .$$

Neste caso, assume-se que todos os dividendos gerados serão reinvestidos no próprio fundo.

2.2 GMDB

Na avaliação desta garantia pode utilizar-se um raciocínio similar ao da avaliação de GMMB, notando que a garantia será paga ao beneficiário caso a morte do segurado ocorra durante o período de vigência do contrato (em $n \leq T$). O passivo da empresa será

$$L_n = \max(G - F_n^*; 0) \tag{2.9}$$

O valor atual vem $L_0 = e^{-rn} \max\left(G - F_n^*; 0\right)$ e pretende estimar-se o valor esperado:

$$P_{GMDB} = E_Q[L_0] = E_Q[e^{-rn} (G - F_n^*)^+] \tag{2.10}$$

Como n é uma variável aleatória, tem-se não só uma opção de venda, mas sim um portfólio de opções de venda sobre o fundo com diferentes maturidades. A quantidade de cada opção será calculada de acordo com as probabilidades de sobrevivência e morte do segurado.

É importante atentar-se que o custo desta garantia irá variar de acordo com os termos do contrato, pois é necessário saber em que momento o beneficiário irá receber o valor de direito.

Teoricamente, é possível admitir que o benefício será pago no exato momento da morte; desta forma, a avaliação do custo, em tempo contínuo, é dada pela equação:

$$P_{GMDB} = E_Q[L_0] = \int_0^T e^{-r\theta} \left(G - F_{\theta}^{*}\right)^{+} {}_{\theta}p_x \, \mu_{x+\theta} d\theta, \qquad (2.11)$$

equivalente a

$$P_{GMDB} = \int_0^T p_0(F_0^{*}; G; \theta) \, {}_{\theta}p_x \, \mu_{x+\theta} \, d\theta \qquad (2.12)$$

Recorde-se que ${}_{t}p_x \, \mu_{x+t} dt$ é a probabilidade de uma pessoa de idade x estar viva daqui a t anos e falecer num intervalo infinitesimal, de amplitude dt, imediatamente posterior.

Resumidamente, o custo para a seguradora no momento zero será equivalente ao preço do conjunto de opções de venda sobre o fundo, com todas as maturidades possíveis, multiplicadas pelas respectivas probabilidades.

Outra maneira, bem mais realista para a empresa, de estimar o custo da Garantia, é considerar que o benefício será pago no final de um período pré-estabelecido (mês, semestre, ano) da morte do segurado. Portanto, avaliando o preço em tempo discreto:

$$P_{GMDB} = E_Q[L_0] = \sum_{n=1}^{T} {}_{n-1|}q_x \; \max(G - F_n^{*}; 0)$$

${}_{t|}q_x$: a probabilidade de um indivíduo com idade x sobreviver até à idade $x + t$ e morrer antes de completar a idade $x + t + 1$.

Note-se que, utilizando a tabela de mortalidade, ${}_{t|}q_x = {}_tp_x . q_{x+t} = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x}$; se optar por utilizar uma função de sobrevivência, ${}_{t|}q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+1)}{s(x)}$.

Acrescentando ao modelo de avalição Black-Scholes as probabilidades de sobrevivência e de morte aos preços das diferentes opções, vem, por (1.2),

$$P_{GMDB} = \sum_{n=1}^{T} {}_{n-1|}q_x \; p_0(F_0^*; G; n) \tag{2.13}$$

$$p_0(F_0^*; G; n) = G\, e^{-rn}\, N(-d_2^0) - F_0^*\, N(-d_1^0) \tag{2.14}$$

$$P_{GMDB} = \sum_{n=1}^{T} {}_{n-1|}q_x \; [G\, e^{-rn}\, N(-d_2^0) - F_0^*\; N(-d_1^0)], \tag{2.15}$$

$$d_1^0 = \frac{\ln\left(\frac{F_0^*}{G}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)n}{\sigma\sqrt{n}} \qquad \text{e} \qquad d_2^0 = \frac{\ln\left(\frac{F_0^*}{G}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)n}{\sigma\sqrt{n}}$$

3. Estratégias de *Hedging*

Conforme já comentado, por se tratar de um produto estruturado complexo, não é tarefa fácil para o gestor mitigar todos os riscos envolvidos na sua venda.

Existem diferentes estratégias de cobertura para estas garantias. Obviamente nem todas conseguirão eliminar o risco de maneira completa. Quanto mais risco se visa eliminar mais complexa e cara a cobertura será.

3.1 Exemplos de estratégias

3.1.1 *Run Naked*

Consiste em simplesmente não fazer cobertura alguma, apostando que o fundo em longo prazo terá um bom desempenho e, somado à cobrança de altas taxas, o risco estará contido. Foi bastante utilizada antes do *crash* do mercado em 2001 e claramente é muito lucrativa quando se confirmam as expectativas; no contrário, pode resultar em grandes prejuízos para a companhia ou até a falência da mesma.

Ainda é implementada por algumas pequenas empresas com a GMDB, pelo fato do risco não ser tão catastrófico quanto às outras garantias e o custo de uma cobertura adequada sobre pequenas quantias pode acabar não sendo viável. Apesar de neste ponto de vista ser plenamente justificável esta prática, acaba-se por atrair mais atenção de órgãos reguladores e empresas de *rating*, que não veem com bons olhos este tipo de cobertura.

3.1.2 *Hedge and Forget*

Com o objetivo de não ficar excessivamente exposto quanto à técnica anterior, esta estratégia consiste em fazer uma reserva financeira (que pode ser através de um portfólio de investimento) no início do contrato e não mais mexer nesta reserva (portfólio) até a sua maturidade. É uma técnica que visa eliminar qualquer custo extra durante a vida do produto. Apesar de se tratar de uma cobertura mais aprimorada que a anterior, não se credencia ainda como uma estratégia segura, já que da mesma forma continua expondo a seguradora a diversos riscos. (Hull, J. 2005)

3.1.3 *Static Hedging*

Envolve a compra de um conjunto de opções exóticas (com longas maturidades) de bancos de investimento. Como estas opções são somente vendidas no mercado *over-the-counter*, existe o risco de contraparte, além do chamado *basis-risk*, já que estes derivados não têm como ativo subjacente o fundo, mas sim índices. Aliado a estes riscos, esta estratégia possui a desvantagem de ser demasiada cara, devido a liquidez deste tipo de derivado ser decrescente com a maturidade, sem mencionar que o *bid/offer spread* destes instrumentos geralmente é muito grande.

3.1.4 Resseguro

Tem por objetivo eliminar parte do risco, transferindo-o para outra empresa. Antes da crise de 2008 era uma estratégia muito conveniente para as seguradoras, pois devido ao bom desempenho do mercado nos últimos anos, e também pela mesma crença de que o mercado continuaria sempre a crescer, o preço do resseguro era muito atrativo. Hoje em dia, infelizmente, tornou-se extremamente cara, além do risco de contraparte ter aumentado significantemente, fato que há uns tempos atrás era praticamente ignorado.

3.1.5 *Dynamic Hedging*

Tem sido usada por bancos de investimentos, e também atualmente por seguradoras. Consiste em recriar dinamicamente e sinteticamente opções financeiras por meio de outros ativos de curto prazo e alta liquidez no mercado. A quantidade de risco que esta estratégia consegue minimizar dependerá da sua sofisticação.

Esta prática possui a vantagem de maior flexibilidade, com custo potencialmente menor, em relação às outras. O seu ponto fraco é a necessidade de uma equipa altamente qualificada para aplicá-la corretamente.

Ver-se-á a seguir de forma mais detalhada como funciona a cobertura dinâmica, tendo em atenção questões como o custo, complexidade, tempo, risco e teoria *versus* prática.

3.2 Delta *Hedging*

Esta cobertura consiste em replicar sinteticamente uma opção de venda através de um portfólio composto por dois tipos de investimentos: aplicação a uma taxa livre de risco e a venda a descoberto sobre o ativo subjacente (Black e Scholes, 1973). Este portfólio deverá ser ajustado periodicamente, face à variação do preço da opção em relação ao preço do ativo subjacente, para se ter uma cobertura perfeita do risco.

Por definição, esta taxa de variação do preço da opção em relação ao preço do ativo é designada por Delta da opção. ($\Delta = \partial p / \partial S$).

3.2.1 GMMB

Utilizando o mesmo modelo de avaliação para o preço da garantia, o valor do portfólio de cobertura no início da vigência de contrato, conforme propõem Dickson, Hardy e Waters (2009), será

$$H(0) = P_{GMMB} = p_0(F_0^*; G; T) = a_0 - F_0^*\, b_0 \tag{3.1}$$

Note-se que, este portfólio pode ser divido em dois tipos de investimento: aplicação num ativo livre de risco (a_0) e a venda a descoberto do ativo subjacente $(-F_0^*\, b_0)$.

Desta forma, o valor do portfólio no instante t, tal que $0 \leq t \leq T$, será

$$H(t) = a_t - F_t^*\, b_t \tag{3.2}$$

a_t : valor investido em ativo livre de risco no momento t (posição longa: obrigação).

$-F_t^*\, b_t$: valor investido no momento t nas unidades (posição curta: fundo).

Com o Modelo Black-Scholes, vem

$$a_t = G\, e^{-r(T-t)}\, N\left(-\, d_2^t\right) \qquad \text{e} \qquad -F_t^*\, b_t = -F_t^*\, N\left(-\, d_1^t\right), \tag{3.3}$$

$$d_1^t = \frac{\ln\left(\frac{F_t^*}{G}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad \text{e} \qquad d_2^t = \frac{\ln\left(\frac{F_t^*}{G}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\ .$$

O reajustamento desta opção sintética deverá ocorrer a cada variação do Delta, sendo que para este tipo de contrato o valor no momento t será:

$$\Delta_t = \frac{\partial p}{\partial S} = -N(-\, d_1^t) = -b_t \tag{3.4}$$

Caso todos os pressupostos do modelo sejam cumpridos, esta carteira até à maturidade será autofinanciada (*self-financing*).

3.2.2 GMDB

Utilizando um raciocínio semelhante ao anterior, a posição inicial para o portfólio de cobertura (Dickson, Hardy e Waters (2009)), será:

$$H(0) = P_{GMDB} = a_0 - F_0^* \, b_0 \, . \tag{3.5}$$

Da mesma maneira feita para GMMB, divide-se o portfólio em duas partes, de tal forma que o portfólio seja no instante t: $H(t) = a_t - F_t^* \, b_t \qquad (0 \leq t < n \leq T)$

$$a_t = \sum_{n=t+1}^{T} {}_{n-1|}q_{x+t} \; G \, e^{-r(n-t)} \, N(-d_2^t) \tag{3.6}$$

$$-F_t^* \, b_t = -\sum_{n=t+1}^{T} {}_{n-1|}q_{x+t} \; F_t (1-m)^n \, N(-d_1^t) \;, \tag{3.7}$$

$$d_1^t = \frac{\ln\left(\frac{F_t(1-m)^n}{G}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(n-t)}{\sigma\sqrt{n-t}} \quad \text{e} \quad d_2^t = \frac{\ln\left(\frac{F_t(1-m)^n}{G}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(n-t)}{\sigma\sqrt{n-t}} .$$

Para esta garantia, o Delta da Opção no instante t será

$$\Delta_t = \frac{\partial p}{\partial S} = \left[\sum_{n=t+1}^{T} {}_{n-1|}q_{x+t} \; (1-m)^n \, N(-d_1^t)\right] = -b_t \tag{3.8}$$

3.3 Erro de ajustamento discreto

Pelo fato de ser impossível cumprir todos os pressupostos do modelo Black-Scholes, é importante ter atenção a custos adicionais que podem surgir ao longo do período de contrato.

O primeiro destes será o erro gerado por não ajustar continuamente a carteira de cobertura, que, dependendo do comportamento do fundo, resultará ora lucro, ora prejuízo, para a companhia.

Se por ventura o ativo subjacente tiver um comportamento de uma distribuição Log-normal com as mesmas características assumidas no modelo (volatilidade e taxa de juro), mesmo numa estratégia de ajustamento discreto, o custo adicional gerado será muito próximo de zero.

Infelizmente nem todas as vezes isso acaba por ocorrer no mercado, principalmente quando se trata de uma opção de prazo muito longo. Em consequência disto, no momento em que os pressupostos estejam subavaliados, acarretará em prejuízos à empresa a cada ajustamento. Por outro lado, no momento em que os pressupostos estiverem sobre avaliados, estas correções da carteira na sua maioria resultarão em lucro.

Com a ajuda de simulação verifica-se que, caso o ativo subjacente siga alguma outra distribuição, isso pode tornar-se numa “roleta russa” para a empresa, se optar por fazer ajustes do Delta a cada período de tempo muito espaçado.

Agora veremos alguns tipos de ajustamento do Portfólio, os riscos de cada um e o valor esperado dos custos extras que podem surgir.

No caso de GMMB, inicialmente está a supor-se que o beneficiário irá receber a garantia somente na maturidade. Também, se está a assumir, em ambas as garantias, que todos os segurados irão manter a apólice até o final, fato que mais adiante será corrigido.

3.3.1 Ajustamento Periódico Regular

O ajuste da carteira de cobertura através da variação do Delta será feito somente no final de cada período pré-determinado (hora, dia, semana, mês, ano...) (Hardy 2003). Nos exemplos a seguir define-se que t e T estão na mesma unidade de tempo e r é a taxa de juro aplicada nesta mesma unidade (por exemplo, se t e T estão em meses, r será a taxa de juro aplicada ao mês).

3.3.1.1 GMMB

O Portfólio de cobertura no momento de reajuste t: $\mathrm{t} \in \{1,2, \dots, \mathrm{T}\}$, é

$$\mathrm{H}(\mathrm{t}) = a_{\mathrm{t}} - \mathrm{F}_{\mathrm{t}}^{*}\, \mathrm{b}_{\mathrm{t}}$$

Imediatamente antes do próximo ajuste, o valor do portfólio de cobertura será:

$$\mathrm{H}(\mathrm{t}^{-}) = a_{\mathrm{t}-1}\, \mathrm{e}^{\mathrm{r}} - \mathrm{F}_{\mathrm{t}}^{*}\, \mathrm{b}_{\mathrm{t}-1} \qquad (3.9)$$

Portanto, o erro de ajustamento do Delta no momento t é

$$\mathrm{HE}(\mathrm{t}) = \mathrm{H}(\mathrm{t}) - \mathrm{H}(\mathrm{t}^{-}) \qquad (3.10)$$

O valor atual deste custo é

$$\mathrm{HE}_{\mathrm{Total}} = \sum_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-\mathrm{rt}}\, \mathrm{HE}(\mathrm{t}) \qquad (3.11)$$

3.3.1.2 GMDB

O raciocínio será semelhante ao anterior, porém o erro de cada ajustamento do Delta no momento t dependerá também da condição do segurado, em caso de vida ou de morte.

Caso o segurado esteja vivo no momento t, o erro será: $\mathrm{H(t) - H(t^-)}$

Em caso de morte: $\max(\mathrm{G} - \mathrm{F}_t^*; 0) - \mathrm{H}(t^-)$

Portanto, o erro esperado será

$$\mathrm{HE(t)} = [\mathrm{H(t) - H(t^-)}]\ {}_t p_x + [\max(\mathrm{G} - \mathrm{F}_t^*; 0) - \mathrm{H}(t^-)] \left({}_{t-1|}q_x\right) \tag{3.12}$$

A desvantagem desta estratégia é o risco de os ativos do portfólio sofrerem uma variação muito elevada entre cada ajuste. Fato que é minimizado caso a correção seja feita a cada espaço curto de tempo. De qualquer forma, o gestor tem que ficar atento a este tipo de situação, devendo intervir sempre que necessário.

Convém lembrar que, sempre que se ajusta o portfólio, há um custo de transação, ou seja, se por um lado, diminuir o espaço de tempo entre os ajustes minimiza o risco de erro da carteira, por outro lado aumentam-se os custos da estratégia.

3.3.2 Ajustamento Periódico Regular Condicionado

Esta estratégia é muito parecida com a anterior. O Delta também será ajustado a cada intervalo de tempo, porém somente se esta variação for significativa, ou seja, se justificar os custos de reajustamento e transação da operação.

A ideia básica é deixar variar o Delta numa margem de segurança máxima permitida (ε), acreditando que pequenos ajustes não compensam o custo de transação. Espera-se também que estas pequenas variações possam ser corrigidas no próximo período pelo próprio mercado.

Para ambos os tipos de garantias, a estrutura é a mesma; no entanto, no momento de cada ajustamento, seguir-se-á a regra:

Se $\left|\frac{\Delta_t}{\Delta_{t-1}} - 1\right| > \varepsilon$, ajusta-se o portfólio normalmente, se não, o portfólio é mantido nas mesmas proporções, consequentemente: $H(t) = H(t^-)$

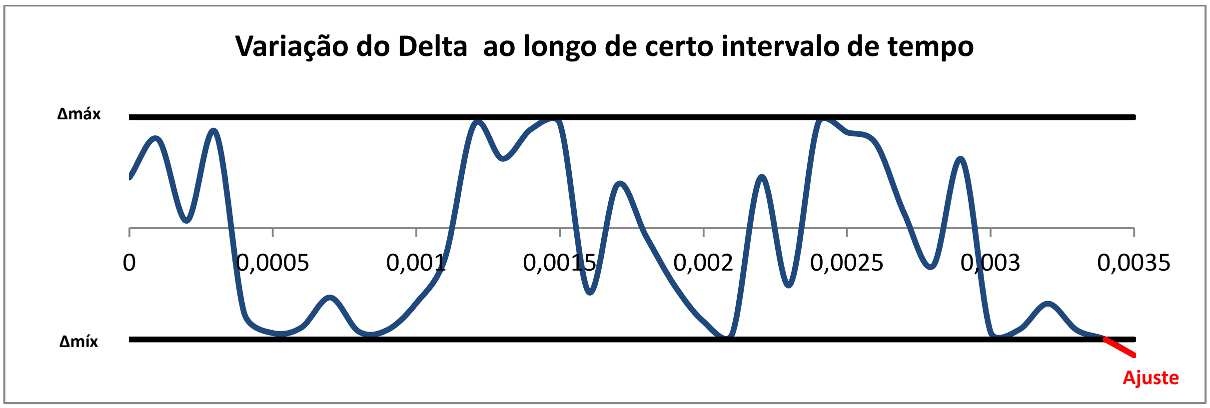
Esta estratégia contém os mesmos problemas que a estratégia anterior, tendo somente a vantagem de diminuir, em algumas ocasiões, os custos de ajustamento e transação.

3.3.3 Ajustamento Periódico Não-Regular Condicionado

Visando eliminar os riscos das estratégias anteriores e também otimizar os custos de transação pelo ajuste constante do Delta, podemos aprimorar a forma de ajustamento, condicionando a alteração do portfólio a variações do Delta acima da margem de variação máxima permitida, não necessitando esperar até ao final do próximo período para fazer esta alteração (Abbey e Henshall 2007). Desta maneira elimina-se o risco de grandes alterações na carteira de investimento, como pode ocorrer nas técnicas anteriores.

Enquanto Delta estiver numa zona de segurança para o gestor, ele não interfere no portfólio, evitando custos desnecessários para corrigir uma situação que o próprio mercado poderá corrigir no instante seguinte.

Nota-se que fazer a cobertura somente do Delta, ou seja, somente de uma das letras Gregas da opção, implica a desvantagem de esta se tornar mais instável. Este procedimento visa também minimizar tal problema.



Sendo assim o gestor poderá observar a variação do Delta constantemente, diminuindo o risco de grandes prejuízos.

Esta tática mostra-se mais eficaz e segura de uma maneira geral, mesmo assim não está imune a "saltos" de preços no mercado, por exemplo, ocorridos em catástrofes.

De uma forma sucinta, para efeitos de estrutura de cálculo e programação, o processo é idêntico ao da metodologia anterior (3.3.2), porém utilizando t na menor unidade de tempo possível.

3.4 Custos de Transação

Custos de transação para obrigações são negligenciados para grandes investidores. É comum considerar que os custos de transação são proporcionais somente ao valor absoluto da variação do valor dos ativos com risco.

Sendo assim, o custo de transação (Hardy, 2003) gerado no momento $t \leq T$ será:

$$CT(t) = \rho\, F_t\, |b_t - b_{t-1}| \tag{3.13}$$

onde ρ é a taxa aplicada para cálculo destes custos. O custo total (CT_{Total}) será a soma dos valores apurados, atualizados. Hardy (2003) cita no seu livro que normalmente se utiliza $\rho = 0{,}2\%$.

3.5 Teoria *versus* Prática

A estratégia de Delta *Hedging* apresenta o problema de o seu valor ser muito instável, necessitando de periódicos reajustes na carteira de cobertura. Isto é parcialmente minimizado com a técnica de deixar o Delta percorrer livremente uma margem previamente definida. Entretanto esta prática continua expondo a empresa emitente a outros riscos, dos quais o mais preocupante é a volatilidade do ativo, que claramente não é constante ao longo do tempo e é de difícil avaliação exata.

Vale lembrar que para esta proteção (Vega *Hedging*) existe a barreira de o ativo subjacente ser um fundo de investimento com troca constante de ativos, tornando impossível transacionar opções sobre estes.

Logicamente, uma carteira de cobertura ideal é a que se possa trabalhar com todos os *Greeks*, no entanto, na prática, esta tarefa torna-se demasiadamente complexa e muito cara.

Um dos objetivos deste relatório de estágio é construir uma estratégia de cobertura confiável e ao mesmo tempo não excessivamente complexa, o que inviabilizaria a sua aplicação no dia a dia. Seguindo este raciocínio, deve ultrapassar-se um problema teórico, que é o de transformar o fundo que possui diversos ativos e que são transacionados constantemente num (ou vários) ativo(s) com um comportamento mais estável.

Uma forma aplicada por várias seguradoras é converter o fundo, por meio de análise de regressão - ou por outro método como, por exemplo, o *Beta Model* - em um ou um conjunto de Índices (que sejam transacionados no mercado de derivados).

Infelizmente, a partir do momento em que se opta por esta prática, a companhia ficará exposta ao chamado *basis-risk*, ou seja, o risco de os ativos selecionados não se comportarem paralelamente ao fundo. Em contrapartida, além de tornar possível a implementação de outros *Greeks*, pode aplicar-se o Delta *Hedging* utilizando contratos futuros sobre o ativo subjacente, em alternativa a posições *spot*, os quais têm a vantagem de possuir menor custo de transação, devido à sua alta liquidez no mercado. Deve, no entanto, lembrar-se que estes contratos não terão maturidade tão longa quanto a do produto, sendo necessário fazer o *roll-over* a cada vez que a sua maturidade se for aproximado.

4. Questões Técnicas no Cálculo dos Prémios

Finalmente o prémio único (Π) que deve ser pago por cada garantia no começo do contrato corresponde à soma do custo da garantia com custos extras gerados pelo portfólio de cobertura. Portanto:

$$\Pi_0^{GM\_B} = P_0^{GM\_B} + HE_{Total} + CT_{Total} \tag{4.1}$$

onde _ substitui-se por M ou D, conforme o caso.

Infelizmente o pagamento de um prémio único no início do contrato não é atrativo em termos de venda. Os clientes (e a equipa de vendas) preferem que seja descontada uma percentagem periódica do fundo a efetuar o pagamento completo inicial.

Neste aspecto, tende-se a agregar à companhia novos riscos, implicados a este parcelamento do prémio, nomeadamente:

- Risco de o cliente efetuar um resgate antecipado.
- Mortalidade: caso o segurado morra antes da maturidade, esta garantia não será paga completamente.
- Pelo fato de ser feito como uma percentagem do valor do fundo, o pagamento torna-se uma variável aleatória.

- Será gerado um Processo Circular, ou *looping*, para determinar o valor desta percentagem, já que o prémio incialmente é calculado levando em conta somente os encargos sem a garantia.

Com o objetivo de diminuir estes novos problemas, o órgão emitente deve precaver-se com cláusulas no contrato. Para ambas as garantias, deve-se constar que o resgate antecipado implicará em uma multa ao segurado. Este valor poderá ser fixo ou correspondente aos prémios a pagar.

No caso de GMMB deve definir-se a regra em caso de morte. Se o beneficiário irá receber o valor do fundo no momento da morte (sem a garantia) ou o contrato continuará da mesma maneira até ao seu final (com a garantia).

Dado as características do contrato, o cálculo do valor do prémio cobrado anualmente (%) será feito como se explica nos pontos seguintes:

4.1 GMMB

1º caso: em caso de morte o contrato é cancelado e o beneficiário recebe o valor do fundo e, em caso de resgate antecipado, deverá ser efetuado o pagamento dos prémios (w) restantes.

$$ {}_{T}p_x^{\tau}\, \Pi_0^{GMMB} = w\,(\, {}_{1}p_x\, v^1\, F_1 + \, {}_{2}p_x\, v^2\, F_2 + \cdots + \, {}_{T}p_x\, v^T F_T) \tag{4.2} $$

${}_{T}p_x^{\tau}$ é a probabilidade de a apólice estar em vigor até ao final do contrato, considerando os dois possíveis decrementos (resgates e morte).

Note-se que, naturalmente, é apenas necessário que os prémios cubram os encargos associados às apólices em vigor, por isso se multiplica por ${}_{T}p_x^{\tau}$ (ver Hardy, M. (2003)).

Utilizando avaliação neutra de risco, tem-se

$$E_Q[F_t] = F_0\, e^{rt}$$

$$_T p_x^\tau\, \Pi_0^{GMMB} = w\,(\,_1p_x\, v^1 F_0\, e^r + \,_2p_x\, v^2 F_0\, e^{2r} + \cdots + \,_Tp_x\, v^T\, F_0 \,.\, e^{rT})$$

$$v^t = e^{-rt}$$

Portanto:

$$_T p_x^\tau\, \Pi_0^{GMMB} = w\; F_0\,(p_x + \,_2p_x + \,_3p_x + \cdots + \,_Tp_x\,)\, e$$

$$w = \frac{_T p_x^\tau\, \Pi_0^{GMMB}}{F_0\, [\sum_{t=1}^{T}\, _tp_x]} \tag{4.3}$$

O importante fato nesta equação é que, a partir do momento que estamos agregando uma nova taxa descontada sobre o fundo, o *fair price* do preço da opção (p_0) deve aumentar; como uma variável depende da outra, gera-se um Processo Circular, ou seja, aumentando o valor de w, aumenta-se o valor de p_0. Isso pode ser resolvido com a ajuda de um programa, por exemplo, “solver” do Excel. Este problema persistirá nos próximos casos e, em alguns deles, pode não existir solução para a equação.

2º caso: em caso de morte, o contrato continuará em vigor normalmente até o seu final e, em caso de resgate antecipado, paga-se os prémios restantes.

$$T_p\, \Pi_0^{GMMB} = w\,(\,v^1\, F_1 + v^2\, F_2 + v^3\, F_3 \ldots + v^T\, F_T) \tag{4.4}$$

T_p: representa a probabilidade de a apólice estar em vigor até ao final do contrato. Utilizando os pressupostos anteriores, vem

$$w = \frac{T_p\, \Pi_0^{GMMB}}{F_0\, T} \tag{4.5}$$

Adiante será estimado o valor de T_p através de uma função estocástica em função do valor do fundo, tempo até à maturidade e valor da penalização por resgate antecipado.

4.2 GMDB

O cálculo do valor de w faz-se como anteriormente, atendendo às necessárias adaptações:

$$\Pi_0^{GMDB} = w(\,{}_1p_x\, v^1\, F_1 + {}_2p_x\, v^2\, F_2 + \cdots + {}_Tp_x\, v^T\, F_T)\,, \tag{4.6}$$

$$w = \frac{\Pi_0^{GMDB}}{F_0\,[\sum_{t=1}^{T} {}_tp_x]} \tag{4.7}$$

Neste exemplo, em caso de resgate antecipado, assumiu-se que o cliente pagará os prémios restantes, caso contrário, deve utilizar-se ${}_tp_x^{\tau}$ no lugar de ${}_tp_x$.

4.3 Função de Sobrevivência e Tábua de Mortalidade

Para os cálculos da estratégia de cobertura de GMDB, é necessário utilizar probabilidades de sobrevivência e morte para períodos menores que um ano, tornando preferível transformar os valores da tábua de mortalidade numa função de sobrevivência contínua.

A tábua utilizada pela empresa é a GKF-95 e, através do Método dos Mínimos Quadrados, o modelo que melhor se ajusta a estes valores é o de Gompertz (1825):

$$S(t) = e^{-Ax-\frac{B}{\ln c}(c^t-1)} \qquad \text{com } A > -B, \quad B > 0, \quad c \geq 1 \ e \ t \geq 0 \tag{4.8}$$

Com ajuda do Excel, obtêm-se os seguintes valores paras as constantes:

$A = 0 \qquad B = 0{,}000025827859 \qquad$ e $\qquad c = 1{,}09867$

Estes valores foram ajustados para uma melhor adaptação a partir da idade mínima necessária para o produto (35 anos).

4.4 Especulação e Inovação

Supondo que a seguradora tenha margem suficiente para correr um risco extra, a seguir, com o intuito de criar algo novo em termos de estratégia, será proposto um método de especulação que vise potencializar o lucro sobre apólices com GMMB.

A ideia é agregar ao portfólio de cobertura, opções exóticas compradas no mercado *over-the-counter*. Uma combinação de *Dynamic* com *Static Hedging*, por exemplo: 90% da carteira, aplica-se à cobertura através do Delta *Hedging* e o restante através da compra de opções exóticas.

Esta parte da carteira de especulação seria composta por *Paylater Put Options*, que são opções de venda em que o prémio é pago apenas na maturidade do contrato, caso a opção esteja *in-the-money* (o comprador terá de exercer a opção mesmo que a diferença $(\mathrm{G}-\mathrm{S}_{\mathrm{T}})$ seja menor que o prémio).

O *payoff* da opção na maturidade, sendo X_{p} prémio a ser pago na maturidade da opção, é

$$\mathrm{p}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{PL}}=\begin{cases}\mathrm{G}-\mathrm{S}_{\mathrm{T}}-\mathrm{X}_{\mathrm{p}} & \mathrm{S}_{\mathrm{T}}<G\\ 0 & \mathrm{S}_{\mathrm{T}}\geq \mathrm{G}\end{cases} \tag{4.9}$$

O objetivo é repassar aos clientes este prémio, na expectativa de que este valor poderá ser completamente embolsado pela companhia.

Apesar de aparentemente ser uma ótima estratégia para a seguradora, este tipo de opção tem um preço muito alto comparativamente às opções *standard*, sendo necessária a venda de várias apólices a fim de diluir este alto custo, além da empresa ficar exposta ao risco de contraparte e *basis-risk*.

Entretanto, pode arrojar-se ainda mais a estratégia de especulação, onde ao invés de compor um portfólio com estas opções de mesma maturidade do fundo, utilizá-las, por exemplo, com metade da maturidade. Desta forma, caso no momento T/2 estas opções estejam *out-of-the-money*, além de não pagar o prémio o custo de novas opções até ao final do contrato será menor, já que o preço do ativo estará acima do preço de exercício.

Em princípio este tipo de estratégia poderá ser aplicado aos fundos com baixa volatilidade, já que o contrário acarretará um preço muito alto pelas opções exóticas, tornando inviável o repasse deste custo.

5. Aplicação do Modelo e Conclusão

O produto proposto para análise é o Seguro Investido Global. Este é um UL em que o cliente tem a opção de escolha entre cinco tipos de fundos de investimento (com gestão ativa): Conservador, Moderado, Equilibrado, Dinâmico e Agressivo. A principal diferença entre estes fundos é a volatilidade (risco) devido à proporção da alocação dos ativos (ações, obrigações, cash...).

Quadro 1: Dados dos Fundos de Investimentos

Fundo	Montante	Volatilidade	Pesos	m
Conservador	2.715.033	3,85%	38,06%	1,17%
Moderado	1.235.784	5,06%	17,32%	1,30%
Equilibrado	1.452.301	7,04%	20,36%	1,43%
Dinâmico	1.045.573	8,72%	14,66%	1,55%
Agressivo	684.637	12,22%	9,60%	1,74%
Total	7.133.327	-	100,00%	-

Será assumido que todas as comissões e encargos atuais serão mantidos, com somente uma modificação na penalização do cliente, em caso de resgate. Esta modificação foi escolhida, face à alta reserva inicial que a companhia deverá fazer a fim de montar o portfólio de cobertura. Além disto, assume-se que não será permitida a mudança entre fundos pelos clientes. O produto ainda possui oito anos até à sua maturidade.

5.1 GMMB

Primeiro, foi calculado, para cada fundo, o Prémio Único Puro somado aos erros de cada ajustamento do portfólio de cobertura e custos de transação. Foi utilizada a Simulação de Monte Carlo para estimar os valores das unidades de participação em cada instante. A taxa livre de risco assumida pela companhia foi a taxa Swap para Obrigações Alemãs e a volatilidade de cada fundo foi estimada pela equipa financeira da Ocidental Seguros.

O valor escolhido para este prémio foi o *Value at Risk* de 95% das 20 000 simulações feitas com ajustamentos diários do portfólio de cobertura - no sentido em que é o prémio que garante a cobertura dos benefícios em 95% dos casos.

Em seguida, foi estimado o Prémio Anual Puro para cada fundo. Neste momento foi necessário estimar a percentagem (T_p) do fundo que estará ativa até ao final do contrato, já que é muito caro e desnecessário fazer uma reserva inicial de capital (replicar opções de venda) para cem por cento do montante inicial.

Pelo fato da companhia ainda não vender este tipo de garantia, não existe qualquer histórico sobre o comportamento do segurado. No geral, a seguradora tem utilizado uma taxa de resgate constante de 5% ao ano como aproximação para produtos sem garantias. Porém, neste modelo, baseado na experiência com outros produtos, utiliza-se taxas de resgates diferentes ao longo do período, a partir do valor do fundo e do tempo de contrato.

Para primeira metade do contrato, os resgates antecipados seriam a uma taxa de 5% somando/subtraindo um agravamento de 1%, de acordo com o valor do fundo: caso este esteja acima da garantia seria somado, caso esteja abaixo, subtraído. Para a segunda metade do contrato o mesmo raciocínio foi utilizado, porém com um agravamento de 2%.

Quadro 2: Probabilidade estimada de manter a apólice até à maturidade

GMMB	E(Tp)	σ(Tp)	Perc.5%	Perc.95%
Conservador	66,24%	5,03%	59,87%	72,61%
Moderado	67,95%	4,94%	59,96%	72,05%
Equilibrado	67,99%	4,85%	60,22%	72,54%
Dinâmico	68,61%	4,71%	60,31%	72,63%
Agressivo	69,29%	6,04%	60,42%	72,61%

Quadro 3: Prémio Único Puro para cada Fundo – GMMB

Fundo	Prémio Único Puro	Prémio Único Puro $VaR_{95\%}$	Prémio Anual
Conservador	1,60%	4,54%	0,46%
Moderado	2,94%	5,96%	0,67%
Equilibrado	5,14%	8,26%	0,96%
Dinâmico	7,08%	10,34%	1,23%
Agressivo	10,98%	14,46%	1,74%

Para finalizar o processo, foi feito o *profit-testing* Estocástico para estes prémios anuais selecionados (calculados a partir do Prémio Único Puro $VaR_{95\%)}$, visando verificar como estes valores se comportariam frente aos diferentes cenários de resgates antecipados e ao comportamento do fundo.

Quadro 4: Resultado Final Geral – GMMB

GMMB	Prémio Anual	Profit	Profit ($VaR_{95\%}$)	cc_i
Conservador	0,46%	0,53%	-0,18%	1,81%
Moderado	0,67%	0,42%	-0,28%	3,34%
Equilibrado	0,96%	0,04%	-1,38%	5,63%
Dinâmico	1,23%	-0,27%	-2,28%	7,77%
Agressivo	1,74%	-1,05%	-4,52%	11,82%

(cc_i corresponde ao valor da reserva inicial necessária para a construção do portfólio de cobertura)

A coluna do Profit apresenta a média dos valores do lucro obtidos nas 20 000 simulações e a coluna do Profit ($VaR_{95\%}$) apresenta o valor do lucro que foi excedido em 95% dos casos simulados.

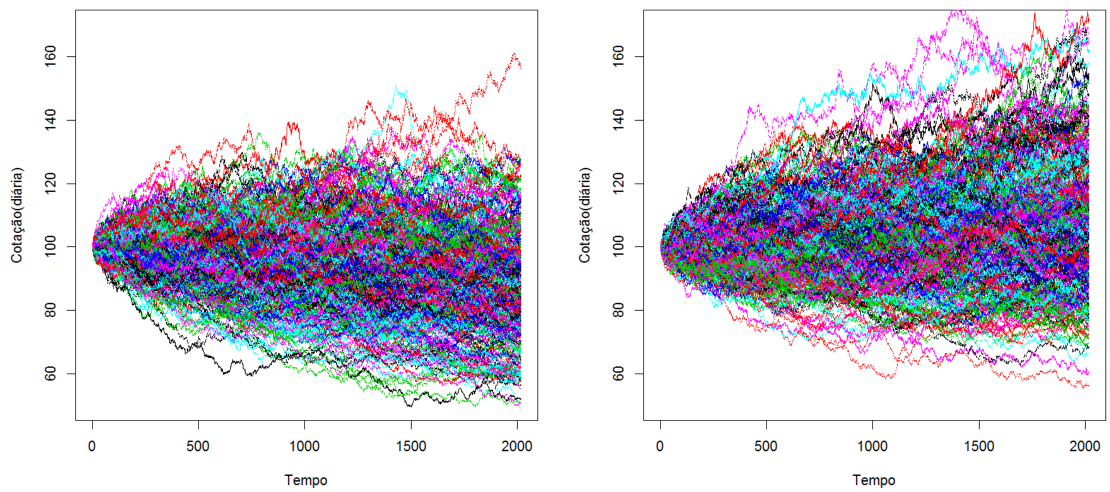
Para os fundos Conservador e Moderado, os resultados para os valores escolhidos, sem ainda acrescentar qualquer margem de lucro para empresa, foram satisfatórios, já que o resultado do Lucro com um $VaR_{95\%}$ foram próximos de zero; no entanto, o mesmo não ocorre para os outros fundos. Um detalhe importante é que isto não foi evidenciado durante o cálculo do preço da garantia: somente no *profit-testing* se acaba por alertar que algo em parte do modelo não funcionou adequadamente.

Para os fundos com maior risco, os encargos anuais somados ao custo das garantias superam a taxa livre de risco; consequentemente, dado o pressuposto de *risk-free neutral probability*, eleva-se a probabilidade do valor do fundo na maturidade ser inferior ao valor inicial.

Outro problema preocupante que aparece é que quanto menor o valor do fundo, menor será o valor do prémio recebido pela seguradora. É bom ressaltar que isto não é solucionado caso seja aumentada a percentagem anual do prémio, devido ao processo circular formado (comentado anteriormente), quanto mais se cobrar ao cliente, menor será o valor do fundo na maturidade.

Visando ilustrar melhor este problema, segue um exemplo de comparação para a simulação do valor do Fundo Conservador, com e sem a cobrança dos prémios, dado que o valor inicial iguala 100.

Gráfico 1: Simulações para o valor do Fundo (tempo em dias)



Uma saída possível é mudar o valor da taxa livre de risco utilizada pela empresa, porém, nesta situação, resolve-se um problema, mas alavanca-se o risco de default. Até esse momento, está a supor-se que nenhumas das obrigações utilizadas pelo gestor no fundo entrarão em default, no caso de ainda se utilizar mais capital de risco para a cobertura, a seguradora estaria aumentando ainda mais o risco com o produto.

Portanto, nas condições atuais do mercado e perspectivas futuras, é inviável a venda de capital garantido sobre um fundo de gestão ativa com alta volatilidade, pois mesmo com os pressupostos assumidos o risco permanece sendo muito elevado.

No caso de fundos com baixa volatilidade, os resultados mostram-se viáveis à comercialização, porém com a consciência de uma razoável exposição ao *basis-risk*, que é um fator muito delicado da estratégia de *hedging*.

Observando o histórico dos Fundos Conservador e Moderado, nota-se que apesar de estarem bem acima do seu valor inicial, o *benchmark* escolhido comporta-se de um modo consideravelmente distinto, ou seja, a empresa pode acabar por fazer uma cobertura para algo completamente diferente do pretendido.

5.2 GMDB

Seguindo o mesmo caminho, foi efetuado o cálculo para os prémios anuais puros, consoante o fundo e a idade do segurado. Dessa forma, de acordo com a prática da companhia, cada fundo foi subdividido em três classes de idades: 35-45; 45-55; 55-65.

Ao contrário da garantia anterior, os resultados são mais satisfatórios após o *profit-testing*, pois para um $VaR_{95\%}$ o lucro foi praticamente igual a zero em todos os casos.

Isto ocorreu devido aos prémios para este tipo de garantia serem menores que na GMMB, dessa maneira, estes valores somados aos encargos prévios não alteram de forma significativa o comportamento do fundo na simulação.

Quadro 5: Resultado Geral Final– GMDB

Fundo	Idade	Prémio Único Puro	Prémio Único (VaR 95%)	Prémio Anual	P.A. Sugerido	PV(Profit)	PV(Profit) $VaR_{99\%}$	cc_i
Conservador	35-45	0,03%	0,11%	0,014%	0,020%	0,150%	0,099%	0,032%
Conservador	45-55	0,08%	0,27%	0,035%	0,040%	0,243%	0,098%	0,082%
Conservador	55-65	0,19%	0,64%	0,088%	0,130%	0,698%	0,341%	0,218%
Moderado	35-45	0,05%	0,14%	0,017%	0,022%	0,154%	0,088%	0,054%
Moderado	45-55	0,13%	0,34%	0,044%	0,055%	0,299%	0,130%	0,138%
Moderado	55-65	0,33%	0,81%	0,111%	0,170%	0,860%	0,450%	0,362%
Equilibrado	35-45	0,09%	0,18%	0,023%	0,040%	0,206%	0,125%	0,114%
Equilibrado	45-55	0,22%	0,45%	0,058%	0,070%	0,250%	0,059%	0,290%
Equilibrado	55-65	0,54%	1,07%	0,147%	0,200%	0,838%	0,427%	0,582%
Dinâmico	35-45	0,12%	0,22%	0,028%	0,050%	0,270%	0,189%	0,119%
Dinâmico	45-55	0,29%	0,54%	0,071%	0,080%	0,314%	0,105%	0,302%
Dinâmico	55-65	0,72%	1,29%	0,179%	0,220%	0,777%	0,338%	0,773%
Agressivo	35-45	0,17%	0,29%	0,038%	0,070%	0,333%	0,189%	0,160%
Agressivo	45-55	0,43%	0,72%	0,096%	0,180%	0,778%	0,488%	0,412%
Agressivo	55-65	1,05%	1,72%	0,244%	0,350%	1,120%	0,598%	1,040%

Relativamente a esta garantia, estudou-se a possibilidade de acrescentar uma margem extra no preço, procurando não provocar mudanças acentuadas na evolução do fundo. O objetivo da carga adicional seria o de proteger contra um impacto na mortalidade (15% conforme Solvência II) e *basis-risk*.

A seguir, o valor dos prémios médios sugeridos, de acordo com cada fundo, no caso de uma possível comercialização:

Quadro 6: Preços e Reservas Iniciais Sugeridas – GMDB

Fundo	Prémio	cc_i
Conservador	0,15%	0,20%
Moderado	0,20%	0,40%
Equilibrado	0,25%	0,60%
Dinâmico	0,30%	0,70%
Agressivo	0,35%	0,80%

Felizmente, estes resultados ficaram consistentes em comparação a um trabalho interno feito na companhia, recentemente. Outro dado importante é que estes valores ficaram também próximos (todos abaixo) dos preços médios praticados pelo mercado, segundo a pesquisa feita por Blamont, D. e Sagoo, P (2009). Esta margem de diferença é explicada por ainda não estar incluído o lucro esperado pela companhia ou algum outro encargo extra. Portanto, ao contrário de GMMB, a venda de capital garantido em caso de morte, apresenta números aceitáveis, através do modelo proposto, e de possível implementação no *Unit-Linked* estudado.

Logicamente, pelo tempo escasso, seria necessário verificar com profundidade o valor exato a acrescentar aos prémios a fim de suprir os custos adicionais para venda, *marketing* e novas remunerações internas.

Bibliografia

Abbey, T. e Henshall C. (2007). Variable Annuities. Working paper. Staple Inn Actuarial Science.

Black, F e Scholes, M (1973). The pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*. 81(3), 637-654.

Blamont, D., Sagoo, P (2009). Pricing and hedging of variable annuities. *Life & Pension Risk* 2, 39–44.

Dickson, D.C.M., Hardy M.R. e Waters H.R (2009). *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risk*. Cambridge University Press.

Ferreira, D. (2009). *Opções Financeiras: Gestão de Risco, Especulação e Arbitragem*, 2ª ed., Edições Sílabo.

Frederico, S. (2011). *Avaliação de opções e garantias em seguros ligados a fundos de investimento*. Tese de Mestrado, ISEG.

Garcia, J.A. e Simões, O.A. (2010). *Matemática Atuarial Vida e Pensões*. Almedina.

Hardy, M. (2003). *Investment Guarantees, Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance.* Wiley Finance.

Hull, J. (2005). *Options, Futures, and Other Derivatives*. 6th ed., Prentice Hall.

Kalberer, T e Ravindran, K. (2009). *Variable Annuities, a Global Perspective*. Riskbooks.

Milevsky, M. e Posner, S. (2001). The Titanic Option: Valuation of the Guaranteed Minimum Death Benefit in Variable Annuities and Mutual Funds. *The Journal of Risk and Insurance*, 68(1): 93-128.

Anexo A - *Profit-Testing*

GMMB

Segue abaixo, de maneira resumida, como foi feito o *profit-testing* para esta garantia:

$\mathrm{T} = 2016$ (8 anos = 2016 dias)

$\mathrm{t} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{N} \,/\, 0 \leq \mathrm{x} \leq 2016\}$

$\Delta\mathrm{t} = 1/252 \quad , \quad \mathrm{r} = 2\%$ a.a.

Em que $\Delta\mathrm{t}$ representa o número de *time-steps* por ano.

O valor das unidades do fundo (Simulação de Monte Carlo):

$$\mathrm{S}(0) = 1 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{S}(\mathrm{t}) = \mathrm{S}(\mathrm{t}-1)\, \mathrm{e}^{\left(\mathrm{r}-\mathrm{m}-\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta\mathrm{t}+\sigma\sqrt{\Delta\mathrm{t}}\,\mathrm{N}}$$

Valor investido no fundo no momento t, sendo que $\mathrm{A}(\mathrm{t})$ é a percentagem do montante ativo:

$$\mathrm{F}(\mathrm{t}) = \mathrm{S}(\mathrm{t})\, \mathrm{A}(\mathrm{t})$$

$$\mathrm{A}(0) = 100\% \quad , \quad \mathrm{A}(\mathrm{t}) = \mathrm{A}(\mathrm{t}-1)\,(1 - \mathrm{w}\Delta\mathrm{t})$$

$$\mathrm{w} = \begin{cases} 5\% - 1\% - 1\%\mathrm{D}(\mathrm{t}) & \text{se} \quad \mathrm{G}\,(1 - \mathrm{U}(\mathrm{t})) < S(t) \\ 5\% + 1\% + 1\%\mathrm{D}(\mathrm{t}) & \text{se} \quad \mathrm{G}\,(1 - \mathrm{U}(\mathrm{t})) \geq \mathrm{S}(\mathrm{t}) \end{cases}$$

Sendo que w é a percentagem anual do fundo resgatado antecipadamente, D_t é uma variável *dummy* e $\mathrm{u}(\mathrm{t})$ é a penalização pelo resgate antecipado:

$$\mathrm{D}(\mathrm{t}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathrm{t} \leq \mathrm{T}/2 \\ 1 & \text{se } \mathrm{t} > T/2 \end{cases}$$

Portfólio de Cobertura:

$$\mathrm{H}(\mathrm{t}) = (\mathrm{a}_\mathrm{t} - \mathrm{S}_\mathrm{t}\, \mathrm{b}_\mathrm{t})\, \mathrm{T}_\mathrm{p}$$

Sendo T_p a percentagem do fundo estimada que se pretenda fazer a cobertura.

Gastos Extras no momento t (erros de ajustamento e custos de transação)

$$\mathrm{GE(t) = HE(t) + CT(t)}$$

$$\mathrm{P(t)} = \begin{cases} \mathrm{p\ F(t)} & \mathrm{se\ t\ mod\ (1/n)\ = 0} \\ 0 & \mathrm{se\ t\ mod\ (1/n)\ \neq 0} \end{cases}$$

Penalização recebida no instante t por resgate antecipado, ou seja, o prémio em dívida:

$$\mathrm{U(t) = p * T * u(t)} \qquad \text{onde} \qquad \mathrm{u(t)} = \left(\frac{\mathrm{T - tn}}{\mathrm{T}}\right)$$

Conta corrente da seguradora:

$$\mathrm{cc(0) = -H(0)} \quad , \quad \mathrm{cc(t) = cc(t-1)e^{r\Delta t} + P(t) + U(t) - GE(t)}$$

O lucro para esta garantia será o valor da conta corrente na maturidade somado a um Erro, sendo que este Erro acorrerá quando a percentagem do fundo, feita à cobertura, diferir da percentagem do fundo ativa na maturidade:

$$\mathrm{L = cc(T) + Erro} \quad , \quad \text{sendo Erro} \begin{cases} > 0\ se\ Y > A(T) \\ < 0\ se\ Y < A(T) \end{cases}$$

Portanto o valor atual do lucro será:

$$\mathrm{PV(L) = L\ e^{-rT}}$$

GMDB

Para esta garantia, o *profit-testing*, foi muito parecido, somente com alguns ajustes no procedimento. A seguir, apresentam-se somente os passos que diferem do processo anterior:

$$\mathrm{F(t) = S(t)\ A(t)\ {}_tp_x}$$

Estamos assumindo que as probabilidades de saídas e de morte são independentes e, como penalização, em caso de resgate antecipado, devem pagar-se os prémios em dívida.

$H(t) = (a_t - S_t\, b_t)\, A(t)$

$GE(t) = HE(t) + CT(t)$

Lembrando que em $HE(t)$ já estão incluídos também os pagamentos por morte no dado instante t.

$cc(t) = cc(t-1)e^{r\Delta t} + P(t) + U(t) - GE(t)$

$L = cc(T)$

Portanto o valor atual do lucro será:

$PV(L) = (L)\, e^{-rT}$

Anexo B – *Paylater Put Options*

Para efeito de avaliação do custo destas opções, este *payoff* pode ser decomposto da seguinte forma:

O *payoff* da opção na maturidade, sendo $\mathrm{X_p}$ prémio a ser pago na maturidade da opção, é

$$\mathrm{p_T^{PL}} = \begin{cases} \mathrm{G - S_T - X_p} & \mathrm{S_T} < G \\ 0 & \mathrm{S_T \geq G} \end{cases}$$

$$\mathrm{p_T^{PL}} = \begin{cases} \mathrm{G - S_T} & \mathrm{S_T} < G \\ 0 & \mathrm{S_T \geq G} \end{cases} - \begin{cases} \mathrm{X_p} & \mathrm{S_T} < G \\ 0 & \mathrm{S_T \geq G} \end{cases}$$

$$\mathrm{p_T^{PL}} = \begin{cases} \mathrm{G - S_T} & \mathrm{S_T} < G \\ 0 & \mathrm{S_T \geq G} \end{cases} - \mathrm{X_p} \begin{cases} 1 & \mathrm{S_T} < G \\ 0 & \mathrm{S_T \geq G} \end{cases}$$

Logo, o valor da *Paylater* na maturidade será equivalente uma posição longa em uma *Standard Put Option* somado a uma posição curta em uma *Cash-or-Nothing Put Option* com montante $\mathrm{X_p}$:

$$\mathrm{p_T^{PL} = p_T - X_p\, p_T^d}$$

O valor do prémio a ser pago na maturidade será de tal forma que o preço inicial da *Paylater Put* seja nulo, ou seja,

$$\mathrm{X_p} = \frac{p_0}{p_0^{\mathrm{d}}}$$

Utilizando o Modelo de avaliação de Black-Scholes,

$$\mathrm{p_0^d = 1\, e^{-rT}\, Pr[G \geq S_T] = 1\, e^{-rT}(1 - Pr[S_T} > G\mathrm{])}$$

$$\mathrm{p_0^d = 1\, e^{-rT} N(-\, d_2)}$$

Anexo C - Código dos Programas

a) GMMB: Pricing

```
for(j in 1:NS){
   for(i in 2:(steps*T+1)){
      t[i]=i-1
      S[i]=S[i-1]*exp((r-m-sigma^2/2)*1/steps+sigma*sqrt(1/steps)*rnorm(1))
      d1[i]=(log((S[i]*(1-m)^T)/G)+(r+0.5*v^2)*(T-t[i]/steps))/
            (v*sqrt(T-t[i]/steps))
      Nd1[i]=pnorm(-d1[i])
      Nd1star[i]=ifelse(Nd1star[i-1]==0,Nd1[i],
                 ifelse(abs(Nd1[i]/Nd1star[i-1]-1)>=L,Nd1[i],Nd1star[i-1]))
      d2[i]=(log((S[i]*(1-m)^T)/G)+(r-0.5*v^2)*(T-t[i]/steps))/
            (v*sqrt(T-t[i]/steps))
      Nd2[i]=pnorm(-d2[i])
      Nd2star[i]=ifelse(Nd1[i]==Nd1star[i],Nd2[i],Nd2star[i-1])
      stock[i]=S[i]*((1-m)^T)*Nd1star[i]
      bond[i]=G*exp(-r*(T-t[i]/steps))*Nd2star[i]
      H1[i]=bond[i]-stock[i]
      H2[i]=bond[i-1]*exp(r/steps)-S[i]*(1-m)^T*Nd1star[i-1]
      HE[i]=H1[i]-H2[i]
      PVhe[i]=HE[i]*exp(-r*t[i]/steps)
      CT[i]=CTx*abs(Nd1star[i]-Nd1star[i-1])*S[i]
      PVct[i]=CT[i]*exp(-r*t[i]/steps)
   }
}
```

b) GMDB: Pricing

```
#Funções

Stock_Function=function(X,Y){
  n=(t[X]+1):(steps*Y)
  d1=((log(S[X]*(1-m)^(n/steps)/G))+(r+0.5*v^2)*
     (n/steps-t[X]/steps))/(v*sqrt((n-t[X])/steps))
  stock=(1-m)^(n/steps)
  Nd1=pnorm(-d1)
  Mortalidade=(exp(-B/log(c)*(c^(age+(t[X]+n-1)/steps)-1))
              -exp(-B/log(c)*(c^(age+(t[X]+n)/steps)-1)))/
              exp(-B/log(c)*(c^(age+t[X]/steps)-1))
  sum(Nd1*stock*Mortalidade)
  }

Bond_Function=function(X,Y){
  n=(t[X]+1):(steps*Y)
  d2=((log(S[X]*(1-m)^(n/steps)/G))+(r-0.5*v^2)*(n/steps-t[X]/steps))/
     (v*sqrt((n-t[X])/steps))
  Nd2=pnorm(-d2)
  bond=exp(-r*(n-t[X])/steps)
  Mortalidade=(exp(-B/log(c)*(c^(age+(t[X]+n-1)/steps)-1))
              -exp(-B/log(c)*(c^(age+(t[X]+n)/steps)-1)))/
              exp(-B/log(c)*(c^(age+t[X]/steps)-1))
  sum(Nd2*bond*Mortalidade)
  }

Survival_Function=function(X){
  exp(-B/log(c)*(c^(age+t[X]/steps)-1))/exp(-B/log(c)*(c^(age)-1))
  }

Die_Function=function(X){
```

```
  (exp(-B/log(c)*(c^(age+(t[X]-1)/steps)-1))-exp(-B/log(c)*
  (c^(age+t[X]/steps)-1)))/exp(-B/log(c)*(c^age-1))
  }

#Simulação:

for(j in 1:NS){
   for(i in 2:(steps*T+1)){
      t[i]=i-1
      S[i]=S[i-1]*exp((r-m-sigma^2/2)*1/steps+sigma*sqrt(1/steps)*rnorm(1))
      Nd1[i]=Stock_Function(i,T)
      Nd1star[i]=ifelse(Nd1star[i-1]==0,Nd1[i],
                 ifelse(abs(Nd1[i]/Nd1star[i-1]-1)>=L,Nd1[i],Nd1star[i-1]))
      Nd2[i]=Bond_Function(i,T)
      Nd2star[i]=ifelse(Nd1[i]==Nd1star[i],Nd2[i],Nd2star[i-1])
      surv[i]=Survival_Function(i)
      die[i]=Die_Function(i)
      stock[i]=S[i]*Nd1star[i]
      bond[i]=G*Nd2star[i]
      H1[i]=bond[i]-stock[i]
      H2[i]=bond[i-1]*exp(r/steps)-S[i]*Nd1[i-1]
      HE[i]=(H1[i]-H2[i])*surv[i]+die[i]*max(G-S[i],0)
      PVhe[i]=HE[i]*exp(-r*t[i]/steps)
      CT[i]=CTx*(abs(Nd1star[i]-Nd1star[i-1])*S[i])+CTx*
            (abs(Nd2star[i]-Nd2star[i-1])*G)
  PVct[i]=CT[i]*exp(-r*t[i]/steps)
  }
}
```

c) Expected Lapse

```
for(j in 1:NS){
   for(i in 2:(x*T+1)){
      t[i]=i-1
      S[i]=S[i-1]*exp((r-m-sigma^2/2)*1/x+sigma*sqrt(1/x)*rnorm(1))
      lapse[i]=ifelse(t[i]/x<=T/2,
               ifelse(S[i]*(1-Penalty[i-1])>G,(w+agra)/x,w/x),
               ifelse(S[i]*(1-Penalty[i-1])>G,(w+2*agra)/x,(w-2*agra)/x))
      ativa[i]=ativa[i-1]*(1-lapse[i])
      Penalty[i]=p*T*(T-t[i]/x)/T
      F[i]=S[i]*ativa[i]
  }
 Ativo_Esperado[j]=ativa[x*T+1]
}
```

d) GMMB: Profit-Test

```
for(j in 1:NS){
   for(i in 2:(x*T+1)){
      t[i]=i-1
      S[i]=S[i-1]*exp((r-m-sigma^2/2)*1/x+sigma*sqrt(1/x)*rnorm(1))
      lapse[i]=ifelse(t[i]/x<=T/2,
               ifelse(S[i]*(1-Penalty[i-1])>G,(w+agra)/x,w/x),
               ifelse(S[i]*(1-Penalty[i-1])>G,(w+2*agra)/x,(w-2*agra)/x))
      ativa[i]=ativa[i-1]*(1-lapse[i])
      F[i]=S[i]*ativa[i]
      d1[i]=(log((S[i]*(1-m)^(T-t[i]/x))/G)+(r+0.5*v^2)*(T-t[i]/x))/
            (v*sqrt(T-t[i]/x))
      Nd1[i]=pnorm(-d1[i])
      Nd1star[i]=ifelse(Nd1star[i-1]==0,Nd1[i],
                 ifelse(abs(Nd1[i]/Nd1star[i-1]-1)>=L,Nd1[i],Nd1star[i-1]))
```

```
      d2[i]=(log((S[i])*(1-m)^(T-t[i]/x)/G)+(r-0.5*v^2)*(T-t[i]/x))/
            (v*sqrt(T-t[i]/x))
      Nd2[i]=pnorm(-d2[i])
      Nd2star[i]=ifelse(Nd1[i]==Nd1star[i],Nd2[i],Nd2star[i-1])
      stock[i]=S[i]*(1-m)^(T-t[i]/x)*Nd1star[i]
      bond[i]=G*exp(-r*(T-t[i]/x))*Nd2star[i]
      H1[i]=(bond[i]-stock[i])*Y
      H2[i]=(bond[i-1]*exp(r/x)-S[i]*(1-m)^(T-t[i]/x)*Nd1star[i-1])*Y
      HE[i]=H1[i]-H2[i]
      CT[i]=CTo*abs(Nd1star[i]-Nd1star[i-1])*S[i]*Y
      MC[i]=ifelse(t[i]%%x==0,p*F[i],0)
      Penalty[i]=T*p*(T-t[i]/x)/T
      Multa[i]=Penalty[i]*F[i]*lapse[i]
      cc[i]=cc[i-1]*exp(r/x)+MC[i]-CT[i]-HE[i]+Multa[i]
      Profit[i]=cc[i]+ifelse(F[i]-G*ativa[i]>0,H1[i],F[i]-G*ativa[i]+H1[i])
  }
 PVP[j]=Profit[x*T+1]*exp(-r*T)
}
```

e) GMDB: Profit-Test

```
for(j in 1:NS){
   for(i in 2:(x*T+1)){
      t[i]=i-1
      S[i]=S[i-1]*exp((r-m-sigma^2/2)*1/x+sigma*sqrt(1/x)*rnorm(1))
      lapse[i]=ifelse(t[i]/x<=T/2,
               ifelse(S[i]*(1-Penalty[i-1])>G,(w+agra)/x,w/x),
               ifelse(S[i]*(1-Penalty[i-1])>G,(w+2*agra)/x,(w-2*agra)/x))
      ativa[i]=ativa[i-1]*(1-lapse[i])
      surv[i]=Survival_Function(i)
      die[i]=Die_Function(i)
      F[i]=S[i]*ativa[i]*surv[i]
      Nd1[i]=Stock_Function(i,T)
      Nd1star[i]=ifelse(Nd1star[i-1]==0,Nd1[i],
                 ifelse(abs(Nd1[i]/Nd1star[i-1]-1)>=L,Nd1[i],Nd1star[i-1]))
      Nd2[i]=Bond_Function(i,T)
      Nd2star[i]=ifelse(Nd1[i]==Nd1star[i],Nd2[i],Nd2star[i-1])
      stock[i]=S[i]*Nd1star[i]
      bond[i]=G*Nd2star[i]
      H1[i]=(bond[i]-stock[i])*ativa[i]
      H2[i]=(bond[i-1]*exp(r/x)-S[i]*Nd1[i-1])*ativa[i-1]
      HE[i]=(H1[i]-H2[i])*surv[i]+die[i]*max(G-S[i],0)
      CT[i]=CTo*(abs(Nd1star[i]-Nd1star[i-1])*S[i])*ativa[i]+
            CTo*(abs(Nd2star[i]-Nd2star[i-1])*G)*ativa[i]
      MC[i]=ifelse(t[i]%%x==0,p*F[i],0)
      Penalty[i]=T*p*(T-t[i]/x)/T
      Multa[i]=Penalty[i]*F[i]*lapse[i]
      cc[i]=cc[i-1]*exp(r/x)+MC[i]-CT[i]-HE[i]+Multa[i]
      Profit[i]=cc[i]
  }
 PVP[j]=Profit[x*T+1]*exp(-r*T)
}
```