



FACULDADE DE BELAS ARTES DA UNIVERSIDADE DE
LISBOA

INSTITUTO DE APOIO PEDAGÓGICO E CAPACIDADE CIENTÍFICA

TRABALHO DE SÍNTESE

Luz e Sombras nas Superfícies Regradas

**LUZ E SOMBRAS NAS SUPERFÍCIES
REGRADAS PLANIFICÁVEIS, CÓNICA E CILÍNDRICA,
E NAS SUPERFÍCIES NÃO REGRADAS, SUPERFÍCIE
ESFÉRICA. FORMAS COMPOSTAS COM ESTAS
SUPERFÍCIES.**

O AUTOR: ASSISTENTE PINTOR ANTÓNIO TRINDADE

Lisboa, 28 de Setembro de 1999.

PROVAS DE APTIDÃO PEDAGÓGICA E CAPACIDADE CIENTÍFICA

***Luz e sombras nas superfícies regradadas
planificáveis, cônica e cilíndrica, e nas superfícies
não regradadas, superfície esférica. Formas compostas
com estas superfícies.***

1-Introdução.....	6
2-Histórias.....	13
3- Acima da definição geração e curvatura das superfícies cônica cilíndrica e esférica.....	20
4- Considerações sobre a luz e as sombras, seu comportamento perante os objetos de representação com características geométricas. A luz e as sólidos. Raios directos e indirectos. Sombra, pontos e rectas limitantes. Polaridade. Métodos e Teoremas genéricos para a determinação de sombras das superfícies cônica, cilíndrica e esférica.....	40

ÍNDICE

5- Superfícies regulares helicoidais: cônica e esférica (Quádricas de revolução de segunda grau: elípticas, parabólicas e de dupla curvatura). Método para a determinação de sombras considerando a luz directa: sombras próprias, projectadas e próprias indirectas projectadas na superfície (sombreaduras). Tangentes nos pontos de sombra próprias e próprias projectadas na superfície a forma destas linhas – arco de elipse, parábola ou hipérbola.....	115
6- Superfícies não regulares – superfície esférica (Quádricas de revolução de segunda grau: elípticas, cilíndricas ou umbilicas e de dupla curvatura). Método para a determinação de sombras considerando a luz directa: sombras próprias e projectadas nos pontos da linha de separatriz. Sombra	

1-Introdução.....	6.
2-Notações.....	13.
3- Acerca da definição, geração e curvatura das superfícies cónica, cilíndrica e esférica.....	20.
4- Considerações sobre a luz e as sombras, seu comportamento, perante os objectos de representação com características geométricas. A luz e os sólidos. Raios directos e indirectos. Brilho: pontos e rectas brilhantes. Polaridade. Métodos e Teoremas genéricos para a determinação de sombras das superfícies cónica, cilíndrica e esférica.....	40.
5- Superfícies regradas planificáveis: cónica e cilíndrica (Quádricas de revolução do segundo grau, radiadas, parabólicas e de simples curvatura). Métodos para a determinação de sombras considerando a luz directa: sombras própria, projectada e própria interior projectada na superfície (autoprojectada). Tangentes nos pontos de sombra própria interior projectada na superfície e forma destas linhas – arcos de elipse, parábola ou hipérbole.....	119.
6- Superfícies não regradas – superfície esférica (Quádricas de revolução do segundo grau, elípticas, cíclicas ou umbilicais e de dupla curvatura). Métodos para a determinação de sombras considerando a luz directa: sombras própria e tangentes nos pontos da linha de separatriz. Sombra	

projectada e forma desta linha. Sombra própria interior projectada na superfície (autoprojectada), forma desta linha de separatriz e respectivas tangentes130.

7- Formas e conjuntos compostos com os três tipos de superfícies atrás referidas. Superfícies tangentes, concordantes e secantes. Sombra de sólidos sobre sólidos e tangentes nos pontos dessa linha. Métodos para a determinação de sombras considerando a luz directa. Alguns exemplos práticos..... 142.

8-Conclusão e agradecimentos..... 166.

9- Apêndice..... 170.

10-Bibliografia.....172.

Introdução

Com o presente trabalho, espera-se dar um contributo útil aos alunos e a todos aqueles que se interessam pela representação gráfica e pela interpretação dos dados das superfícies que vemos ao nosso redor.

No estudo do mundo e dos elementos que o compõem, aqui sublinhamos de imediato, o papel do olho e materializamos esse facto de que o que é observável não é puramente aparência, pelo menos na aparência. Os factores dessa mudança são variáveis que são de ordem espacial, outros de ordem física. Quer nos primeiros, quer nos segundos, encontramos a luz e as Superfícies que, com as suas propriedades reflectivas e refractivas e com a modulação da geometria estrutural de determinadas partes, é responsável pela reflexão de forma e modulação dos volumes. Esta reflexão depende das duas fontes sempre iguais e sempre diferentes e essenciais à formação e qualidade de uma qualquer forma bidimensional representada numa determinada forma, um determinado corpo, que emerge da sua estrutura cristalina.

1- Introdução.

O objecto de análise neste trabalho, que se centra, essencialmente, na relação directa entre a luz, as superfícies e as respectivas formas produzidas, tem como finalidade mostrar o contributo da Geometria Descritiva nos processos de percepção e construção em determinadas superfícies que, no seu processo estrutural, reduzem-se basicamente, no presente trabalho, às superfícies plana, cilíndrica e esférica e, também, a outras formas ou conjuntos geométricos com as suas aplicações. Esta limitação no que respeita ao tipo de superfícies, que vão ser objecto de

Introdução

Com o presente trabalho, espera-se dar um contributo útil aos alunos e a todos aqueles que se interessam pela representação rigorosa e pela teoria das sombras nas superfícies que iremos estudar.

Na observação do mundo e dos elementos que o compõem, aqui sublinhamos os objectos, o peso do que é material dissolve-se pelo facto de que o que é observável está em permanente mutação, pelo menos na aparência. Os factores dessa mutação são variáveis, uns são de ordem artificial, outros de ordem natural. Quer nos primeiros, quer nos segundos, encontramos a Luz e as Superfícies que, com as suas propriedades reflectoras e confrontando-se com a modelação da grandeza mensurável de determinados corpos, é responsável pela revelação da forma e modelação dos volumes. Estas superfícies, objectos, na sua riqueza formal, sempre iguais e sempre diferentes e atendendo à localização e qualidade de uma qualquer fonte luminosa, expressam uma determinada forma, um determinado corpo, que emerge da sua estrutura cristalina.

O objecto de pesquisa deste trabalho, que se centra, precisamente, na relação directa, entre a luz, as superfícies e as respectivas sombras produzidas, tem como objectivo mostrar o contributo da Geometria Descritiva nos processos de percepção e concepção em determinadas superfícies que, na sua grandeza mensurável, reduzem-se basicamente, no presente trabalho, às superfícies cónica, cilíndrica e esférica e, também, a outras formas ou conjuntos compostos com os tipos escolhidos. Esta limitação no que respeita ao tipo de superfícies, que vão ser objecto de

estudo, justifica-se pela falta de tempo que seria necessário para alargar a nossa pesquisa relativamente a outras superfícies de carácter mais complexo e que estão fora do âmbito do programa da disciplina.

Na representação de objectos essencialmente geométricos, e concretamente na determinação das suas sombras, não bastam, apenas, a nossa acuidade visual, ou a nossa capacidade de síntese, no confronto com os modelos; torna-se vantajoso e é de necessidade evidente, conhecer as leis que geram estas superfícies e as metodologias para a resolução de certos problemas.

Por experiência comum, apercebemo-nos de que é mais fácil para um aluno e para qualquer interessado e curioso, representar certos objectos, conhecendo as regras da Geometria Descritiva, dado que elas permitem-nos entender melhor a estrutura e comportamento de algumas formas da Natureza e da Realidade circundante. Estaremos então mais aptos a representar a aparência das superfícies.

Frequentemente, os alunos deparam-se com situações difíceis no jogo da representação que envolve objectos de uso diário e comum. As deficiências verificam-se, por exemplo, no traçado de linhas curvas, geralmente elipses.

Utilizando a linguagem comum e no vasto repertório da representação, encontramos termos como: "taças", "vasos", "bolas", "rodas", entre outros objectos, mas esquecemo-nos muitas vezes, por ignorância ou falta de conhecimentos, que as superfícies que as estruturam são cientificamente conhecidas como: cones, semi-esferas côncavas ou calotes esféricas, esferas, toros, entre outras; podendo ainda classificá-las, respectivamente, de regradas e não regradas (geradas respectivamente por

linhas rectas e curvas) ou de simples curvatura ou parabólicas, de dupla curvatura ou elípticas, umbilicais, ou de curvaturas opostas, hipérbólicas.

A este propósito, citemos o escritor Italo Calvino: *"Por isso o uso correcto da linguagem para mim é o que permite aproximar-nos das coisas (presentes ou ausentes) com distinção, atenção e cautela, respeitando o que as coisas (presentes ou ausentes) comunicam sem palavras."*¹ Esta frase de Calvino, ilustra com clareza, algumas características da Geometria Descritiva. Manifesta-se graficamente com os seus **métodos** de representação e com os seus **sistemas** projectivos. Tem, por aquelas razões, regras e códigos de representação bem delineados e bem definidos, devendo-se, sempre que possível, evitar ambiguidades da mais variada ordem. Ao contrário do Desenho artístico, a Geometria Descritiva, com os seus símbolos, tem a sua gramática própria na representação de mensagens gráficas. Ela é a ciência da sistematização da representação.

Sendo, também, uma disciplina de carácter projectual, a Geometria colabora com grande utilidade com outras áreas ou manifestações artísticas, podemos seguramente afirmar que ela é uma ciência auxiliar e portanto interdisciplinar.

É fácil entender que qualquer indivíduo portador dos conhecimentos dos métodos de representação rigorosa, estará mais apto a representar a forma plástica, ou pelo menos, aquelas formas de forte carácter geométrico.

Na representação de volumes de sólidos geométricos é pertinente conhecer os métodos auxiliares que intervêm nessa operação. Esse métodos são estudados em Geometria Descritiva, mais particularmente no campo da teoria das sombras. Foi nesta curiosidade e necessidade de

¹ Italo Calvino, *As seis propostas para o próximo milénio*, ed. Teorema, Lisboa, 1994, pág. 94.

querer compreender a grandeza mensurável dos sólidos e superfícies, e respectivas relações de contraste claro-escuro, que escolhemos como tema para este trabalho o estudo da luz e das sombras.

A percepção real aparente das superfícies geométricas, por excelência, é imprescindível para podermos representá-las. Esta experiência, da percepção e da representação, intervém nas mais variadas manifestações artísticas: na Arquitectura, no Design, na Escultura, na Pintura, no Desenho Arqueológico, no Vídeo, ou mesmo em projectos de carácter multidisciplinar.

Dado que o tema escolhido é bastante vasto e tendo em conta que o número de superfícies no estudo da Geometria Descritiva é bastante elevado, tivemos que, por razões óbvias, reduzir o número de superfícies que vão ser alvo de análise neste trabalho. De acordo com o programa da disciplina seleccionámos as Quádricas de simples curvatura ou radiadas: superfícies cónica e cilíndrica e nas Quádricas elípticas de dupla curvatura, a superfície esférica. A título de curiosidade, fazemos também uma referência, ainda que ligeira, ao Toro circular e ao Elípsoide de revolução. Referenciamos estas superfícies mais complexas por verificar, nas suas grandezas mensuráveis, bastantes afinidades com formas utilizadas na Escultura, no Design e na Pintura.

Partindo do princípio que este ensaio venha a ser útil e não querendo fugir aos objectivos da Geometria Descritiva e do programa, pelo contrário, verificámos a necessidade de alargar e relacionar o nosso estudo com outras disciplinas afins, tais como a Física e a Óptica. Estas, permitem-nos entender melhor todas as questões relacionadas com a fenomenologia da iluminação, e conseqüentemente, com a teoria das sombras. Vamos

verificar que, também neste campo, encontramos afinidades com a Geometria Descritiva. A relação destas disciplinas é evidente e directa e nunca nos esqueçamos do principio de que tudo é Física. A percepção e a simulação do real não são feitas ao acaso, intervêm dispositivos e artifícios variados, alguns desses artifícios têm regras como vamos ter oportunidade de verificar mais à frente.

O estudo da luz permite-nos entender o carácter visual dos objectos, das porções com maior e menor visibilidade, ou seja, das suas zonas de luz, de sombra e de penumbra. Em qualquer destas zonas verifica-se a existência de vários valores tonais que se sucedem em escalas diferentes e graduadas, consoante a intensidade da luz que, sublinhe-se, é diferente em qualquer ponto de qualquer superfície, facto que verificamos no quarto capítulo do presente ensaio.

Nunca nos deveremos esquecer, também, que as sombras de qualquer superfície ou sólido são variáveis, entre outros factores, não só pela natureza e intensidade das fontes luminosas, mas, também, pelas características geométricas de cada superfície em particular, que tem uma forma e **leis geométricas bem definidas e determinantes**.

Quanto à estruturação deste ensaio, inicialmente fazemos uma referência à geração e a curvatura das superfícies eleitas para o nosso estudo. Em seguida, caracterizamos a luz, suas propriedades, e seu confronto com os modelos ou superfícies de varia ordem para, finalmente, introduzir as metodologias necessárias para a determinação das sombras das superfícies e de formas compostas por conjuntos de sólidos, escolhidos para este trabalho. É dada particular importância à **luz directa**, que em síntese, determina linearmente as fronteiras das partes iluminadas e em

sombra, para tal, utilizaram-se directamente, os princípios que são estudados em Geometria Descritiva e por nós familiarmente conhecidos.

Finalizando esta introdução, não podemos esquecer o contributo de grandes autores franceses que, em tempos num passado recente, muito fizeram pela Geometria Descritiva e particularmente pela teoria das sombras, lembremo-nos de Jean Jules Pillet, Charles Roubaudi e Charles Le Roy, entre outros. Louvando o seu esforço, aqui fica uma homenagem.

Notações

Para evitar ambiguidades na interpretação das instruções do presente manual, repletando as notações, cancelas e definições, achámos oportuno descrever os diferentes elementos geométricos – não só o nosso instrumento de trabalho. Temos o cuidado de associar sempre a cada um dos elementos com os respectivos numéricos e/ou signos próprios. A Geometria Descritiva é uma ciência exata que utiliza a linguagem própria na transmissão de imagens gráficas de objetos. Por esta razão não se descrevem os vários elementos geométricos, alguns deles utilizados no presente manual.

Os pontos, retas e planos quando representados graficamente de um determinado modo de representação, procedendo-se às suas projeções, são designados por "situação espacial" e designados dentro de um parêntese por: $Ex(A)$, (m) e (π) onde A indica o ponto, m a recta e π o plano horizontal de um plano α .

2- Notações.

As unidades métricas utilizadas são os milímetros.

Ponto representa-se por uma letra maiúscula do alfabeto latino.

Ex: $A(21,60,30)$. Os valores entre vírgulas dentro do parêntese, são de esquerda para a direita, respectivamente, as duas coordenadas do ponto A , a saber, x e y .

Em relação ao traçado horizontal A_x representa-se na LT um ponto com abscissa igual a 20. A' representa a projecção horizontal de um ponto com afastamento igual a 30 e A'' representa a projecção vertical (ou

Notações

Para evitar ambiguidades na interpretação das ilustrações do presente ensaio, respeitando as notações, conceitos e definições, achámos oportuno discriminar os diferentes elementos geométricos – são eles a nossa ferramenta de trabalho. Tivemos o cuidado de antecipadamente, caracterizar os diferentes elementos com as respectivas nomenclaturas e signos próprios. A Geometria Descritiva é uma ciência autónoma que utiliza códigos próprios na transmissão de imagens gráficas de síntese. Por esta razão aqui se discriminam os vários elementos geométricos, alguns deles utilizados no presente ensaio.

Os pontos, rectas e planos quando representados isoladamente de um determinado método de representação, prescindindo das suas projecções, ou seja numa "situação espacial", devem-se apresentar dentro de um parêntesis curvo. Ex: (A) , (m) e ($h\alpha$) indicam respectivamente, o ponto A, a recta m e o traço horizontal de um plano α .

As unidades métricas utilizadas são os milímetros.

Ponto: representa-se por uma letra maiúscula do alfabeto latino.

Ex: A(20,50,80). Os valores entre vírgulas dentro do parêntesis, são da esquerda para a direita, respectivamente, os das coordenadas do ponto A: *abscissa, afastamento e cota*.

Em relação ao exemplo apresentado: A_0 representa na LT um ponto com abscissa igual a 20, A' representa a projecção horizontal de um ponto com afastamento igual a cinquenta e A'' representa a projecção vertical (ou

frontal) de um ponto com cota igual a 80.

Linhas

Recta: representa-se por uma letra minúscula do alfabeto latino.

Ex: recta m. Em que m' representa a projecção horizontal e m'' representa a projecção vertical.

Poligonal fechada: representa-se pelos vértices que a definem, encerrados em parêntesis rectos. Ex: [ABC].

Poligonal aberta: representa-se pelos vértices que a definem, entre vírgulas, encerrados em parêntesis rectos. Ex: [A,B,C].

Curva: representa-se por uma letra minúscula do alfabeto latino encerrada em parêntesis recto.

Ex: [d] – linha não recta (curva, geralmente circular, como directriz).

[c] – circunferência.

[e] – elipse

[p] – parábola.

Plano : representa-se por uma letra minúscula do alfabeto grego: α , β , θ , π , δ , ω , etc.

Ex: plano α . H_α - traço horizontal (intersecção do plano com o plano horizontal de projecção).

V_α - traço vertical (intersecção do plano com o plano vertical ou frontal de projecção).

(a.d) e (a.e) significam respectivamente abertura à direita e abertura à esquerda, válido para todas as rectas.

Ex: a' faz com LT 70° (a.d). v_α faz com LT 30° (a.e).

v_0 representa o plano horizontal de projecção (plano de nível de cota nula).

φ_0 representa o plano vertical de projecção (plano de frente de afastamento nulo).

β_i representa o plano bissector dos octantes (quadrantes) impares.

β_p representa o plano bissector dos octantes (quadrantes) pares.

α não encerrado em parêntesis recto, tanto designa plano como um segmento de plano (porção de plano) e por isso, também uma figura geométrica plana delimitada por linha fechada, curva ou poligonal.

Ex: α' e α'' podem representar respectivamente, as projecções horizontal e vertical de um círculo.

Esta distinção é de importância maior na representação de sombras de figuras planas.

Superfícies: representam-se por letras minúsculas do alfabeto grego, encerradas em parêntesis recto: $[\alpha]$, $[\delta]$, $[\theta]$, $[\beta]$, etc.

Ex: $[\alpha]'$ - projecção horizontal da superfície não plana.

$[\alpha]''$ - projecção vertical da superfície não plana.

Sólidos: representam-se por letras maiúsculas do alfabeto grego ou pelas letras que designam os vários vértices do sólido encerradas em parêntesis recto.

Ex: Pirâmide $[A,B,C,V]$ ou Σ ; Cilindro Ω .

Ex: Ω' - projecção horizontal do sólido.

Ω'' - projecção vertical do sólido.

As referências apresentadas nas notações são válidas para os três métodos de representação mais utilizados que integram o programa global da disciplina de Geometria Descritiva na Faculdade de Belas Artes da Universidade de Lisboa, e que são respectivamente: **representação por dupla projecção ortogonal**, **representação axonométrica ortogonal**, **representação por projecções centrais em perspectiva linear plana** e, **representação por múltiplas projecções ortogonais**. No entanto, existem determinadas notações que dizem respeito a cada caso particular de métodos de representação.

Na representação axonométrica ortogonal coexistem quatro projecções: três secundárias (horizontal, vertical, de perfil) e uma principal – projecção directa. Deste modo obtemos mais duas designações de projecções não representadas na representação por dupla projecção ortogonal: a projecção de perfil e a projecção directa. Ex. A''' e A indicam respectivamente, a projecção do ponto A no plano coordenado de perfil de

referência e a projecção directa do ponto A no plano axonométrico, plano principal ou quadro.

Π indica o plano axonométrico. H_{Π} , v_{Π} , ω_{Π} , indicam respectivamente, os traços do plano axonométrico com o três planos coordenados: horizontal, vertical e de perfil.

h_{α} , v_{α} , ω_{α} e n_{α} indicam respectivamente os traços de um plano α com os quatro planos horizontal, vertical, de perfil e axonométrico, este último conhecido por **traço natural**.

Na representação por projecções centrais em perspectiva linear plana, para além do plano horizontal v_0 , mais conhecido por plano geometral, e vertical, também conhecido por plano frontal φ_0 , consideram-se mais dois planos: o **neutro** e o do **horizonte**. À intersecção dos planos neutro e geometral convencionou-se chamar linha neutra ou LN. À intersecção do plano do horizonte com o plano frontal designou-se chamar linha do horizonte ou LH.

Neste método de representação, por vezes necessitam-se das projecções ortogonais de determinadas formas geométricas. Quando representadas essas formas, as letras que as designam, apresentam-se dentro de um parêntesis curvo para fazer a distinção dos métodos de representação.

Ex: (A') e (A'') indicam respectivamente, as projecções ortogonais horizontal e vertical do ponto A. A perspectiva ou a projecção central do

ponto A representa-se simplesmente por A e a perspectiva ou a projecção central da projecção ortogonal horizontal (muitas vezes necessária) representa-se por A'.

Plano

Ex: Plano α .

f_α indica a recta de fuga de um determinado plano – recta do infinito do plano. Constitui o lugar geométrico de todos os pontos de fuga das rectas do plano.

F e F' indicam, respectivamente, o ponto de fuga de uma determinada recta e o ponto de fuga da sua projecção ortogonal horizontal.

(h_α) , h_α e v_α indicam, respectivamente, a projecção ortogonal do traço horizontal do plano α , a perspectiva ou projecção central do traço horizontal e a perspectiva ou projecção central do traço vertical do plano α .

**3- Acerca da definição, geração e curvatura das superfícies:
cónica, cilíndrica e esférica.**

As superfícies geométricas podem ser definidas e classificadas por duas vias distintas: **analítica ou sintética**. A Geometria Analítica utiliza a análise das figuras geométricas. A Geometria Descritiva descreve as superfícies em imagens gráficas de síntese utilizando o **método sintético**.

Segundo o Eng. Antonio Lobo Vilela: «O método sintético é mais elegante que o analítico, porque conduz directamente à demonstração ou solução que se pretende e por isso se emprega, de preferência, como método de **exposição...**»² Em Geometria Descritiva, os métodos de exposição, mais utilizados, são essencialmente quatro: por representação em dupla projecção ortogonal, por representação axonométrica ortogonal, por representação axonométrica oblíqua e por representação em perspectiva linear plana.

Analiticamente, as superfícies cónica, cilíndrica e esférica-superfícies curvas, pertencem à classe das **Quádricas de revolução** e, por isso, satisfazem a equação, $f(X,Y,Z)=0$, que é função de três variáveis: X, Y e Z. A região geométrica destas superfícies pode-se considerar como sendo um lugar geométrico representável a três dimensões: segundo um eixo das abcissas – OX, um eixo dos afastamentos – OY, e um eixo das cotas – OZ; vulgarmente conhecidos como largura, profundidade e altura. As superfícies de primeira ordem, ou de grau um, apenas satisfazem uma equação de duas variáveis, X e Y, são, por esta razão, planas. As superfícies de grau dois variam segundo as três coordenadas e são, por isso, geradoras de regiões do espaço com uma determinada forma, interior ou exterior e tridimensional.

O **grau** ou **classe** das superfícies depende do número de vezes que uma recta qualquer considerada as atravessa. Deste modo, as

² Antonio Lobo Vilela, *Métodos Geométricos*, ed. da Livraria Sá da Costa, Lisboa, 1939, pág.14, 1º parágrafo.

superfícies de grau um são sempre planas: uma recta intersecta-as apenas num ponto. As superfícies de grau dois são sempre susceptíveis de serem intersectadas segundo dois pontos: aqui encontramos as Quádricas que podem ser elípticas (esfera, elipsoide, porções elípticas de Toros); parabólicas (superfícies cónica e cilíndrica e parabolóide); ou hipérbólicas (Hipérbolóide de revolução, Hipérbolóide empenado escaleno e regiões hiperbólicas de toros). Uma superfície composta por duas porções de superfícies cilíndricas concordantes poderá ser intersectada, no máximo, em três pontos, e neste caso seria do terceiro grau.

E, finalmente, como exemplo de superfícies do quarto grau, consideram-se, por exemplo, o Toro (circular, elíptico, parabólico ou hipérbólico) que poderá ser intersectado por uma recta em quatro pontos distintos e, por esta razão, são também conhecidas por **Quárticas**.³

Em Geometria Descritiva uma superfície, genericamente, não se define pela sua equação, método analítico, mas antes como uma região do espaço que constitui um lugar geométrico das sucessivas posições de uma **linha** ou mesmo de uma **superfície**, que se move no espaço segundo uma lei determinada e contínua, podendo esta linha ou superfície estar sujeita a uma modificação, também determinada e contínua. Importa referir que, essa linha poderá ser **plana** ou **empenada-torsa**.

Segundo refere Charles Le Roy em *Traité de Géométrie Descriptive*: "*Une surface est le lieu des diverses positions que prend dans l'espace une certaine ligne mobile qui change de situation, et même de*

³ Cfr. O termo *Quártica* vem referido na obra do Engenheiro e professor Alvaro Rodrigues, *Geometria Descritiva*, 3ª edição (revista e aumentada), edição Ao Livro Técnico LTDA.-Rio de Janeiro, 1960. Vide pág.192, 1º parágrafo.

forme, d'après une loi déterminée et continue.”⁴

No entanto, não convém esquecer, que se considerarmos uma superfície qualquer a mover-se no espaço, também segundo uma lei determinada e contínua, gera-se pela mesma forma uma superfície.

As linhas móveis que se movem no espaço segundo uma lei determinada, entendem-se como **geratrizes**, e a lei pela qual elas se movem é determinada pelas linhas: **planas** ou **empenadas** ou superfícies fixas, denominadas **directrizes**. Assim, a directriz de uma superfície poderá, ela própria, ser uma superfície de simples curvatura, de dupla curvatura ou de curvaturas opostas e não apenas uma linha, como é vulgarmente divulgado.

Sinteticamente, as superfícies **cónica** e **cilíndrica** pertencem à família das **superfícies regradas** e **planificáveis**: podem ser geradas por uma linha denominada geratriz que se apoia constantemente noutra linha denominada directriz e são susceptíveis de se desenvolverem numa superfície plana, sem pregas nem rasgaduras (ao contrário das superfícies empenadas). Estes dois tipos de superfícies designam-se também de **Quádricas degenerescentes**:⁵ qualquer superfície plana intersecta-as segundo secções planas designadas cónicas: circunferência, elipse, parábola, Hipérbole, ou duas rectas concorrentes no infinito, ou não – cónicas degeneradas. Nas superfícies cónicas as secções degeneradas são sempre: ou duas rectas concorrentes com o vértice, ou uma recta – geratriz da superfície; no primeiro caso, encontramos uma hipérbole degenerada; no segundo caso, encontramos uma parábola degenerada. Com efeito, se

⁴ Charles Le Roy, *Traité de Géométrie Descriptive*, Liège, Dominique Avanzo et Compagnie, Éditeurs, 1837, pág.37. Tradução: “Uma superfície é o lugar das diversas posições que adquire no espaço uma determinada linha móvel que muda de situação, e mesmo de forma, segundo uma lei determinada e contínua.”

⁵ Acerca desta definição, véde: Eng.Luis.M.H. de Lancastre, *Um Curso de Geometria Descritiva*, ed.das folhas da A.E.I.S.T, Lisboa, 1958, pp.135-136.

deslocarmos paralelamente os planos que produzem este tipo de secções, verificamos que as secções produzidas são, respectivamente, no primeiro e no segundo caso: hipérbolas e parábolas.

As superfícies cónica e cilíndrica são também de **revolução**. Segundo refere o Eng. Luis Lancastre: «...que se podem obter pela rotação duma linha plana (geratriz) em torno de uma recta do seu plano (eixo da superfície).»⁶

A superfície cónica, de dois ramos (ou folhas) distintos, é uma região do espaço delimitada pelo lugar que ocupam as sucessivas posições de uma geratriz que se apoia constantemente em duas directrizes: o vértice que é um ponto fixo e bem determinado e outra qualquer directriz (variável na forma).

Outro modo de geração da superfície cónica (válida também para a superfície cilíndrica) é referida por Charles Le Roy que, parafraseando o autor, refere: "ao considerarem-se várias secções paralelas na superfície, resultantes da intersecção com aquela de diversos planos paralelos, obtêm-se secções semelhantes ou homotéticas (acrescente-se, geralmente elipses ou circunferências) e que têm centros próprios. A estes centros próprios de cada secção correspondem determinados raios vectores⁷ que são paralelos e têm entre si uma razão constante."⁸ Deste modo, se considerarmos apenas o eixo e uma qualquer geratriz da superfície complanar no infinito, ou não: casos das superfícies cilíndrica e cónica; a geração destas superfícies poderá ser feita através do movimento sucessivo de uma cónica (variável na

⁶ *Idem, lb.*, pág.138.10º parágrafo.

⁷ Entende-se por raio vector de uma cónica, a distância entre o foco e um ponto qualquer da mesma cónica. No caso da cónica ser uma circunferência, os raios vectores são todos iguais e constituem os segmentos de recta compreendidos entre o centro e qualquer ponto pertencente à circunferência.

⁸ Cfr. Acerca desta ideia vide: Charles Le Roy, *Op.cit.*, pp.39-40.

forma) que se apoia constantemente na geratriz dada e no eixo dado, de tal forma, que é constante e proporcional a razão entre as secções paralelas e, consecutivamente, dos correspondentes raios vectores. Deste modo, podem-se inverter as designações de geratriz e de directriz, ou seja, por esta ultima definição de geração, verifica-se, que as geratrizes, neste caso, são cónicas (linhas curvas que podem ser de natureza variada mas com regras) e as directrizes são fixas, o eixo e uma qualquer geratriz, *g*.

Pelas mesmas razões, a superfície cilíndrica poderá ser gerada pelo movimento dum linha recta geratriz, que se move no espaço paralela a si mesma e que se apoia constantemente numa directriz (de forma variável). Poderá entender-se a geração da superfície cilíndrica noutros termos já referidos para a superfície cónica, ou seja: pelo movimento de uma linha curva geratriz que se apoia constantemente no eixo e numa qualquer recta (neste caso, directriz) e de tal forma que essas linhas curvas (indeformáveis) sucessivas, se mantêm paralelas entre si.

Importa referir, também, que quer as superfícies cónicas, quer as superfícies cilíndricas, poderão ser: ***circulares, elípticas, parabólicas ou hipérbólicas***, dependendo da natureza da secção recta produzida nas superfícies por um qualquer plano secante perpendicular ao eixo. No presente ensaio, consideram-se apenas as elípticas e as circulares. Nas primeiras as secções rectas (perpendiculares ao eixo) são elipses e, nas segundas, encontramos circunferências. Pelas razões acima expostas, estas superfícies poderão ser ***abertas*** ou ***fechadas*** dependendo, para tal, da natureza e da forma das secções rectas ou directrizes.

As duas superfícies são também conhecidas como ***radiadas***, de

simples curvatura e *parabólicas*. Com efeito, existe uma *radiação* de rectas, *geratrizes*, que se apoiam constantemente numa qualquer directriz fixa e num ponto fixo comum, o vértice, este, no entanto, poderá estar no infinito e, neste caso, a geratriz mantém-se paralela a si mesma no seu movimento, é o caso da superfície cilíndrica. Os termos: *simples curvatura* e *parabólica* são esclarecidos mais adiante.

A *superfície esférica* pertencente à família das *superfícies não regradas* não são, por esta razão, planificáveis. São no dizer do Eng. Luis de Lancastre: «...*não degenerescentes* (entenda-se quádricas) *ou propriamente ditas.*»⁹ As secções cónicas produzidas neste tipo de superfícies nunca poderão degenerar em rectas, mas sempre em circunferências de raio variável, dependendo da posição do plano secante: se contém o centro da superfície as secções são *meridianos*, cujo raio é o próprio raio da superfície (paralelos de raio máximo); se não contiverem o centro e forem perpendiculares ao eixo, serão apenas *paralelos*. Bastam o centro e o raio (ou um ponto qualquer e o centro) para definirem esta superfície. Na representação por dupla projecção ortogonal, os contornos aparentes horizontais e verticais desta superfície ficam determinados pelas respectivas superfícies cilíndricas concordantes com as respectivas direcções das projectantes horizontal e de topo. As linhas de concordância destas superfícies, com a superfície esférica, determinam as duas linhas de contorno aparente que se projectam, no v_0 e no ϕ_0 , segundo o *equador* (paralelo de raio máximo) e o *meridiano* principal de frente.

⁹ Eng. Luis de Lancastre, *Op.cit.*, pág.135, 7º parágrafo. Vide também pp. 136,139 e 140.

Estas superfícies são também de **revolução**, pois a sua geração só é possível através do movimento de uma geratriz circunferencial em torno de um eixo fixo, que contém o centro e um diâmetro da circunferência geratriz.

Segundo refere o Prof. Alvaro Rodrigues: « Os meridianos e os paralelos constituem dois sistemas de geratrizes ortogonais da esfera...»¹⁰; por esta razão, são também conhecidas por superfícies de **dupla curvatura**: os dois sistemas de geratrizes principais, movem-se em direcções perpendiculares.

A superfície esférica, para além destas considerações, constitui **um lugar geométrico espacial**: todos os seus pontos estão igualmente afastados do seu centro. Tal como as superfícies cónica e cilíndrica, estas superfícies são também de **grau** dois ou de segunda classe.

Quando se observa uma determinada superfície, verifica-se que a sua estrutura apresenta uma determinada **configuração**: poderá ser mais convexa, mais concava, poderá ser côncava e convexa; enfim, poderá apresentar varias qualidades de cheios e vazios, ou se quisermos ser mais rigorosos, várias **curvaturas**. Toda a História da Terra, da Humanidade e da Arte encheu-nos a vista com a versatilidade das superfícies existentes e as diferenças entre elas são-nos fornecidas, precisamente, pela sua **curvatura**.

A **curvatura** de uma superfície relaciona-se com os dois **raios de curvatura** num ponto qualquer de uma superfície, sendo esses raios, os **das secções principais, normais entre si**, e existentes em dois planos perpendiculares entre si e ao plano tangente à superfície nesse ponto

¹⁰ Alvaro Rodrigues, *Geometria Descritiva*, 3ª edição, Ao livro Técnico Ltda. - Rio de Janeiro, 1960.

considerado. Deste modo, a curvatura num determinado ponto de uma superfície depende da natureza dessa superfície. Exemplificando com a superfície esférica como referência, e que tem uma curvatura uniforme, refere Charles Le Roy: «...*puisque la courbure d'une sphère est uniforme tout autour de sa normale, tandis qu'il n'en est pas ainsi d'une surface quelconque. Alors, pour estimer la courbure de cette dernière en un point donné, on cherche les rayons de courbure des diverses sections normales, et par leur comparaison, on acquiert des notions précises sur la forme plus ou moins aplatie de la surface autour du point considéré, ainsi que sur sa position par rapport à son plan tangent.*»¹¹

O exemplo da superfície esférica é válido para qualquer superfície. No caso particular, num ponto qualquer da superfície esférica, os raios de curvatura das secções principais são sempre iguais, dado que, as duas secções principais (circunferências), ortogonais entre si, num ponto qualquer desta superfície, têm o mesmo centro e raio de curvatura (distância de um ponto ao centro). Para além disso, encontram-se do mesmo lado do plano tangente à superfície nesse ponto. Também por esta razão, as superfícies dizem-se de **dupla curvatura**. Qualquer ponto de uma superfície esférica, cujos raios de curvatura das secções principais desse ponto forem iguais, designam-se de **pontos circulares, cíclicos ou umbilicais**. Segundo refere Fernando Izquierdo Asensi: «*Si las curvaturas principales son iguales, es decir, si $\rho_1 = \rho_2 = R$, también $\rho = R$. En estos puntos llamados cíclicos, circulares, umbílicos o umbilicales, todas las secciones normales tienen la*

¹¹ Charles Le Roy, *Op.cit.*, pág.337, 2º capítulo. Tradução: " Sabendo que a curvatura de uma esfera é uniforme (igual) em qualquer normal, significa que tal não é assim para determinadas superfícies. Deste modo, para se determinar a curvatura de uma superfície num ponto qualquer, determinam-se os raios de curvatura das diversas secções normais, e pela sua comparação, obtêm-se as noções precisas sobre a forma mais ou menos apelativa da superfície no ponto considerado, assim como a posição desse mesmo ponto face ao plano tangente."

misma curvatura, y la superficie presenta una curvatura uniforme en todas direcciones, como sucede en la esfera.»¹² Por estas considerações expostas as superfícies esféricas são também conhecidas por **elípticas**¹³, **cíclicas ou umbilicais**, dada a característica de todos os seus pontos. No caso particular dos elipsóides – superfícies igualmente de dupla curvatura e elípticas (as secções principais encontram-se do mesmo lado do plano tangente em qualquer ponto da superfície) –, também é possível encontrar pontos cíclicos ou umbilicais, o que transcende os objectivos do presente ensaio.

Assim, depois de se exemplificar com a curvatura da superfície esférica, verifica-se, que em qualquer outra superfície existirão sempre **duas secções principais**, ortogonais entre si, e que se encontram, ou não, do mesmo lado do plano tangente à superfície num determinado ponto. No caso particular, da superfície esférica, os dois raios de curvatura das secções principais existem do mesmo lado do plano tangente, e por essa razão, são do **mesmo sinal**.

Geralmente, com excepção da superfície esférica (que tem todos os raios de curvatura iguais), as secções de curvatura, e mesmo os raios de curvatura correspondentes de uma determinada superfície, têm um **valor mínimo** e um **valor máximo**. Com efeito, e generalizando para todas as superfícies, refere Charles Le Roy: «...*parmi toutes les sections normales passant par ce point, il y en a toujours deux MA et MB, nommées sections principales, dont la première a un rayon de courbure $MG=R$ qui est*

¹² Fernando Izquierdo Asensi, *Geometria Descriptiva Superior y Aplicada*, ed. Dossat, Madrid, 1975, pág.273, 6ºparágrafo.

¹³ Sabendo que a superfície esférica é um caso particular de um elipsoide, é pôr esta razão que, na sua classificação, são consideradas elípticas. O que difere estas duas superfícies, são os raios de curvatura em todos os seus pontos: iguais na esfera e diferentes no elipsoide.

Minimum, et la seconde un rayon de courbure $MH=R'$ qui est Maximum...»

14

Partindo das considerações anteriores e do que foi dito para a superfície esférica, nas superfícies cilíndrica e cônica também encontramos determinadas curvaturas. Assim, se considerarmos um ponto qualquer numa superfície cônica ou cilíndrica e o plano tangente à geratriz nesse ponto, verificamos que a geratriz não é mais do que uma parábola degenerada (se deslocássemos paralelamente o plano tangente, de modo a torná-lo secante, obteríamos uma parábola). Por esta razão estas superfícies são também classificadas de **parabólicas**.

Igualmente, encontramos nestas superfícies, ou num ponto qualquer pertencente a estas superfícies, duas secções principais, ortogonais entre si, e que se encontram em dois planos perpendiculares entre si e perpendiculares ao plano tangente nesse ponto. No caso particular das superfícies cônica e cilíndrica, verifica-se, que uma das secções principais é sempre uma geratriz – na realidade são duas e que constituem uma cônica degenerada –, mas, para efeitos de curvatura, apenas se considera a que pertence ao plano tangente; o que equivale a afirmar que essas secções têm **raio infinito e a curvatura é nula**: todas as normais à superfície ao longo dessa geratriz são paralelas, significando que, nestas secções, o centro de curvatura encontra-se no infinito.

O termo **simples curvatura** que se dá às superfícies deste género, justifica-se, também, e precisamente, pelas características das curvas das duas secções principais, ou seja, das duas secções principais, apenas a

¹⁴ Charles Le Roy, *Op.cit.*, pág.341, 2º parágrafo. Tradução: «...considerando todas as secções normais passando por este ponto, existirão sempre duas MA e MB, chamadas secções principais, em que a primeira tem um raio de curvatura $MG=R$ que é mínimo, e a segunda um raio de curvatura $MH=R'$ que é máximo».

secção curva tem determinadas características quanto à forma curva e que poderá ser, na superfície cónica: circunferência, elipse, parábola ou hipérbole; e na superfície cilíndrica: circunferência ou elipse. Nestas cónicas, secções principais de curvatura, os raios vectores são determináveis (distância dos focos ou do centro, à cónica correspondente). Tal não acontece nas secções principais perpendiculares a estas. Sendo rectas, estas últimas, têm raio (máximo) e centro de curvatura infinitos e são, portanto, indetermináveis. Como apenas uma das curvaturas é determinada, as superfícies cónica e cilíndrica dizem-se de **simples curvatura**.

Dependendo da natureza da panóplia de superfícies, existentes no vasto repertório da representação, em Geometria Descritiva utilizam-se designações pertinentes, tais como: de **simples curvatura** (já referida), **de dupla curvatura e de curvaturas opostas**. Estes termos resultam, precisamente, da **posição** e do **sentido** das secções principais ou curvaturas principais num ponto da superfície, e face à posição que ocupam relativamente ao plano tangente nesse ponto.

Assim, quando as secções principais se encontram do **mesmo lado** do plano tangente e têm em comum com este um ponto e uma geratriz, as superfícies dizem-se **parabólicas** e de **simples curvatura**: nas quais encontramos as superfícies cónica e cilíndrica.

Quando as duas secções principais se encontram do mesmo lado do plano tangente e têm em comum com este apenas um ponto, dizem-se **elípticas**: aqui encontramos, também, a superfície esférica. As duas secções principais normais entre si, bem como os respectivos centros de curvatura, têm a sua concavidade dirigidas no mesmo sentido, ou para o mesmo lado, tal refere Charles Roubaudi: «...**et la surface et dite convexe**

au point considéré.»¹⁵

E, finalmente, quando as duas secções principais, bem como os seus raios de curvatura, se encontram de **lados opostos** do plano tangente, e têm em comum com este apenas um ponto, dizem-se de **curvaturas opostas**.¹⁶ Neste caso, os raios de curvatura das secções principais têm **sinais contrários** (estão de lados opostos do plano tangente). O Toro constitui um exemplo de uma superfície que envolve as três curvaturas possíveis. Em toda a sua região encontram-se pontos elípticos, parabólicos e hipérbólicos, respectivamente: nas zonas cônvexas, de charneira e côncavas. Com efeito, segundo refere Fernando Izquierdo Asensi: «...*si una superficie presenta zonas de puntos hipérbólicos Y otras de puntos elípticos, están separadas por líneas de puntos parabólicos (líneas parabólicas).*»¹⁷

Estas questões acerca da curvatura nos pontos das superfícies, das secções normais entre si e dos correspondentes raios de curvatura desses pontos nas duas secções principais, são de bastante importância para a resolução de certos problemas que envolvem a determinação das tangentes nos pontos de intersecção de duas superfícies, ou ainda, na determinação das tangentes em pontos da linha de sombra própria ou da linha de contorno aparente nas superfícies de curvaturas opostas. **Tal acontece, sempre que nos pontos de concordância ou de secância entre duas superfícies que se intersectam, ou que sejam concordantes, os planos tangentes às duas superfícies se encontram coincidentes.**

Segundo foi provado por Charles Dupin em *Developments de*

¹⁵ Charles Roubaudi, *Traité de Géométrie Descriptive*, ed. Masson et Courcier, Paris, 1961, pág.454. Tradução: «...e a superfície diz-se convexa no ponto considerado.»

¹⁶ Estas superfícies de curvaturas opostas, são também elas, de dupla curvatura: ambas as secções principais, ortogonais entre si, são curvas. Cfr. Fernando Izquierdo Asensi, *Op.cit.*, pág. 275, 7º Parágrafo.

¹⁷ Fernando Izquierdo Asensi, *Op.cit.*, pág.275, 7º Parágrafo.

Géometrie: «On peut toujours tracer dans le plan tangent, en un point donné, une section conique qui ait ce point pour centre, et dont les systèmes de diamètres conjugués représenteront en direction tous les systèmes de tangentes conjuguées. M. Dupin nomme cette courbe, **l'indicatrice**, parce qu'en effet il prouve qu'elle **indique**, par sa nature, le sens des deux courbures principales de la surface, en chacun de ses points.»¹⁸

Assim, verifica-se que os raios de curvatura das secções principais num ponto de uma superfície são determinantes para a construção de uma **cónica**, conhecida como **Indicatriz**, e os respectivos eixos, existem nas tangentes às duas secções principais (resultantes da intersecção dos planos das secções principais com o plano tangente) e no plano tangente à superfície nesse ponto. É nestes eixos, perpendiculares entre si, que se marcam os comprimentos dos semieixos da Indicatriz. Os valores destes **segmentos**, **a** e **b**, que constituem os semieixos da cónica Indicatriz, determinam-se em função dos raios de curvatura, R_1 e R_2 , das duas secções principais, normais entre si, e através de uma constante de proporcionalidade arbitrária, tal que: $a=R_1$ e $b=\sqrt{R_1.R_2}$.¹⁹ Às medidas de **a** e **b** correspondem os comprimentos dos semieixos da cónica Indicatriz.²⁰

Geralmente, conhece-se um dos raios de curvatura de uma das secções principais, sempre que esteja localizado na superfície um dos centros de curvatura dessas secções. O raio será a distância desse centro

¹⁸ Charles Dupin, *Development de Geometrie*, ed. Courcier, Paris, 1813, pág.17, 3º parágrafo. Tradução: « Poderemos sempre traçar no plano tangente, num determinado ponto de uma superfície, uma secção cónica que tem este ponto como centro, e onde os sistemas de diâmetros conjugados representam em direcção todos os sistemas de tangentes conjugadas. M. Dupin designa Indicatriz, porque, com efeito, ele provou que ela indica, pela sua natureza, o sentido das curvaturas principais da superfície, em cada um dos seus pontos.»

¹⁹ Acerca desta constante de proporcionalidade arbitrária vide as seguintes obras: Charles Dupin, *Op.cit.* Charles Roubaudi, *Op.cit.*, pp.454-455. José Manuel Patricio de Sousa Moutinho, *Op.cit.*, pp.304-305.

²⁰ Os valores destes raios são sempre determináveis graficamente.

de curvatura ao ponto da superfície, segmento da normal à superfície compreendido entre o centro de curvatura e o ponto da superfície, centro da indicatriz. O valor desse raio é posteriormente transportado para a tangente ao meridiano correspondente e constitui um dos semieixos da cónica. Existirá sempre outro igual e com o mesmo centro, na mesma tangente ao meridiano. Estes dois semieixos determinam um dos eixos da Indicatriz. O outro eixo é tangente à outra secção principal e existe na respectiva tangente àquela secção (perpendicular à primeira).

No caso particular, das **superfícies cónica e cilíndrica**, um dos raios de curvatura é infinito, este, corresponde à geratriz que constitui uma das secções principais. O outro raio e centro de curvatura, pertencentes à outra secção principal, secção curva, determinam-se através do Teorema de Meusnier, que diz: «*Si, par une tangente MT en un point M d'une surface, on mène une section normale et une section oblique, le centre de courbure C de la section normale se projette orthogonalement au centre de courbure C' de la section oblique.*»²¹

Assim, podemos verificar que a **Indicatriz de uma superfície cónica e cilíndrica, é formada por duas rectas paralelas e equidistantes da geratriz de tangência que contém um qualquer ponto considerado e**, na distância entre elas, normalmente considera-se a medida do raio de curvatura da secção curva – unico raio de curvatura determinável. Estas considerações ilustram-se nas figs 1, 2 e 3, onde estão representadas as

²¹ Charles Roubaudi, *Op.cit.*, pág.453. Tradução: "Se, por uma tangente MT e um ponto M de uma superfície, conduzirmos uma secção normal e uma secção oblíqua, o centro de curvatura C da secção normal projecta-se ortogonalmente no centro de curvatura da secção oblíqua."

curvaturas e respectivas indicatrizes, em pontos pertencentes às superfícies, cilíndrica, cônica e esférica.

Na fig.1 está representada a Indicatriz no ponto P de uma superfície cônica elíptica. Considerando o teorema de Meusnier determinou-se o centro E da curvatura de uma das secções principais – curva –, que resulta da intersecção da vertical que passa no centro C₁ do paralelo ou secção oblíqua [c]²² em relação à secção principal, com a recta r – lugar geométrico dos centros das secções cíclicas²³. Deste modo, determinou-se o raio de curvatura da secção curva, segmento PE e, em seguida, marcaram-se os semieixos AP e A₁P sobre a tangente t a esta secção principal e ao paralelo – secção oblíqua [c]. Como a outra secção principal no ponto P tem raio infinito, e que corresponde à geratriz g, a Indicatriz é formada por duas rectas paralelas e equidistantes da geratriz principal: a e a₁. Na distância destas rectas, à geratriz principal, considerou-se o raio de curvatura da secção curva, segmento PE.

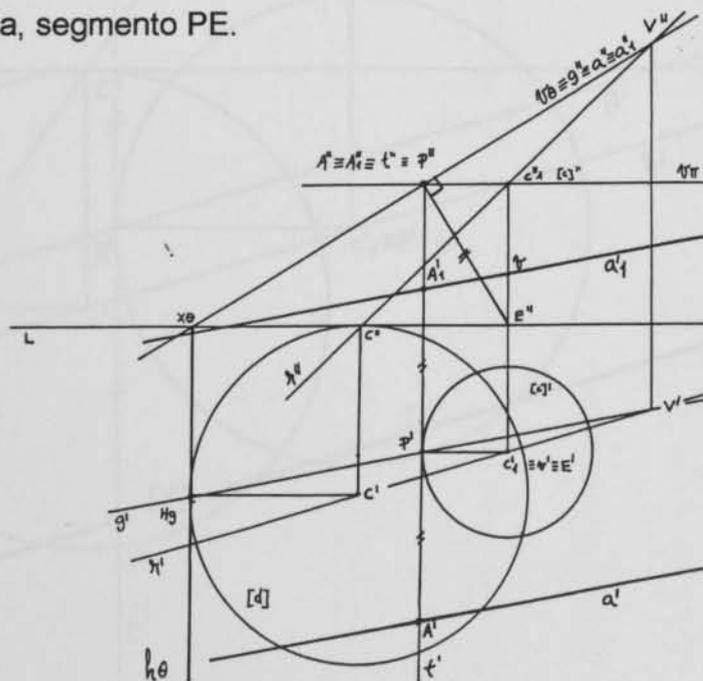


Fig.1 – Indicatriz num ponto de uma superfície cônica elíptica.

²² Como neste caso particular a directriz da superfície cônica é uma circunferência, e sendo a secção oblíqua um paralelo homotético dessa directriz, será por essa razão, também uma circunferência de raio menor. Esta secção homotética e circular é conhecida por **circulo de Meusnier**.

²³ Nas superfícies cónicas e cilíndricas elípticas é possível encontrar duas famílias de secções circulares conhecidas como secções cíclicas. No exemplo da fig.1, a directriz [c] é uma secção cíclica da superfície.

Relativamente à superfície esférica, fig.3, no seu ponto P, as duas secções principais encontram-se do mesmo lado do plano tangente, θ , e são circunferências, cujos raios de curvatura são os segmentos de distância compreendidos entre o centro de curvatura (que neste caso particular é o próprio centro da superfície) e o ponto P de tangência – centro da Indicatriz. Os comprimentos dos semieixos da indicatriz neste ponto, segmentos PA e PA₁, são iguais ao raio do meridiano nesse ponto, distância PO: raio de curvatura de uma das secções principais [c]. Esses semieixos existem na tangente ao meridiano, e formam, deste modo, um dos eixos da Indicatriz. O outro eixo, RR₁, existe na tangente à segunda secção principal, circunferência [c₁] perpendicular à primeira, e tem o mesmo valor. Como os eixos, perpendiculares entre si, têm o mesmo valor, a cónica Indicatriz é uma circunferência existente em θ .

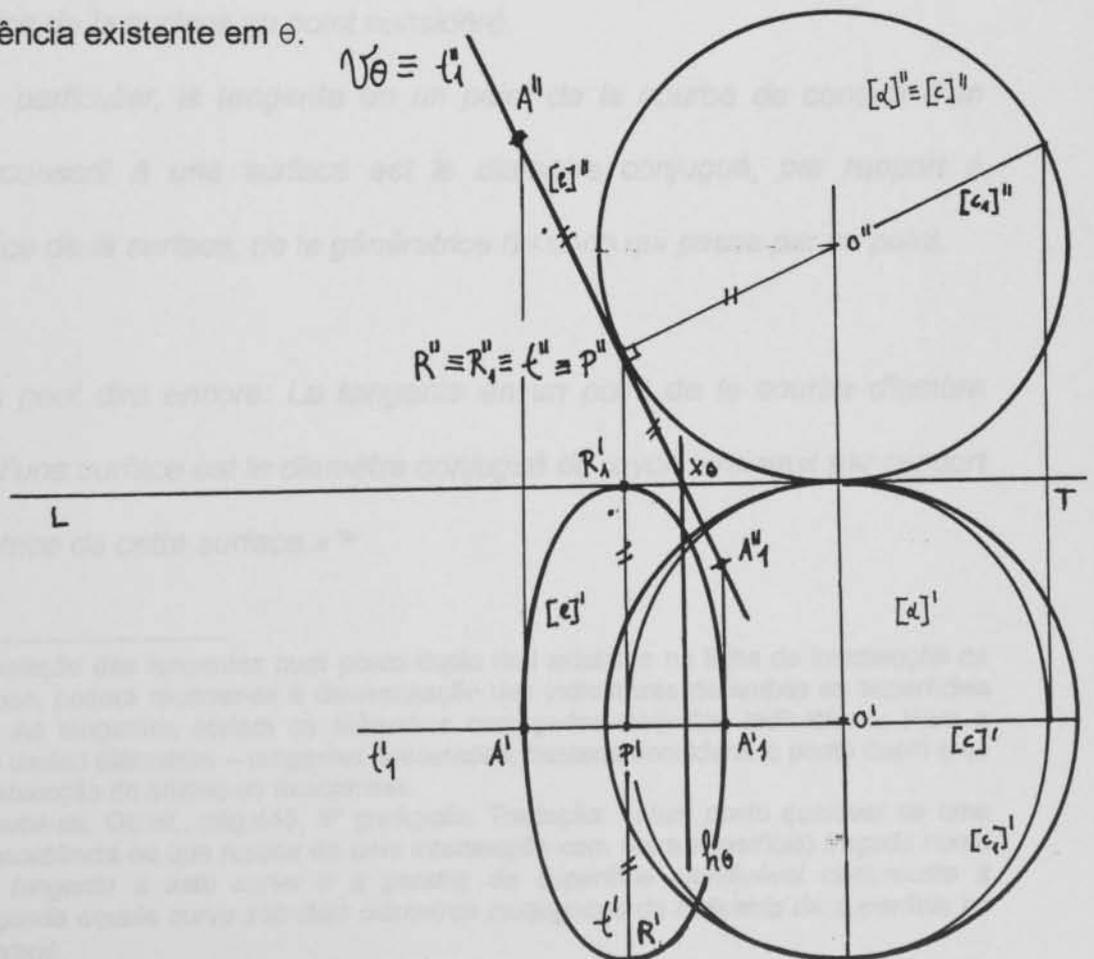


Fig.3 – Indicatriz num ponto de uma superfície esférica.

Sempre que nos pontos de intersecção de duas superfícies em que nas geratrizes de intersecção, os planos tangentes se encontram coincidentes, as tangentes à superfície, no ponto de intersecção, correspondem aos **diâmetros definidos pelo ponto de contacto e pelos pontos de intersecção das duas indicatrizes (no ponto de contacto ou de intersecção) das superfícies consideradas.**²⁴ As tangentes são deste modo, diâmetros conjugados da Indicatriz.

A metodologia anterior refere-se ao **teorema das tangentes conjugadas** de Charles Dupin referido por Charles Roubaudi (Op.cit) que diz que: «*En un point quelconque d'une courbe tracée sur une surface, la tangente à cette courbe et la génératrice de la développable circonscrite à la surface suivant cette courbe sont deux diamètres conjugués par rapport à l'indicatrice de la surface au point considéré.*

En particulier, la tangente en un point de la courbe de contact d'un cône circonscrit à une surface est le diamètre conjugué, par rapport à l'indicatrice de la surface, de la génératrice du cône qui passe par ce point.

*On peut dire encore: La tangente en un point de la courbe d'ombre propre, d'une surface est le diamètre conjugué du rayon lumineux par rapport à l'indicatrice de cette surface.»*²⁵

²⁴ Na representação das tangentes num ponto duplo real existente na linha de intersecção de duas superfícies, poderá recorrer-se à determinação das indicatrizes de ambas as superfícies nesse ponto. As tangentes seriam os diâmetros conjugados daquelas Indicatrizes. Para a determinação destes diâmetros – tangentes procuradas, bastaria considerar o ponto duplo e os pontos de intersecção de ambas as Indicatrizes.

²⁵ Charles Roubaudi, *Op.cit.*, pág.455, 5º parágrafo. Tradução: «*Num ponto qualquer de uma curva (de concordância ou que resulta de uma intersecção com outra superfície) traçada numa superfície, a tangente a esta curva e a geratriz da superfície planificável circunscrita à superfície segunda aquela curva são dois diâmetros conjugados da Indicatriz da superfície no ponto considerado.*

Em particular, a tangente num ponto da curva de contacto dum cone circunscrito a uma superfície é o diâmetro conjugado da Indicatriz da superfície, da geratriz do cone que passa neste ponto.

Podemos então dizer: A tangente num ponto da curva de sombra própria de uma superfície é o diâmetro conjugado do raio luminoso respeitante à indicatriz desta superfície.»

Através das considerações acima expostas, constatou-se da importância da determinação da Indicatriz na determinação das tangentes nos pontos da linha de separatriz, bastante úteis para a determinação, com rigor, da linha de sombra própria. Estas questões intervêm, também, na determinação das tangentes e pontos de reversão do contorno aparente de determinadas superfícies. Na prática, no entanto, apenas nas separatrizes de sombra própria de superfícies de curvaturas opostas, que são linhas torsas, curvas empenadas, surge a necessidade de recorrer aos diâmetros conjugados para se determinarem as tangentes.²⁶

4. Considerações sobre a luz e as sombras e seu comportamento, perante os objectos de representação com características geométricas. A luz, as superfícies e os sólidos. Luzes directas e indirectas. Sólidos; pontos e rectas trifonias. Polaridade, métodos e Teoremas genéricos para a determinação de sombras das superfícies cónica, cilíndrica e esférica.

²⁶ A este propósito vide: Charles F.A.Leroy. *Traité de Stereotomie* - comprenant les applications a la Théorie des Ombres, la perspective linéaire, la Gnomonique, la coupe des pierres et la charpente, Paris, ed.Bachelier/Carilian-Goeury et Dalmont. José Manuel Patricio de Sousa Moutinho, *Escócia (separatriz de luz-sombra)*. Texto de apoio à lição proferida no concurso de candidatura ao grau de Professor Agregado do 3º grupo da Escola Superior de Belas Artes de Lisboa. 1991.

As sombras castam-se nos objectos sólidos e nos corpos
indiferentes, para além da reflexão das várias fontes luminosas, que
podem situar-se a diferentes distâncias, como de luz de uma luminosa pontual, ou
convencionalmente a uma distância finita, quando os raios de luz do sol.

A luz produzida ao incidir sobre superfícies e na sua reflexão, uma
forma de energia radiante que se comporta com os objectos reais e sua
aparência, as características das respectivas formas e figuras. A luz está
directamente relacionada com a vida humana e a sua qualidade, que
fazem uma distinção de cores dos objectos, assim que se verifica. Em
termos científicos, a luz visível cria-se numa cadeia de energia radiante a
que correspondem determinadas comprimentos de onda e os seus efeitos

**4- Considerações sobre a luz e as sombras e seu
comportamento, perante os objectos de representação com
características geométricas. A luz, as superfícies e os sólidos.
Raios directos e indirectos. Brilho: pontos e rectas brilhantes.
Polaridade. Métodos e Teoremas genéricos para a determinação
de sombras das superfícies cónica, cilíndrica e esférica.**

sobre o objecto a este reflecte-se para o ponto de vista. Não nos
esqueçamos também, que a quantidade de luz que incide sobre
superfícies diversas, para além da intensidade da fonte luminosa, de
qualquer natureza de objectos, variações, variações, pois, que
quanto mais próximo for do corpo, maior quantidade de luz ele reflecte para o
observador. Concluímos, então, que as superfícies são fontes de luz
secundárias, sendo iluminadas pelo Sol ou qualquer outra de carácter pontual.

Por outro lado, a cor surge-nos pela capacidade e quantidade que os
corpos têm de absorver e reflectir determinadas comprimentos de onda do

As sombras existentes nos objectos enfatizam o seu aspecto tridimensional, para tal, é necessário que existam fontes luminosas, que podem situar-se a distancia finita, caso da luz de foco luminoso pontual, ou convencionalmente a distancia infinita, exemplo da luz do sol.

A luz geradora da aparência das superfícies é, na sua essência, uma forma de energia radiante que em confronto com os objectos revela a sua aparência, as características das respectivas formas e texturas. A luz está directamente relacionada com a visão humana e é nesta dualidade, que fazemos uma determinada leitura dos objectos, ainda que subjectiva. Em termos científicos, a luz visível situa-se numa camada de energia radiante a que correspondem determinados comprimentos de onda e os seus valores podem-se determinar, com o auxilio de determinados instrumentos que ultrapassam a nossa visão.

Ao confrontarmos certos modelos à nossa volta, no mundo que nos cerca, uma das referências que verificamos logo à partida, nas superfícies, são a qualidade do **brilho** e da cor. O brilho resulta da quantidade de luz emanada dos objectos para os nossos olhos, ou seja, a fonte de luz incide sobre o objecto e este reflecte-a para o ponto de vista. Não nos esqueçamos, também, que a quantidade de luz que recebemos das superfícies depende, para além da intensidade da fonte luminosa, da qualidade de reflexão de determinadas superfícies. Verificamos, pois, que quanto mais polido for um corpo, maior quantidade de luz ele reflecte para o observador. Concluimos, então, que as superfícies são fontes de luz secundárias, sendo primárias as do Sol ou qualquer outra de carácter focal.

Por outro lado, a cor surge-nos pela capacidade e qualidade que os corpos têm de absorver e reflectir determinados comprimentos de onda do

espectro electromagnético de radiação, ou seja, por exemplo, uma superfície que na sua aparência é azul, significa que absorveu todos os comprimentos de onda excluindo o azul que é reflectido para o ponto de vista.

De toda a energia radiante, existe uma parte que é visível e os seus valores são calculáveis. Tal como referem R.G.Hopkinson, P.Petherbridge e J.Longmore: *"A energia radiante visível mede-se pelo ritmo de transferência de energia avaliada em termos do seu efeito sobre o sentido visual humano médio. Este fluxo luminoso exprime-se em lúmens. A distribuição de luz sobre uma superfície exprime-se em termos de lúmens por unidade de área e dá-se-lhe a designação de iluminação."*²⁷ Deduzimos a partir daqui, que haverão certas zonas nos corpos geométricos que, em contacto com a luz, apresentarão diferentes brilhos e, conseqüentemente, diferentes sombras.

Por outro lado, referem, ainda, os autores anteriores: *"A intensidade luminosa dum fonte, medida em candelas (antigamente «velas») é o fluxo luminoso emitido pela fonte por unidade de ângulo sólido."*²⁸ *O conceito de intensidade luminosa está relacionado com o sentido de propagação da luz. Uma fonte luminosa tem uma certa intensidade num determinado sentido."*²⁹

A direcção e o sentido da propagação da luz são determinantes para a iluminação das superfícies, dependendo do seu ângulo sólido, mas outros factores importantes são, também, a relação desta direcção e sentido com o posicionamento e as características geométricas dos corpos. A este propósito é de importância maior reconhecer noções e conceitos como, **tangência** e **normal** num ponto de uma superfície, conceitos que

²⁷ R.G.Hopkinson, P. Petherbridge, J.Longmore, *Iluminação natural*, 2ª edição, Fundação Calouste Gulbenkian, Edição original –1966, pág. 10, 2º capítulo.

²⁸ Entende-se por ângulo sólido, um determinado espaço (ou região geométrica), delimitado por uma determinada superfície cónica fechada. No caso particular, esta superfície cónica de luz tem como vértice o foco luminoso, e delimita uma certa área de uma qualquer superfície que se encontra no seu caminho.

²⁹ R.G.Hopkinson, P. Petherbridge, J.Longmore, *Op.cit.*, Pág.12. 2º capítulo.

esclareceremos mais à frente.

Existe uma lei bem determinada para calcular a iluminação de uma superfície, pela lei da distancia, que diz que “ *A intensidade luminosa e a iluminação estão relacionadas por meio da lei da distância, segundo a qual a iluminação numa superfície normal ao sentido de propagação de uma fonte pontual, é dada pelo quociente entre a intensidade da fonte nesse sentido e o quadrado da distância à fonte.*”³⁰ Os cálculos destes valores estão fora do âmbito deste trabalho, mas podem ser vistos na obra dos últimos autores citados anteriormente.³¹

A luz emana das superfícies para os nossos olhos, é nos reflectida pelas fontes secundárias que são as próprias superfícies, existe um estímulo visual e o brilho reflectido para o espectador surge-nos de modo diverso , consoante também o poder de reflexão e de absorção que as superfícies têm diante da luz. Assim uma superfície de cor negra apresenta um grau de reflexão praticamente nulo, pois sabemos que o negro absorve todos os comprimentos de onda do espectro electromagnético de radiação.

O brilho das superfícies resulta, então, do seu poder de reflexão e, como sabemos, o branco geralmente é a cor que tem uma capacidade reflectora mais elevada. Não nos esqueçamos, porém, que importa referir também nesta questão do brilho, não apenas as características anteriormente referidas mas, também, a sua relação com o campo de visão que influência do mesmo modo a aparência das superfícies. Não nos podemos esquecer que as superfícies não existem isoladas e que todo o

³⁰ *Idem, lb.,* pág. 12, 2º capítulo.

³¹ *Idem, lb.,* pág.89, 3º capítulo.

meio envolvente tal como a superfície esférica celeste, a atmosfera e eventualmente alguns objectos que se situam na vizinhança das superfícies também poderão alterar a cor e o brilho.

Importa também fazer uma distinção entre brilho subjectivo e brilho físico. Cada um de nós tem uma leitura particular do mundo que nos cerca.

No fenómeno visual, e concretamente no estudo da luz e na sua relação com as superfícies, existem dois tipos fundamentais e que nunca nos poderemos esquecer, ou seja, a natureza da luz é de dois tipos: **directa** e **difusa**, onde a segunda é uma sequência da primeira. A nossa visão estereoscópica é sensível aos dois tipos e são estas duas qualidades da luz que, relacionadas com a posição do observador, nos revelam a qualidade da aparência das superfícies.

A luz directa, com os seus raios directos, como sabemos, pode ser de natureza pontual ou direccional, ou seja, estar a distância finita ou infinita. Quando a natureza da luz directa vem originalmente e apenas de uma determinada fonte, as sombras produzidas têm um carácter rígido e enfatizam a solidez das superfícies, estas, recortam melhor o espaço envolvente. Por outro lado, a luz indirecta ou difusa modela aquelas zonas dos corpos, rigidamente iluminadas pela luz directa, o que origina uma maior percepção da realidade. O melhor exemplo da combinação destes dois tipos de luz é a luz solar, que emana os raios de tão longe que convencionalmente os consideramos a distância infinita, ou seja com os raios paralelos entre si. A luz solar é portanto uma luz direccional. A luz directa ao atravessar a "superfície esférica" celeste faz com que esta emane raios em todos os sentidos, estes, inevitavelmente atingem as superfícies.

Deduzimos, então, que para modelarmos melhor o real aparente nas artes de representação, devemos ter sempre em conta a combinação dos dois tipos de luz, directa e indirecta ou difusa.

A configuração da forma das superfícies ou sólidos, a nitidez dos seus detalhes, dependem, em grande parte, da direcção de proveniência da luz, das dimensões das fontes luminosas, da quantidade de luz difusa que se estende em todas as direcções, do local de onde se encontra o observador e importa sublinhar, também, um factor decisivo, que são ***as características geométricas das superfícies que têm leis próprias e determinantes.***

A luz reflectida contribui em grande parte para a redução dos contrastes dado que aquela atinge as zonas sombreadas dos objectos. Na fig.4 podemos observar o exemplo da Lua. Sabemos que este satélite não está envolvido por nenhuma camada atmosférica, logo, a luz dominante em toda a sua superfície é directa. Os efeitos que a luz solar provoca na Lua conferem um caracter rígido às suas formas; as sombras resultantes aproximam-se muito das sombras resultantes que se determinam pelos métodos da Geometria Descritiva, com a acção da luz directa, ou seja, as partes iluminadas e em sombra destacam-se muito bem no espaço envolvente. Neste caso particular, as sombras têm uma modelação nula, sendo os seus valores uniformes. Na figura podemos ver o exemplo das crateras que, na sua síntese, mais fazem lembrar porções côncavas, predominantemente hiperbólicas, de superfícies tóricas.

Seguindo uma sequência lógica, sabemos que o Sol ilumina a Lua, esta, por sua vez, ilumina a Terra. O primeiro é uma fonte de luz primária e a segunda uma fonte de luz secundária.

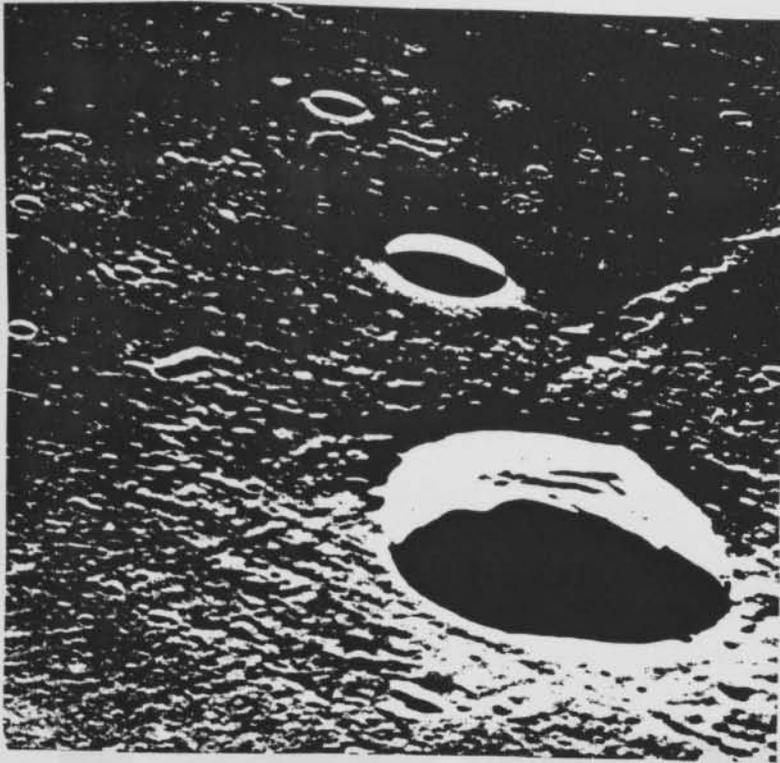


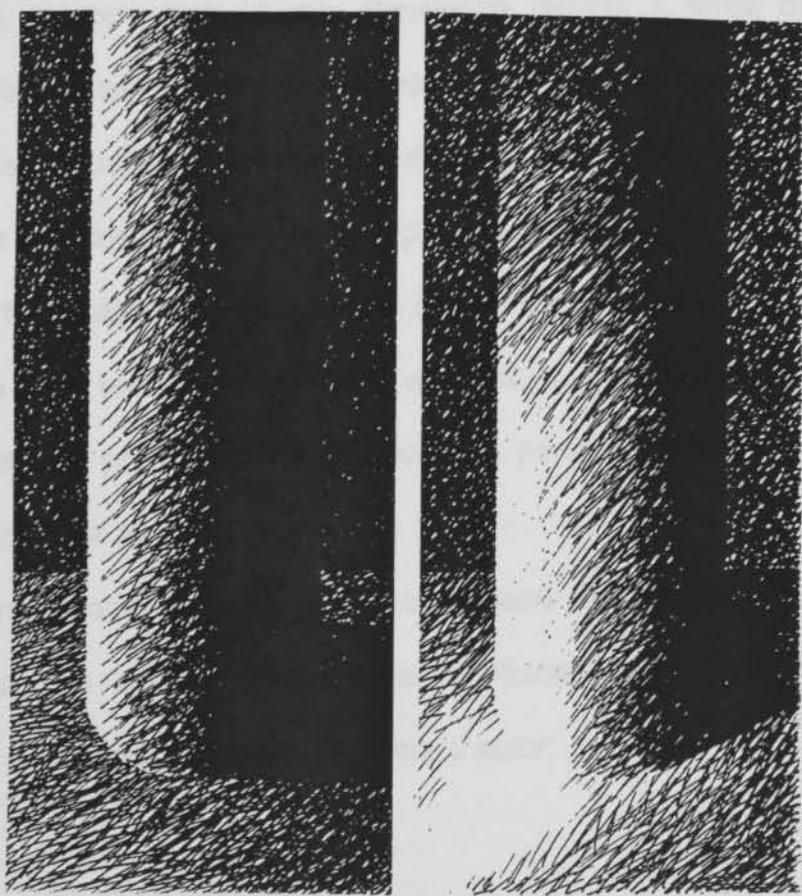
Fig. 4- Efeitos da luz lunar.

Exemplificando, agora, os efeitos da luz lunar sobre a superfície terrestre durante o período noturno, verifica-se, que a Lua emana raios de fraca intensidade comparativamente aos raios directos do Sol. Os raios de luz, que se dirigem daquele satélite, são reflexos dos raios directos solares que atingiram a superfície e desta partem para a Terra.

Com a ausência da luz diurna diminuem os reflexos atmosféricos. Não nos esqueçamos que está em falta, neste período da noite, a grande camada atmosférica característica da luz diurna. Os reflexos atmosféricos neste período de tempo são quase nulos. As sombras produzidas têm um aspecto denso, duro, uniforme e de modelação reduzida ou quase nula e devido, precisamente, à ausência dos efeitos atmosféricos. Podemos observar melhor este efeito na fig.5.

Em relação à luz solar, este fenómeno convencionalmente considerado a distância (o efeito posterior) da luz que via é variável em relação às posições relativas da Terra em relação ao Sol. A aparência das superfícies geométricas e outros corpos, expostos à luz, dependem muito da hora do dia, das estações do ano e da sua localização na "superfície" terrestre, neste caso, no âmbito da história, incluindo a observação.

Devemos considerar que, além de alguns conhecimentos, importantes fatores de natureza não menos importante, como são, por exemplo,



"Light is the only thing that travels in straight lines."
"The sun is considered to be the primary light source for this planet."
"Light is said to travel from its source in straight lines known as light rays."
"Light rays cannot change direction unless they strike a reflector or some kind of barrier."

Fig.5 – Efeitos da luz lunar.

Em relação à luz solar, (foco luminoso convencionalmente considerado a distância infinita) podemos dizer que ela é variável em relação às posições relativas da Terra em relação ao Sol. A aparência das superfícies geométricas e outros corpos, expostos à luz, dependem muito da hora do dia, das estações do ano, e da sua localização na “esfera” terrestre, neste caso, em função da latitude, longitude e orientação.

Devemos considerar que, para além daquelas condicionantes, importam salientar factores de natureza não menos importante, como são, por exemplo, a **atmosfera**. A sua densidade diminui a força dos raios solares directos, mas tem uma função determinante, dado que, factor que não podemos esquecer, o ar é constituído por partículas muito pequenas que emanam reflexos em todas as direcções. Aquelas partículas encontram-se nos vapores de água, nas poeiras, no nevoeiro e nos gases industriais. Já Leonardo da Vinci teorizara sobre este assunto, no seu tratado de Pintura, apontando alguns princípios básicos sobre a perspectiva, particularmente sobre a perspectiva aérea e atmosférica.

Segundo Robert. W. Gill, na sua obra *Basic Rendering* , existem sete princípios básicos que não podem ser omitidos quando representamos objectos em duas e três dimensões, refere o autor:

“ Light is the basis of all seeing”

“ The sun is considered to be the primary light source for this planet.”

“ Light is said to travel from its source in straight lines Known as light rays.”

“ Light rays cannot change direction unless they strike a reflector or some kind.”

"Light rays cannot penetrate solid, opaque matter and this results in shade and shadow."

"All materials are capable of reflecting light rays to some degree. Any given material of a light value is capable of reflecting more light than the same material of a darker value."

"All colours, with the exception of black, are capable of reflecting some light. Light colours, e.g. White, yellow, pink, yellow-green and Yellow-orange reflect more light than darker ones, e.g. dark blue, dark green and dark red."³²

Em relação ás superfícies reflectoras, observe-se a fig.6 que representa uma superfície do primeiro grau e um espectador que a observa. Ao focar o olhar na superfície plana, o observador detecta vários valores tonais naquele plano. Considerando os raios atmosféricos que emanam da superfície atmosférica e a posição do observador, verifica-se, que a superfície observada apresenta uma gradação de escala de valores, que se encontram mais escuros na parte inferior que na parte superior. De todos os raios reflectidos da superfície, após o contacto da luz directa naquela, alguns dirigem-se para o observador, outros passam-lhe ao lado. Os raios

³² Robert W. Gill, *Basic Rendering*, 1ª edição da Thames and Hudson, Londres, 1991, pág.15.
Tradução:

"A luz é a base de toda a visão".

"O Sol é considerado a principal fonte de luz do nosso planeta."

"A luz, pela sua natureza, propaga-se em linhas rectas, mais conhecidas por raios de luz."

"Os raios de luz não podem mudar de direcção, a menos que encontrem superfícies reflectoras."

"Os raios de luz não podem penetrar sólidos, matéria opaca, o que origina zonas sombreadas e em sombra."

"Todos os materiais são capazes de reflectir raios de luz com alguma intensidade. Quaisquer materiais que possuam valores claros são capazes de reflectir mais luz que os mesmos materiais que possuam valores mais escuros."

"Todas as cores, com a excepção do negro, são capazes de reflectir alguma luz. As cores claras, branco, amarelo, rosa, amarelo-limão e amarelo – laranja, reflectem mais luz que as de valor mais escuro, azul escuro, verde escuro e vermelho escuro. "

reflectidos, da superfície para o observador, são responsáveis pelas suas áreas mais claras, significa que entrou mais luz para a vista, factor que nos impede de ver as verdadeiras cores da superfície. Este facto, baseado num princípio que diz que: "**O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão**", torna possível perceber que os raios que atingem a parte inferior da superfície não atingem directamente a nossa vista, por aqui se explica o brilho reduzido dessa zona.

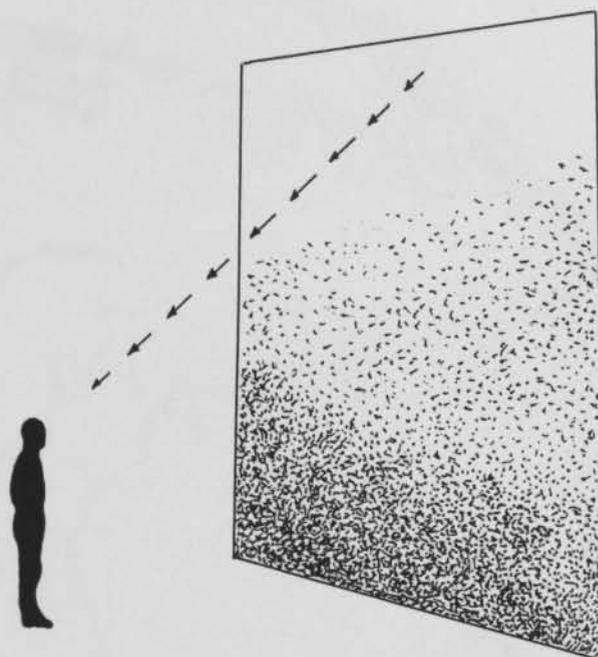


Fig.6 – Efeitos dos raios atmosféricos numa superfície plana

De acordo com o princípio anteriormente referido, uma superfície plana vista à luz reflecte os raios directos apenas num sentido, dado que aqueles só têm uma direcção. Se observarmos a fig.7, vemos um observador a olhar uma superfície plana de perfil exposta à luz do dia. Os raios directos do Sol ao incidirem nesta superfície, por reflexão, são dirigidos para o solo. Porém, outros factores são de ter em consideração e justificam que o observador veja a superfície; tal é possível através dos raios reflectidos da superfície celeste e eventualmente de outras superfícies envolventes, entre as quais se encontra o solo. Estes raios atingem a

superfície plana segundo direcções diferentes e muito variadas, que não a direcção dos raios directos principais, a que correspondem reflexões igualmente diferentes e variadas. São estas reflexões dos raios indirectos que permitem que tenhamos uma ideia mais clara da superfície, dos seus valores, da sua textura e, enfim, da sua visibilidade.

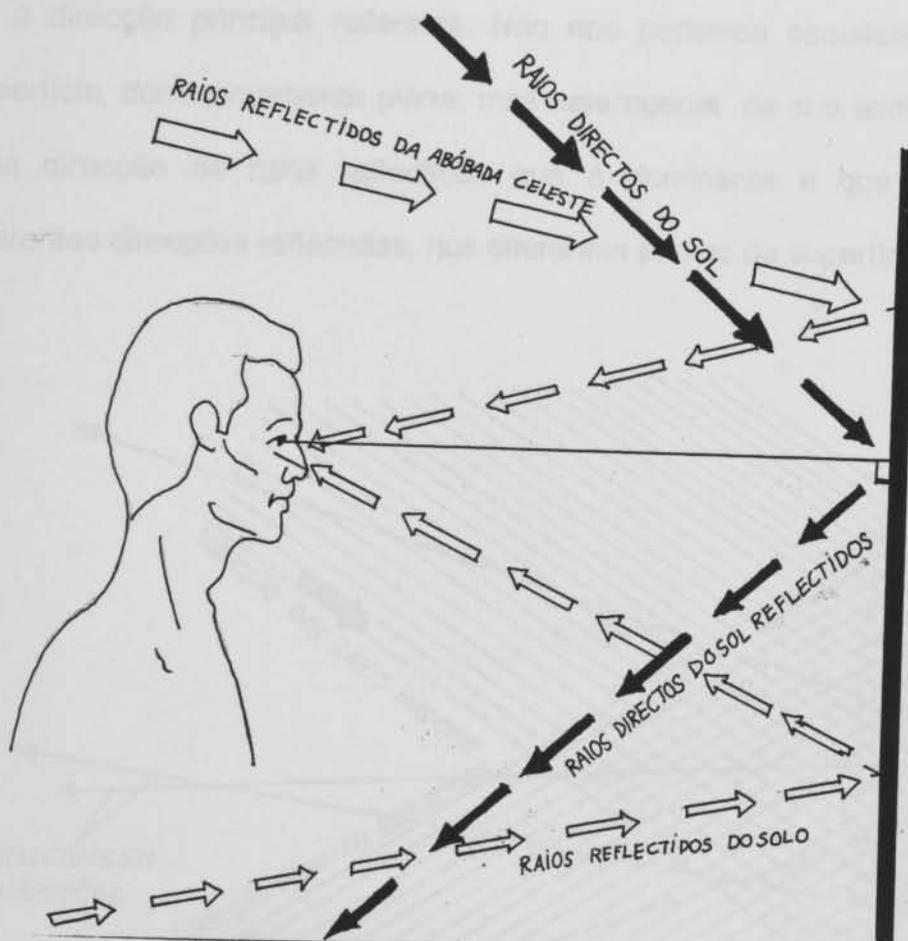


Fig.7 – Efeito dos raios reflectidos numa superfície plana

Enfatizando esta ideia anterior, observemos agora a fig.8 que nos mostra uma superfície irregular de perfil. A "imperfeição" e a "irregularidade" da superfície condicionam a reflexão dos raios directos e indirectos, que ao incidirem nos mais variados pontos, reflectem em determinados sentidos os respectivos raios reflectidos. Simplificando esta ideia, podemos imaginar

esta superfície irregular sendo composta de infinitas superfícies mais pequenas, umas concordantes e outras secantes. Admitindo que cada uma destas pequenas superfícies tem uma forma diferente de geração e de curvatura, facilmente nos apercebemos de que as direcções dos raios reflectidos provém de várias direcções da superfície principal, somatório das superfícies secundárias consideradas.³³ Estes raios reflectidos sobrepõem-se à direcção principal reflectida. Não nos podemos esquecer que esta superfície, dominantemente plana, mas heterogenia na sua textura, admite uma direcção de raios reflectidos que é dominante e que atenua as diferentes direcções reflectidas, nos diferentes pontos da superfície.

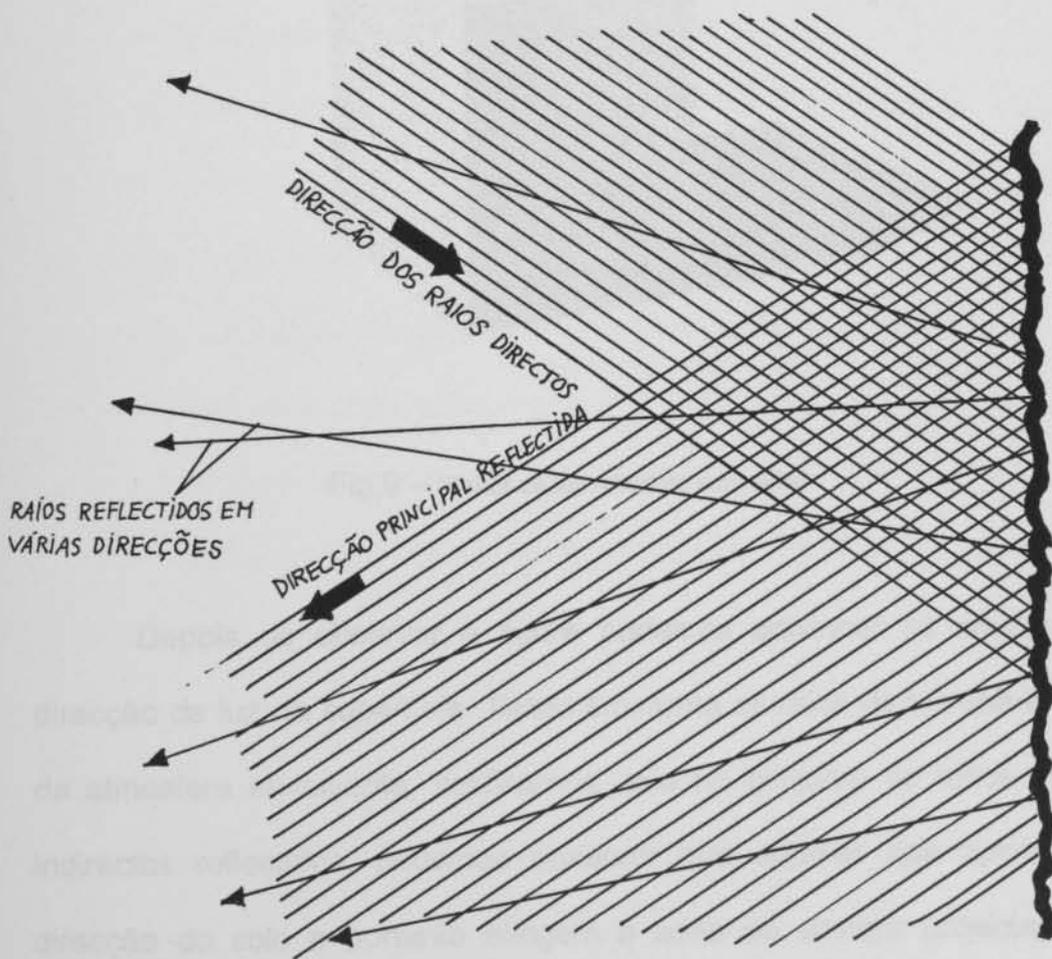


Fig.8 - Efeito dos raios reflectidos numa superfície "irregular" de perfil.

³³ Acerca da geração e curvatura de uma superfície, vide o 3º capítulo do presente ensaio.

Consideremos agora um cubo exposto à luz solar e sob a acção de uma determinada direcção luminosa, fig.9. Pela experiência que temos da visão dos objectos, em condições normais, verificamos que a zona em sombra, que existe no próprio objecto, é sempre mais clara que a sombra que o objecto produz noutra superfície. Este facto justifica-se, porque a zona de sombra própria do objecto recebe muito mais luz reflectida que a zona de sombra projectada na outra superfície.

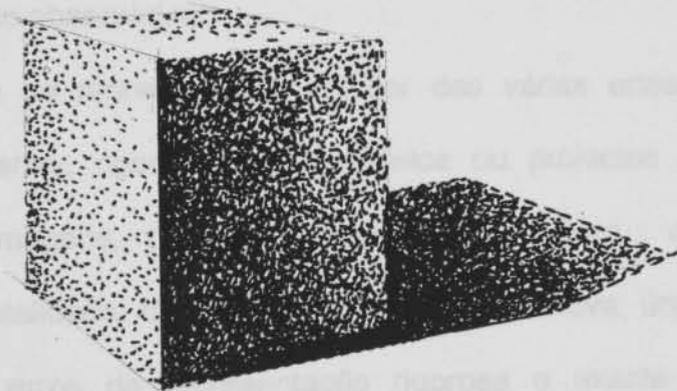


Fig.9 – Efeitos da luz reflectida num cubo.

Depois de observar a figura podemos adivinhar os efeitos desta direcção de luz na superfície. Tendo em conta os raios de luz que emanam da atmosfera envolvente, verificamos, que no conjunto de todos os raios indirectos reflectidos, podemos observar que aqueles que apontam em direcção do solo e portanto atingem a zona de sombra projectada, são quase na sua totalidade reenviados para o céu. Por aquela razão, se explica, que aquela sombra apresenta valores mais escurecidos, relativamente às

áreas de sombra própria. Por outro lado, dos restantes raios reflectidos, uma parte considerável atinge as zonas de sombra própria do objecto, clarificando e modelando estas áreas da superfície. Não nos esqueçamos também, que estes raios reflectidos, que se dirigem para as zonas de sombra própria são, alguns deles, posteriormente reflectidos para o observador, daqui a razão das áreas de sombra própria apresentarem, em cada uma das suas faces, uma gradação de valores diferentes. Daqueles valores, das faces, os maios claros justificam-se pela razão de que os raios reflectidos que atingiram estas zonas, passam mais perto do observador e, paralelamente, nas zonas mais escurecidas, os raios reflectidos passam mais à margem do observador.

A ciência da representação, auxiliar das várias artes, tem como objectivo representar, rigorosamente, modelos ou projectos artísticos. A feitura destas imagens, projectos, imagens de síntese de modelos, dependem, na totalidade, das leis da Geometria Descritiva, única disciplina que corrige os erros da representação rigorosa e exacta das formas geométricas, das suas sombras e da sua configuração ou, em suma, da representação das suas superfícies. A este propósito citamos um trecho de Jean Paul Jungmann, da sua obra "L'Image en architecture" e referido em "Ombres et Lumières" do mesmo autor: «...Quant à la fabrication des images de synthèse, elles se réfèrent aux mêmes données géométriques à la fois de modélisation, de tracé puis de rendu des ombres et des lumières telles qu'elles sont enseignées par la géométrie descriptive et par l'art des peintres

depuis la Renaissance...»³⁴

Os veículos responsáveis pela iluminação dos corpos, como já nos referimos anteriormente são, geometricamente falando, de carácter direccional e pontual. Relacionando este aspecto e transferindo esta síntese para a esfera da realidade, podemos substituir aqueles caracteres, respectivamente por, no primeiro caso, luz solar e lunar e, no segundo caso, por luz de candeeiro, lamparina, chama de vela, lanterna, entre outras. No primeiro exemplo obtemos uma visão fotópica-diurna e no segundo exemplo obtemos uma visão escotópica-nocturna.

Qualquer tipo de iluminação, com as características anteriormente descritas, é de origem solar visto que a energia terrestre é alimentada pelo Sol.

Em síntese, no fenómeno da percepção visual dos corpos e sua relação com o comportamento da luz, genericamente diurna, verificamos que na emissão da luz temos sempre em consideração **quatro tipos de raios luminosos**, dado que, os raios de luz indirectos são de varios tipos. Os raios que se incluem no fenómeno da iluminação são **os directos e os indirectos**, estes, podem ser de três tipos: **atmosféricos, terrestres e de proximidade**. O processo desencadeia-se, primeiramente, com a acção dos raios directos que fazem accionar em seguida os outros três indirectos.

Os raios directos são emanados directamente da fonte. No caso particular do Sol, que estando a uma distancia enorme da Terra (está convencionalmente considerado a distancia infinita), verifica-se que aquele envia raios que atingem os objectos com um grau de intensidade superior

³⁴ Jean Paul Jungmann, *Ombres et Lumières*, Les éditions de La Villete, Paris,1995, pág.7. Opinião citada noutra obra do mesmo autor "L,Image en architecture", Les éditions de La Villete,1996. Tradução: "Quanto à fabricação de imagens de síntese, elas se referem aos dados geométricos para efeitos de modelação, do traçado e da modelação das sombras e das luzes que são ensinadas pela Geometria Descritiva e pela arte dos pintores depois da Renascença"

aos raios indirectos que têm menos força. Os raios directos quando apresentam uma direcção perpendicular ás superfícies alvo de iluminação, têm, nessa direcção, uma intensidade máxima, é o caso da luz zenital, esta luz surge quando o Sol, no seu ponto mais alto, ilumina o solo estando numa direcção perpendicular a este. Os raios indirectos têm uma intensidade mais reduzida, não configuram as grandes áreas de sombras própria, projectada e autoprojectada de uma superfície, (o que acontece com os raios directos), apenas modelam aquelas áreas. Em Geometria Descritiva operamos com os raios directos para determinarmos rigorosamente as zonas de luz e as zonas de sombra de uma superfície, através de metodologias a desenvolver, nos quinto, sexto e sétimo capítulos deste ensaio.

Os raios atmosféricos justificam-se, pois, temos que ter em conta que a atmosfera é composta de pequenas partículas de pó e de água. Estas pequenas partículas, que podemos considerar pequenas esferas em síntese, depois de atingidas pelos raios directos, emanam raios em todas as direcções, mesmo em sentido contrário e oposto ao da própria luz directa. Estes raios atmosféricos vão inevitavelmente atingir as zonas rigidamente iluminadas e em sombra das superfícies, estas, correspondem às zonas geradas pela luz directa que constrói a separatriz luz-sombra.³⁵

A almofada de ar, existente na atmosfera, pode-se apresentar transparente, homogenia ou heterógenia, dependendo do estado do tempo em determinadas alturas do ano. Podemos visualizar melhor esta situação, da emissão dos raios atmosféricos, observando a fig.10, que representa uma pequena esfera considerada, em síntese, como uma dessa gotas de poeira

³⁵ A forma da separatriz luz-sombra é desenvolvida nos 4º, 5º e 6º capítulos deste ensaio.

ou de água existentes na atmosfera. Os raios oblíquos, em relação à respectiva normal à esfera, serão mais ou menos dispersos pelo efeito de

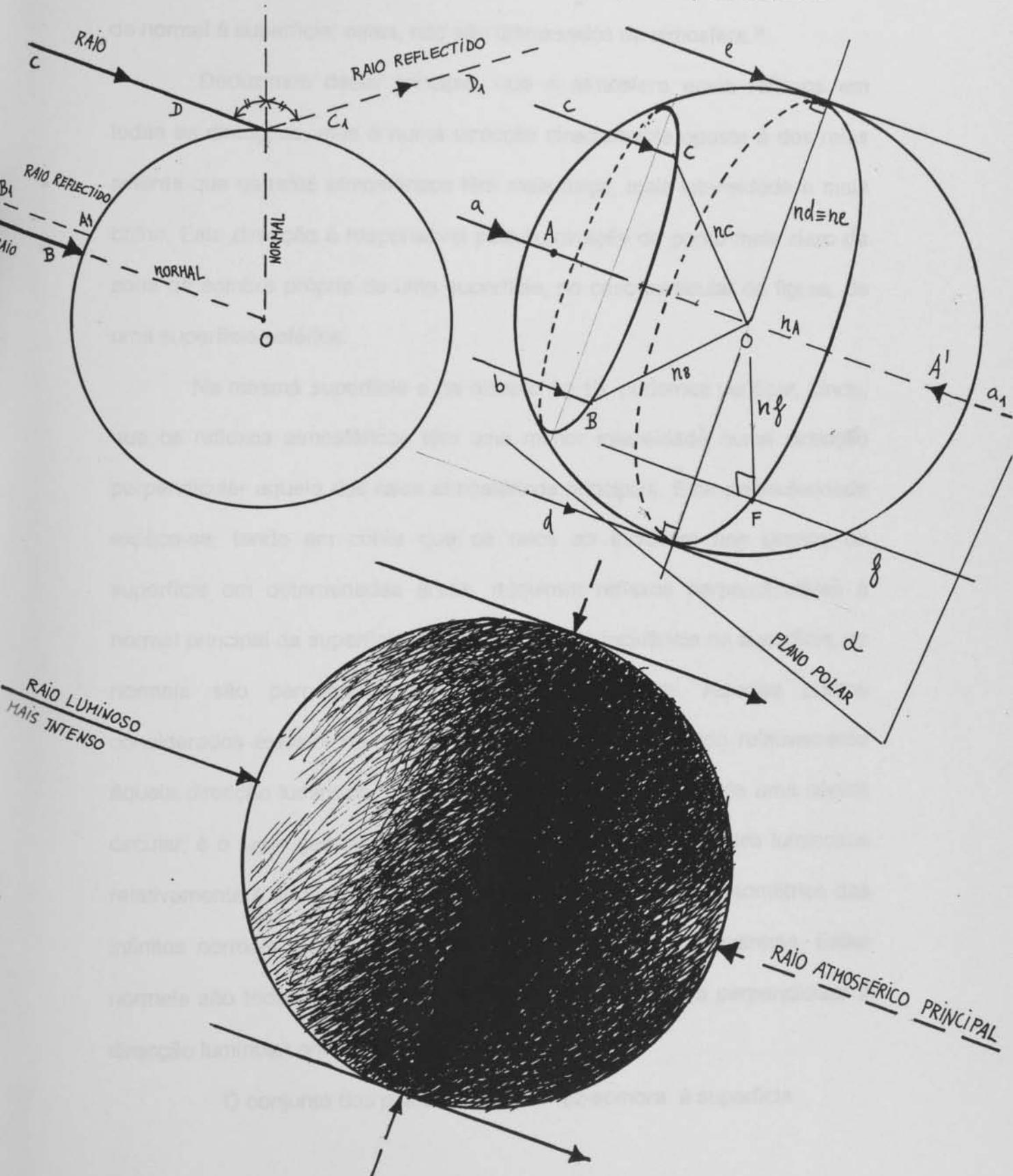


Fig.10 – Emissão dos raios atmosféricos numa superfície esférica.

reflexão sobre as moléculas de ar e, por conseguinte, depois da reflexão, têm uma iluminação menos intensa que os raios normais ou com a direcção da normal á superfície, estes, não são dispersados na atmosfera.³⁶

Deduzimos deste principio, que a atmosfera envia reflexos em todas as direcções, mas é numa direcção directamente oposta à dos raios solares que os raios atmosféricos têm mais força, mais intensidade e mais brilho. Esta direcção é responsável pela iluminação do ponto mais claro da zona de sombra própria de uma superfície, no caso particular da figura, de uma superfície esférica.

Na mesma superfície e na mesma fig.10, podemos verificar, ainda, que os reflexos atmosféricos têm uma menor intensidade numa direcção perpendicular aquela dos raios atmosféricos principais. Esta particularidade explica-se, tendo em conta que os raios ao incidirem nos pontos da superfície em determinadas áreas, adquirem reflexos perpendiculares à normal principal da superfície. Nesses pontos de incidência na superfície, as normais são perpendiculares à direcção luminosa. Aqueles pontos considerados existem no meridiano da separatriz conjugado relativamente àquela direcção luminosa. Este meridiano, que tem a forma de uma cónica circular, é o lugar geométrico dos pontos de tangência dos raios luminosos relativamente à superfície em questão e é, também, o lugar geométrico das infinitas normais à direcção luminosa directa e difusa ou indirecta. Estas normais são todas elas complanares e existem num plano perpendicular à direcção luminosa principal, plano polar α .

O conjunto dos planos tangentes luz-sombra à superfície

³⁶ Normal num ponto de uma superfície esférica, é qualquer recta que contém o centro e qualquer outro ponto considerado da superfície, é por essa razão, perpendicular ao plano tangente nesse ponto. Numa superfície cilíndrica ou cónica as normais são perpendiculares ao plano tangente; ao longo de uma geratriz, existem infinitas normais que são paralelas.

definem e delimitam uma superfície envolvente, que não é mais do que a superfície cilíndrica luz-sombra concordante com a superfície esférica ao longo do meridiano que é, ele próprio, a separatriz luz-sombra da esfera, ou seja, o lugar geométrico dos pontos da superfície que delimitam as áreas de luz e de sombra, estas, são, em relação a esta linha, simétricas, definem, pois, dois segmentos esféricos, um iluminado e outro em sombra.³⁷

Observe-se a fig.11. É de sublinhar, também, que quanto maior for o ângulo que os raios directos fazem com as respectivas normais, (que compreendem os segmentos de recta que vão do centro da esfera ao ponto de intersecção do raio com a superfície), mais depressa esses raios são dispersos para a atmosfera. Por esta razão, se entende que os raios atmosféricos que têm maior intensidade, serão aqueles a que corresponderam raios directos de forte intensidade, os quais formam um

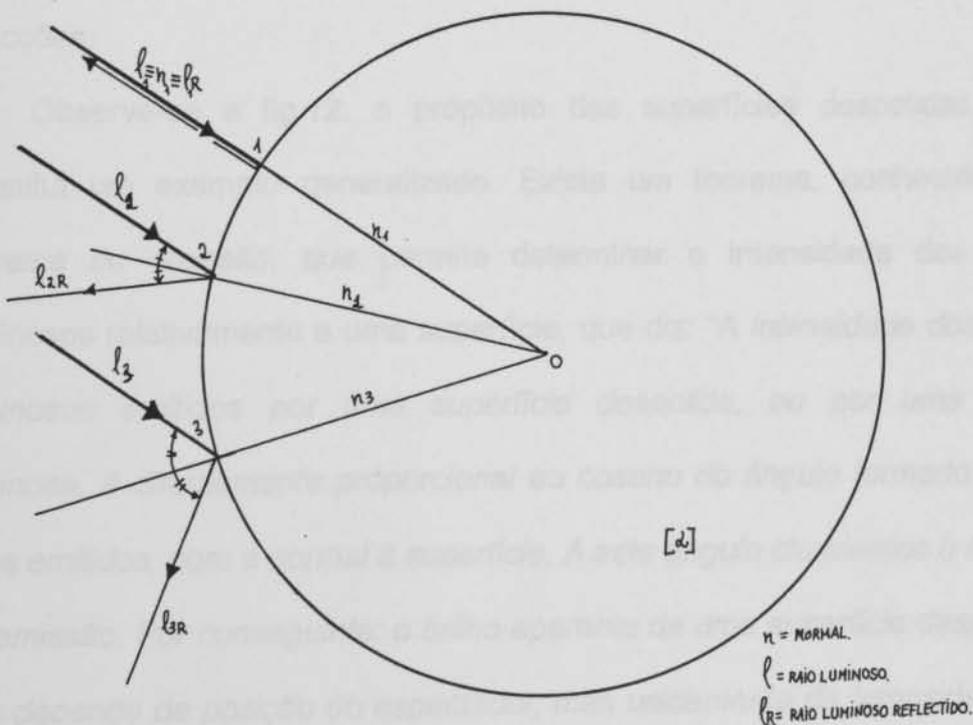


Fig.11 – Efeito da intensidade dos raios atmosféricos numa superfície esférica.

³⁷ Duas superfícies dizem-se concordantes, ao longo de uma linha, quando em todos os pontos, dessa linha, existem planos tangentes comuns às duas superfícies.

ângulo muito pequeno com a respectiva normal. Quando aquele ângulo é nulo significa que nesse ponto respectivo da superfície o raio directo que a interceptou, a normal e o respectivo raio reflectido estão alinhados numa recta com a mesma direcção; significa que nesse ponto correspondem o raio directo mais intenso e, por resposta, o raio reflectido mais intenso.

Outra qualidade ou tipo de reflexos são os que partem da terra ou do solo ³⁸. Depois do contacto dos raios directos com aquelas superfícies, geralmente planas, são reenviados reflexos e, logicamente, alguns deles poderão encontrar objectos que estejam no seu caminho. A este tipo de reflexos chamamos **terrestres**. A capacidade de reflexão deste tipo de raios dependem da capacidade reflectora da respectiva superfície que se relaciona, directamente, com o tipo de material de que é constituída. Geralmente estas superfícies são despolidas e enviam raios em todas as direcções.

Observe-se a fig.12. a propósito das superfícies despolidas, que constitui um exemplo generalizado. Existe um teorema, conhecido por *teorema de emissão*, que permite determinar a intensidade dos raios luminosos relativamente a uma superfície, que diz: "*A intensidade dos raios luminosos emitidos por uma superfície despolida, ou por uma fonte luminosa, é directamente proporcional ao coseno do ângulo formado pelos raios emitidos, com a normal à superfície. A este ângulo chamamos o ângulo de emissão. Por conseguinte: o brilho aparente de uma superfície despolida, não depende da posição do espectador, mas unicamente da intensidade da*

³⁸ "O solo, cuja reflectância difusa média atinge valores da ordem dos 10%, pode, portanto, possuir uma luminância média da ordem dos 10 4 blondel, isto é, da mesma ordem que a do céu limpo. Portanto, a iluminação do solo pela luz, solar, pode servir como uma fonte indirecta de iluminação interior bem útil." Opinião citada em R.G.Hopkinson, P. Petherbridge, J.Longmore, *Op. cit.*, pág.37, 1º parágrafo.

fonte luminosa e do ângulo que a luz directa (sua direcção), faz com a superfície, ou com a normal à superfície.”³⁹

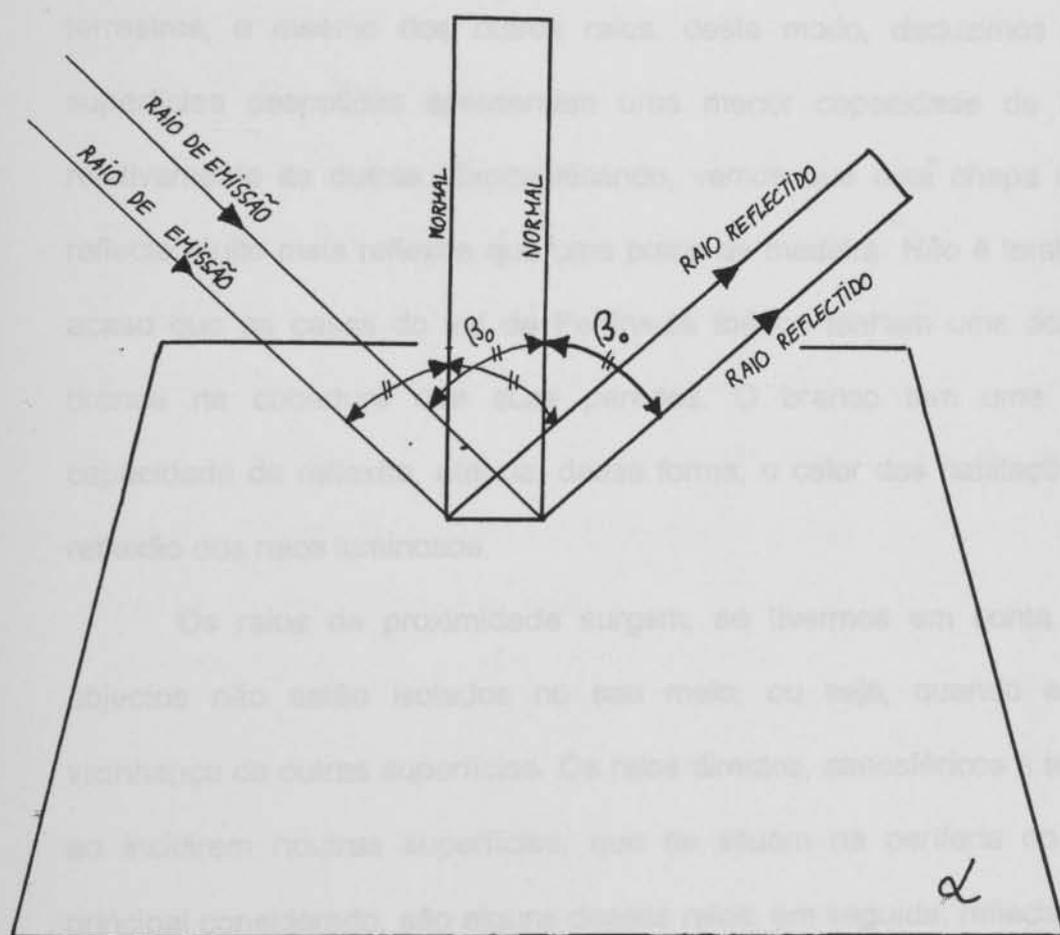


Fig.12 – Teorema da emissão dos raios de luz.

³⁹ J.J.Pillet, *Traité de perspective linéaire*, quarta edição da Paris Librairie Philosophique J.Vrin, 1953, pág.48, 12º parágrafo.

As superfícies polidas apresentam, como é evidente, uma maior capacidade de reflexão, o mesmo já não se pode dizer das despolidas. A este propósito citamos um autor importantíssimo que debateu muito acerca destes assuntos, de seu nome Jean Jules Pillet, que diz: " *Nous considérerons, en eutre, les corps mi-polis qui participeront, comme propriétés, des corps polis et des corps dépolis.*" ⁴⁰ Refere o autor, que as superfícies geométricas podem ser de três tipos: **polidas, semipolidas e despolidas**. Estes aspectos condicionam o poder de reflexão dos raios terrestres, e mesmo dos outros raios, deste modo, deduzimos que as superfícies despolidas apresentam uma menor capacidade de reflexão relativamente ás outras. Exemplificando, vemos que uma chapa metálica reflecte muito mais reflexos que uma placa de madeira. Não é também por acaso que as casas do sul da Península Ibérica tenham uma dominante branca na cobertura das suas paredes. O branco tem uma enorme capacidade de reflexão, atenua, dessa forma, o calor das habitações, pela reflexão dos raios luminosos.

Os raios de proximidade surgem, se tivermos em conta que os objectos não estão isolados no seu meio, ou seja, quando estão na vizinhança de outras superfícies. Os raios directos, atmosféricos e terrestres ao incidirem noutras superfícies, que se situam na periferia do objecto principal considerado, são alguns desses raios, em seguida, reflectidos para o objecto principal. A estas reflexões podemos dar o nome de **raios de proximidade**. Não nos esqueçamos, também, de que a cor de uma superfície é muitas vezes alterada pela vizinhança de outras que lhe estão próximas. Assim, por exemplo, se considerarmos duas superfícies, uma de

⁴⁰ J.J.Pillet, *Op.cit.*, pág.48,1ºparágrafo. Tradução: " *Nós deveremos considerar, no entanto, os corpos semi polidos que participam, como propriedades, dos corpos polidos e despolidos.*"

um tom azulado e outra de um tom alaranjado, complementar daquele e situada por detrás da primeira, facilmente depreendemos que os raios reflectidos da superfície laranja irão neutralizar, em parte, as zonas de sombra própria da superfície azul.

O **grau de saturação de uma superfície** ou a **chamada tinta local**, existe nas áreas onde o brilho e a sombra estão ausentes. Este aspecto foi referido por J.J.Pillet no conhecido **princípio das cores**.⁴¹ Exemplificando com uma superfície simples do primeiro grau, um plano colorido, fig.13, verificamos que dada uma direcção luminosa qualquer, o plano encontra o seu limite máximo de *saturação*, onde a cor é mais definida, nos lugares onde o branco e o negro estão ausentes. Esta particularidade verifica-se, normalmente, quando se observa o plano numa orientação perpendicular a este dependendo para tal, também, da direcção luminosa em relação à referida superfície. Quando a direcção de observação deixar de ser perpendicular, acentuar-se-ão os brilhos e as sombras no plano, omitindo, dessa forma, os valores de *saturação*.

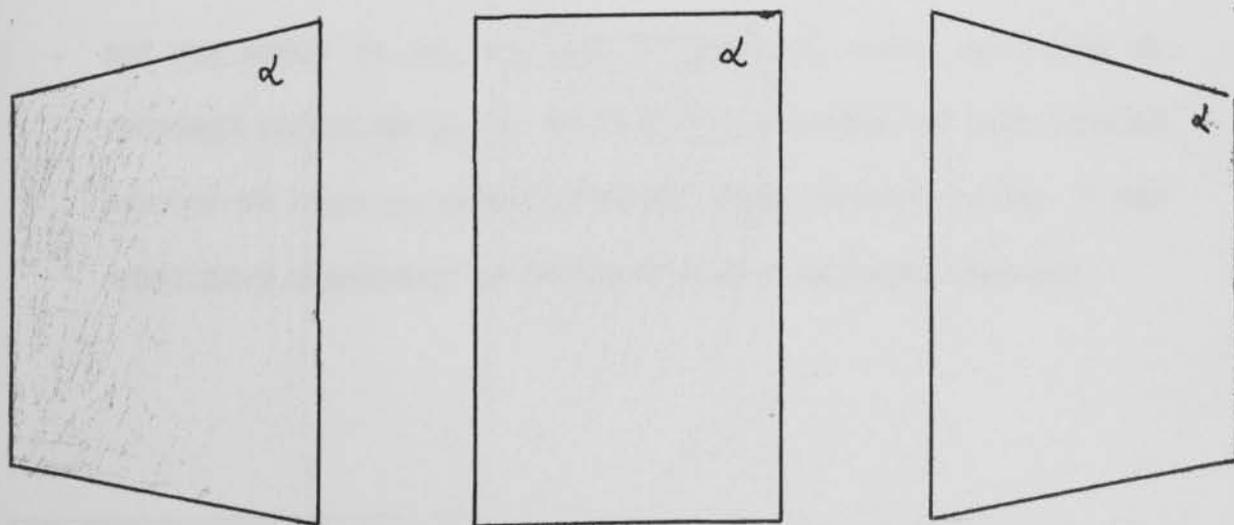


Fig.13 – A qualidade da cor e a influência da luz e dos brilhos numa superfície plana.

⁴¹ J.J.Pillet, *Op.cit.*, pág.54.

A subdivisão dos raios luminosos, a que nos referimos anteriormente, foi inicialmente estudada por J.J.Pillet que subdividiu os raios luminosos basicamente em dois tipos, directos e indirectos.⁴² Esta subdivisão foi posteriormente completada por Jean Paul Jungmann, autor recente e estudioso de Pillet, que refere na sua obra *Ombres et Lumières*: «*Sois sous la forme d'un rayonnement direct du soleil vers la terre (par temps clair pour un ensoleillement solaire évident ou par temps couvert pour une lumière diffuse), soit aussi sous la forme d'un rayonnement indirect ou reflets. Nous distingueront dorénavant, pour tout effet de lumière, ces deux rayonnements, directs et indirects.*»⁴³ Mais adiante o autor completa, defendendo que «*Le rayonnement indirect ou reflets:*

- *soit des reflets atmosphériques dús à la reflexion de la lumière sur les fines particules de poussière et d'eau composant l'air,*

- *soit des reflets terrestres dús à la neige par exemple,*

- *soit des reflets de proximité dús à l'autour du corps, des reflets de voisinage provoqués par la réflexion de la lumière sur des surfaces proches du corps considéré (édificies, murs, surfaces vitrées...), ces reflets étant entièrement fonction de la situation de l'object dans son*

⁴² J.J.Pillet, *Op.cit.*, pp. 47 e 49.

⁴³ Jean Paul Jungmann, *Op.cit.*, pág.12. Tradução: «*Seja sobre a forma de um raio directo do Sol em direcção à Terra (em tempo claro com uma luminosidade solar bastante nítida e intensa, ou num tempo coberto por uma luz difusa), seja também sobre a forma de um raio indirecto ou reflectido. Nós distinguiremos, no entanto, para todos os efeitos de iluminação, estes dois raios, directos e indirectos.*»

- *environnement construit ou naturel.*» ⁴⁴

Não nos podemos esquecer, porém, que podemos ainda incluir nos reflexos atmosféricos, os **reflexos celestes**. Considerando o céu, em síntese, como uma superfície esférica, tal como está desenhado na fig.14, e considerando a película desta superfície constituída de átomos, verificamos, que os raios solares directos que atingem esta película são posteriormente repartidos para a Terra; o Céu é, por esta razão, uma fonte de reflexos. A cada ponto do céu corresponde um raio reflectido com uma determinada intensidade. No entanto, de todos os pontos pertencentes à “superfície” celeste, de onde são enviados reflexos, existem uns que têm maior intensidade do que outros, em função da posição da terra face à direcção da luz directa do Sol.

Fig. 14 - Reflexos celestes sobre a superfície da Terra.

Assim, podemos observar, na fig. 14, que o ponto do céu que corresponde ao raio reflectido mais intenso é que se situa para a Terra, corresponde ao raio que passa no centro e é paralelo à direcção luminosa, isto é, ao infravermelho a película atmosférica no ponto P, ponto do céu mais luminoso e de onde parte o reflexo mais intenso. À medida que se afastam do ponto P, os reflexos vão diminuindo de intensidade. Assim, os reflexos celestes são mais intensos quando o ponto do céu que os produz está mais próximo da direcção da luz directa do Sol.

⁴⁴ *Idem. ib.*, pág.13. Tradução: « Dos raios indirectos ou reflectidos: - sejam os reflexos atmosféricos provenientes da reflexão da luz sobre as finas particulas de poeira e de água que compõem o ar; - sejam os reflexos terrestres provenientes da neve por exemplo, - sejam os reflexos de proximidade provenientes da presença de outros corpos, os reflexos da vizinhança provocados pela reflexão da luz sobre as superfícies mais próximas do corpo considerado (edifícios, muros, superfícies vítreas...), estes reflexos surgem em função do posicionamento do objecto em ambientes construidos ou naturais.»

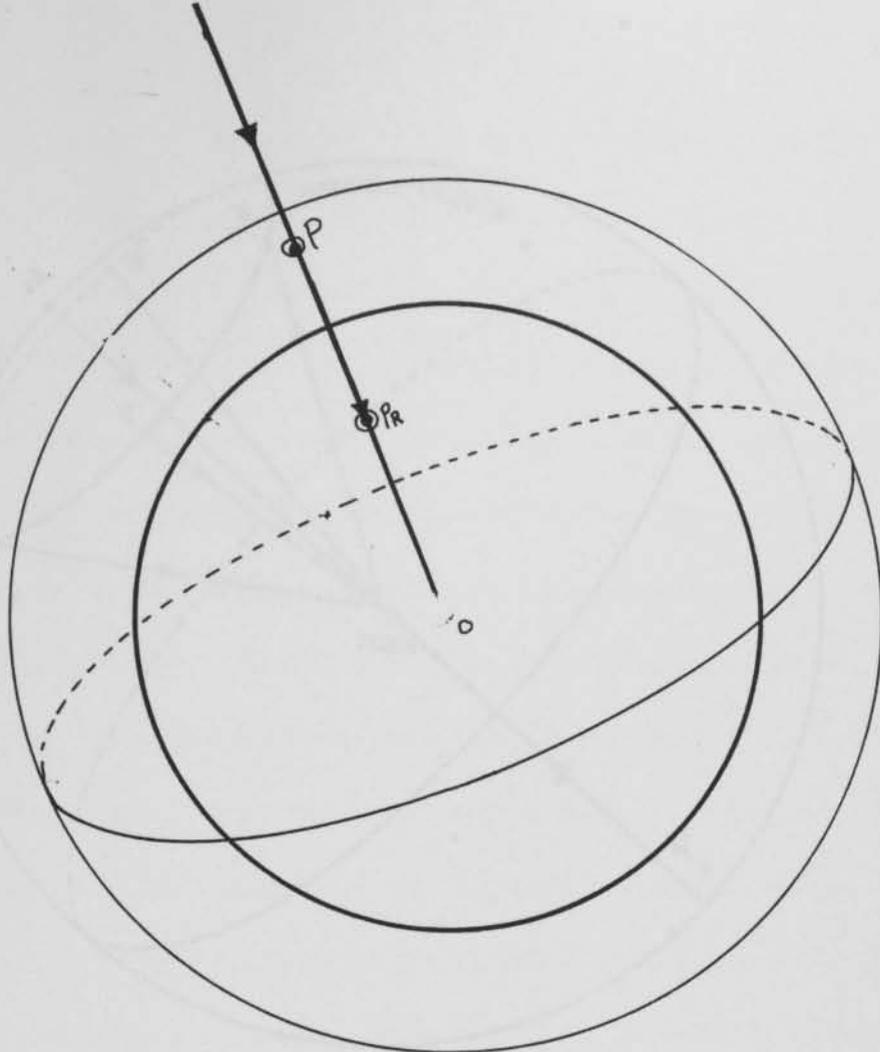


Fig. 14 – Raio reflectido mais intenso que emana da superfície celeste

Assim, podemos observar, na fig. 14, que o ponto do céu a que corresponde o raio reflectido mais intenso e que se dirige para a Terra, corresponde o raio que passa no centro e é paralelo à direcção luminosa; este raio intersecta a película atmosférica no ponto P, ponto do céu mais luminoso e de onde parte o reflexo mais intenso. À medida que os pontos do céu, se vão aproximando do equador (relativo aquela direcção luminosa) da superfície “esférica” celeste, os raios que reflectem dessas zonas vão perdendo a sua intensidade. Deste modo é fácil perceber que os raios reflectidos dos pontos do equador têm uma intensidade quase nula.

Considerando vários paralelos desta superfície “esférica” celeste, existentes em planos perpendiculares à direcção luminosa, fig.15, é fácil

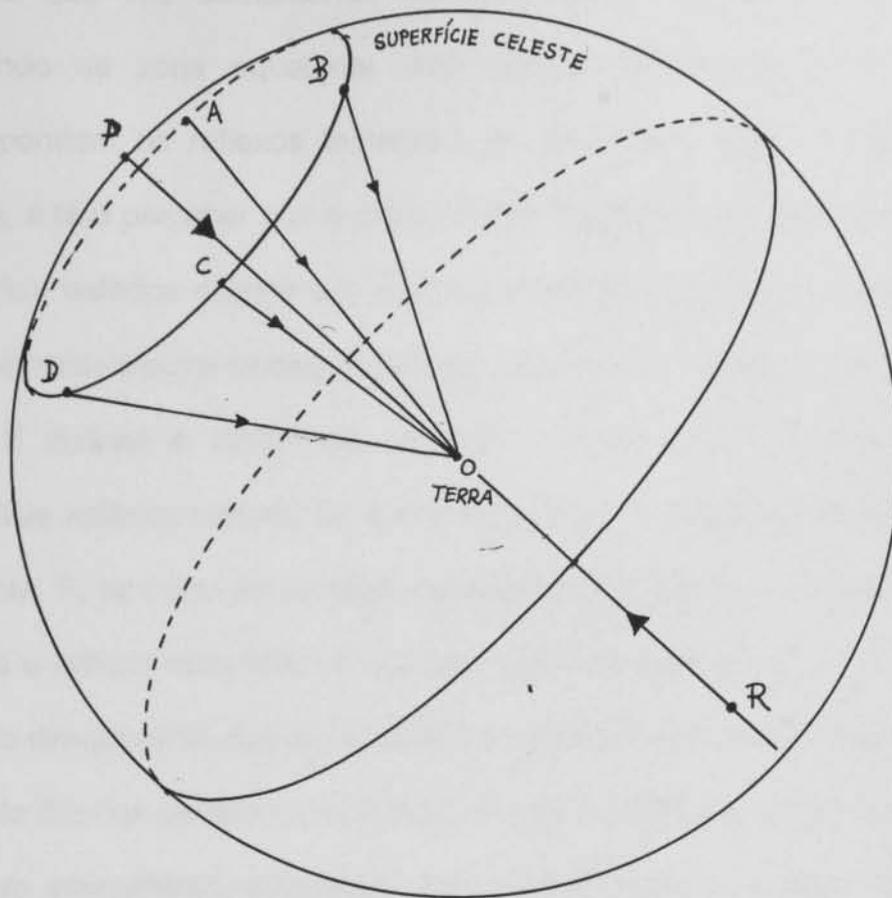


Fig.15 – Reflexos celestes com igual intensidade.

perceber que os pontos existentes em cada paralelo têm o mesmo poder de reflexão, tendo, portanto, igual brilho. Isto porque, em todos esses pontos, a normal em relação ao eixo definido pela direção da Luz, que passa no centro da superfície esférica, têm sempre o mesmo valor angular, então, aos raios de luz a que correspondem essas normais encontramos raios ou reflexos de igual intensidade. Estas normais podem ser consideradas geratrizes de um cone de revolução circular, cujo vértice é o centro da superfície esférica celeste.

Ainda na mesma fig.15 e considerando agora a outra parte simétrica da porção esférica, em relação ao equador, zona em penumbra, verifica-se que aos pontos pertencentes a esta zona, correspondem novamente

reflexos que vão aumentando de intensidade, à medida que se vão afastando da zona equatorial. Aos pontos situados sobre o equador correspondem os reflexos terrestres de valor mais baixo. Qualquer das formas, é fácil perceber que a estes pontos situados nesta parte simétrica da superfície esférica celeste correspondem reflexos de menor intensidade e, relativamente à outra metade simétrica, que está em contacto com a Luz.

É curioso e verifica-se, também, que na zona em penumbra da superfície esférica celeste, de todos os pontos, aí situados, existe um mais brilhante, R, tal como na primeira metade iluminada existe P. Nesse ponto R emana o reflexo mais intenso correspondente a essa zona, que surge num sentido directamente oposto ao de P mas alinhado na mesma direcção. Este aspecto faz-nos pensar na existência de um Sol fictício, a que corresponde um **raio atmosférico principal** – raio atmosférico mais intenso que existe em oposição ao raio mais intenso que parte de P.

Ao valor e efeito daquele raio R, corresponde a totalidade de todos os raios atmosféricos reunidos. Estas considerações foram desenvolvidas por J.J.Pillet em *Traité de Perspective Linéaire*, citando o autor: «...Il peut être commode de considérer au lieu de ces reflets, et nous nommerons rayon atmosphérique principal, la direction de la lumière qu'il pourrait nous envoyer.»⁴⁵

No exemplo da fig.16, podemos observar uma porção de superfície cilíndrica circular, apresentada numa representação axonométrica ortogonal e onde se verificam facilmente as zonas mais iluminadas e em sombra.

Primeiramente, com os raios directos, determinou-se rigorosamente a separatriz luz-sombra que delimita as áreas em luz e as áreas em sombra da

⁴⁵ J.J.Pillet, *Op.cit.*, pág.50, 2º parágrafo. Tradução: «...Talvez seja cómodo considerar o conjunto destes reflexos, e nós o designaremos de raio atmosférico principal, a direcção da luz que ele nos poderá enviar.»

superfície. Para este efeito, bastou conduzir dois planos tangentes à superfície, paralelos à direcção luminosa, onde as geratrizes de tangência, nos pontos T e T₁, definem a linha que separa as regiões em luz e as regiões em sombra.

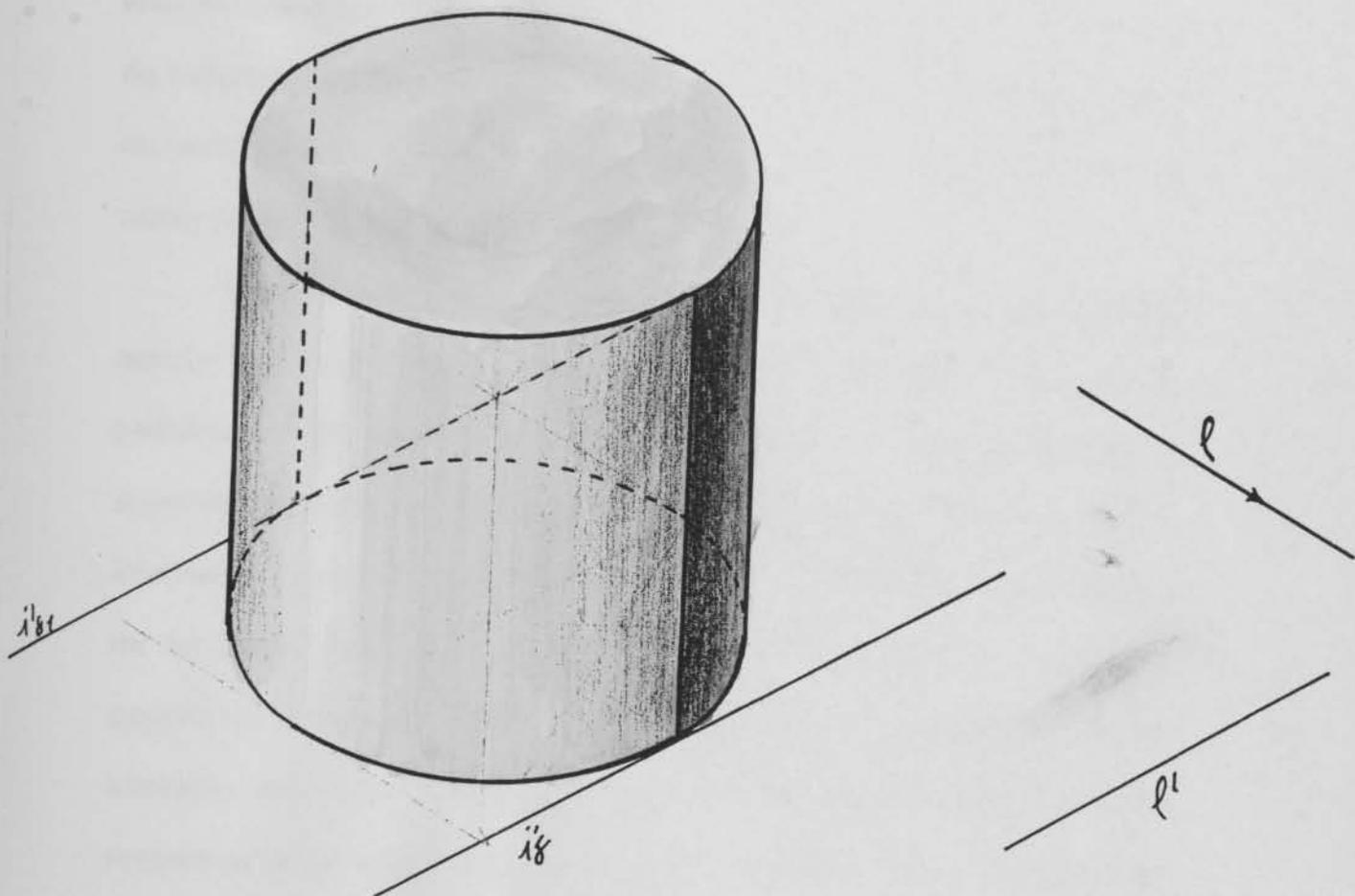


Fig. 16 – Zonas de luz e de sombra numa superfície cilíndrica circular.

Também podemos verificar, na mesma figura, que as regiões iluminadas e em penumbra têm valores variados que dependem da intensidade luminosa dos raios nas várias geratrizes da superfície; cada geratriz tem uma determinada intensidade luminosa. O poder de iluminação

da superfície, ou de cada geratriz que lhe pertença, perante aquela direcção luminosa, dependem do ângulo de incidência do raio de luz com a respectiva normal à superfície.⁴⁶

Sendo a normal perpendicular a uma geratriz da superfície, ela é perpendicular e complanar não só com a geratriz mas também com o seu eixo. Ao plano definido pela geratriz e pela normal, ou pela normal no ponto da superfície e o eixo, designamos de plano normal à superfície nesse ponto ou nessa geratriz. Este plano é perpendicular ao plano tangente à superfície nesse ponto ou nessa geratriz.

Observando ao mesmo tempo a fig.17 e sabendo que cada geratriz admite um plano tangente e um plano normal à superfície, facilmente se percebe que de todos os raios de luz directos que não são exteriores à superfície, existem uns que atingem as geratrizes com maior ou menor intensidade, dependendo, para tal, do menor ou maior ângulo, que os planos de luz fazem com o respectivo plano normal que contém a respectiva geratriz de incidência. Deste modo, quanto maior for o ângulo que o raio luminoso fizer com o respectivo plano normal, menor será o brilho da respectiva geratriz. Na parte da linha de separatriz, a que correspondem duas geratrizes, os ângulos dos raios com os planos normais respectivos atingem valores máximos, o que significa que a iluminação dessas geratrizes é nula. Analogamente, verifica-se, que a geratriz mais iluminada contém o respectivo plano normal, ora se o contém o angulo é nulo e como quanto maior é o angulo menor é o brilho das geratrizes, facilmente se verifica que a geratriz mais iluminada é aquela que é complanar, não só com o raio de luz

⁴⁶ Pela definição de normal, anteriormente referida na nota 36, facilmente percebemos que as normais em qualquer ponto de uma geratriz de uma superfície cilíndrica, são paralelas, tendo em conta o tipo de curvatura.

mas, principalmente, com a normal respectiva. A normal, a geratriz e o raio, existem no mesmo plano normal.⁴⁷

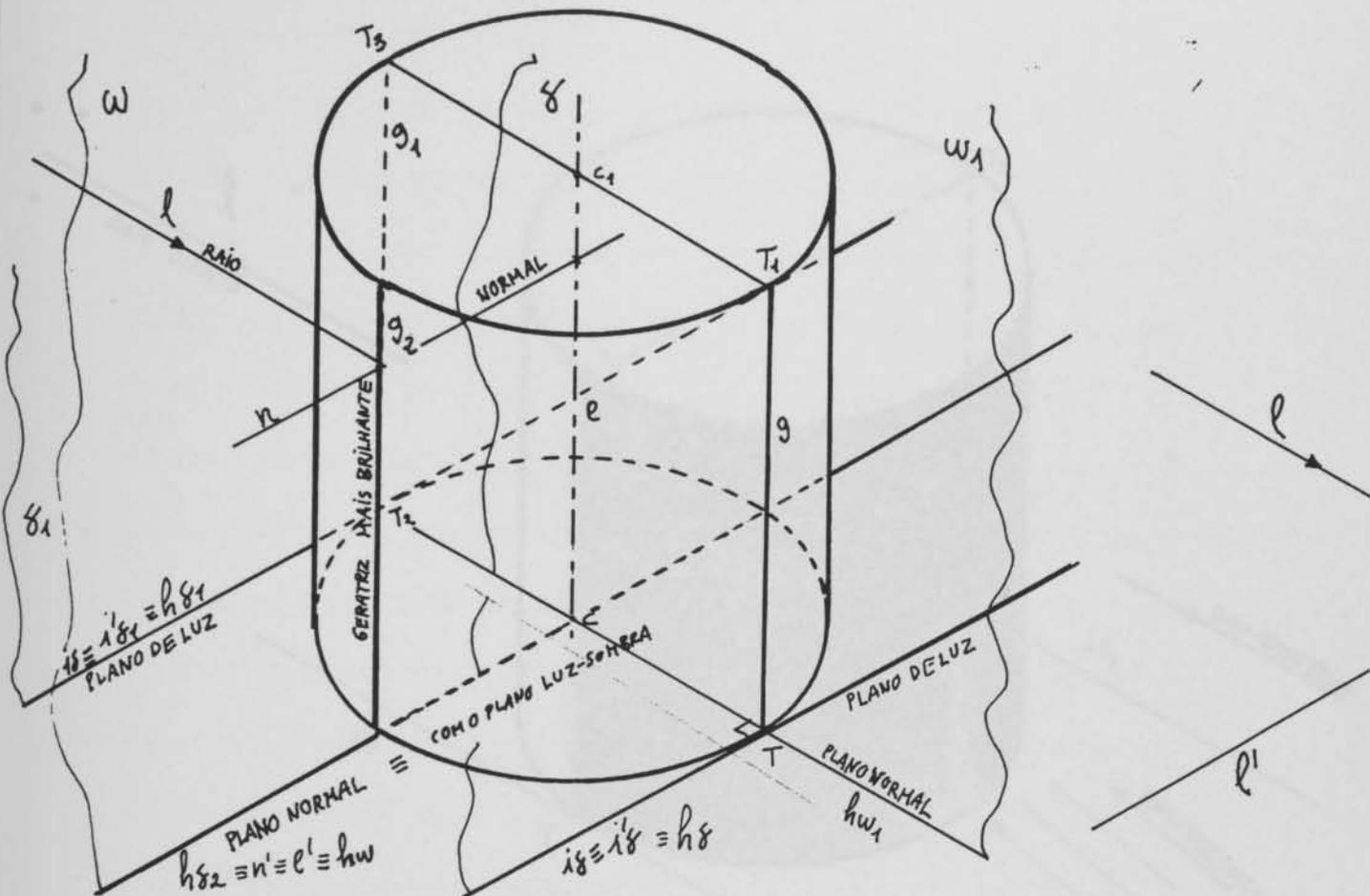


Fig. 17 – Intensidade dos raios luminosos numa superfície cilíndrica.

Veja-se agora a fig.18, que ilustra a modelação da sombra própria posterior da mesma superfície vista numa direcção oposta à da fig.17, e verifiquemos a escala de valores tonais das suas geratrizes através dos raios atmosféricos e terrestres.⁴⁸ Também aqui assistimos a uma gradação

⁴⁷ A intensidade da geratrizes da superfície cilíndrica, perante um foco de luz pontual ou uma direcção luminosa, também se poderia verificar, recorrendo ou referenciando os planos tangentes ao longo das várias geratrizes da superfície, em substituição dos planos normais. Neste caso, no entanto, aos maiores ângulos que os raios directos fazem, com os respectivos planos tangentes ao longo das geratrizes de incidência, correspondem respectivamente maiores intensidades nas respectivas geratrizes de incidência.

⁴⁸ Estando a superfície limitada pelas suas bases, neste caso particular, não existe sombra própria interior projectada.

semelhante, mas de mais fraca intensidade, pois sabemos que os raios indirectos são mais fracos. Apesar deste aspecto, o raciocínio é semelhante.

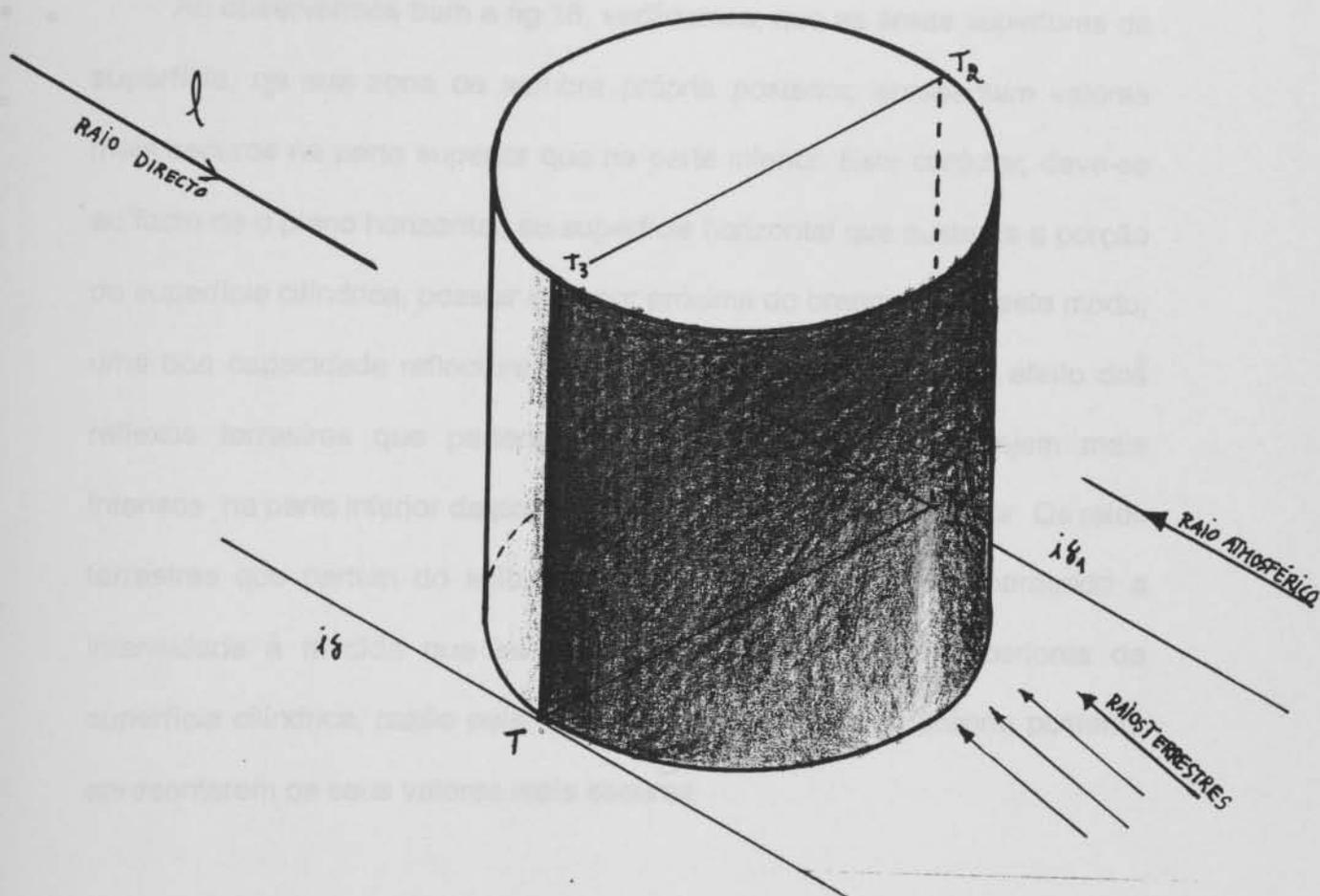


Fig.18 – Efeito dos raios reflectidos na zona de sombra própria da superfície cilíndrica.

Em cada geratriz podemos verificar, igualmente, um determinado valor, um determinado brilho, dependendo igualmente da intensidade dos raios atmosféricos, principalmente dos raios atmosféricos principais que se dirigem num sentido contrário ao dos raios directos, mas na mesma direcção, tal como foi demonstrado anteriormente. ⁴⁹ Também aqui, se

⁴⁹ Acerca dos raios atmosféricos, vide no presente ensaio, pp.46-68.

verifica, que a intensidade de cada geratriz varia consoante a relação angular dos raios atmosféricos, terrestres e celestes (ignoramos aqui os raios de proximidade dado que a superfície está isolada de outras superfícies) com os respectivos planos tangentes ou planos normais á superfície em cada uma das geratrizes.

Ao observarmos bem a fig.18, verificamos, que as áreas superiores da superfície, na sua zona de sombra própria posterior, apresentam valores mais escuros na parte superior que na parte inferior. Este carácter, deve-se ao facto de o plano horizontal, ou superfície horizontal que sustenta a porção de superfície cilíndrica, possuir uma cor próxima do branco tem, deste modo, uma boa capacidade reflectora. É fácil imaginar também, que o efeito dos reflexos terrestres que partem desta superfície horizontal, sejam mais intensos na parte inferior da porção cilíndrica que na parte superior. Os raios terrestres que partem do solo, daquela superfície plana, vão perdendo a intensidade à medida que se distanciam para as zonas superiores da superfície cilíndrica, razão pela qual as zonas em sombra própria posterior apresentarem os seus valores mais escuros.

Nos efeitos de modelação dos raios reflectidos, numa superfície qualquer, importa conhecer um principio a que se refere Frère Gabriel Marie (F.G.M), na sua obra *Geométrie Descriptive*, que diz: "*On sait que dans la reflexion de la lumière, de la chaleur, du son, le rayon réfléchi et la normale à la surface au point considéré sont dans un même plan, et la normale est bissectrice de l'angle formé par le rayon incident et le rayon réfléchi.*"

Ces principes rappelés, on demande de déterminer les projections du

rayon réfléchi, connaissant les projections du rayon incident et les traces du plan réflecteur."⁵⁰

Relacionando estas considerações anteriores com as superfícies geométricas, verificamos que é possível conhecer a direcção e o sentido dos raios reflectidos, quer dos directos, quer dos indirectos. Tal é possível, se tivermos em conta a forma geométrica (curvatura) das superfícies que condicionam a posição dos planos tangentes e considerando, também, que estes planos tangentes contêm os pontos ou as geratrizes de incidência, que são interceptados pelos raios luminosos.

Se as superfícies forem cónicas ou cilíndricas, significa que os planos tangentes num ponto da superfície são tangentes ao longo da geratriz que contém esse ponto, logo, verifica-se, que cada geratriz condiciona e admite uma direcção de raios reflectidos, que nessa geratriz são todos paralelos entre si. Assim, para uma determinada direcção de raios (que podem ser de varia natureza, directos, atmosféricos, terrestres e de proximidade) existe uma direcção de raios reflectidos; a sua direcção e sentido dependem da direcção dos raios que se dirigem para uma qualquer superfície e, a reflexão daqueles, depende da posição do plano tangente que contém o ponto ou a geratriz de incidência. No ponto ou na geratriz de incidência dos raios, o raio incidente, a normal e o raio reflectido, definem um plano normal à superfície que é perpendicular ao plano tangente respectivo.

⁵⁰ F.G.M, Frère Gabriel-Marie, *Géometrie Descriptive*, Tome-2, Exercices. 5ª edição, Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996, edição original de 1877, pág. 353, 1º e 2º parágrafos.

Tradução: " Nós sabemos que na reflexão da luz, do calor, do som, o raio reflectido e a normal à superfície no ponto considerado, encontram-se no mesmo plano, e a normal é bissectriz, do angulo formado pelo raio incidente e o raio reflectido.

Estes princípios enunciados, permitem determinar as projecções do raio reflectido, conhecendo as projecções do raio incidente e os traços do plano reflector.

A fig.19 ilustra graficamente todas aquelas considerações com o exemplo de uma superfície cónica elíptica (exposta à luz directa), assente numa base plana de tom claro e representada em perspectiva linear plana. Note-se a direcção dos raios (excluindo os de proximidade) e o seu efeito sobre a superfície. Depois de observarmos a figura estamos mais aptos a compreender os efeitos da renderização, aspecto ilustrado na fig.20, que representa a mesma figura. ⁵¹

Ao contrário das superfícies cónica e cilíndrica, em que ao longo de uma geratriz existe apenas uma direcção de raios reflectidos, a superfície esférica, como é uma superfície de dupla curvatura, admite apenas uma direcção de raios reflectidos num ponto particular da sua superfície. ⁵² Importa sublinhar que, na superfície esférica, um plano tangente num dado ponto, é apenas tangente nesse ponto, qualidade que tem a ver exclusivamente com a forma da geratriz circular. Um ponto da superfície esférica admite, apenas, uma normal respectiva, esta, é perpendicular ao plano tangente respectivo. Deste modo, e em contraposição à superfície cónica e cilíndrica, que têm normais paralelas ao longo de uma geratriz, a superfície esférica tem todas as normais oblíquas entre si e convergentes para o seu centro.

⁵¹ A renderização é um termo pouco utilizado entre nós, mas refere-se às características de uma superfície, não tanto da sua estrutura, mas da sua morfologia. Aqui, revelam-se qualidades da superfície como a textura, a cor, a gradação das sombras e dos brilhos. Estas qualidades dos corpos geométricos, foram desenvolvidas inicialmente por J.J.Pillet, que muito teorizou acerca deste assunto, na sua obra já citada no presente ensaio. Os franceses utilizam o termo original de "rendu", que corresponde a renderização. Modernamente, existem programas computarizados, que solucionam estas questões da renderização através do C.A.D e do 3D studio.

⁵² O termo "dupla curvatura" é esclarecido no 3º capítulo.

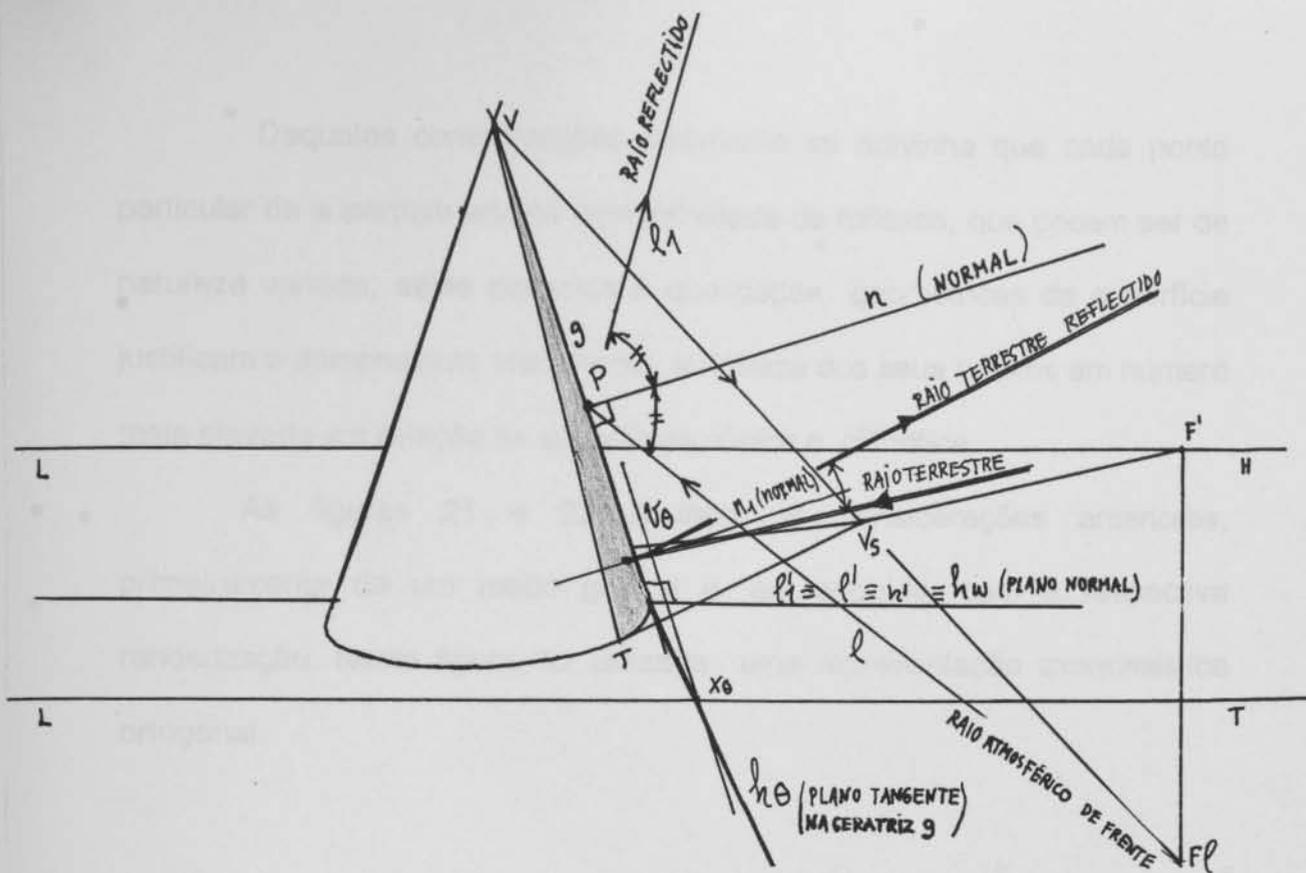


Fig. 19 - Efeito da luz reflectida numa superfície cónica.

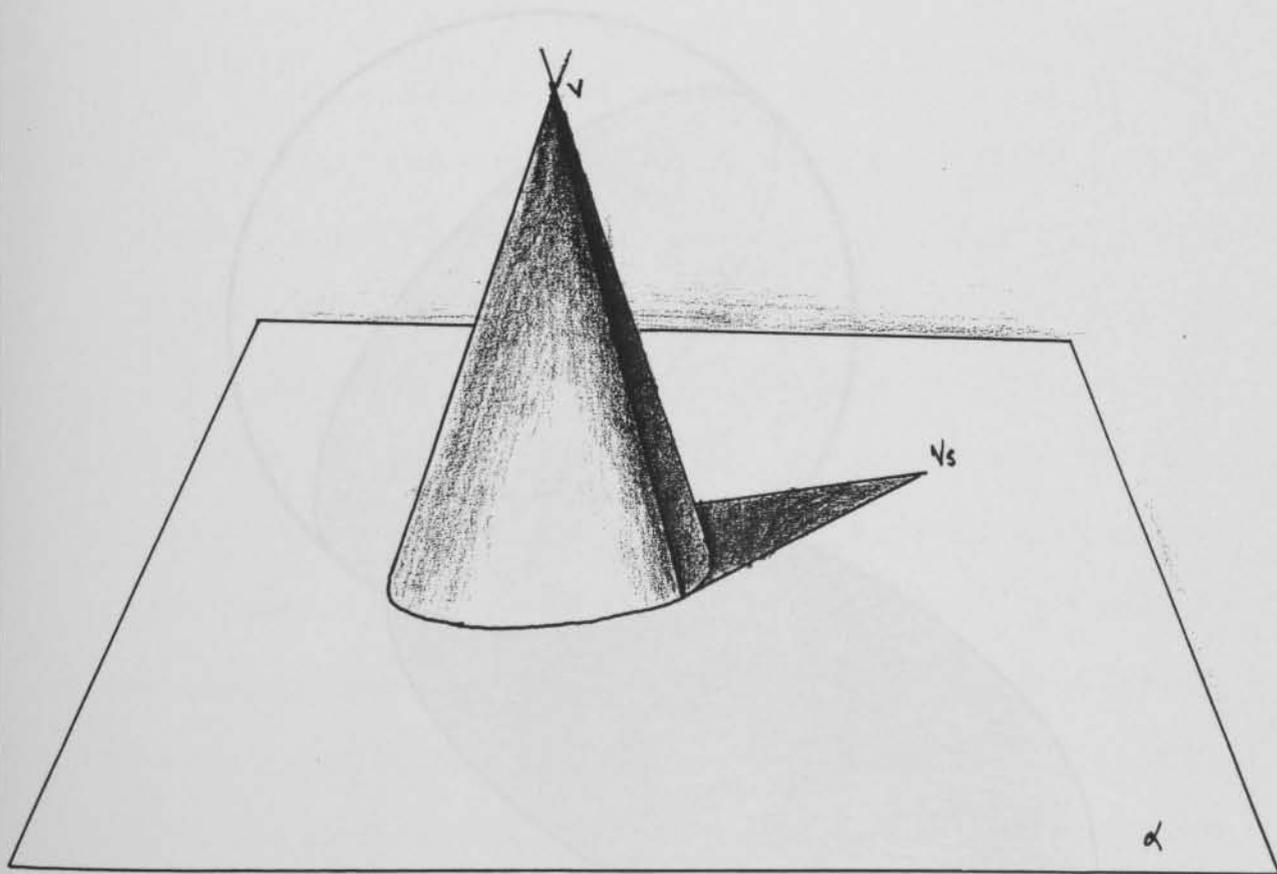


Fig. 20 - Efeito da luz reflectida numa superfície cónica, com a respectiva renderização.

Daquelas considerações facilmente se adivinha que cada ponto particular da superfície admite uma infinidade de reflexos, que podem ser de natureza variada; estes aspectos e qualidades geométricas da superfície justificam e demonstram, claramente, a riqueza dos seus valores em número mais elevado em relação às superfícies cónica e cilíndrica.

As figuras 21 e 22 ilustram as considerações anteriores, primeiramente de um modo gráfico e, em seguida, com a respectiva renderização. Nesta figura, foi utilizada uma representação axonométrica ortogonal.

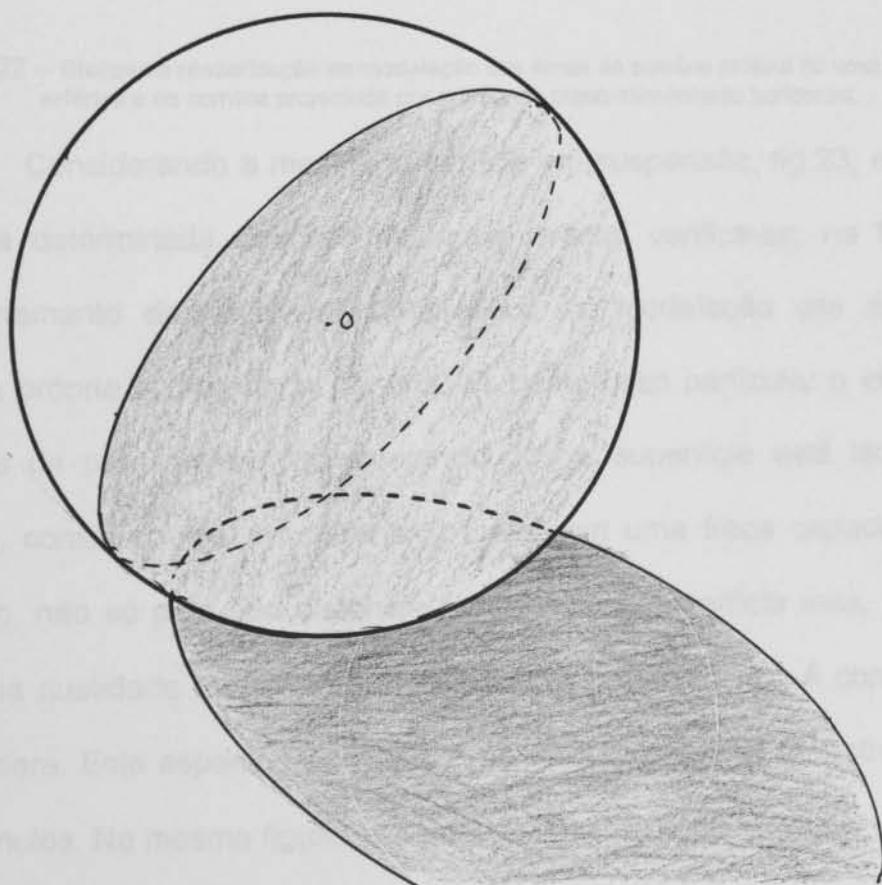


Fig.21 – Efeitos da iluminação da luz directa na modelação das áreas de sombra própria de uma superfície esférica e da sombra projectada por aquela no plano coordenado horizontal.

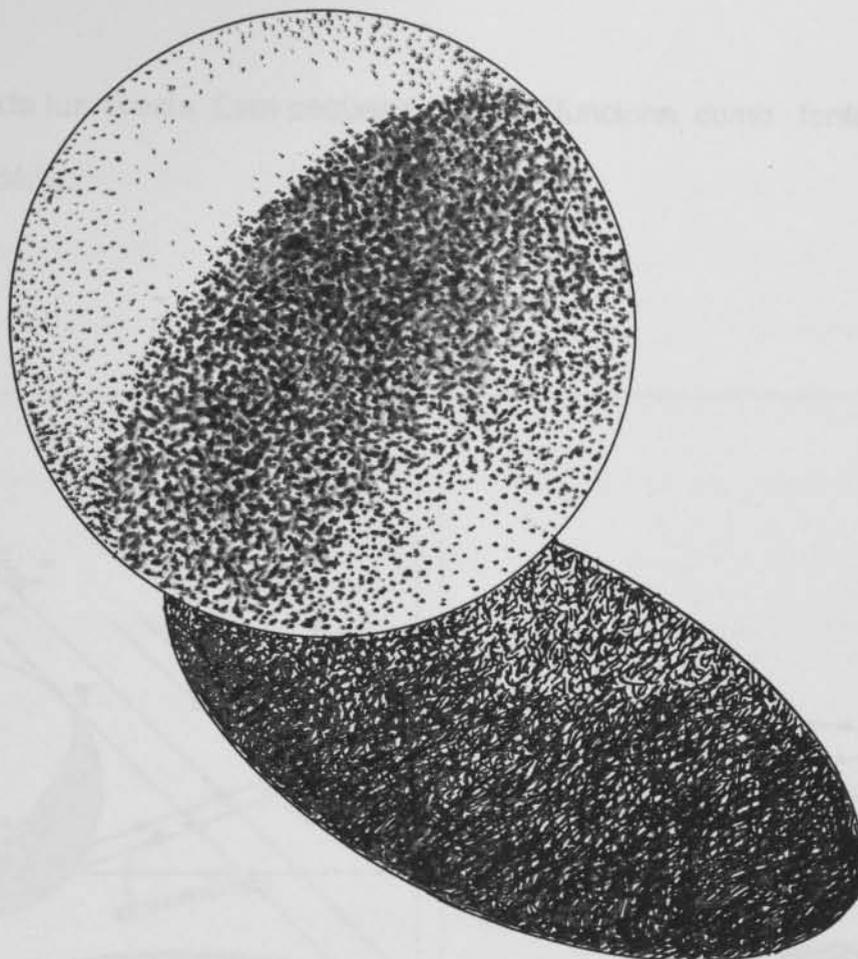


Fig.22 – Efeitos da renderização na modelação das áreas de sombra própria de uma superfície esférica e da sombra projectada por aquela no plano coordenado horizontal.

Considerando a mesma superfície em suspensão, fig.23, e a partir de uma determinada direcção luminosa directa, verifica-se, na figura, o comportamento dos reflexos atmosféricos na modelação das áreas de sombra própria e projectada. Ignorou-se neste caso particular o efeito dos reflexos de proximidade (considerando que a superfície está isolada de outras), considerou-se, no entanto, o solo com uma fraca capacidade de reflexão, não só pela sua distancia em relação à superfície mas, também, pela sua qualidade cromática que neste caso particular não é considerada muito clara. Este aspecto faz com que os efeitos dos raios terrestres sejam quase nulos. Na mesma figura, considerou-se, para o efeito, outra superfície esférica mais pequena que representa uma dessa gotas ou grãos de poeira, que condicionam a direcção dos raios atmosféricos, a partir de uma

determinada luz directa. Esta pequena partícula funciona como fonte de luz secundária.

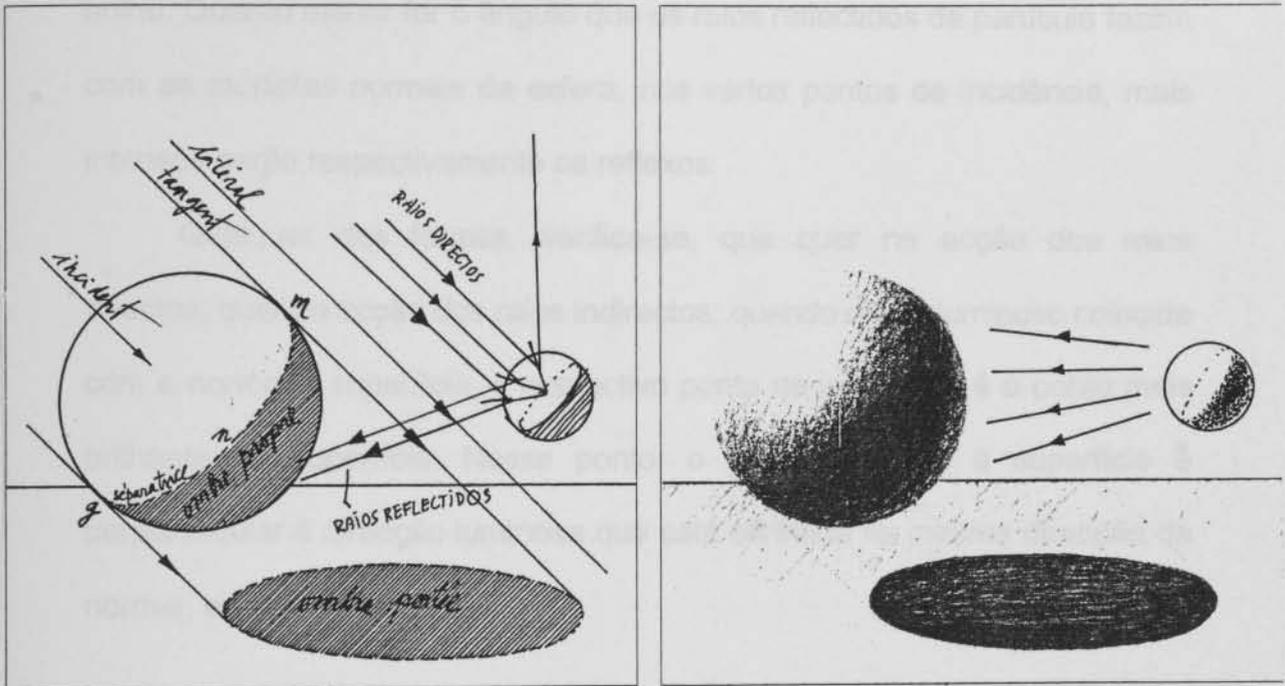


Fig.23 – Efeitos dos raios indirectos numa superfície esférica.

Observando a mesma fig.23, verificamos que as áreas de luz e de sombra das superfícies são modeladas pelos reflexos atmosféricos. Se tivermos em conta que a superfície está envolvida por várias partículas, que formam a atmosfera, como a pequena esfera que está a seu lado, facilmente se adivinham os efeitos, que neste caso particular a pequena esfera produz na superfície. Esta pequena esfera (e todas as restantes que formam a camada atmosférica) ao receber luz directa e difusa de todas as direcções e sentidos, devolve-a, novamente, por reflexão, não só para a atmosfera mas, também, para a superfície considerada, justificando dessa forma que, quer as zonas de luz, quer as zonas de sombra, apresentem diferentes brilhos

nos infinitos pontos que lhe pertencem. Ao olharmos as pequenas setas, que representam os raios reflectidos de uma pequena partícula da atmosfera, facilmente verificamos quais são os mais intensos, ou seja, aqueles que atingem os pontos da superfície esférica que apresentam mais brilho. Quanto menor for o ângulo que os raios reflectidos da partícula fazem com as múltiplas normais da esfera, nos vários pontos de incidência, mais intensos serão respectivamente os reflexos.

Qualquer das formas, verifica-se, que quer na acção dos raios directos, quer na acção dos raios indirectos, quando o raio luminoso coincide com a normal à superfície, o respectivo ponto de incidência é o ponto mais brilhante da superfície. Nesse ponto, o plano tangente à superfície é perpendicular à direcção luminosa que está alinhada na mesma direcção da normal, estas, são colineares.

A Luz, como se sabe, é também responsável pela conservação ou pelo eventual estado precário do espólio artístico. O estado físico das obras de Arte depende, entre outros factores, da menor ou maior quantidade de luz recebida, neste sentido, é oportuno citar Carlos da Silva Pinheiro, que diz: «...e ainda da salubridade ou insalubridade das zonas de sombra projectada pelos mesmos, ou uns sobre outros, ou sobre o próprio solo». ⁵³ Tendo em conta aquelas considerações podemos verificar que nos Museus e nas Galerias d'Arte, por vezes, torna-se vantajoso calcular a iluminação ou os níveis de iluminância de certas superfícies, de porções, de regiões, ou de pontos pertencentes a determinadas superfícies. Daquela forma, poderá conservar-se preventivamente a obra de Arte.

⁵³ Carlos da Silva Pinheiro, *Sombras e Pontos Brilhantes do Parabolóide Hiperbólico e do Hipérbolóide Empenado Escaleno*, Lisboa, 1965, pág.5, 2ºparágrafo.

Pelo que se disse no parágrafo anterior, importa referir o seguinte principio enunciado por J.J.Pillet, que diz: "A *iluminação total de uma superfície plana é a quantidade de luz recebida por esta superfície.*"⁵⁴ e considerando que as superfícies do segundo grau não são planas, prossegue o autor que acrescenta o seguinte: "A *iluminação unitária será a quantidade de luz recebida por unidade de superfície, por milímetro quadrado, por exemplo.*"⁵⁵

A iluminação unitária de uma superfície é determinada pelo **teorema da iluminação** que diz: "A *iluminação unitária de um elemento da superfície é proporcional ao cosseno do ângulo de incidência dos raios luminosos.*"⁵⁶

A fig.24 ilustra graficamente o teorema da iluminação.⁵⁷ Considerou-se para o efeito, o prisma [1234] de secção recta quadrângular [p]. Este prisma constitui a envolvente dos raios luminosos e é, por esta razão, uma superfície luz sombra, cujas geratrizes são os próprios raios luminosos. Estes raios, no seu conjunto, estão limitados em quantidade. Consideremos esta quantidade como sendo Q. Em seguida, considerou-se um primeiro plano α , perpendicular aos raios luminosos e que receberá uma quantidade de luz Q.

Considerando [p] como sendo a secção recta do prisma, verifica-se, que a iluminação unitária do plano α , designada por L, será dada pela fórmula:

$$L = Q : [p].$$

Pela fórmula referida deduzimos, então, que qualquer outro plano que

⁵⁴ J.J.Pillet, *Op.cit.*, pág.49, 4º e 5º parágrafos.

⁵⁵ *Idem*, pág. 49, 5º parágrafo.

⁵⁶ *Idem*, pág. 49, 6º parágrafo.

⁵⁷ Acerca deste teorema, vide .J.J.Pillet, *Op.cit.*, pp. 48-49 .

faça uma determinada inclinação com o plano anterior α (que produz a secção [p]), será intersectado pelo mesmo prisma segundo outra secção, cuja área se determina pela fórmula:

$$[p]:\cos \alpha.$$

Pelo que foi esclarecido, verifica-se, também, que a quantidade de luz recebida será sempre aquela a que corresponde o valor Q e a iluminação unitária L1 será dada pela fórmula:

$$L1 = Q \cdot \cos\alpha:[p] \text{ ou } L1 = L \cdot \cos\alpha$$

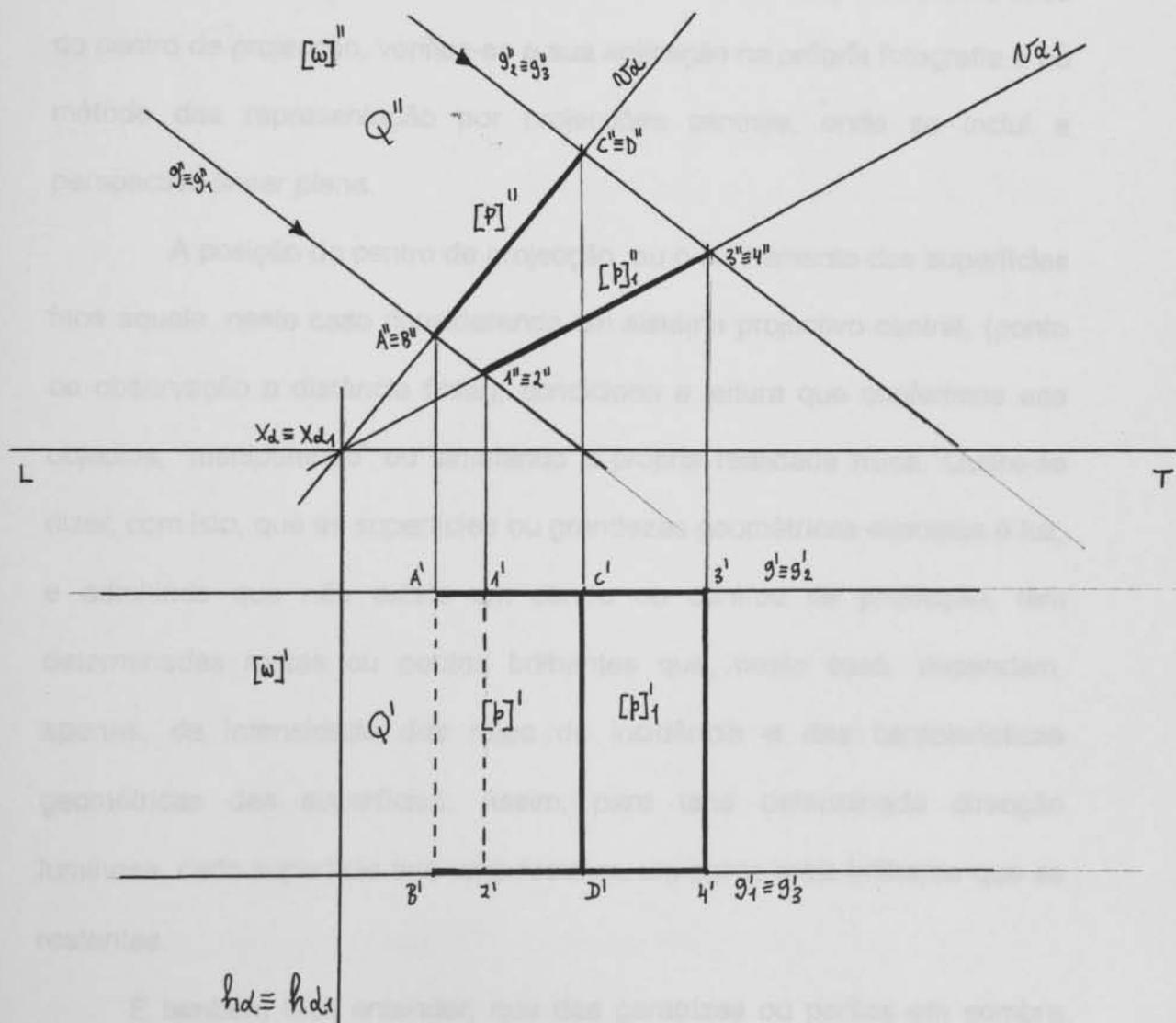


Fig.24 – Teorema da iluminação segundo Jean Jules Pillet.

Existe outro aspecto curioso que importa referir e que condiciona a questão dos brilhos existentes nas superfícies e que são indubitavelmente, entre outros factores, e para além daqueles que já foram considerados, a **posição do ponto de vista – centro de projecção**.

Assim, os efeitos da iluminação nas superfícies não dependem, apenas, da posição das fontes luminosas e das características geométricas daquelas mas, também, da posição do centro de projecção. Os pontos e rectas brilhantes poderão ser conjugados de uma determinada direcção, de projectantes por exemplo, ou de determinados pontos que, também, poderão caracterizar e alterar quaisquer brilhos de determinadas superfícies. No caso do centro de projecção, verifica-se a sua aplicação na própria fotografia e no método das representação por projecções centrais, onde se inclui a perspectiva linear plana.

A posição do centro de projecção, ou o alinhamento das superfícies face aquele, neste caso considerando um sistema projectivo central, (ponto de observação a distância finita), condiciona a leitura que conferimos aos objectos, “manipulando” ou simulando a própria realidade física. Quere-se dizer, com isto, que as superfícies ou grandezas geométricas expostas à luz, e admitindo que não existe um centro ou centros de projecção, têm determinadas rectas ou pontos brilhantes que, neste caso, dependem, apenas, da intensidade dos raios de incidência e das características geométricas das superfícies. Assim, para uma determinada direcção luminosa, cada superfície tem uma recta ou um ponto mais brilhante que as restantes.

É também fácil entender, que das geratrizes ou pontos em sombra própria, existirão algumas ou alguns mais brilhantes que outras ou outros.

Nestes pontos correspondem reflexos mais fortes, como já referimos anteriormente.

Partindo do princípio, que se entrou em linha de conta com um ponto de vista ou centro de projecção, ou com uma determinada direcção, de projectantes, por exemplo, verifica-se, que aquela realidade descrita anteriormente irá ser alterada. Deste modo, as rectas ou os pontos mais brilhantes de uma superfície já não parecem ser aqueles referidos (e que na realidade são) mas outros, **conjugados de um ponto ou de uma determinada direcção qualquer**, que se determinam com regras muito simples, como vamos verificar nas figuras que se seguem.

As figs. 25 e 26 representam numa representação por dupla projecção ortogonal, a mesma superfície cónica circular e uma direcção de luz directa. Na primeira ilustração ignorou-se a direcção das projectantes, considerando apenas a realidade física; na segunda ilustração, das duas variantes possíveis de direcção de projectantes, considerou-se a direcção projectante vertical ou de topo.

Assim, na fig.25, considerou-se uma superfície cónica circular, com a directriz [d] assente no plano horizontal, e uma direcção luminosa, l, dada pelas suas projecções. Esta superfície é como sabemos, de simples curvatura, o que significa que, e ao contrário da superfície esférica, um plano tangente num ponto, é tangente ao longo de uma geratriz.

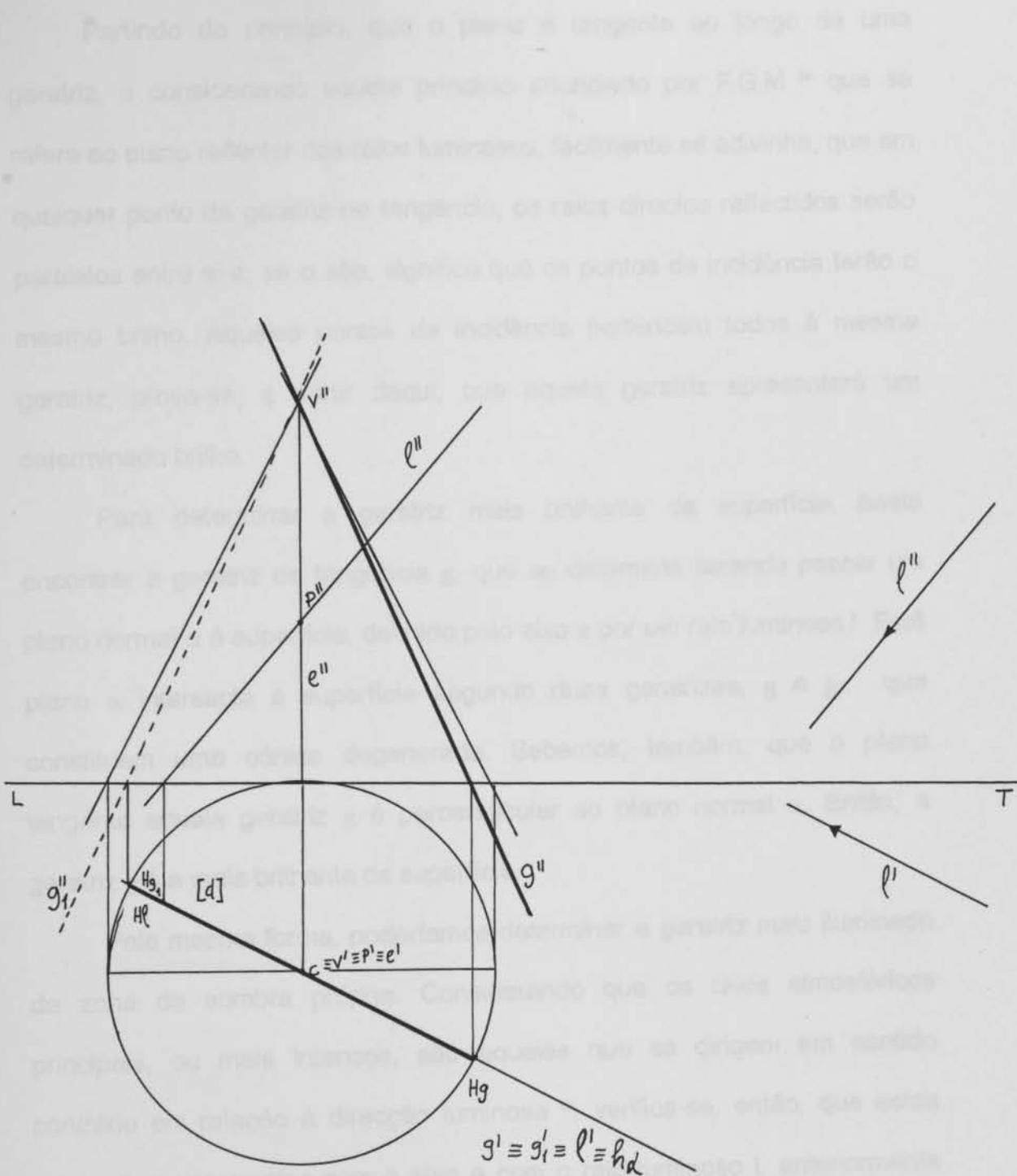


Fig.25- Determinação da recta brilhante de uma superfície cónica conjugada, apenas, do raio luminoso.

Partindo do princípio, que o plano é tangente ao longo de uma geratriz, e considerando aquele princípio enunciado por F.G.M ⁵⁸ que se refere ao plano reflector dos raios luminosos, facilmente se adivinha, que em qualquer ponto da geratriz de tangência, os raios directos reflectidos serão paralelos entre si e, se o são, significa que os pontos de incidência terão o mesmo brilho. Aqueles pontos de incidência pertencem todos à mesma geratriz; prova-se, a partir daqui, que aquela geratriz apresentará um determinado brilho.

Para determinar a geratriz mais brilhante da superfície, basta encontrar a geratriz de tangência g , que se determina fazendo passar um plano normal α à superfície, definido pelo eixo e por um raio luminoso l . Este plano α intersecta a superfície segundo duas geratrizes, g e g_1 , que constituem uma cónica degenerada. Sabemos, também, que o plano tangente aquela geratriz g é perpendicular ao plano normal α . Então, a geratriz g é a mais brilhante da superfície.

Pela mesma forma, poderíamos determinar a geratriz mais iluminada da zona de sombra própria. Considerando que os raios atmosféricos principais, ou mais intensos, são aqueles que se dirigem em sentido contrário em relação à direcção luminosa ⁵⁹, verifica-se, então, que estes raios são concorrentes com o eixo e com o raio luminoso l , anteriormente referido, significa, também, que coexistem no mesmo plano normal à superfície. Por aqui facilmente se demonstra que a geratriz procurada será a g_1 , mais brilhante da zona de sombra própria.

Considerando, agora, a mesma superfície representada na fig.26, e a direcção projectante vertical (de topo), verifica-se que a geratriz mais

⁵⁸ Acerca deste princípio, vide, no presente ensaio, pp.73-74.

⁵⁹ Acerca do raio atmosférico principal, vide, no presente ensaio, pp.57- 68.

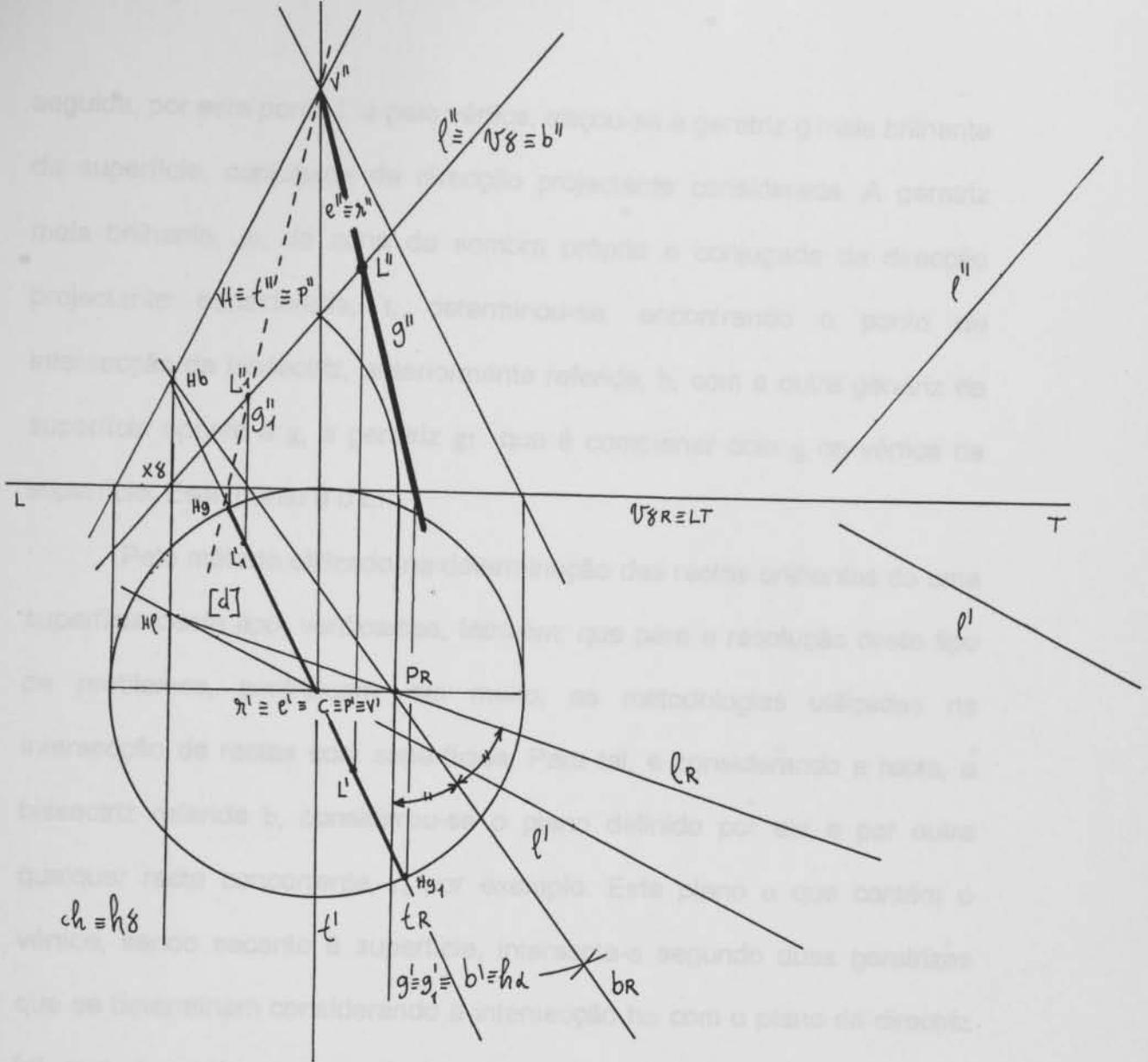


Fig.26 - Determinação da recta brilhante de uma superfície cónica, conjugada do raio luminoso e da direcção projectante vertical de topo.

brilhante é conjugada daquela direcção, para determiná-la, procedeu-se do seguinte modo: primeiro, considerou-se um ponto do eixo (que poderia ser o vértice), nesse ponto conduziram-se duas rectas que são, respectivamente, o raio luminoso l e uma recta de topo t ; a bissectriz destas duas rectas intersecta a superfície num ponto L , onde passa a geratriz mais brilhante, para determiná-la, primeiro considerou-se o plano δ definido pelas rectas t e l e, em seguida, rebateu-se o plano δ onde se traçou a bissectriz b . Após contra rebater o plano δ , com a respectiva bissectriz b , determinou-se a intersecção daquela com a superfície, onde resultam os pontos L e L_1 . De

seguida, por este ponto L e pelo vértice, traçou-se a geratriz g mais brilhante da superfície, conjugada da direcção projectante considerada. A geratriz mais brilhante, g_1 , da zona de sombra própria e conjugada da direcção projectante considerada, t , determinou-se, encontrando o ponto de intersecção da bissectriz, anteriormente referida, b , com a outra geratriz da superfície oposta a g , a geratriz g_1 que é complanar com g no vértice da superfície. Esse ponto é o L_1 .

Pelo método utilizado na determinação das rectas brilhantes de uma superfície deste tipo, verificamos, também, que para a resolução deste tipo de problemas, contribuem, em muito, as metodologias utilizadas na intersecção de rectas com superfícies. Para tal, e considerando a recta, a bissectriz referida b , considerou-se o plano definido por ela e por outra qualquer recta concorrente, r , por exemplo. Este plano α que contém o vértice, sendo secante à superfície, intersecta-a segundo duas geratrizes que se determinam considerando a intersecção h_α com o plano da directriz $[d]$ que é, neste caso particular, o plano horizontal de projecção. h_α intersecta $[d]$ em dois pontos, 1 e 2, a que correspondem as geratrizes mais brilhantes das zonas de luz e de sombra, g e g_1 , que passam respectivamente nos pontos L e L_1 .

A superfície esférica sendo uma superfície de dupla curvatura não apresenta rectas ou geratrizes mais ou menos brilhantes, antes, apresenta, pontos mais e menos brilhantes; não nos esqueçamos que um plano tangente á superfície esférica é apenas tangente num ponto, e não numa infinidade deles como acontece com as superfícies de simples curvatura, onde se enquadram a superfície cónica e cilíndrica.

Os métodos necessários à determinação dos pontos mais brilhantes

da superfície esférica, são em tudo semelhantes àquele utilizado para a superfície cónica.

Exemplifiquemos agora com uma superfície esférica apresentada nas figuras 27 e 28 numa representação axonométrica-isométrica ortogonal e situada no primeiro octante. Ignorou-se, primeiramente, a direcção das projectantes perpendiculares ao plano axonométrico, ou seja o ponto mais brilhante é apenas conjugado da direcção luminosa, facto representado na fig.27. Na fig.28 o ponto mais brilhante é conjugado não só, da direcção luminosa mas, também da direcção das projectantes principais, estas, são perpendiculares ao plano axonométrico.

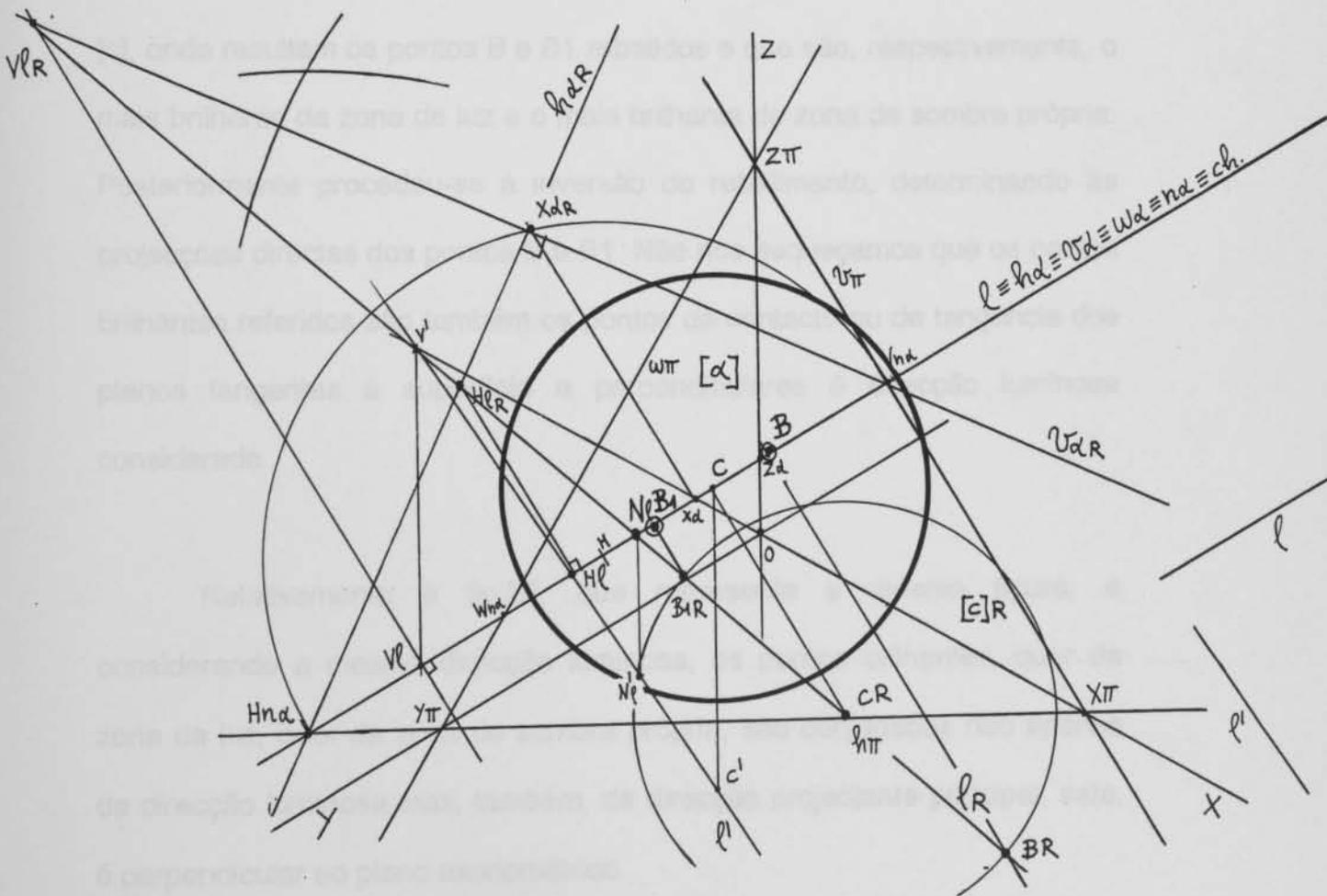


Fig.27 - Determinação do ponto brilhante de uma superfície esférica conjugado, apenas, do raios luminosos

Em relação à fig.27, os pontos mais brilhantes da zona de luz e da zona de sombra própria, determinam-se, fazendo passar pelo centro da superfície um raio luminoso l ; este raio luminoso intersecta a superfície segundo dois pontos, B e $B1$, que se determinam com o raciocínio semelhante ao utilizado para a superfície cónica, anteriormente referida. Para a determinação dos pontos, B e $B1$, considerou-se um plano α projectante passando pelo raio luminoso. Este plano α , que contém o centro da superfície esférica, intersecta-a segundo um círculo máximo-meridiano, cujo raio é o da própria superfície. Rebateu-se o plano, transportando consigo o respectivo raio luminoso e, em rebatimento, determinam-se os pontos de intersecção do raio luminoso com aquele meridiano-cónica circular $[c]$, onde resultam os pontos B e $B1$ rebatidos e que são, respectivamente, o mais brilhante da zona de luz e o mais brilhante da zona de sombra própria. Posteriormente procedeu-se à inversão do rebatimento, determinando as projecções directas dos pontos B e $B1$. Não nos esqueçamos que os pontos brilhantes referidos são também os pontos de contacto ou de tangência dos planos tangentes à superfície e perpendiculares à direcção luminosa considerada.

Relativamente à fig.28, que representa a mesma figura, e considerando a mesma direcção luminosa, os pontos brilhantes, quer da zona de luz, quer da zona de sombra própria, são conjugados não apenas da direcção luminosa mas, também, da direcção projectante principal, esta, é perpendicular ao plano axonométrico.

Para a determinação dos pontos brilhantes considerou-se a mesma direcção luminosa e a recta perpendicular ao plano axonométrico, p , que

passa no centro da esfera, ou seja a direcção projectante principal. As duas rectas, raio luminoso l e projectante p , definem o plano δ que intersecta a superfície segundo o meridiano $[c]$ que contém o centro C . Assim, rebateram-se o plano δ e as duas rectas, particularmente para o plano horizontal de projecção. Após o rebatimento, de δ e das rectas l e p , considerou-se a bissetriz b que vai intersectar o meridiano $[c]$ nos pontos A e A_1 , respectivamente, o mais brilhante da zona de luz e o mais brilhante da zona de sombra própria.

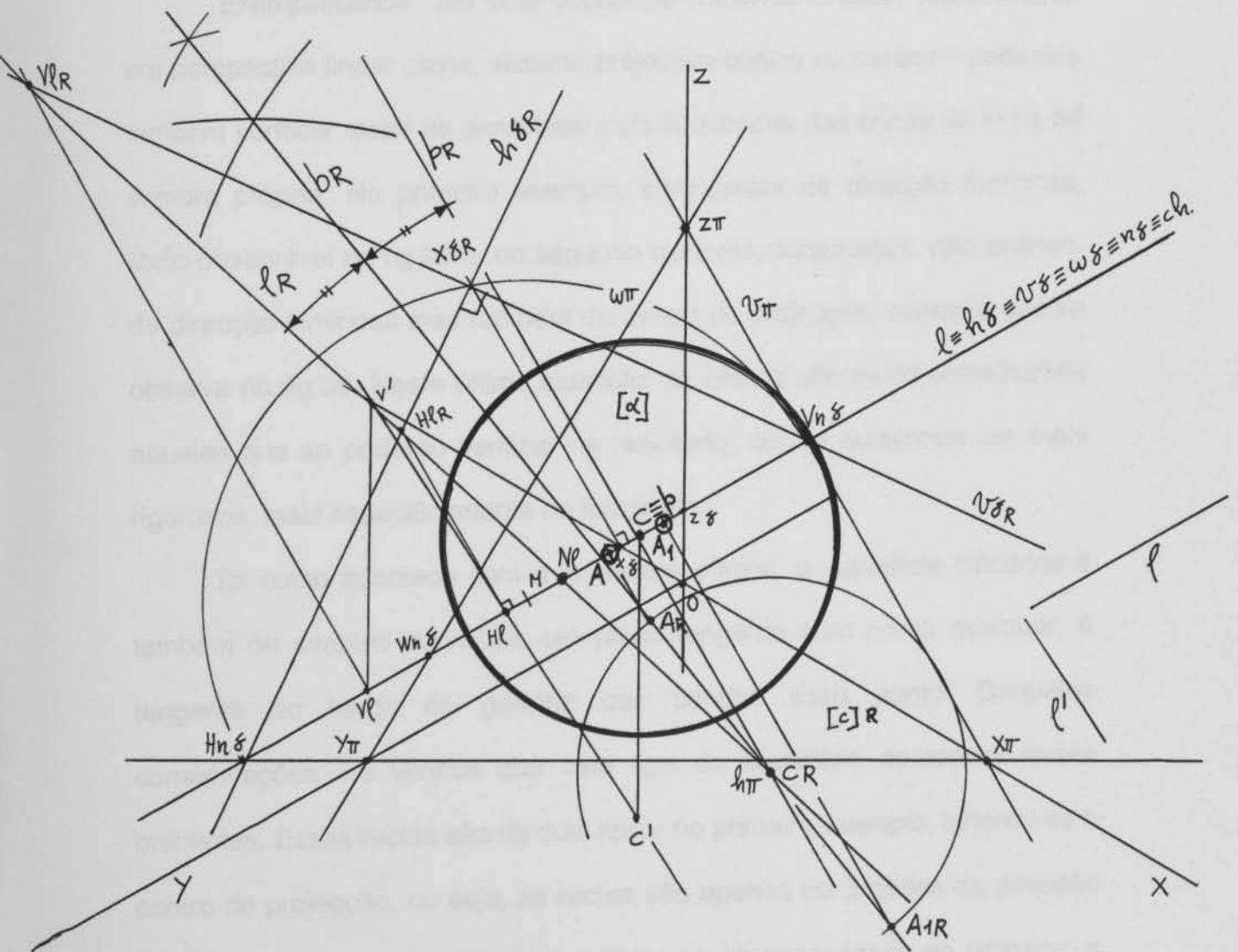


Fig.28 - Determinação do ponto brilhante de uma superfície esférica, conjugada dos raios luminosos e da direcção principal projectante.

Estas particularidades da superfície esférica, designadamente dos seus pontos brilhantes, podem-se verificar na nossa realidade circundante, quando observamos formas esféricas polidas como são os globos de candeeiros, entre outros exemplos. Do mesmo modo, as superfícies cónicas também representam as já referidas rectas brilhantes. Estes aspectos são de ter em conta no desenho de formas tridimensionais geométricas, conhecendo os métodos referidos, o leitor poderá representar e compreender com eficácia as formas tridimensionais.

Exemplificando com uma superfície cilíndrica circular, representada em perspectiva linear plana, sistema projectivo cónico ou central ⁶⁰ podemos também verificar quais as geratrizes mais iluminadas das zonas de luz e de sombra própria. No primeiro exemplo, conjugadas da direcção luminosa, facto observável na fig.29 e, no segundo exemplo, conjugadas, não apenas, da direcção luminosa mas também do centro de projecção, exemplo que se observa na fig.30. Neste último exemplo, os efeitos são muito semelhantes àqueles que se poderão verificar na realidade, ou, se quisermos ser mais rigorosos, mais especificamente na fotografia.

Tal como acontece com a superfície cónica, a superfície cilíndrica é também de simples curvatura: um plano tangente num ponto qualquer, é tangente ao longo da geratriz que contém esse ponto. Daquelas considerações, se verifica que este tipo de superfície apresenta rectas brilhantes. Essas rectas são de dois tipos: no primeiro exemplo, ignorou-se o centro de projecção, ou seja, as rectas são apenas conjugadas da direcção luminosa. No segundo exemplo, verificou-se uma simulação do primeiro; a

⁶⁰ É necessário distinguir perspectiva linear plana de "perspectiva cónica linear", designação erradamente divulgada em muitos autores. Este equívoco entre métodos de representação e sistemas de projecção, que persiste ainda hoje, foi esclarecido e desfeito, justamente, pelo Professor Aux.da Faculdade de Belas Artes da Universidade de Lisboa, Arq. Ezequiel Nicolau, durante as aulas teóricas e reuniões com os assistentes.

partir do momento em que intervém um centro de projecção, as rectas brilhantes passam a ser conjugadas daquele, simulam, dessa forma, a realidade física, onde jogam apenas a direcção luminosa relacionada com as características geométricas da superfície.

Assim, e relativamente à fig.29, considerou-se a superfície pertencente aos espaços real e intermédio e tangente ao plano horizontal de projecção ou geometral. As bases circulares de raio 40 situam-se nos planos de frente δ e δ_1 . Considerou-se, para o efeito, uma direcção luminosa l , onde se determinou o respectivo ponto de fuga F_l . Conduzindo por um ponto qualquer do eixo, e , um raio luminoso l_1 , define-se o plano ω que intersecta a superfície segundo duas geratrizes, g e g_1 , estas são, respectivamente, a mais brilhante da zona de luz e a mais brilhante da zona de sombra própria. Para a determinação daquelas geratrizes, bastou determinar a intersecção

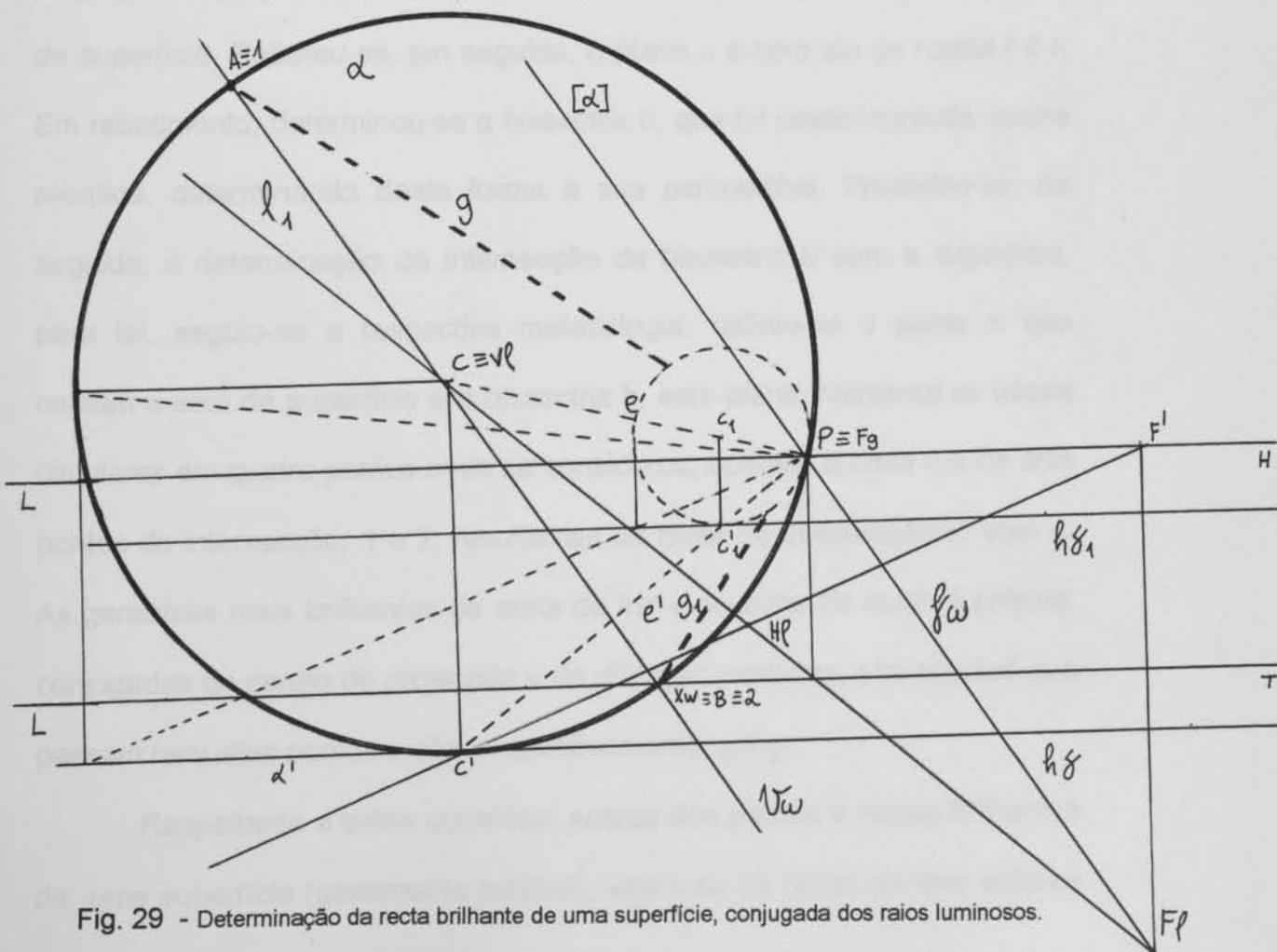


Fig. 29 - Determinação da recta brilhante de uma superfície, conjugada dos raios luminosos.

do plano ω com uma das bases circulares, α . Neste caso particular escolheu-se a base pertencente ao plano δ . O plano ω intersecta δ segundo uma recta de frente que intersecta a base circular em dois pontos, 1 e 2, onde passam, respectivamente, a geratriz mais brilhante da zona de luz, g , e a geratriz mais brilhante da zona de sombra própria, g_1 .

Na fig.30 está representada a mesma superfície. As rectas brilhantes, neste caso particular, são conjugadas não só da direcção luminosa mas, também, dos raios visuais que contêm o **centro de projecção** (ponto de vista) e que são complanares com o eixo da superfície. Para a determinação das rectas brilhantes considerou-se, em primeiro lugar, um plano α definido pelo raio luminoso, l , e por um raio visual, r , que contém o *centro de projecção*. Aqueles raios são concorrentes no ponto P pertencente ao eixo da superfície. Rebateu-se, em seguida, o plano α e com ele as rectas l e r . Em rebatimento, determinou-se a bissectriz b , que foi posteriormente contra rebatida, determinando desta forma a sua perspectiva. Procedeu-se, de seguida, à determinação da intersecção da bissectriz b com a superfície, para tal, seguiu-se a respectiva metodologia: definiu-se o plano δ que contém o eixo da superfície e a bissectriz b , este plano intersecta as bases circulares em quatro pontos onde se considerou, apenas, a base ω e os dois pontos de intersecção, 1 e 2, resultantes da recta de intersecção $i\delta$ com ω . As geratrizes mais brilhantes da zona de luz e da zona de sombra própria, conjugadas do *centro de projecção* e da *direcção luminosa*, são aquelas que passam naqueles pontos e são, respectivamente, g e g_1 .

Respeitante a estas questões, acerca dos pontos e rectas brilhantes de uma superfície (geralmente polidas), vejam-se as obras de dois autores

Antes de se determinarem, rigorosamente, com processos gráficos, as sombras das superfícies, convém distinguir sempre: **sombras espaciais** de **projeções de sombras**. No primeiro caso, os métodos de representação são secundários, ou seja não se consideram as projeções num determinado método de representação: as zonas de luz e sombra são reais e pertencem ao próprio objecto. Aqui, apenas se considera o sistema projectivo da emissão dos raios de luz, que pode ser cónico ou central, cilíndrico ou paralelo. No segundo caso consideram-se, as projeções do primeiro caso no, ou nos planos de projecção, dependendo dos métodos de representação eleitos pelo operador plástico. Podemos então dizer, que antes de se desenharem as sombras num determinado método de representação, convém distinguir estas duas situações: a *realidade espacial sentível* e a *realidade descritiva representativa*.

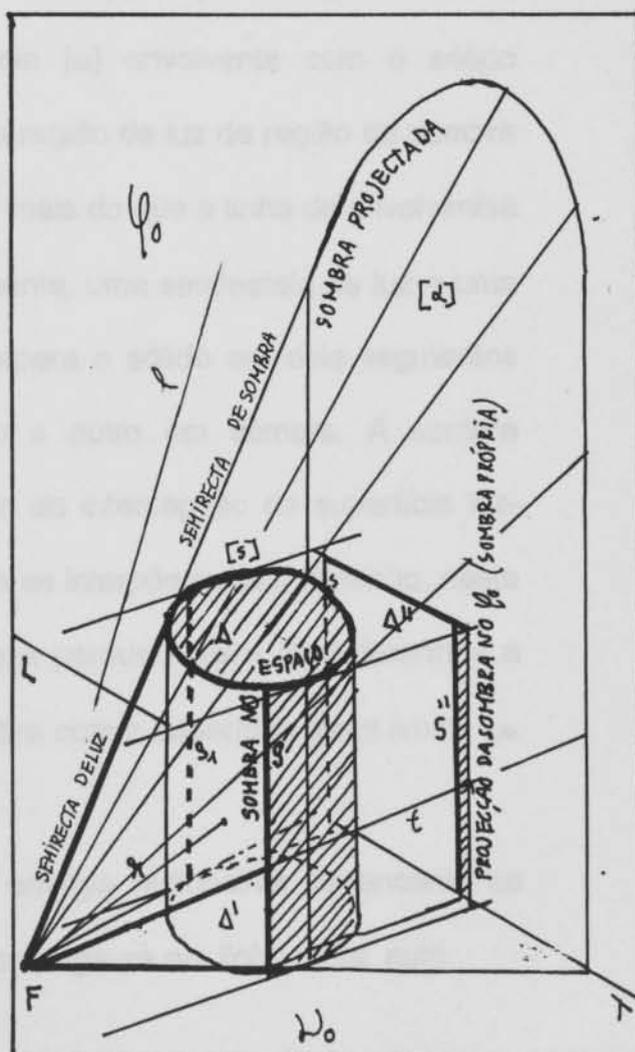
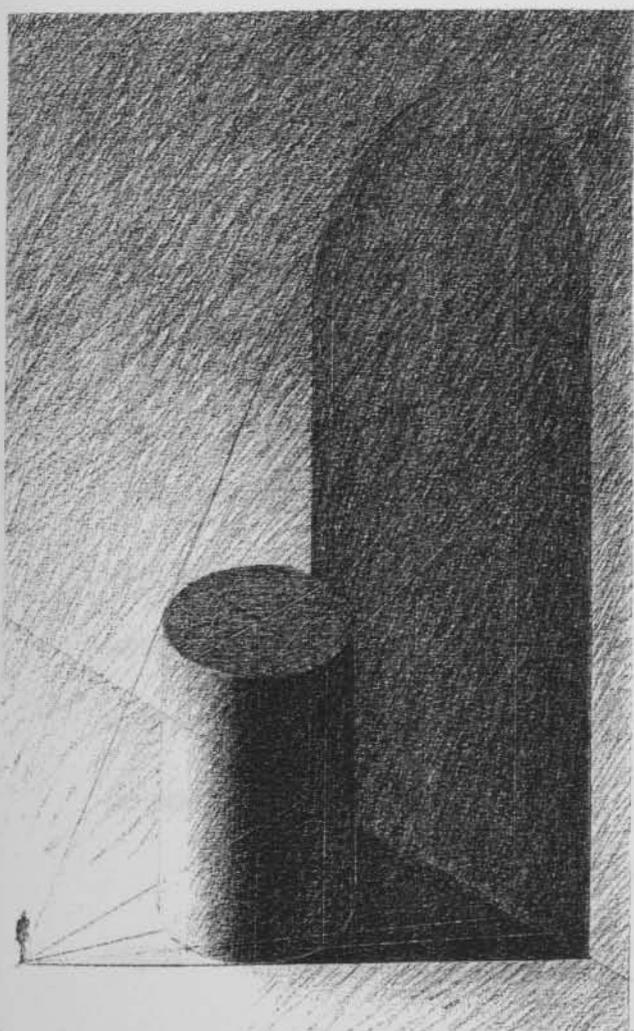
Tal como na questão dos contornos aparentes de qualquer superfície, onde se faz a distinção entre contorno aparente espacial, de projeções do contorno aparente, na teoria da luz e das sombras também se deverá fazer sempre aquela distinção referida. Se substituirmos a direcção das projectantes pelos raios luminosos, verificamos que a teoria das sombras está directamente relacionada com a teoria dos contornos aparentes. Existe sempre uma relação biunívoca entre objecto e sistema de iluminação ou de projecção de sombras. Não foi por acaso que Pillet se referiu à *teoria dos contornos aparentes*⁶² para explicar, apenas, um dos métodos possíveis para a determinação de sombras de superfícies.

As figs.31.a) e 31.b) ilustram estas considerações da importância da distinção entre sombras espaciais e projeções de sombras. Nas figuras podemos observar que as projeções das sombras nos planos de projecção

⁶² Jean Jules Pillet, *Op.cit.*, pág.4.

são distintas da sombra própria espacial que pertence ao próprio objecto. As projecções da sombra, nos planos de projecção, resultam das projecções da linha de separatriz naqueles planos.

A mesma figura é paradigmática naquilo que é essencial deter e fixar à priori na compreensão das sombras de uma superfície, serve deste modo, de exemplo para qualquer superfície. Assim verifica-se que a luz, natural ou artificial, respectivamente, com o foco no infinito, ou numa posição concreta, emana raios directos de três tipos: *laterais, incidentes ou tangentes*. Os raios laterais passam ao lado da superfície ou do sólido, não o atingem; é o exemplo de I. Os raios incidentes interceptam a superfície em pontos



Figs.31.a) e 31.b) - Sombras espaciais e projecções de sombras dado um foco de luz pontual.

iluminados, estes raios são **semirectas de luz** definidas pela direcção determinada e pelos pontos de incidência, é o exemplo de r . Os raios tangentes, exemplo de t , interceptam a superfície na linha de separatriz, mas prolongam-se no espaço ou encontram outra superfície geralmente plana. Estes últimos, os mais importantes, são responsáveis pela determinação das zonas de sombra própria e projectada (quando existe). Estes raios, tangentes na linha de separatriz, são, primeiramente, semirectas de luz e, ao encontrarem a superfície, passarão a ser consideradas como **semirectas de sombra**, definidas pelos pontos de incidência-tangência e pela direcção determinada.

Note-se, também, que a **estela de rectas**⁶³ que diverge do foco F , no seu conjunto, forma uma superfície $[\alpha]$ envolvente com o sólido considerado. Então, a linha que separa a região de luz da região de sombra do sólido Δ , linha de separatriz $[s]$, não é mais do que a linha de envolveria das duas superfícies. $[\alpha]$ é, simultaneamente, uma semiestela de luz e uma semiestela de sombra e a separatriz separa o sólido em dois segmentos distintos mas conjuntos, um iluminado e outro em sombra. A sombra projectada, neste caso particular, resulta da intercepção da superfície luz-sombra $[\alpha]$ com uma superfície limite que se interpõe no seu caminho; neste caso particular, como a luz é de natureza pontual, basta considerarmos a intersecção da superfície cónica luz-sombra com a superfície plana limite, φ_0 , do primeiro grau.

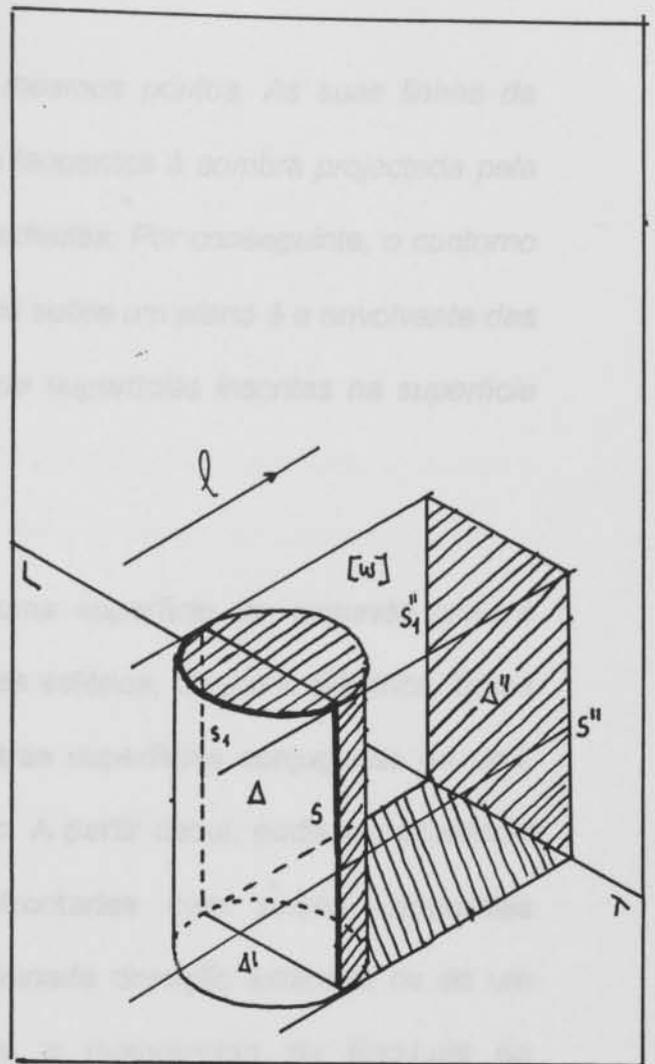
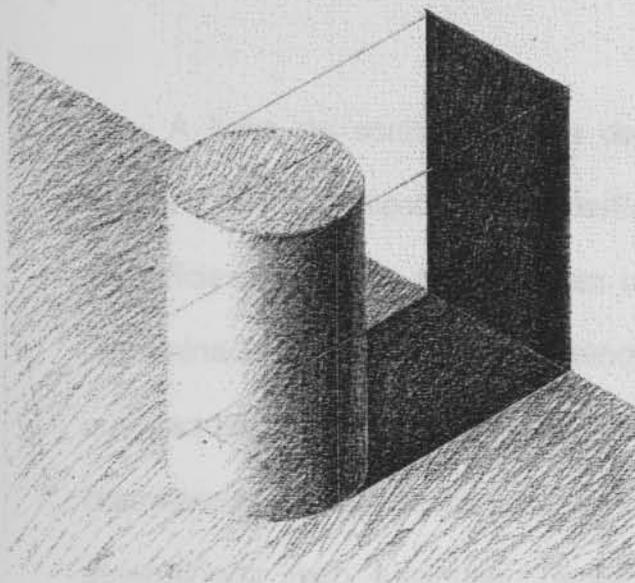
A luz visível, porção visível de energia radioactiva pertencente ao espectro electromagnético de radiação, *propaga-se em linha recta, num*

⁶³ Segundo refere o Eng. Luis de Lancastre na obra: *Um Curso de Geometria Descritiva com projecções cotadas*, ed. das folhas da A.E.I.S.T, Lisboa, 1957-58, pág.26: " Uma estela de rectas (ou de planos) é o conjunto de rectas ou planos do espaço, que passam pelo mesmo ponto (centro ou vértice da estela).

meio transparente e isotrópico, ou seja, não varia de direcção, a não ser que encontre determinados obstáculos, nesse caso, a luz propagar-se-ia num meio anisotrópico. Dando, como exemplo, a propagação da luz dentro de um cristal, verifica-se que a velocidade da mesma varia com a direcção: os cristais têm propriedades vectoriais descontínuas, o que modifica a direcção e sentido da propagação da luz. Em Geometria Descritiva a luz que produz sombras propaga-se em linha recta e considera-se sempre num meio homogénio, transparente e isotrópico, dirigindo-se sem sobressaltos.

Quando se considera a luz direccionada, foco luminoso a distância infinita, a metodologia é semelhante à utilizada nas figs.31.a) e 31.b), tal como se pode verificar nas figs. 32.a) e 32.b), que representa o mesmo sólido. Com uma luz deste tipo, a superfície luz-sombra $[\omega]$ prismática é envolvente ao sólido na linha de envolvimento ou linha de separatriz. A sombra projectada na superfície limite, φ_0 , resulta da intersecção do prisma de sombra com aquela superfície, φ_0 . O prisma de luz é envolvente ao sólido Δ na linha de separatriz, onde, a partir desta, se dirige posteriormente o prisma de sombra que é responsável pela sombra própria e projectada do sólido.

Não deixa de ser curioso a forma das sombras das figuras 31, a) e b), e 32, a) e b). Podemos verificar, pelas suas formas, que as áreas de sombras, quer das zonas de sombra própria, quer das zonas de sombra projectada, aumentam quando a luz é de natureza pontual.



Figs.32.a) e 32.b) - Sombras espaciais e projecções de sombras dada uma direcção luminosa.

As linhas de sombra de uma superfície assemelham-se às linhas de contorno aparente de uma superfície (facto já referido), se em vez de considerarmos as projectantes considerarmos os raios luminosos. Este facto foi enunciado por Charles Roubaudi na obra *Traité de Géométrie Descriptive*, citando o autor: "A sombra projectada sobre um plano por uma linha traçada sobre uma superfície, é tangente ao contorno da sombra projectada pela superfície sobre esse plano. Por conseguinte, o contorno da sombra projectada por uma superfície sobre um plano é a envolvente das sombras projectadas por um sistema de geratrizes da superfície.

As linhas de sombra própria de duas superfícies circunscritas

intersectam a curva de contacto nos mesmos pontos. As suas linhas de sombra projectada sobre um plano são tangentes à sombra projectada pela curva de contacto nos pontos correspondentes. Por conseguinte, o contorno da sombra projectada por uma superfície sobre um plano é a envolvente das sombras projectadas por uma família de superfícies inscritas na superfície dada.”⁶⁴

A linha de sombra própria de uma superfície do segundo grau é **sempre plana**, tal ocorre nas superfícies esférica, cónica e cilíndrica. Estas superfícies, expostas à luz, geram outras superfícies conjugadas de uma determinada direcção ou foco luminoso. A partir daqui, pode-se considerar que aquelas superfícies são confrontadas com outras, chamadas **diametraís**, conjugadas de uma determinada direcção luminosa ou de um determinado foco luminoso. Seguindo a metodologia do Eng. Luis de Lancastre ⁶⁵ que refere, como exemplo paralelo, a teoria dos contornos aparentes, na teoria das sombras o processo é semelhante. Ao substituir uma determinada direcção de projectantes por uma determinada direcção luminosa l e tendo em conta, que cordas de uma superfície são segmentos de recta que compreendem dois pontos de uma superfície, no caso particular da fig.33, um elipsóide Δ , verifica-se, sempre, que os meios das cordas paralelas a uma determinada direcção luminosa constituem, no seu conjunto, um lugar geométrico dos pontos igualmente afastados de uma determinada superfície, neste caso particular, do plano α , que constitui, por si só, a superfície diametral conjugada daquela direcção luminosa. Esta

⁶⁴ Charles Roubaudi, *Traité de Géométrie Descriptive*, Paris, ed. Masson et Courcier, 1961, 10ª edição, pág.158.

⁶⁵ Eng.º Luis M. H. de Lancastre, *Op.cit.*, pp.143-144.

superfície diametral α intersecta a superfície segundo a linha de separatriz [s] conjugada da direcção l. Os pontos da separatriz surgem, se considerarmos as cordas a deslocarem-se diminuindo progressivamente até que os seus extremos coincidam. Quando os extremos das cordas coincidem, significa que as rectas, raios luminosos, serão tangentes à superfície. A linha de tangência ou de concordância surge daquele modo e separa o sólido Δ em duas regiões distintas e simétricas, uma iluminada e outra em sombra. Nas quádricas do segundo grau, onde se incluem as superfícies seleccionadas para o presente ensaio, a forma da linha de separatriz existe, toda ela, num plano. No entanto, exceptuam-se os casos das superfícies cónicas e cilíndricas, que quando limitadas por bases ou faces, determinam sólidos. Nesses casos, a linha de separatriz compreende também porções das bases.

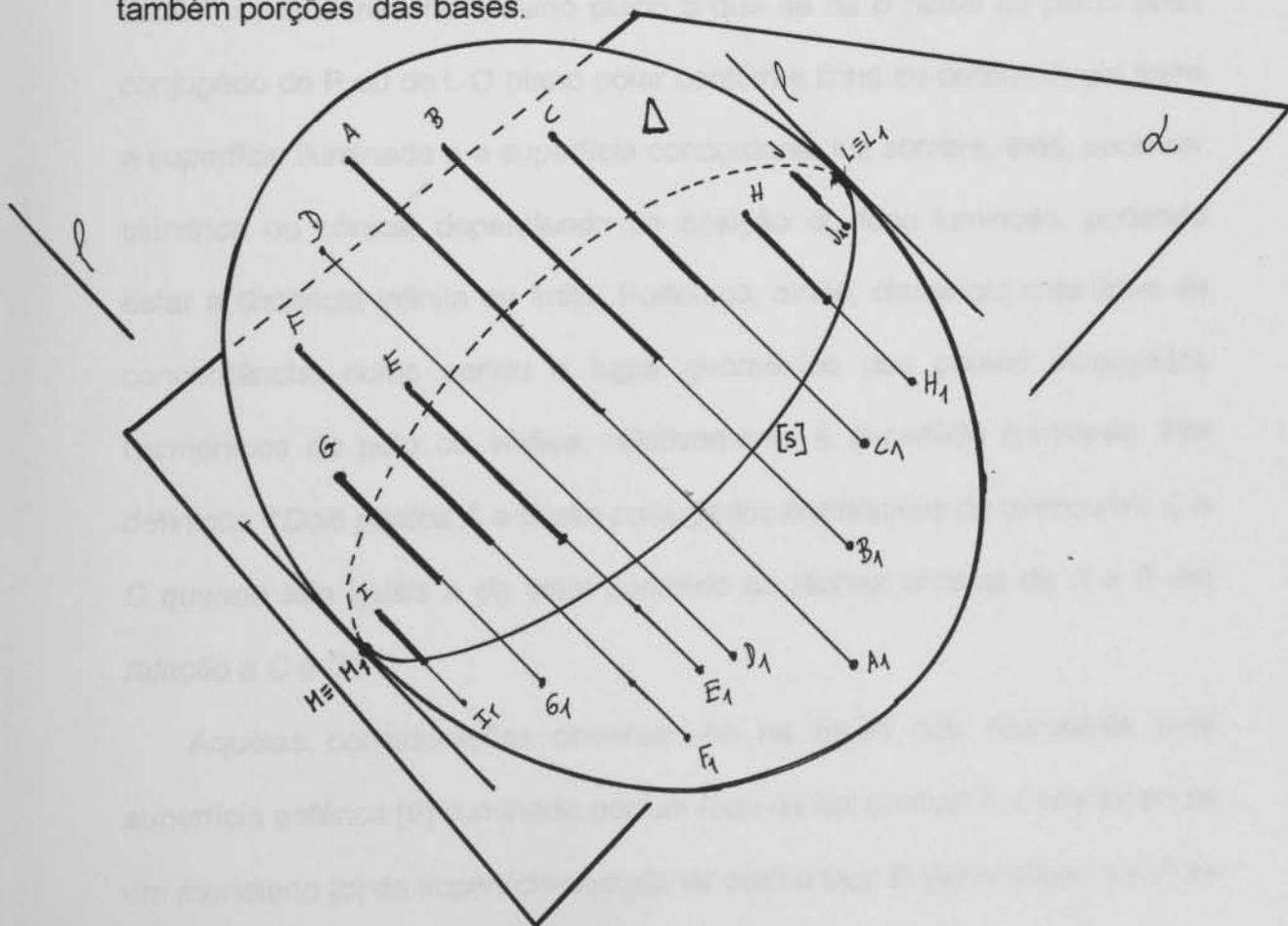


Fig.33 – Linha diametral de separatriz de um elipsóide de revolução.

No estudo das sombras intervêm relações de **polaridade**. A separatriz luz-sombra de um determinado sólido, ou superfície do segundo grau, existe num plano a que também se dá o nome de **plano polar** relativamente a um determinado foco ou a uma determinada direcção luminosa.

Na superfície esférica o plano polar é sempre normal à direcção de luz considerada, quando o foco luminoso se encontra no infinito, caso particular de uma determinada direcção luminosa. Quando o foco está a distância finita, o plano polar é sempre perpendicular ao eixo da superfície cónica luz-sombra, concordante com a superfície esférica e, por isso, constitui o lugar geométrico dos pontos conjugados do foco ou polo. Uma série de pontos de uma superfície, são conjugados de um ponto exterior P ou de uma direcção dada I, se existirem no mesmo plano a que se dá o nome de plano polar conjugado de P ou de I. O plano polar contém a linha de concordância entre a superfície iluminada e a superfície concordante luz sombra, esta, pode ser cilíndrica ou cónica, dependendo da posição do foco luminoso, podendo estar a distância infinita ou finita. Podemos, ainda, classificar esta linha de concordância, como sendo o lugar geométrico dos pontos conjugados harmónicos do polo ou vértice, relativamente á superfície iluminada. Por definição: "*Dois pontos A e B são conjugados harmónicos de outros dois C e D quando são iguais e de sinal contrário as razões simples de A e B em relação a C e D*".⁶⁶

Aquelas considerações observam-se na fig.34 que representa uma superfície esférica [θ] iluminada por um foco de luz pontual F. Considerou-se um meridiano [c] da superfície complanar com o foco F. Ao conduzir por F as

⁶⁶ José Manuel Patricio de Sousa Moutinho, *Perspectiva Cónica Linear*, Tese de dissertação de candidatura ao grau de Professor Agregado do 3º Grupo da Escola Superior de Belas Artes de Lisboa, 1991, pág. 326.

tangentes a este meridiano, t e t_1 , determinaram-se os seus pontos de contacto, respectivamente T e T_1 . Estes dois pontos de contacto determinam uma recta p que é polar em relação a F sendo, também, perpendicular ao eixo da superfície cónica concordante. Ao foco F corresponde sempre a recta p , sua polar, a relação destas é involutiva; segundo refere Fernando Izquierdo Asensi: "A correlação involutiva entre duas formas planas sobrepostas se chama polaridade plana, e ao conjunto de ambas as formas, sistema polar plano."⁶⁷

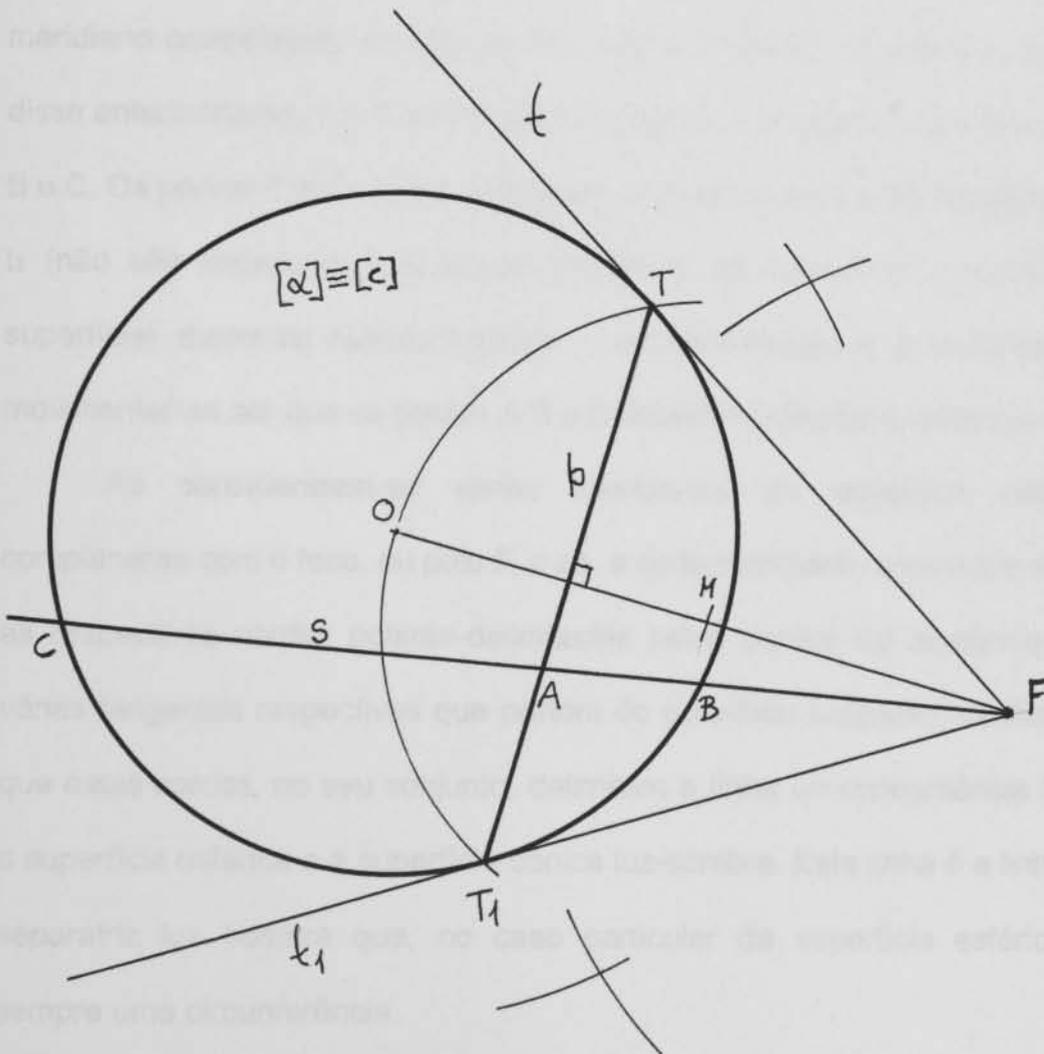


Fig.34 – Polo, recta e plano polar em relação a uma superfície esférica.

⁶⁷ Fernando Izquierdo Asensi, *Geometria Descriptiva Superior Y Aplicada*, Editorial Dossat, S.A. Madrid, 1975, Vide pág.96, 1º parágrafo.

Uma recta polar de uma cónica relativamente a um ponto exterior é o lugar geométrico dos pontos conjugados harmónicos e não harmónicos relativamente ao polo, ponto exterior. A mesma recta polar intersecta o meridiano [c] no segmento de recta TT1. Só os pontos pertencentes a esta corda da superfície, que é um segmento de recta, são conjugados harmónicos de todos os outros pertencentes ao meridiano e que estão alinhados no polo F. Os pares de pontos conjugados harmónicos são colineares entre si, para determiná-los, considerou-se na fig.34 uma secante arbitrária s que parte do polo-foco e intersecta a recta polar e o meridiano considerado em três pontos A,B e C. Tendo em conta o que se disse anteriormente, F e A são, respectivamente, conjugados harmónicos de B e C. Os pontos T e T1 como pertencem, respectivamente, às tangentes t e t1 (não são exteriores à qualquer meridiano da superfície e portanto à superfície) dizem-se autoconjugados – se considerarmos a secante s a movimentar-se até que os pontos A,B e C fiquem infinitamente próximos.⁶⁸

Ao considerarem-se vários meridianos da superfície esférica complanares com o foco, ou polo F, e se, a cada meridiano, considerarem-se as respectivas cordas polares-delimitadas pelos pontos de tangência das várias tangentes respectivas que partem do polo-foco luminoso, verifica-se, que estas cordas, no seu conjunto, delimitam a linha de concordância entre a superfície esférica e a superfície cónica luz-sombra. Esta linha é a linha de separatriz luz sombra que, no caso particular da superfície esférica, é sempre uma circunferência.

Ao considerar o polo, foco luminoso, a deslocar-se até ao infinito, a linha de concordância aumentará as suas dimensões e quando o polo se

⁶⁸ Fernando Izquierdo Asensi, *Op.cit.*, pág.98.

encontra no infinito (o foco fora substituído por uma direcção luminosa), o plano polar antes considerado adquire uma posição particular e divide a superfície em duas porções simétricas: as cordas polares, neste caso particular, adquirem um comprimento igual ao dos diâmetros da superfície esférica, por esta razão, se poderá chamar superfície diametral, ao plano que contém a linha de separatriz ou a linha de concordância com a superfície cilíndrica de luz, que substituiu a superfície cónica luz-sombra.

Quer nos casos em que o polo se encontra a distância finita, quer nos casos em que o polo se encontra a distância infinita, a linha conjugada que constitui a separatriz determina-se genericamente: fazendo passar uma superfície concordante luz-sombra com a superfície iluminada. Veja-se a fig.35.

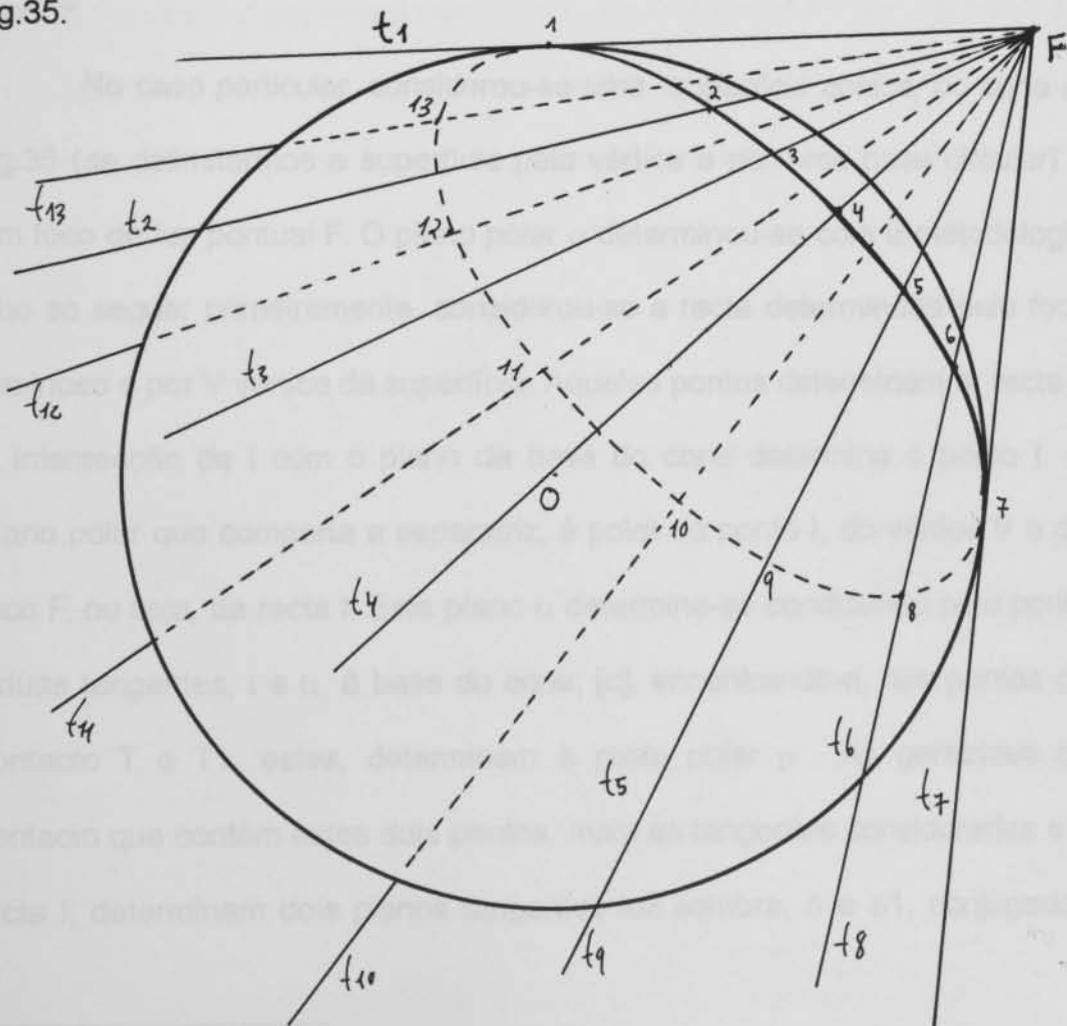


Fig.35 – Linha conjugada da separatriz relativamente a um polo, foco luminoso.

A superfície concordante, cónica ou cilíndrica, pode ser considerada como envolvente de uma infinidade de planos tangentes luz-sombra à superfície iluminada e que partem do foco-polo. Aos pontos de contacto desta infinidade de planos tangentes, correspondem uma infinidade de tangentes, cada uma respeitante a cada plano tangente. Estas tangentes encontram a superfície em pontos autoconjugados ou conjugados harmónicos infinitamente próximos.

Relativamente às superfícies cónica e cilíndrica, a separatriz luz-sombra existe também no plano polar conjugado de um determinado foco de luz pontual considerado a distância finita ou infinita. Este plano é também conhecido por plano diametral conjugado de uma determinada direcção ou foco.⁶⁹

No caso particular, considerou-se uma superfície cónica, ou cone Δ , fig.36 (se delimitarmos a superfície pelo vértice e por uma base circular) e um foco de luz pontual F. O plano polar α determinou-se com a metodologia que se segue: primeiramente, considerou-se a recta determinada pelo foco luminoso e por V vértice da superfície. Aqueles pontos determinam a recta I. A intersecção de I com o plano da base do cone determina o ponto I. O plano polar que comporta a separatriz, é polar do ponto I, do vértice V e do foco F, ou seja, da recta I. Este plano α determina-se conduzindo pelo ponto I duas tangentes, t e t₁, à base do cone, [c], encontrando-a, nos pontos de contacto T e T₁, estes, determinam a recta polar p. As geratrizes de contacto que contêm estes dois pontos, mais as tangentes consideradas e a recta I, determinam dois planos tangentes luz sombra, δ e δ_1 , conjugados

⁶⁹ Acerca deste assunto vide as seguintes obras: Fernando Izquierdo Asensi, *Op.cit.*, pág. 322. Charles Roubaudi, *Op.cit.*, pp.164 e 165.

do foco luminoso. As geratrizes de contacto, g e g_1 , determinam o plano polar α e a separatriz procurada.

Este plano α , diametral ou polar da recta l , intersecta a base considerada nos pontos já referidos, T e T_1 , que determinam um segmento de recta existente na recta polar p . Neste segmento de recta, que é uma corda do cone, existem pontos conjugados harmónicos de outros pertencentes à base da superfície. Da intersecção de $[c]$ e de p com qualquer secante s traçada a partir daquele ponto I , obtêm-se pares de pontos conjugados harmónicos. Deste modo, I e P são conjugados harmónicos de A e B . Pelas mesmas razões, o vértice V , os pontos I , A , P e B determinam um haz de quatro rectas. As rectas VI e VP são, respectivamente, conjugadas harmónicas das rectas VA e VB . Pelo que foi considerado para a superfície esférica verifica-se, também, que os pontos T e T_1 são autoconjugados, ao imaginar a secante considerada s a tender

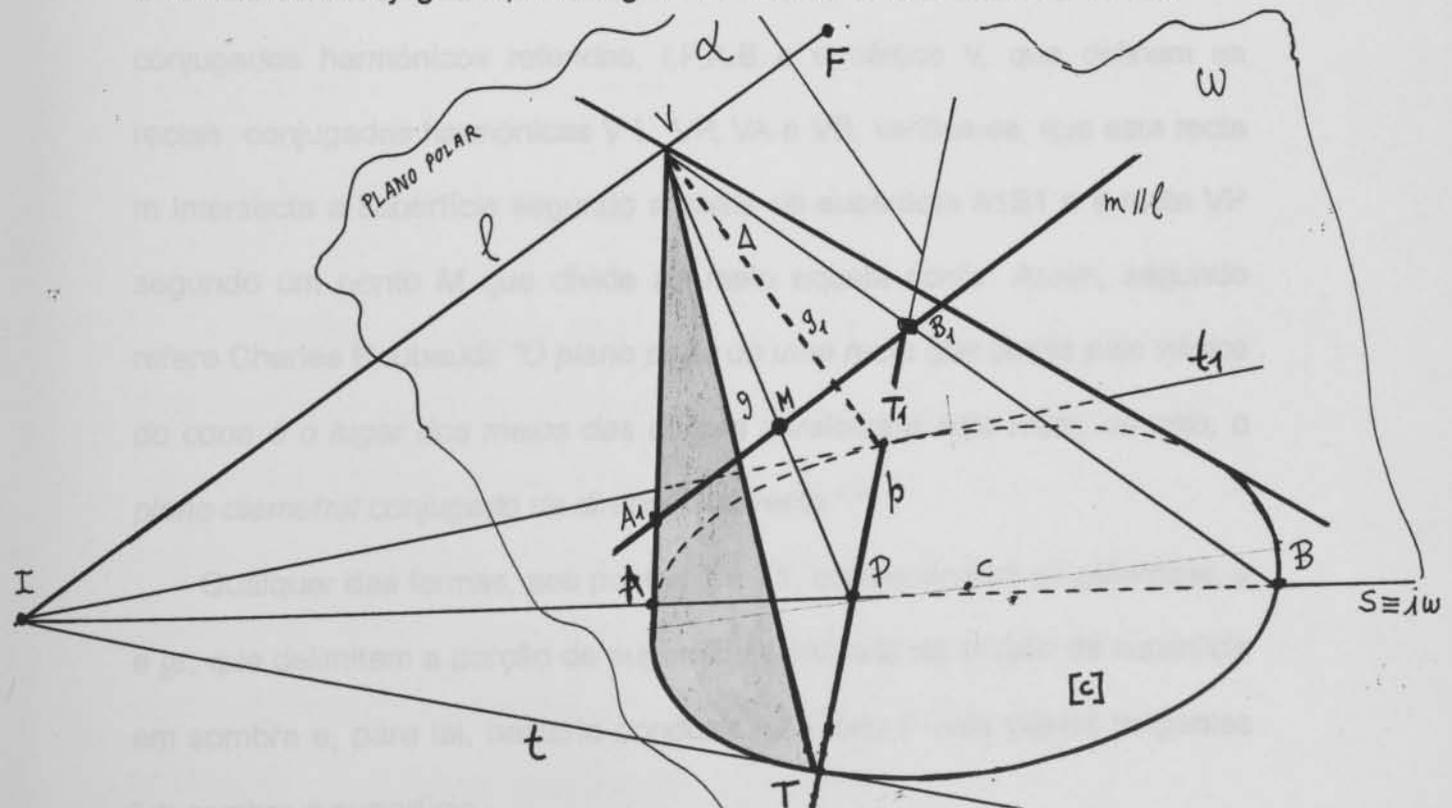


Fig.36 – Geratrizes de separatriz conjugadas de uma direcção luminosa.

para uma posição limite de tangência, t ou t_1 , ou considerarem-se os pontos A,P e B a aproximarem-se infinitamente até coincidir com T ou T1.

Ao considerar-se a mesma fig.36, verifica-se que qualquer plano que contenha a recta definida pelo vértice V, foco F e ponto I, intersecta o plano polar segundo a recta VP, que é polar da recta V I respeitante à secção degenerada [VAB] que este plano produz no cone. Os quatro pontos I, P, A e B situados no traço deste plano ω constituem um conjunto de formação harmónica. Ao considerar-se outro plano qualquer que intersecte a recta I e o plano polar α segundo um ponto e uma recta, verifica-se que estes últimos elementos constituem o polo e a recta polar, respeitantes à cónica de intersecção deste plano com o cone. O plano polar α é o plano polar de qualquer ponto pertencente à recta I e esta é polar do plano polar α .

Ao considerar-se uma recta transversal qualquer, m , paralela a I e pertencente ao plano ω passante pela recta I e que contém os pontos conjugados harmónicos referidos, I,P,A,B e o vértice V, que definem as rectas conjugadas harmónicas V I , VP, VA e VB, verifica-se, que esta recta m intersecta a superfície segundo a corda da superfície A1B1 e a recta VP segundo um ponto M que divide ao meio aquela corda. Assim, segundo refere Charles Roubaudi: *"O plano polar de uma recta que passe pelo vértice do cone é o lugar dos meios das cordas paralelas a esta recta, ou seja, o plano diametral conjugado da direcção da recta."*⁷⁰

Qualquer das formas, aos pontos T e T1, correspondem as geratrizes, g e g_1 , que delimitam a porção de superfície iluminada da porção de superfície em sombra e, para tal, bastaria conduzir pelo foco F dois planos tangentes luz-sombra à superfície.

⁷⁰ Charles Roubaudi, *Op.cit.*, pág.164, 3ºparágrafo.

As considerações expostas no parágrafo anterior para a superfície cônica são válidas para a superfície cilíndrica, se considerarmos o vértice no infinito.

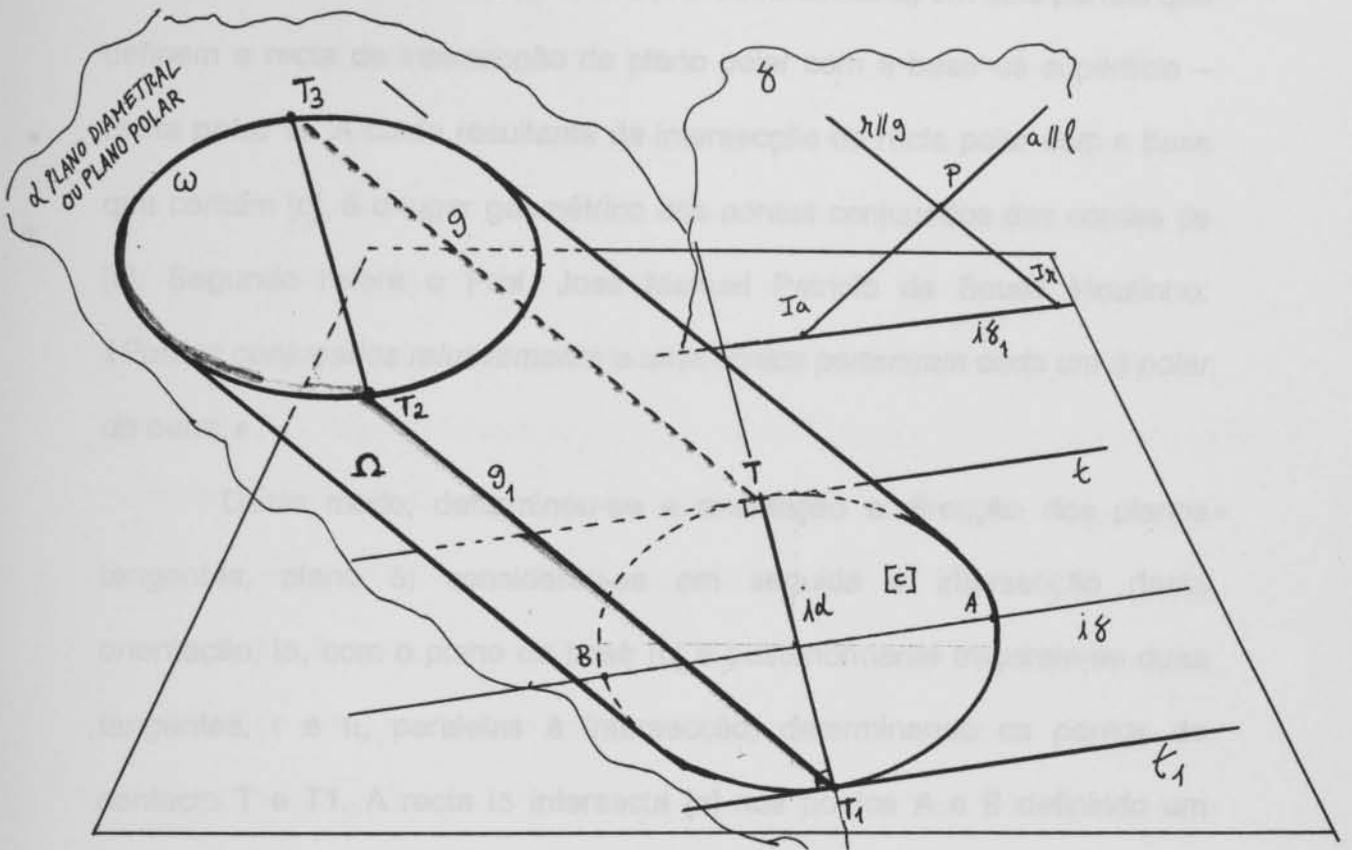


Fig.37 - Geratrizes e linha de separatriz de uma superfície cilíndrica, conjugadas de uma direcção luminosa

Também um cilindro elíptico de bases circulares, Ω , exposto a uma determinada direcção luminosa l , fig.37, admite um plano polar ou diametral que contém, nas geratrizes rectas, uma parte da linha de separatriz ou de concordância com a superfície luz sombra. Para a determinação da linha de separatriz, a que pertence o plano polar conjugado da direcção determinada, bastou determinar a direcção dos planos tangentes luz-sombra, que fica definida por duas rectas complanares: uma paralela à direcção luminosa e outra paralela às geratrizes do cilindro. Ao conduzirem-se, posteriormente,

dois planos tangentes à superfície com aquela direcção, determinam-se as geratrizes de contacto que pertencem ao plano diametral ou polar relativamente àquela direcção de luz. Tal como no cone, este plano polar intersecta a base do cilindro (ou qualquer outra directriz) em dois pontos que definem a recta de intersecção do plano polar com a base da superfície – **recta polar** $i\alpha$. A corda resultante da intersecção da recta polar com a base que contém $[c]$, é o lugar geométrico dos pontos conjugados das cordas de $[c]$. Segundo refere o Prof. José Manuel Patricio de Sousa Moutinho: «Pontos conjugados relativamente a uma cónica pertencem cada um à polar do outro.»⁷¹

Deste modo, determinou-se a orientação e direcção dos planos tangentes, plano δ ; considerou-se em seguida a intersecção desta orientação, $i\delta$, com o plano da base $[c]$ e posteriormente traçaram-se duas tangentes, t e t_1 , paralelas à intersecção, determinando os pontos de contacto T e T_1 . A recta $i\delta$ intersecta $[c]$ nos pontos A e B definindo um segmento ou corda que é conjugado da corda definida por T e T_1 ; nestes pontos correspondem as geratrizes de contacto, g e g_1 , dos planos tangentes, e que bastam para determinar o plano diametral ou polar de Ω face àquela direcção luminosa. No entanto, a separatriz luz sombra do cilindro não fica apenas determinada pelas geratrizes de contacto g e g_1 .

Ao delimitarmos a superfície cilíndrica subjacente pelas duas bases, definindo o sólido Ω , verifica-se que uma porção da base superior ω ⁷² irá projectar-se numa qualquer superfície limite, neste caso particular, no próprio

⁷¹ José Manuel Patricio de Sousa Moutinho, *Op.cit.*, pág.334.

⁷² Um segmento plano (porção de plano) em Geometria Descritiva designa-se por uma letra minúscula do alfabeto grego. Deste modo a base do cilindro ω é um segmento plano circular côncavo. A porção de espaço plana existe na parte interna da circunferência.

plano da base inferior ν_0 . A porção de ω que se projecta corresponde a um segmento plano semicircular, metade do círculo. O diâmetro que resulta da intersecção do plano diametral da separatriz com ω , corda T2T3, delimita o círculo em duas porções simétricas, anterior e posterior; a primeira configura a área de sombra projectada na superfície limite ν_0 .

Nos capítulos que se seguem dedicados a cada superfície em particular, desenvolvem-se com exemplos práticos, estas questões relacionadas com as sombras.

A separatriz luz-sombra das superfícies cónica, cilíndrica, esférica e de quaisquer outras superfícies geométricas, constitui o lugar geométrico dos pontos da superfície que admitem todos os raios luminosos tangentes.

Não convém esquecer, também, que unicamente as partes iluminadas de uma determinada superfície podem produzir sombra projectada e, uma parte ou porção iluminada de uma superfície ou qualquer outra forma geométrica produz sombra em qualquer outra superfície que intercepta o percurso dos raios luminosos tangentes. Nas porções iluminadas de superfícies, ou sólidos, só a linha de separatriz permite definir o contorno ou a configuração da sombra projectada da superfície iluminada.

Genéricamente existem **quatro métodos** auxiliares para a determinação das sombras das superfícies, utilizados nos capítulos que se seguem do presente ensaio, são eles a saber: **método dos planos tangentes, método dos planos secantes, método das superfícies circunscritas ou concordantes e método das projecções oblíquas ou das sombras virtuais**. Para além destes métodos genéricos utilizam-se três teoremas aplicados genericamente e em certas situações particulares, são

eles a saber: o já referenciado **teorema dos contornos aparentes**, o **teorema dos pontos de perca e quebra** e o **teorema das superfícies que se intersectam**.⁷³

Na determinação de sombras próprias e projectadas de superfícies mais complexas, nomeadamente as de curvaturas opostas, Toro, Escócia, Hipérbolóide de uma folha ou de revolução, entre outras, recorre-se em certos casos a conhecimentos que pertencem ao domínio da Geometria Analítica. No presente ensaio apresentamos, nas págs. 140 e 141, um exemplo desta aplicação, na representação de uma região interna de uma porção de superfície tórica onde, para a determinação da linha de separatriz daquela superfície, foram aplicados aqueles conhecimentos com bases analíticas.⁷⁴

Nos métodos empregues o mais geralmente utilizado é o dos **planos tangentes**. Este, permite determinar, de uma forma bastante simples, a separatriz luz-sombra das superfícies cónica e cilíndrica, bastando para esse efeito conduzir dois planos tangentes à superfície paralelos à direcção luminosa ou que contenham o foco luminoso.

O **método dos planos secantes** é também bastante utilizado. No caso particular das superfícies do presente ensaio, ele aplica-se de duas formas: quando se pretende representar as sombras autoprojectadas de um sólido aberto ou de uma qualquer porção de superfície aberta delimitada por

⁷³ Estes métodos e teoremas estão referenciados e agrupados nas seguintes obras: J.J.Pillet, *Op.cit.*, pp. 2,3 e 4. Charles Roubaudi, *Op.cit.*, pp.158 e 159.

⁷⁴ Acerca das aplicações da Geometria Analítica no estudo das sombras de superfícies, vide as obras notáveis dos seguintes autores: J.J.Pillet, *Traité de Géometrie Descriptive*, Librairie CH.Delagrave-Paris,1887, pp.263-265. Charles Roubaudi, *Op.cit.*, pp.463-468. Charles F.A.Leroy,*Traité de Stereotomie - comprenant ...* . José Manuel Patricio de Sousa Moutinho, *Escócia, Separatriz...* .

uma qualquer directriz, casos particulares de uma semi esfera côncava, de superfícies cilíndrica e cônica abertas, de sólidos compostos por superfícies coaxiais, delimitadas por planos – “vasos” e “taças” –, nas sombras de nichos cónicos e cilíndricos ou, ainda, na determinação da sombra de uma superfície ou sólido sobre outra superfície ou sólido.

Para a determinação da sombra de uma superfície ou sólido sobre outra superfície ou sólido utilizam-se os métodos dos planos tangentes e secantes ou o método das superfícies concordantes, dependendo da natureza das superfícies consideradas e representadas. Neste tipo de exercícios, pode-se no entanto, utilizar o método das sombras virtuais.

Partindo do princípio de que a sombra de uma superfície sobre outra não é mais do que a projecção da separatriz da primeira sobre a segunda, no caso particular, que envolve superfícies de simples curvatura, basta considerar-se a intersecção dos planos tangentes luz-sombra da primeira superfície com a segunda superfície, onde, as linhas de intersecção destes planos tangentes (responsáveis pela determinação da linha de separatriz da primeira superfície) com a segunda superfície determinam a sombra projectada da primeira superfície sobre a segunda. Estes planos são, simultaneamente, tangentes e secantes.

O **método das superfícies concordantes** também é bastante útil, aplica-se genericamente na determinação das sombras próprias, projectadas e autoprojectadas de superfícies de dupla curvatura convexas ou côncavas: semiesferas côncavas, nichos esféricos, nas porções esféricas da testa de nichos compostos com outras superfícies, entre outras.

Com efeito, para determinarmos a linha de separatriz luz sombra de uma esfera, basta considerar-se a superfície luz-sombra (cônica ou

cilíndrica) concordante. Neste caso, a linha de concordância determina a separatriz e a projecção desta, numa qualquer superfície limite, determina a respectiva sombra projectada. Este método auxiliar permite, também, a determinação de sombras próprias de superfícies de curvaturas opostas ou de regiões de superfícies que tenham curvaturas opostas – regiões hiperbólicas. O Toro constitui um exemplo desta aplicação, com efeito, para a determinação da separatriz interna de um Toro poder-se-ão utilizar-se superfícies concordantes auxiliares, nos vários paralelos de concordância, cilíndricas –no círculo de gola – e cónicas ou esféricas –noutros paralelos. Nestes casos, os pontos de sombra própria da superfície de curvaturas opostas são comuns às respectivas superfícies concordantes consideradas visto que pertencem à linha de concordância.

Quando o conjunto de superfícies intervenientes forem de dupla curvatura, ou de dupla curvatura com simples curvatura, poderá utilizar-se também o método das superfícies concordantes que está directamente relacionado com o método dos planos secantes. Aqui, existem, como exemplos, a sombra de uma esfera sobre outra esfera, ou da sombra de uma esfera sobre superfícies cónica e cilíndrica. Nestes casos particulares, considera-se a superfície luz-sombra concordante com a esfera e, também, a linha de intersecção desta superfície concordante (cónica ou cilíndrica, dependendo da natureza da luz considerada) com a segunda superfície que recebe sombra. A linha de intersecção destas duas superfícies determina a linha de sombra projectada da primeira superfície sobre a segunda. A superfície concordante luz-sombra com a primeira superfície é secante à segunda superfície. Nestes casos particulares poderão consideraram-se os conhecimentos utilizados para a determinação da **linha de intersecção de**

duas superfícies utilizando, para tal, planos úteis, tangentes e secantes auxiliares. Este método permite um maior rigor de traçado, havendo por vezes a necessidade da determinação de tangentes nos pontos notáveis da linha de intersecção, ou seja, na linha de sombra projectada pela primeira superfície sobre a segunda. As tangentes nos vários pontos dessa linha ficariam determinadas pela intersecção dos planos tangentes à superfície concordante luz-sombra, com a primeira superfície (que produz sombra), com os planos tangentes à segunda superfície que recebe sombra.

O **método das projecções oblíquas ou das sombras virtuais** aplica-se com muita frequência na determinação de sombras de superfícies sobre superfícies ou de sólidos sobre sólidos e permite uma grande rapidez de execução. Com efeito, este método consiste em determinar as sombras projectadas de conjuntos de superfícies, ou sólidos, sobre uma qualquer superfície auxiliar, geralmente plana. Consideram-se, posteriormente, as suas intersecções e pelos pontos de intersecção de ambas as sombras, procede-se, de seguida, à respectiva inversão dos raios luminosos para as linhas ou geratrizes do sólido, ou superfície, que recebe sombra. Deste modo, consideram-se sempre as projecções, na superfície auxiliar, das sombras virtuais ou das projecções oblíquas de algumas geratrizes ou linhas da superfície da zona iluminada de uma superfície (que recebe sombra) e, posteriormente, as suas intersecções com as projecções das geratrizes ou linhas de sombra da outra superfície que se projectam na mesma superfície auxiliar.

O **teorema dos contornos aparentes** é sempre aplicável na determinação de sombras de superfícies de diversa ordem, é referido na pág.86. do presente ensaio e também por J.J.Pillet com uma particularidade,

diz o autor que: "*Le contour apparent d'une surface, sa séparatrice, et sa courbe d'ombre portée sur toute autre surface, ont, en projection ou en perspective, des tangentes lumineuses (...) communes.*"⁷⁵ As tangentes à linha de separatriz são simultaneamente tangentes à correspondente linha de sombra projectada. Nesses pontos de tangência a superfície luz-sombra é **concordante** ou **envolvente** com as duas superfícies.

O **teorema dos pontos de perca e quebra** aplica-se sempre na determinação dos pontos de sombra que uma superfície produz na linha de separatriz da outra superfície, nestes pontos, as tangentes são os próprios raios luminosos. Estes pontos resultam da intersecção da sombra projectada da primeira superfície sobre a segunda, com a sombra própria da segunda e podem-se determinar pelo método das sombras virtuais (ou projecções oblíquas). A partir destes pontos a sombra projectada, pela primeira superfície, funde-se na sombra própria da segunda, podendo por vezes, prolongar-se noutras superfícies vizinhas, caso existam.

O **teorema das superfícies que se intersectam** aplica-se quando se pretendem determinar as sombras em conjuntos de superfícies que se intersectam. Nos pontos de sombra pertencentes à linha, ou às linhas de intersecção de conjuntos formados por duas ou mais superfícies, correspondem tangentes particularmente importantes, estas, pertencem aos pontos de intersecção das geratrizes ou linhas de separatriz de uma superfície, com geratrizes ou linhas da, ou das outras superfícies, que recebem uma determinada sombra projectada e resultam da intersecção dos planos tangentes luz-sombra, nas geratrizes de separatriz da superfície que produz sombra, com os planos tangentes às outras superfícies nos pontos

⁷⁵ Jean Jules Pillet, *Op.cit.*, pág.4. Tradução: *O contorno aparente de uma superfície, sua separatriz, e a sua curva de sombra curvada sobre outra superfície, têm, em projecção ou em perspectiva, tangentes luminosas comuns.*"

de intersecção considerados. Estes pontos são os pontos de nascença da sombra que uma superfície produz noutra e as tangentes respectivas, são tangentes à linha de sombra projectada de uma superfície sobre a outra.

Todos estes teoremas e métodos referidos conferem um maior rigor de traçado na representação das sombras e exemplificam-se graficamente nos capítulos que se seguem do presente ensaio.

5- Superfície regrada planificável: côncava e cônvexa.
Métodos para a determinação de sombras construídas a luz directa: sombras próprias, projectada e própria interior projectada na superfície (autoprojectada). Tangentes nos pontos das linhas de sombra e forma destas linhas - arcos de círculos, parábolas ou hipérbolas.

*Depois de se terem construído...

respeito ao contorno...

para além das...

e, também, de...

capítulo, alguns...

objetivo, de...

Avantagem...

determinação...

oculturas...

representação...

5- Superfícies regradas planificáveis: cónica e cilíndrica.

Métodos para a determinação de sombras considerando a luz directa: sombras própria, projectada e própria interior projectada na superfície (autoprojectada). Tangentes nos pontos das linhas de sombra e forma destas linhas – arcos de *elipse, parábola ou hipérbole*.

Fig. 38 –
Métodos para a determinação de sombras considerando a luz directa: sombras própria, projectada e própria interior projectada na superfície (autoprojectada).

Depois de se terem enunciado algumas noções relevantes no que respeita ao comportamento da luz e das sombras perante as superfícies, para além dos *métodos de determinação* das porções em luz e em sombra e, também, de pontos e de rectas brilhantes, exemplifiquemos, neste capítulo, algumas aplicações na superfície **cilíndrica** e **cónica**. Tendo como objectivo determinar as sombras própria, projectada e autoprojectada, exemplificam-se nas figs.38 e 39, a inclusão de dois métodos para a determinação das sombras pretendidas, em duas superfícies cilíndricas circulares abertas, delimitadas pelas directrizes e bases, e ilustradas em representações por projecções centrais.

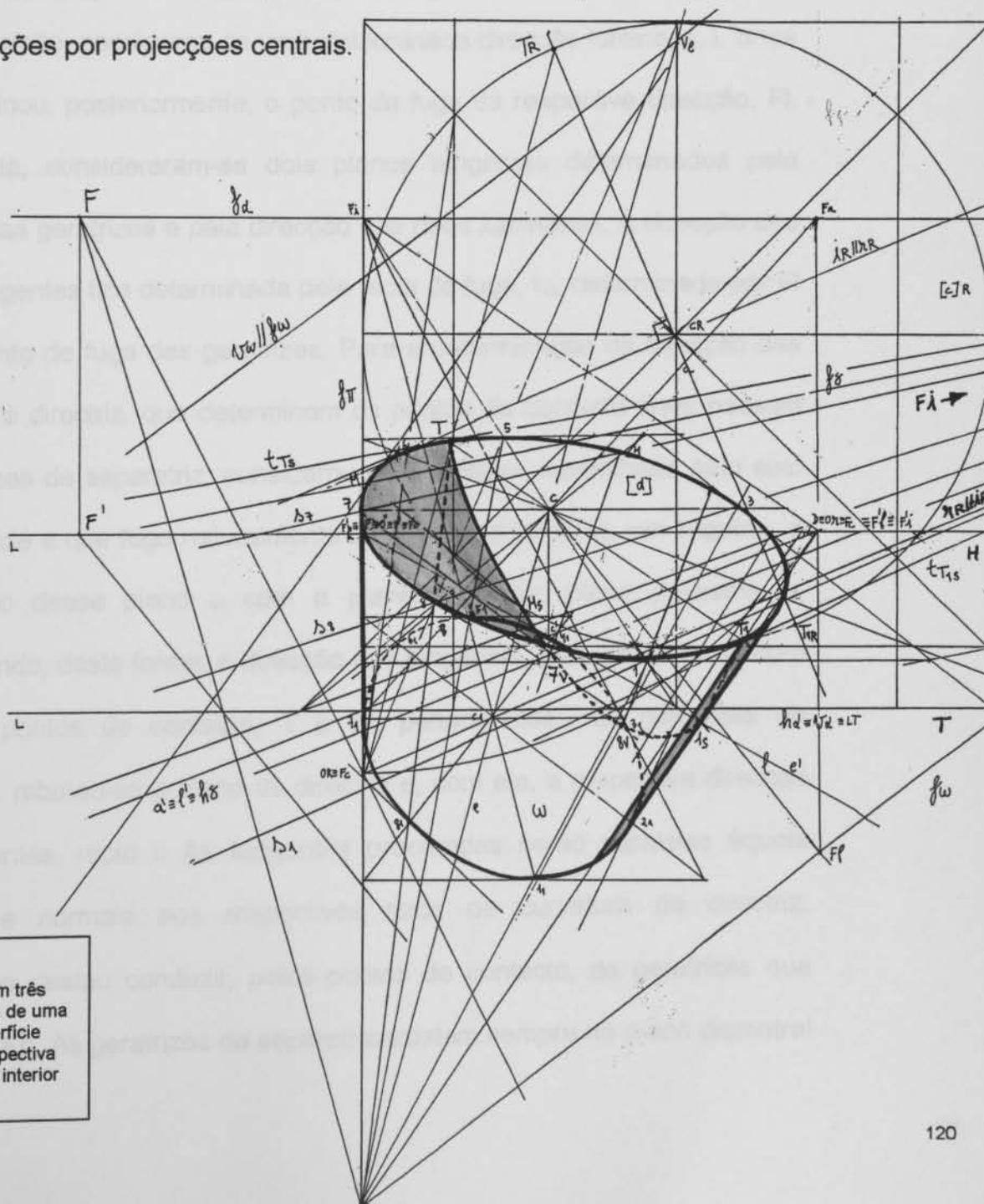


Fig.38 –
 Perspectiva com três pontos de fuga, de uma porção de superfície cilíndrica, e respectiva sombra própria interior projectada

Assim, na fig.38 – que representa uma perspectiva, com três pontos de fuga, de uma porção de superfície cilíndrica aberta na directriz superior e delimitada pela sua base, ω , que pertence ao plano passante α –, para a determinação da linha de sombra própria, considerou-se a metodologia dos **planos tangentes**. Para o efeito, conduziram-se dois planos tangentes à superfície, determinados pelos raios luminosos que fugam em F_1 , pelas tangentes à directriz e pelas geratrizes de contacto que separam a superfície em duas regiões distintas: uma em luz e outra em sombra. Estas geratrizes determinam a linha de separatriz, conjugadas daquela direcção luminosa. Para este efeito, considerou-se uma determinada direcção luminosa, l , onde se determinou, posteriormente, o ponto de fuga da respectiva direcção, F_l . De seguida, consideraram-se dois planos tangentes determinados pela direcção das geratrizes e pela direcção dos raios luminosos. A direcção dos planos tangentes fica determinada pela recta de fuga, f_ω , determinada por F_l e F_p – ponto de fuga das geratrizes. Para a determinação da direcção das tangentes à directriz, que determinam os pontos de contacto onde passam as geratrizes de separatriz, considerou-se um plano determinado pelo eixo da superfície e que fuga naturalmente em f_ω . Considerou-se, em seguida, a intersecção desse plano ω com o plano da base, plano passante α , determinando, desta forma, a direcção das tangentes. Para se obterem, com rigor, os pontos de contacto, T e T_1 , pertencentes às geratrizes de separatriz, rebateu-se o plano da directriz e, com ele, a respectiva direcção das tangentes, recta i . As tangentes procuradas serão paralelas àquela direcção e normais aos respectivos raios de curvatura da directriz. Finalizando, restou conduzir, pelos pontos de contacto, as geratrizes que fugam em F_p . As geratrizes de separatriz existem sempre no plano diametral

conjugado da direcção luminosa.

A fig. 39, representada mais à frente, na pág. 126, apresenta uma porção de superfície cilíndrica elíptica, aberta por duas circunferências que deste modo a limitam. Para a determinação da linha de sombra projectada pela superfície sobre a superfície limite, no caso particular, sobre o geometral, fig.39, bastou, para o efeito, determinar a projecção naquele plano, das geratrizes de separatriz, g e g_1 , e que não são mais do que a intersecção dos planos tangentes considerados, planos luz sombra, com aquelas superfícies, ou seja, os seus traços. Não convém esquecer que a separatriz de sombra própria exterior não fica determinada, apenas, pelas geratrizes consideradas mas, também, pela porção de directriz que corresponde à região da superfície que se encontra em sombra, ou seja, metade daquela directriz, circunferência, irá projectar sombra na superfície limite, v_0 . Para determinar a sombra projectada daquela porção de directriz considerou-se, para o efeito, o octógono circunscrito e determinou-se a sombra respectiva. O octógono possibilita um maior rigor de traçado na medida em que, com a sua inserção, obtêm-se tangentes em número mais elevado.

Para finalizar o problema, determine-se agora a **sombra própria interior**, e a sua **projecção no** v_0 , na **zona interior iluminada** da superfície. Esta sombra é também conhecida por sombra **autoprojectada**. Nas superfícies regradas planificáveis e nas não regradas: superfícies, cónica cilíndrica e esférica, a linha de separatriz de sombra própria interior projectada, ou autoprojectada, é sempre plana, existe, por essa razão, num plano. Para tal, basta determinar três pontos dessa linha de sombra, para se

determinar o plano que a contém e posteriormente, a secção cónica resultante. Antes de descrever a metodologia adotada para esta resolução particular, importa referir a **teoria** subjacente **que é aplicada, genericamente, não apenas nas superfícies regradadas mas, também, nas não regradadas**. Essa *teoria*, remete para a questão de alguns casos particulares de **intersecção de duas superfícies, quando a intersecção é formada por duas linhas planas**, e é bem referida por Jean Jules Pillet que enuncia os seguintes teoremas importantíssimos, em *Traité de Géométrie Descriptive*:

«**Théorème 1.**- Lorsque deux surfaces du second degré (cônes, cylindres, ellipsoïdes, sphères...) ont deux points communs, elles se coupent suivant deux courbes planes (lesquelles sont, par conséquent, des courbes du deuxième degré, ellipses, hiperboles, paraboles, cercles).

Ces deux courbes se rencontrent en deux points, dits: **points doubles**, qui sont précisément ceux où les plans tangents sont communs.

Théorème 2. - [...]

Théorème 3. - Lorsque deux surfaces du deuxième degré se coupent, si la courbe d'entrée est plane; la courbe de sortie est aussi plane.

Applications aux ombres: ombre portée [...] par la base [...] d'un cylindre creux dans l'intérieur du cylindre (ombre du pont)[...]

L'ombre portée est l'arc d'ellipse [...]. Les points doubles sont les points [...] de la courbe d'entrée [...], pour lesquelles le rayon lumineux est tangent au cylindre.

Ombre portée [...] par l'équateur [...] d'une sphère creuse dans l'intérieur de la sphère (ombre de l'écuëlle). L'ombre portée [...] est une

demi-circonférence.»⁷⁶

Pelos teoremas enunciados e, independentemente, se for cone, cilindro ou esfera, facilmente se verifica, que os pontos de nascença da linha de sombra autoprojectada, existentes nas geratrizes de sombra própria e na directriz da superfície, são comuns às duas sombras: própria e própria interior projectada na superfície (autoprojectada). Esses pontos, **pontos duplos reais**, resultam da **intersecção de duas superfícies** que se intersectam na sua totalidade e constituem, por essa razão, casos particulares de intersecção que se designam de *penetrações tangenciais duplas*, entre, a superfície dada e a *superfície luz-sombra*. Esta última fica determinada pela direcção luminosa ou foco luminoso e pela base ou directriz da superfície dada, e que corresponde a *um arco de circunferência* que vai produzir sombra dentro da superfície. Nos *pontos duplos* referidos, pontos de nascença, os planos tangentes às duas superfícies, à dada e à luz-sombra, encontram-se coincidentes. Deste modo, para se determinarem as tangentes naqueles pontos, ou noutros quaisquer, pertencentes à linha de separatriz da sombra autoprojectada, **basta considerar-se a intersecção do plano que contém essa linha curva da separatriz, plano secante,**

⁷⁶ J. J. Pillet, *Traité de Géométrie Descriptive...*, pág. 80. Tradução:

«Teorema 1. – Sempre que duas superfícies do segundo grau (cones, cilindros, elipsoides, esferas...) têm dois pontos comuns, elas intersectam-se segundo duas curvas planas (as quais são, por conseguinte, duas curvas do segundo grau, elipses, hipérbolas, parábolas, círculos).

Estas duas curvas encontram-se em dois pontos, ditos: **pontos duplos**, que são precisamente aqueles onde os planos tangentes são comuns.

Teorema 2. – [...]

Teorema 3. – Sempre que duas superfícies do segundo grau se intersectam, se a curva de entrada for plana; a curva de saída é também plana.

Aplicação às sombras: sombra projectada [...] pela base [...] de um cilindro oco no interior do cilindro (sombra da ponte) [...]

A sombra projectada é o arco de elipse [...]. Os pontos duplos são os pontos [...] da curva de entrada [...], aos quais correspondem raios luminosos tangentes ao cilindro.

Sombra projectada [...] pelo equador [...] de uma esfera oca no interior da esfera (sombra da tigela). A sombra projectada é uma semicircunferência.»

com os planos tangentes à superfície em cada geratriz que contenha cada ponto da curva.⁷⁷

Voltando à superfície cilíndrica e à fig.38, a cónica, ou porção de cónica, referida anteriormente, e que é a linha de separatriz da linha de sombra própria interior projectada na superfície (sombra autoprojectada), resulta da intersecção do plano, que a contém, com a superfície. No caso particular da superfície cilíndrica, resulta sempre num **arco de elipse**. Como apenas a superfície cilíndrica admite como secções cónicas: duas rectas, uma circunferência, ou uma elipse, a sombra autoprojectada será genericamente um arco de elipse. Para a sua determinação, na figura, foi utilizado o método dos planos secantes, evitando desta forma traçados excessivos. Poder-se-ia também recorrer ao método das sombras virtuais. De qualquer modo, para o efeito, consideraram-se várias secantes arbitrarias que, na essência, não são mais do que as intersecções dos vários planos secantes luz-sombra com a superfície. Estes planos intersectam a superfície, cada um, segundo um par de duas geratrizes – uma iluminada e outra em sombra – ambas situadas no interior da superfície. Uma destas duas geratrizes, a que está em sombra, irá produzir sombra na geratriz iluminada. Para o efeito, bastou considerar o raio luminoso, que passa pelo ponto da geratriz de sombra pertencente à directriz, e determinar a sua intersecção com a outra geratriz iluminada. Se considerarmos vários pares de geratrizes (e mais planos secantes) e procedermos do mesmo modo, obtêm-se mais pontos pertencentes à linha de separatriz de sombra própria interior projectada na superfície (autoprojectada). Foi o que se fez na figura

⁷⁷ Poder-se-á também recorrer ao teorema das tangentes conjugadas de Charles Dupin referido por C.Roubaudi, Op.cit., pág.456.

onde, posteriormente, se poderiam determinar as tangentes à curva, utilizando o plano da porção de cônica que fica determinado por três pontos.

Na fig.39 que representa, em projecções centrais, as sombras de uma porção de superfície cilíndrica elíptica, oca e tangente ao geometral, ν_0 , a metodologia foi, em tudo, semelhante à adoptada para a figura anterior.

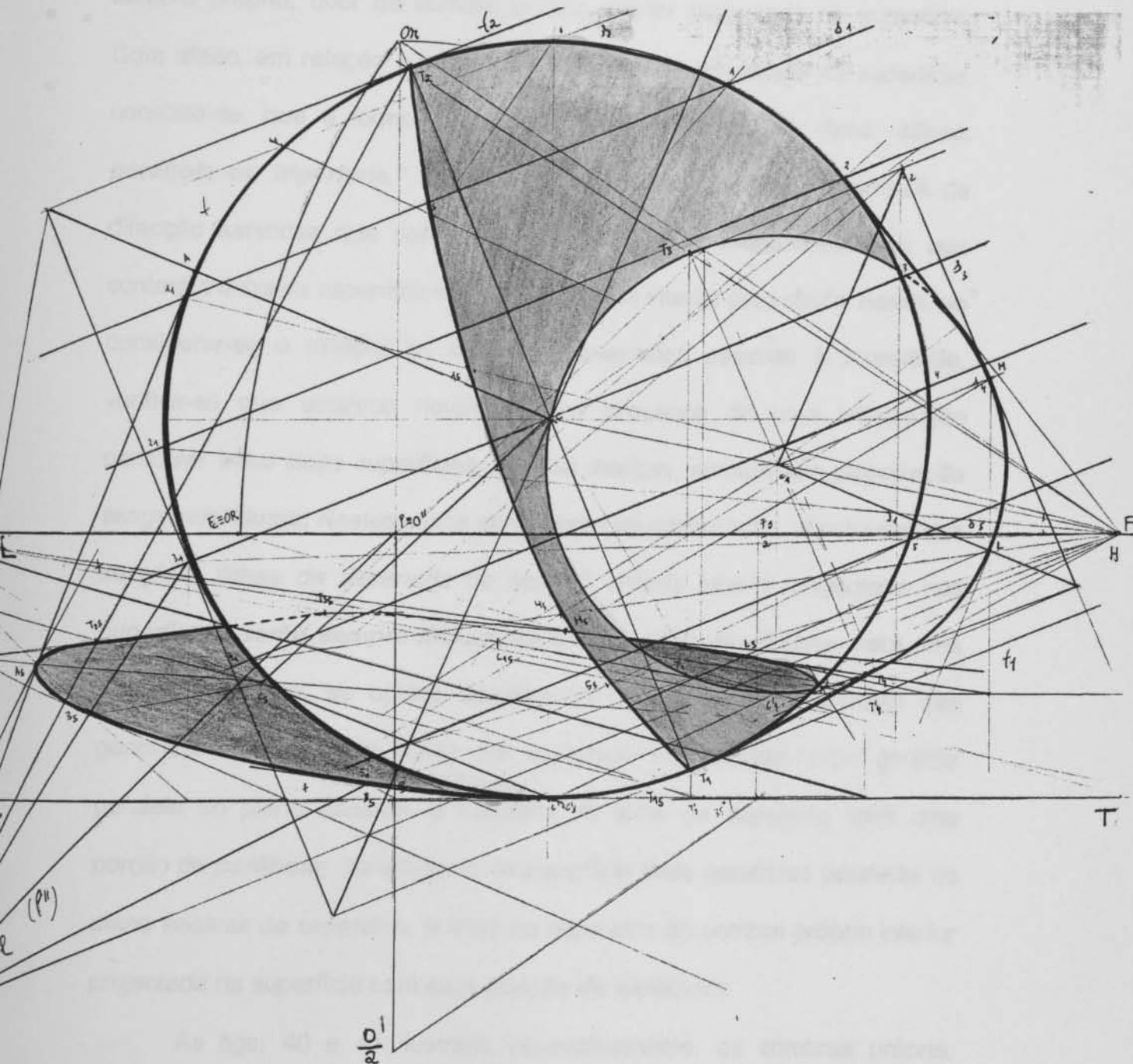


Fig.39 — Perspectiva de uma porção de superfície cilíndrica elíptica e respectivas sombras: própria interior projectada e projectada no geometral

Em relação à *superfície cónica* e considerando esta, aberta por uma linha plana, circunferência ou elipse quaisquer, a metodologia adoptada para a determinação das sombras: própria, projectada e própria interior projectada na superfície é semelhante à utilizada para a superfície cilíndrica, no entanto, diferem as formas e a natureza das linhas de separatriz, quer da sombra própria, quer da sombra própria interior projectada na superfície. Com efeito, em relação à sombra própria interior projectada na superfície, constata-se, que a forma dessa linha poderá ser de três tipos: **elipse, parábola ou hipérbole**.⁷⁸ A natureza e forma desta linha dependerá da direcção luminosa que condicionará a posição do plano secante e que conterà a linha de separatriz de sombra própria interior projectada. Assim, ao considerar-se o cilindro ou **o cone luz-sombra secante à superfície**, verifica-se que estamos novamente na presença de uma intersecção particular entre duas superfícies, que se designa também por **penetração tangencial dupla**. Nestes casos particulares de intersecção, a natureza das secções, *linhas de separatriz da sombra própria interior projectada nas superfícies*, **serão sempre linhas planas fechadas ou abertas**: será uma *porção de elipse*, se o plano secante não for paralelo a nenhuma das geratrizes do cone; se existir na superfície considerada, uma geratriz paralela ao plano secante, a natureza da linha de separatriz será uma *porção de parábola*; se existirem na superfície duas geratrizes paralelas ao plano secante da separatriz, a linha de separatriz de sombra própria interior projectada na superfície será **uma porção de hipérbole**.

As figs. 40 e 41 ilustram, respectivamente, as sombras própria, projectada e própria interior projectada de dois sólidos, primeiramente numa

78 Cfr. Jean Jules Pillet, *Op.cit.*, pág. 22.

representação por dupla projecção ortogonal e, posteriormente, por projecções centrais e numa representação em perspectiva linear plana. Os sólidos estão fechados por duas superfícies coaxiais e por duas coroas circulares que, deste modo, os limitam.

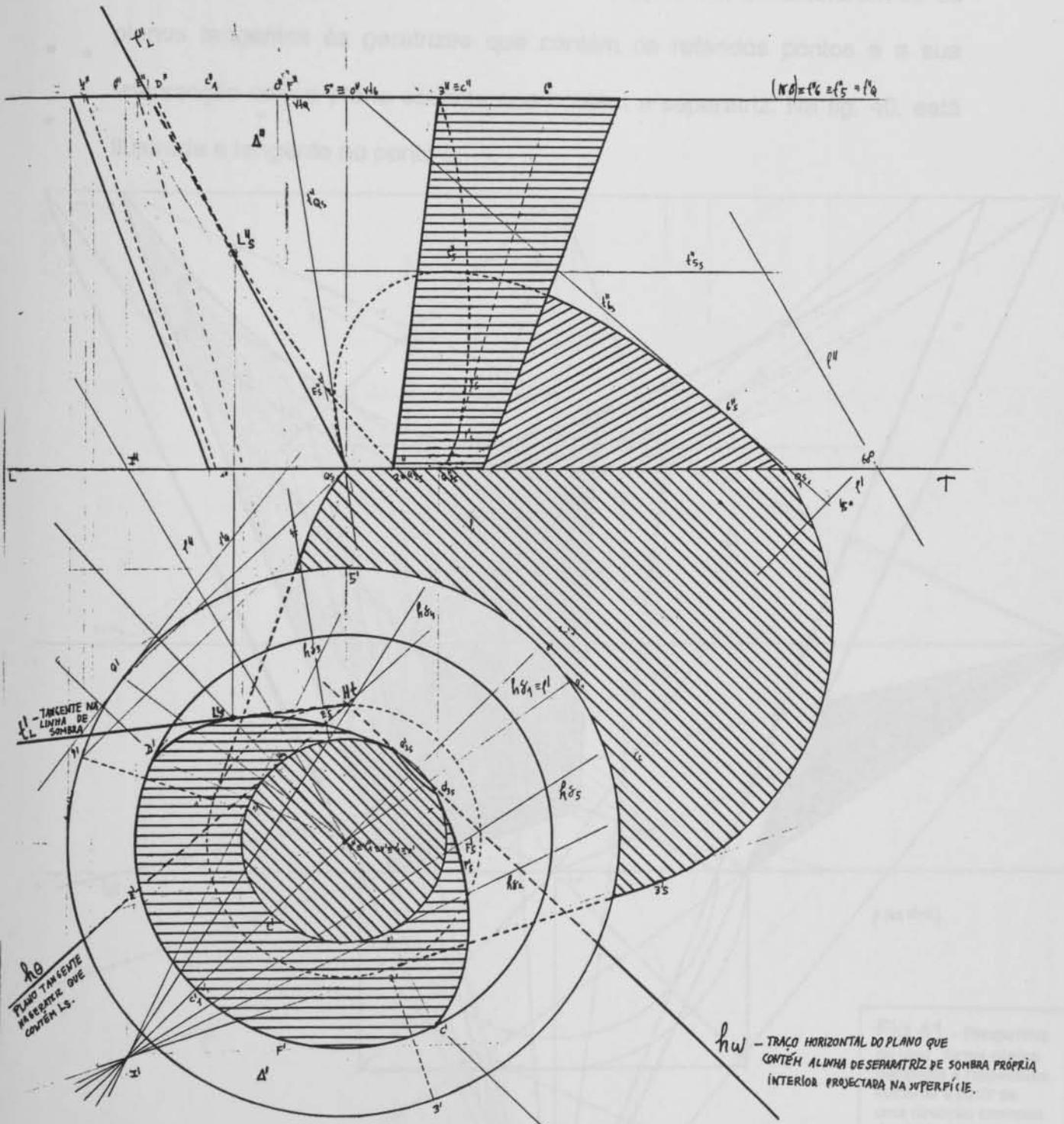
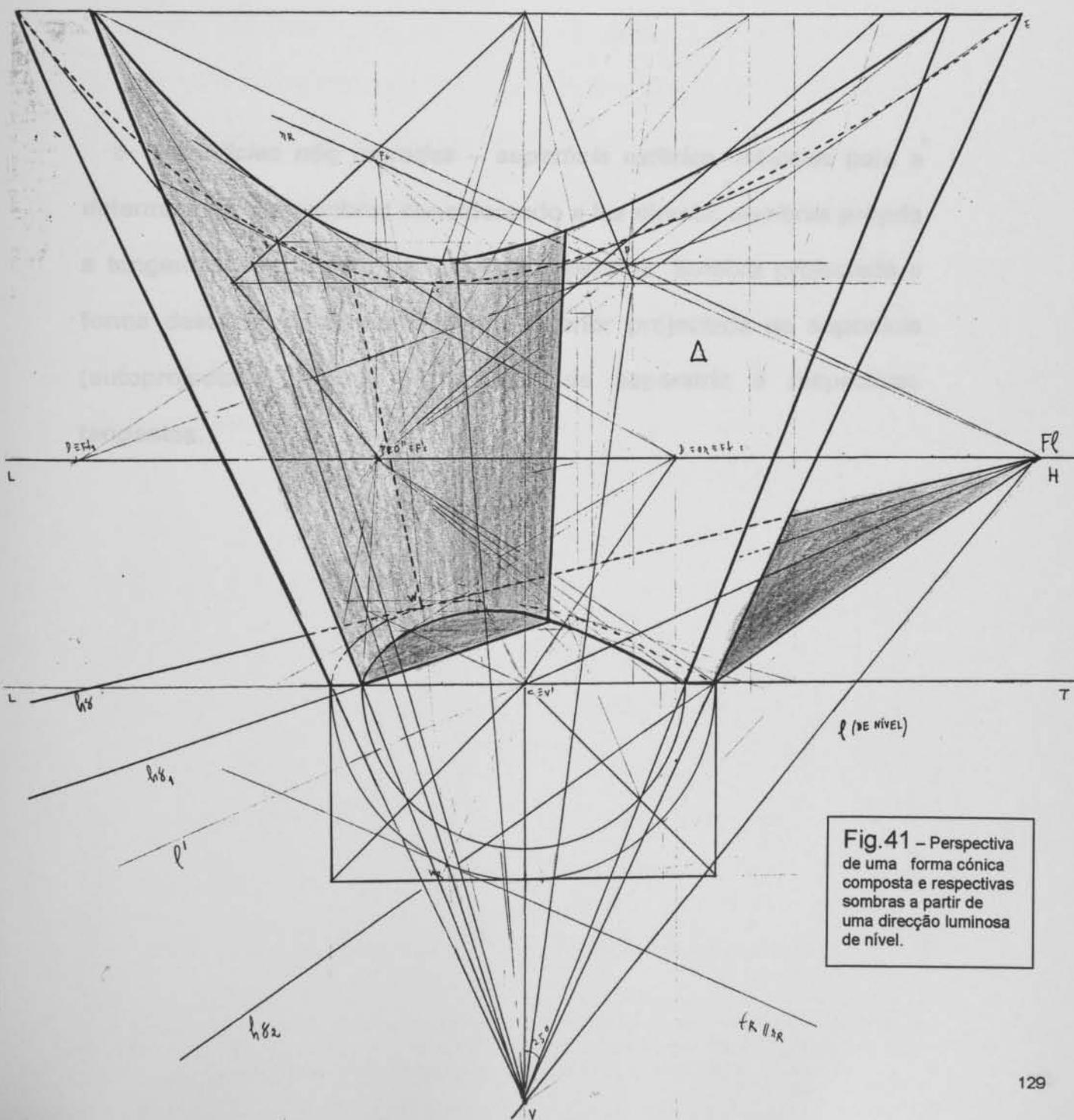


Fig. 40 – Sombras própria exterior, própria interior projectada e projectada nos planos de projecção, de uma forma cónica composta.

Na determinação dos pontos da linha de sombra própria interior projectada (autoprojectada) destes sólidos utilizou-se a metodologia adoptada anteriormente para a superfície cilíndrica, isto é, recorreu-se ao **método dos planos secantes**. Para a determinação das tangentes nos pontos da linha de sombra própria interior projectada, consideraram-se os planos tangentes às geratrizes que contêm os referidos pontos e a sua intersecção com o plano secante que contém a separatriz. Na fig. 40, está ilustrada a tangente no ponto L.



A determinação das linhas de sombra da superfície esférica, da sombra própria, da sombra projectada e da linha de separatriz, são feitas através da construção de planos secantes, associados ao método de intersecção de duas superfícies, da dada uma linha de sombra própria e a dada uma linha de separatriz e respectivas tangentes nos pontos da linha de separatriz, para a obtenção da sombra projectada e da linha de separatriz e respectivas tangentes nos pontos da linha de separatriz.

Nas representações por projeções ortogonais, ou considerando a direcção horizontal e distância finita, mesmo nas representações por dupla

6- Superfícies não regradas – superfície esférica. Métodos para a determinação de sombras considerando a luz directa: sombras própria e tangentes nos pontos da linha de separatriz. Sombra projectada e forma desta linha. Sombra própria interior projectada na superfície (autoprojectada), forma desta linha de separatriz e respectivas tangentes.

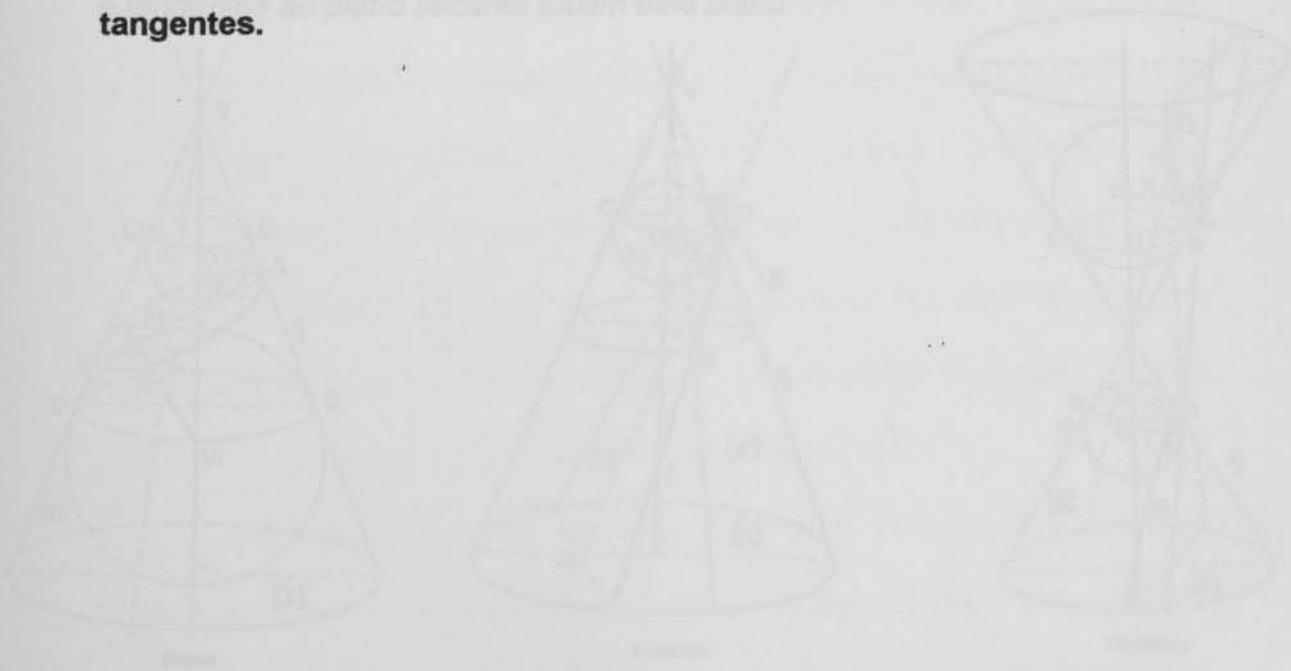


Fig. 41 - Construções para a determinação das sombras, em relação à posição do plano secante.

¹⁷ Prof. Carlos de Sequeira, *Lição de Geometria Descritiva, Livro I – Superfícies esféricas*, 2ª edição, 1940, pág. 131. Este trabalho foi desenvolvido conjuntamente com Paulo Quintino e Maria José da Cunha das projectos fotográficos em 1967.

Na determinação das linhas de sombra da superfície esférica, da sombra própria, da sombra projectada numa superfície limite e da sombra própria interior projectada na superfície, utilizam-se os respectivos métodos: dos planos tangentes ou das superfícies concordantes; dos planos secantes, associado ao método da intersecção de duas superfícies, da dada e da luz-sombra que lhe é secante; e, também, o método das projecções oblíquas – intersecção da superfície concordante, que determina a linha de separatriz com a superfície considerada, com a superfície limite.

Nas representações por projecções centrais, ou considerando a direcção luminosa a distância finita, mesmo nas representações por dupla projecção ortogonal, e para efeitos de maior rigor de traçado utiliza-se, com conveniência, o **teorema** de Pierre Dandelin, referido nas *Lições de Geometria Descritiva* pelo Prof. Borges de Sequeira, que diz: " Qualquer cónica pode ser considerada como uma secção feita por um plano α , num cone de revolução, sendo focos os pontos onde as esferas inscritas no cone e tangentes ao plano secante tocam este plano." ⁷⁹

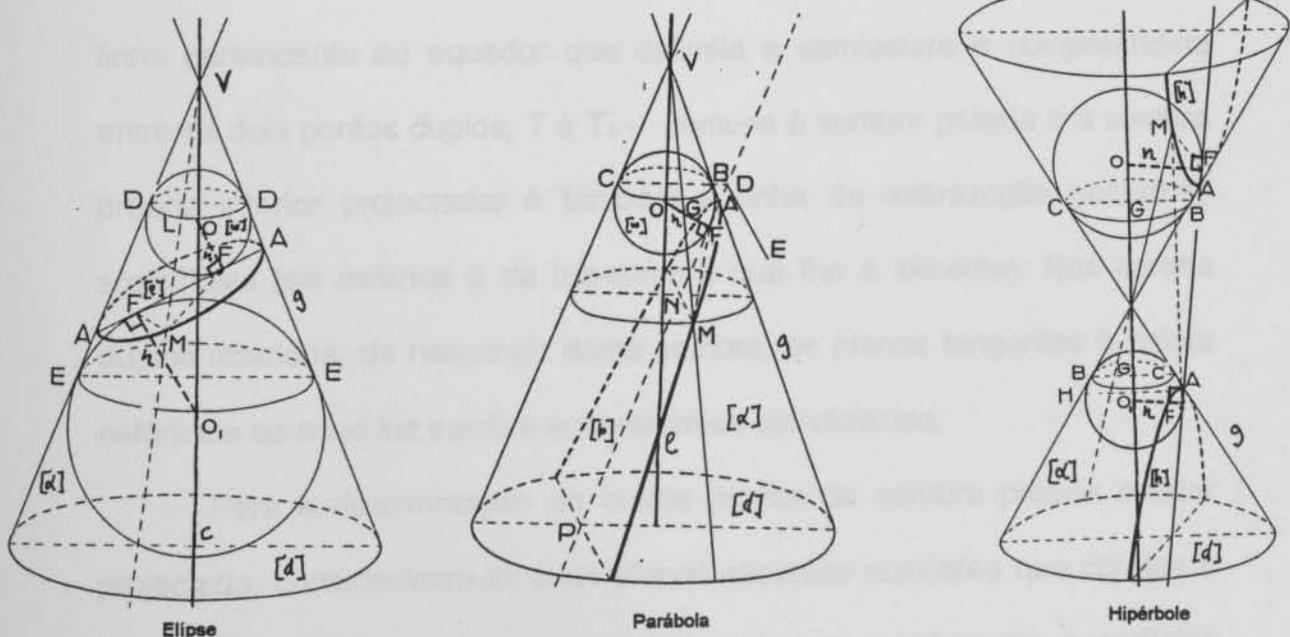


Fig.41-Cónicas possíveis na superfície cónica, em relação à posição do plano secante.

⁷⁹ Prof. Borges de Sequeira, *Lições de Geometria Descritiva*, Livro 1 – Scientia editora, 3ª edição, 1940, pág. 131. Este teorema foi enunciado originalmente por Pierre Dandelin na sua obra *Sur l'emploi des projection stereographique en Géometrie*, Gand, 1827.

As secções produzidas numa superfície cónica são de quatro tipos: *circunferências, elipses, parábolas* ou *hipérboles*; o teorema referido, permite, com rigor, representar os focos das cónicas secções, facilitando, deste modo, o rigor no traçado das ditas cónicas. Na figura 41 estão representados os focos das cónicas-secções, respectivamente: da elipse – dois focos; da parábola – um foco e; da Hipérbole – dois focos.

A fig.42 ilustra, numa representação por dupla projecção ortogonal, as sombras própria, projectada no v_0 e própria interior projectada na superfície, de uma semisuperfície esférica côncava iluminada por um foco de luz pontual. Para a determinação das linhas de separatriz de sombra própria e de sombra própria interior projectada, consideraram-se-se, para o efeito, as superfícies cónicas, concordante e secante, de vértice F, foco de luz pontual.

A linha de concordância entre as duas superfícies, a concordante e a dada, permitiu determinar a porção de paralelo que é a linha de separatriz de sombra própria. A linha de sombra própria interior projectada na parte interior da porção de superfície esférica é a projecção nesta, da porção de linha pertencente ao equador que delimita a semiesfera e compreendida entre os dois pontos duplos, T e T_1 – comuns à sombra própria e à sombra própria interior projectada; é também a linha de intersecção das duas superfícies (da esférica e da luz-sombra que lhe é secante). Nos pontos duplos referidos, de nascença desta sombra, os planos tangentes à calote esférica e ao cone luz sombra encontram-se coincidentes.

Para a determinação de outros pontos de sombra própria interior projectada, consideráram-se mais planos secantes auxiliares que contêm o Foco de Luz. Estes planos secantes seccionam ambas as superfícies segundo geratrizes que são os próprios raios de luz e de sombra e, a porção

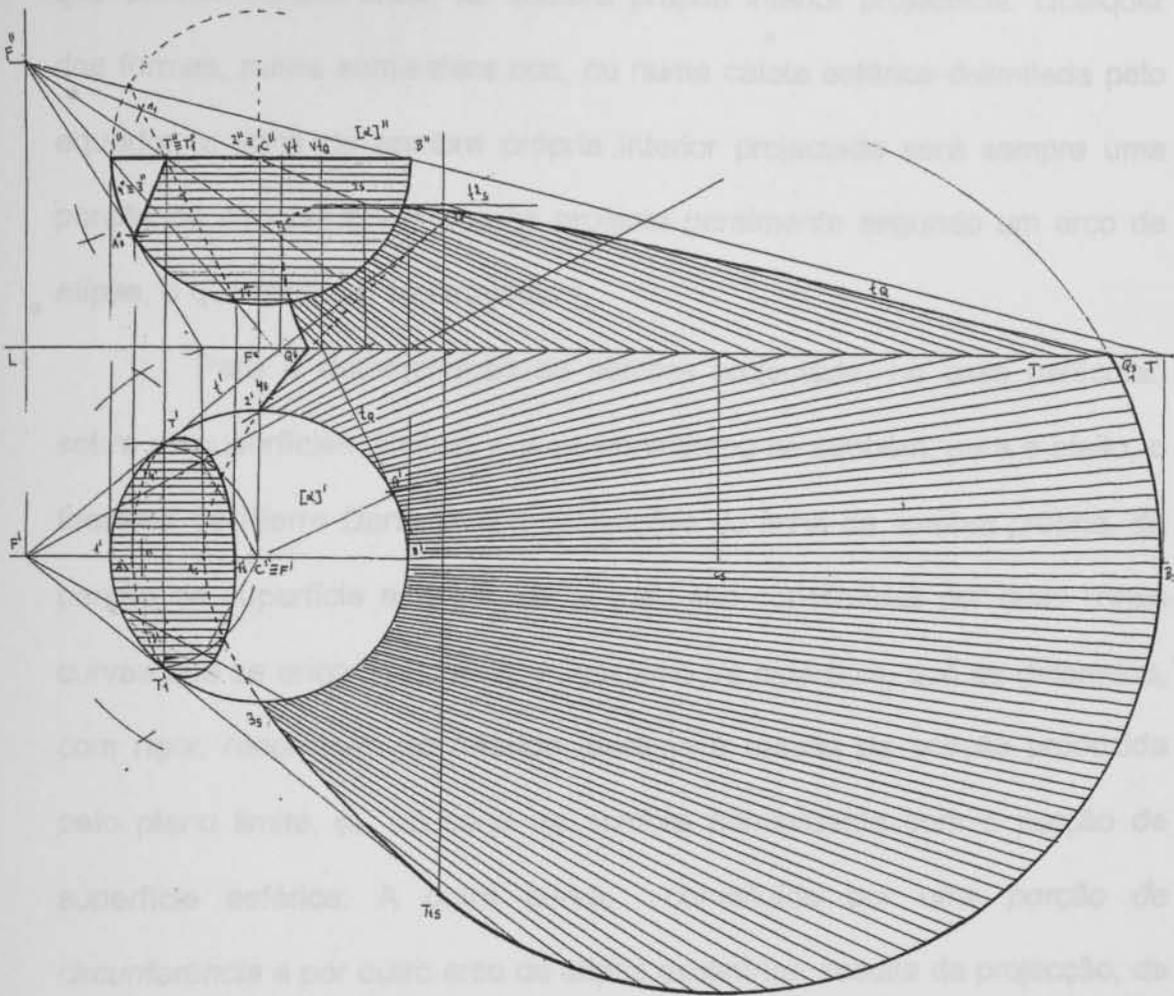


Fig.42 – Sombras produzidas numa porção de superfície esférica, perante um foco luminoso.

de superfície esférica segundo paralelos de raio variável. Estes planos permitem, ainda, fazer a intersecção das duas superfícies são, por isso, planos úteis. Cada plano útil intersecta a porção de superfície esférica segundo uma porção de paralelo com um determinado raio, que é interceptado pelo raio luminoso correspondente que contém o foco luminoso e pertence ao plano secante utilizado. Estas operações fizeram-se em rebatimento. Se pretendessemos as tangentes nos pontos da linha bastaria, para o efeito, considerarem-se a intersecção dos planos tangentes à porção

de superfície esférica, nos pontos pertencentes àquela linha, com o plano que contém aquela linha, de sombra própria interior projectada. Qualquer das formas, numa semiesfera oca, ou numa calote esférica delimitada pelo equador, a linha de sombra própria interior projectada será sempre uma porção de circunferência que se projecta geralmente segundo um arco de elipse, o que facilita o seu traçado.⁸⁰

Para a determinação da sombra projectada, no caso particular, sobre as superfícies limites, ν_0 e φ_0 , considerou-se também, para o efeito, o teorema de Pierre Dandelin. As projecções da linha de sombra própria, da porção de superfície esférica, no ν_0 e φ_0 , são constituídas por duas linhas curvas que se encontram: uma, é um *arco de hipérbole*, que se determina, com rigor, recorrendo ao referido teorema e resulta da secção produzida pelo plano limite, φ_0 , no cone de sombra concordante com a porção de superfície esférica. A outra curva, constituída por uma *porção de circunferência* e por outro arco de elipse excêntrica, resulta da projecção, de uma porção do equador e da linha de sombra própria, na superfície limite ν_0 .

O teorema anterior permite ainda determinar, **com rigor**, as projecções centrais de uma esfera em perspectiva linear plana. Considerou-se, para o efeito, na fig.43, uma superfície esférica iluminada por uma direcção de luz determinada.

A secção resultante do cone visual concordante com a esfera, poderá ser de três tipos: *circunferência*, quando o eixo do cone visual concordante for perpendicular ao quadro; *elipse*, caso geral, quando o eixo do cone visual for oblíquo ao quadro e a esfera não estar tangente nem secante ao plano neutro; *parábola*, quando a esfera for tangente ao plano

⁸⁰ Cfr. pp.123-124.

neutro; e, *hipérbole*, quando a esfera se encontrar secante em relação ao plano neutro.

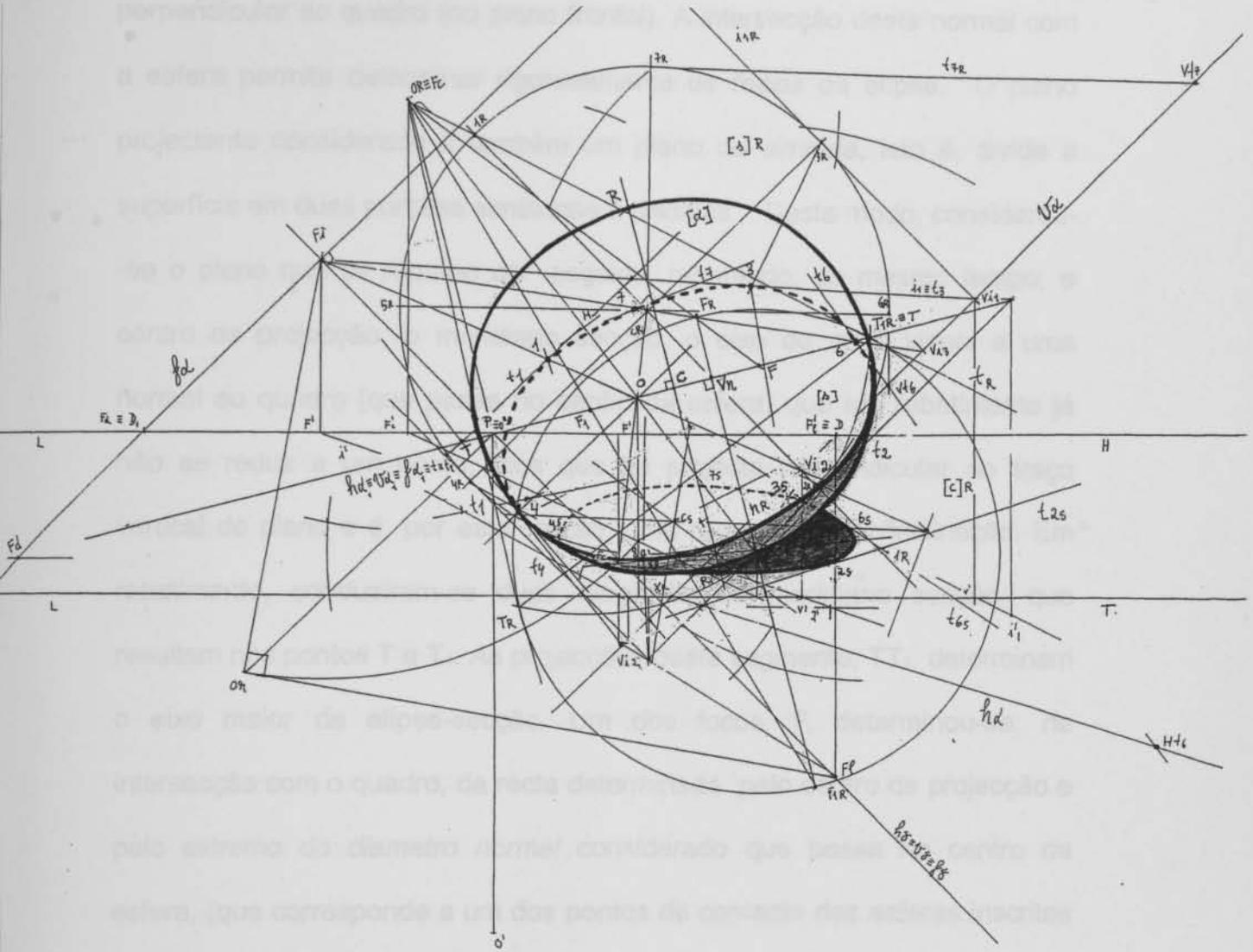


Fig. 43 – Projecções centrais em perspectiva linear plana de uma esfera e sombras própria e projectada no geometral

A mesma fig.43 representa o caso geral, elipse, das projecções centrais de uma superfície esférica, em perspectiva linear plana. Considerou-se, para efeito de sombras, a direcção luminosa convencional. Para a determinação das projecções centrais da esfera, que resulta numa elipse, considerou-se novamente o teorema de P. Dandelin. Assim, para a determinação dos focos e do eixo maior da elipse-secção, considerou-se o

plano projectante que contém o centro de projecção, o centro da esfera e é perpendicular ao quadro, ou seja, contém a *normal* à superfície perpendicular ao quadro (ou plano frontal). A intersecção desta normal com a esfera permite determinar rigorosamente os *focos* da elipse. O plano projectante considerado é também um plano de *simetria*, isto é, divide a superfície em duas porções simétricas e distintas. Deste modo, considerou-se o plano que se rebateu de seguida, rebatendo, ao mesmo tempo, o centro de projecção, o meridiano secção, o eixo do cone visual e uma normal ao quadro (que passa no centro da esfera) que em rebatimento já não se reduz a um ponto, mas que se projecta perpendicular ao traço vertical do plano e é, por esta razão, uma recta de maior inclinação. Em rebatimento, conduziram-se duas tangentes ao meridiano secção, que resultam nos pontos T e T₁. As projecções deste segmento, TT₁, determinam o eixo maior da elipse-secção. Um dos focos, F, determinou-se, na intersecção com o quadro, da recta determinada pelo centro de projecção e pelo extremo do *diametro normal* considerado que passa no centro da esfera, (que corresponde a um dos pontos de contacto das esferas inscritas ao cone visual, com o quadro), onde, a distância deste foco ao centro do segmento, TT₁, eixo maior, permite encontrar o outro foco, F₁. Como o eixo maior será sempre perpendicular ao eixo menor, este, facilmente se determinou, considerando os focos e a perpendicular ao eixo maior que passa no centro C do eixo maior e da elipse. Assim, com a medida CT, fez-se centro num dos focos e traçou-se o arco que intersecta a perpendicular ao eixo maior nos pontos, R e R₁, extremos do eixo menor. A elipse fica assim determinada pelos dois eixos.

Para a determinação da linha de separatriz de sombra própria,

bem como da sombra projectada no v_0 , considerou-se o cilindro luz-sombra concordante com a esfera. Sabendo, à priori, que a separatriz existirá num plano perpendicular à direcção luminosa, plano diametral da separatriz, determinou-se a *orientação perpendicular* à direcção luminosa e, conseqüentemente, o plano da separatriz – que terá aquela orientação luminosa determinada anteriormente e conterá o centro da esfera. Rebatendo o plano α da separatriz, rebateu-se, ao mesmo tempo, a própria separatriz que lhe pertence e que não é mais do que uma circunferência, cujo centro é o próprio centro da esfera. De seguida e, em rebatimento, considerou-se o octógono circunscrito à circunferência, permitindo, desta forma, traçar as tangentes à separatriz. Estas tangentes mais oito pontos suficientes foram contrarebatidos em seguida, determinando, desta forma, e com rigor as projecções centrais da separatriz.

Para a determinação rigorosa da sombra projectada no v_0 , consideraram-se as sombras naquele plano, não apenas dos oito pontos mas, também, das respectivas tangentes, facilitando o traçado da elipse – sombra projectada.

Curiosamente, em qualquer tipo de *representação axonométrica ortogonal*, a projecção directa no plano axonométrico de uma superfície esférica, será sempre uma circunferência. Esta projecção, resulta da intersecção, com o quadro, ou plano axonométrico π , do cilindro projectante, concordante com a esfera. As geratrizes deste cilindro têm obviamente a direcção das projectantes perpendiculares ao quadro.

A fig.44 representa, numa representação isométrica, as sombras própria e projectada de uma esfera no plano coordenado horizontal, v_0 . Para o efeito, considerou-se, também, uma direcção luminosa l . Para a

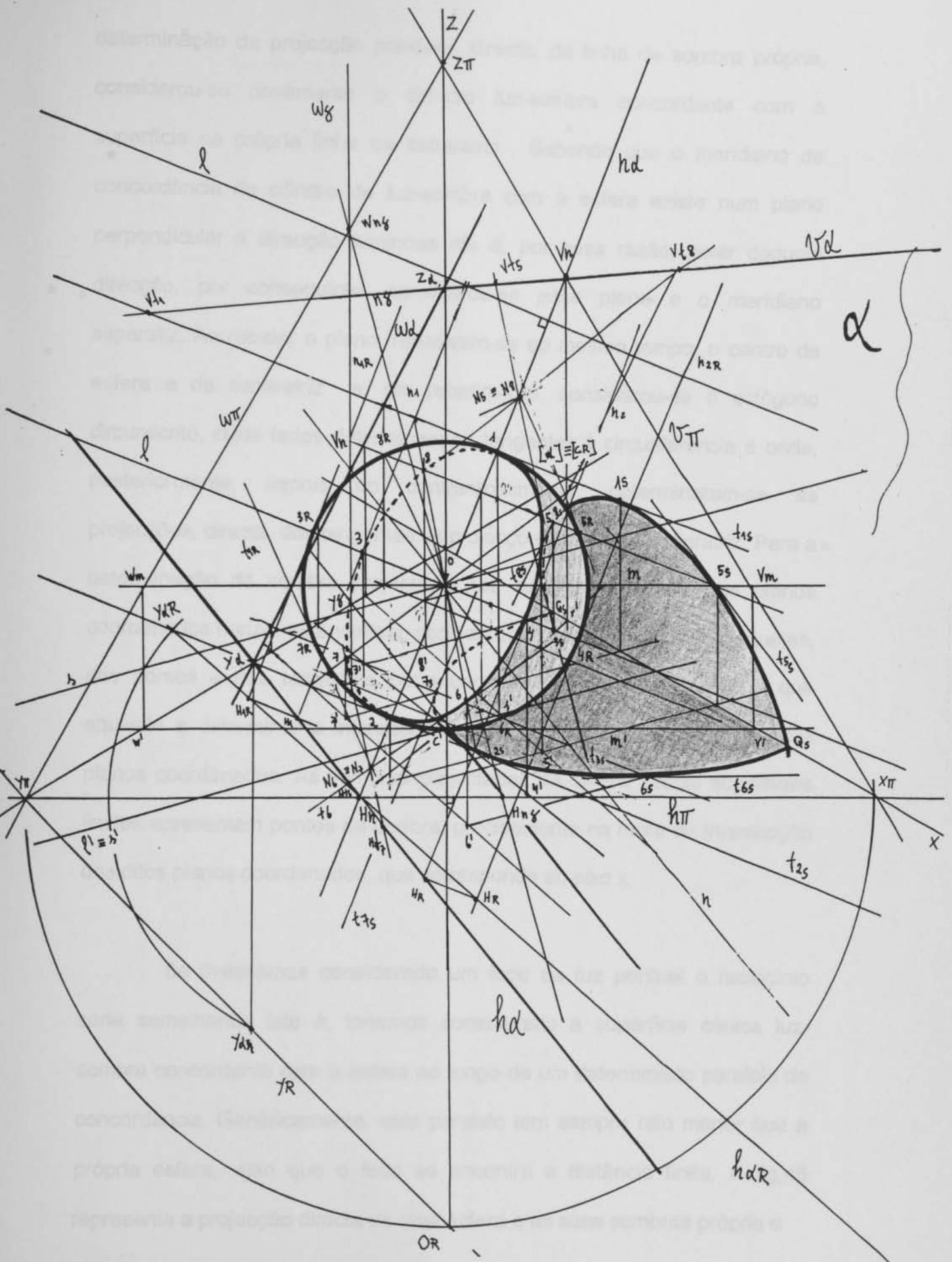


Fig.44 – Representação isométrica ortogonal de uma esfera e sombras própria e projectada, nos planos coordenados horizontal e vertical, a partir de uma direcção luminosa dada.

determinação da projecção principal, directa, da linha de sombra própria, considerou-se novamente o cilindro luz-sombra concordante com a superfície na própria linha de separatriz. Sabendo que o meridiano de concordância do cilindro de luz-sombra com a esfera existe num plano perpendicular à direcção luminosa ele é, por essa razão, polar daquela direcção, por conseguinte, considerou-se esse plano e o meridiano separatriz. Ao rebater o plano, rebateram-se ao mesmo tempo, o centro da esfera e da separatriz e, em rebatimento, considerou-se o octógono circunscrito, cujos lados determinam as tangentes à circunferência e onde, posteriormente, depois do contrarebatimento, determinaram-se as projecções, directa, das tangentes às projecções da elipse separatriz. Para a determinação da sombra projectada nas superfícies limites, nos planos coordenados horizontal e vertical, consideraram-se as projecções, naqueles, dos pontos e das tangentes pertencentes à linha de separatriz, o que equivale a determinar a intersecção do cilindro de sombra com os ditos planos coordenados. As sombras projectadas da esfera nestas superfícies limites apresentam pontos de quebra, precisamente na recta de intersecção dos ditos planos coordenados, que corresponde ao eixo x.

Se tivéssemos considerado um foco de luz pontual o raciocínio seria semelhante, isto é, teríamos considerado a superfície cónica luz-sombra concordante com a esfera ao longo de um determinado paralelo de concordância. Genéricamente, este paralelo tem sempre raio menor que a própria esfera, visto que o foco se encontra a distância finita. A fig.45 representa a projecção directa de uma esfera e as suas sombras própria e

Fig. 45 - Representação da projecção directa de uma esfera e das suas sombras própria e projectada nas superfícies limites horizontal e vertical, considerando um foco de luz pontual.

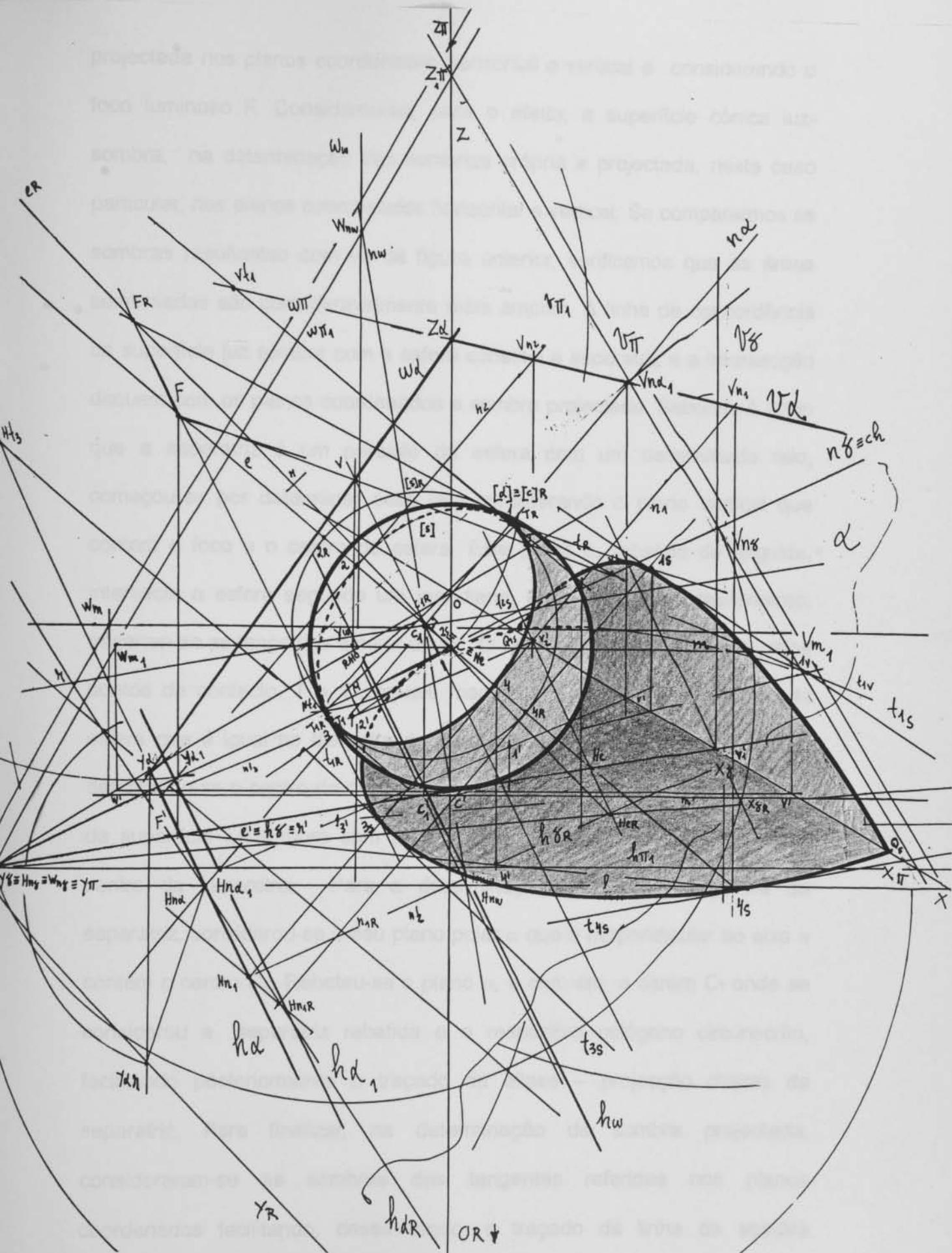


Fig.45 – Representação isométrica ortogonal de uma esfera e sombras própria e projectada, nos planos coordenados horizontal e vertical, perante um foco luminoso.

projectada nos planos coordenados horizontal e vertical e considerando o foco luminoso F. Considerou-se, para o efeito, a superfície cónica luz-sombra, na determinação das sombras própria e projectada, neste caso particular, nos planos coordenados horizontal e vertical. Se compararmos as sombras resultantes com as da figura anterior, verificamos que as áreas sombreadas são consideravelmente mais amplas. A linha de concordância da superfície luz sombra com a esfera constitui a separatriz e a intersecção daquela com os planos coordenados a sombra projectada. Sabendo à priori que a separatriz é um paralelo da esfera com um determinado raio, começou-se por determinar esse raio considerando o plano vertical que contem o foco e o centro da esfera. Este plano δ , rebatido de seguida, intersecta a esfera segundo um meridiano, no qual, após o rebatimento, traçaram-se as tangentes a partir de FR. O segmento de recta definido pelos pontos de contacto, T e T₁, àquele meridiano determinam uma corda da esfera que é igual ao diâmetro do paralelo da separatriz. Posteriormente, determinou-se o centro da corda, C₁, que resultou da intersecção do eixo e da superfície luz-sombra com a dita corda, determinando desse modo o centro da separatriz. Para a determinação da projecção directa da separatriz, considerou-se o seu plano polar α que é perpendicular ao eixo e contém o centro C₁. Rebateu-se o plano α , e com ele, o centro C₁ onde se considerou a separatriz rebatida e o respectivo octógono circunscrito, facilitando posteriormente o traçado da elipse – projecção directa da separatriz. Para finalizar, na determinação da sombra projectada, consideraram-se as sombras das tangentes referidas nos planos coordenados facilitando, desse modo, o traçado da linha de sombra projectada.

Depois de se fazer o levantamento as linhas de esboço de cada superfície em particular, cônicas, cilíndricas e esféricas, exemplificam-se, neste capítulo, alguns exemplos e formas compostas com aquelas superfícies e que se aplicam a alguns esboços práticos.

Exemplificando, com o exemplo de superfícies tangentes, observa-se a fig. 48 que representa um conjunto composto por uma região geométrica, delimitada por partes e partes de superfícies cônicas concordantes e tangentes a duas planas. Nesta figura foi aplicado o método das projecções centrais em perspectiva linear plana.

Ao observar-se a figura, vemos que a projeção do círculo que é tangente às duas planas verticais e que forma o lado inferior é conhecido

7- Formas e conjuntos compostos com os três tipos de superfícies atrás referidas. Superfícies tangentes, concordantes e secantes. Sombra de sólidos sobre sólidos e tangentes nos pontos dessa linha. Métodos para a determinação de sombras considerando a luz directa. Alguns exemplos práticos.

Um conjunto composto está dado que possuem respectivamente em C , C_1 e C_2 - arcos representados em rebatimento. Para a determinação das projecções centrais deste conjunto recorreu-se aos métodos directo e dos pontos de fuga, sendo conhecido previamente o estado e a planta, bem como o ângulo que o plano da fachada faz com LT ou com o qx . Considerou-se o plano da fachada de espelho rebatido no qx e procedeu-se, em seguida, ao seu alinhamento com o eixo da planta de fuga das cordas da arco do rebatimento do plano α , P_1 . A fachada posterior a que corresponde outro esboço é gerada da primeira e existe num plano vertical paralelo ao da fachada do conjunto.

Para a determinação da sombra própria interior projectada dentro do

Depois de se terem exemplificado as linhas de separatriz de cada superfície em particular, cónica, cilíndrica e esférica, exemplificam-se, neste capítulo, algumas variantes e formas compostas com aquelas superfícies e que se aplicam a alguns exemplos práticos.

Exemplificando com o exemplo de *superfícies tangentes*, observe-se a fig. 46 que representa um conjunto composto por uma região geométrica, delimitada por planos e porções de superfícies cilíndricas concordantes e tangentes a dois planos. Nesta figura foi utilizado o método por projecções centrais em perspectiva linear plana.

Ao observar-se a figura, vemos que a porção de cilindro que é tangente aos dois planos verticais e que formam o túnel interior, é composto por três concordâncias de cilindros de revolução. A directriz é, neste caso particular, um arco abatido, que se determinou sendo dados previamente o vão e a flecha. Depois de se terem determinado rigorosamente os três centros que determinam as três curvas concordantes da directriz, facilmente se entende que este cilindro composto comporta três eixos que passam respectivamente em C , C_1 e C_2 – apenas representados em rebatimento. Para a determinação das projecções centrais deste conjunto recorreu-se aos métodos directo e dos pontos de fuga, sendo dados previamente o alçado e a planta, bem como o ângulo que o plano da fachada faz com LT ou com o φ_0 . Considerou-se o plano da fachada do conjunto rebatido no φ_0 e procedeu-se, em seguida, ao seu alçamento com o auxílio do ponto de fuga das cordas de arco do rebatimento do plano δ , F_c . A fachada posterior a que corresponde outro arcoabatido é gêmea da primeira e existe num plano vertical paralelo ao da fachada do conjunto.

Para a determinação da sombra própria interior projectada dentro do

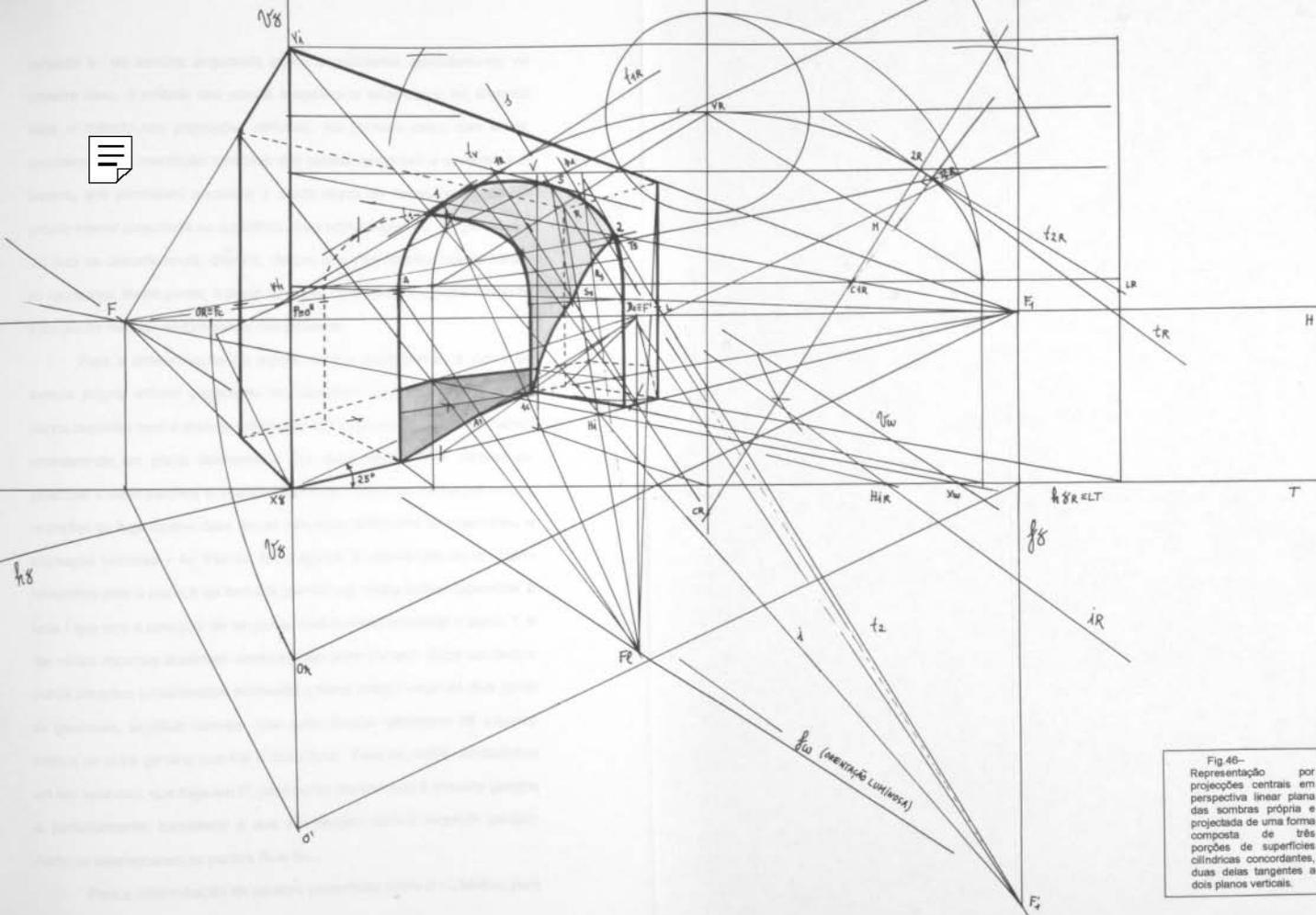


Fig.46-
 Representação por projeções centrais em perspectiva linear plana das sombras própria e projectada de uma forma composta de três porções de superfícies cilíndricas concorrentes, duas delas tangentes a dois planos verticais.

conjunto e da sombra projectada sobre o geometral, considerou-se, no primeiro caso, o *método dos planos tangentes e secantes* e, no segundo caso, o *método das projecções oblíquas*. No primeiro caso, com efeito, considerou-se a orientação luminosa dos planos tangentes e secantes luz-sombra, que permitiram encontrar o *ponto duplo de nascença* da sombra própria interior projectada na superfície. Este ponto duplo real, T , pertence a um arco de circunferência, directriz, de um dos três cilindros concordantes de raio menor. Neste ponto, o plano tangente luz-sombra e o plano tangente à porção de cilindro, encontram-se coincidentes.

Para a determinação de outros pontos pertencentes à curva de sombra própria interior projectada na superfície, consideraram-se outros planos secantes com a mesma orientação luminosa e que se determinaram considerando um plano determinado por duas rectas, uma paralela às geratrizes e outra paralela à direcção luminosa. Como se conhecem ambos os pontos de fuga destas duas rectas referidas, facilmente se determinou a orientação luminosa $-f_{\omega}$. Fez-se, em seguida, a intersecção de um plano luz-sombra com o plano δ da fachada permitindo, desta forma, determinar a recta i que terá a direcção da tangente, que permite encontrar o ponto T , e das várias secantes auxiliares consideradas para o efeito. Cada um destes planos secantes considerados intersecta o túnel interior segundo dois pares de geratrizes, significa também que uma dessas geratrizes irá produzir sombra na outra geratriz que lhe é complanar. Para tal, basta conduzirmos um raio luminoso, que fuga em F_1 , pelo ponto pertencente à primeira geratriz e , posteriormente, considerar a sua intersecção com a segunda geratriz. Assim se determinaram os pontos R_s e S_s .

Para a determinação da sombra projectada sobre o v_0 , bastou, para

o efeito, considerar a intersecção dos vários raios luminosos com aquela superfície limite. Nos pontos de sombra projectada pertencentes a porções curvas do conjunto, consideraram-se as projecções das tangentes e as respectivas sombras conferindo, desta forma, maior rigor no traçado da linha de sombra projectada.

Exemplificando agora com duas porções de *superfícies concordantes*, damos, como exemplo, um nicho composto por um quarto de superfície esférica aberto, concordante com um semi cilindro, igualmente aberto. Neste conjunto, ilustrado na fig.47, para a obtenção das projecções centrais e das sombras, própria interior projectada dentro da superfície (autoprojectada) e parcialmente sobre o geometral, v_0 , recorreu-se também à representação por dupla projecção ortogonal.

Definidos previamente, em dupla projecção ortogonal, as coordenadas desta forma composta procedeu-se, de seguida, à determinação das suas projecções centrais. Assim, utilizaram-se os métodos directo e dos pontos de fuga permitindo, deste modo, obter as projecções centrais das semicircunferências do geometral e do equador de concordância – onde se encontram a metade da superfície cilíndrica de revolução, aberta, concordante com o quarto de superfície esférica. Para tal, consideraram-se as tangentes em cinco pontos das semicircunferências que, sendo paralelas, têm o mesmo ponto de fuga.

Para a determinação das projecções centrais directa do quarto de superfície esférica considerou-se, para o efeito, e apenas, outro meridiano de raio máximo (que delimita a testa do nicho) que é tangente às duas rectas verticais que contêm os pontos 1 e 5. Estas duas geratrizes verticais

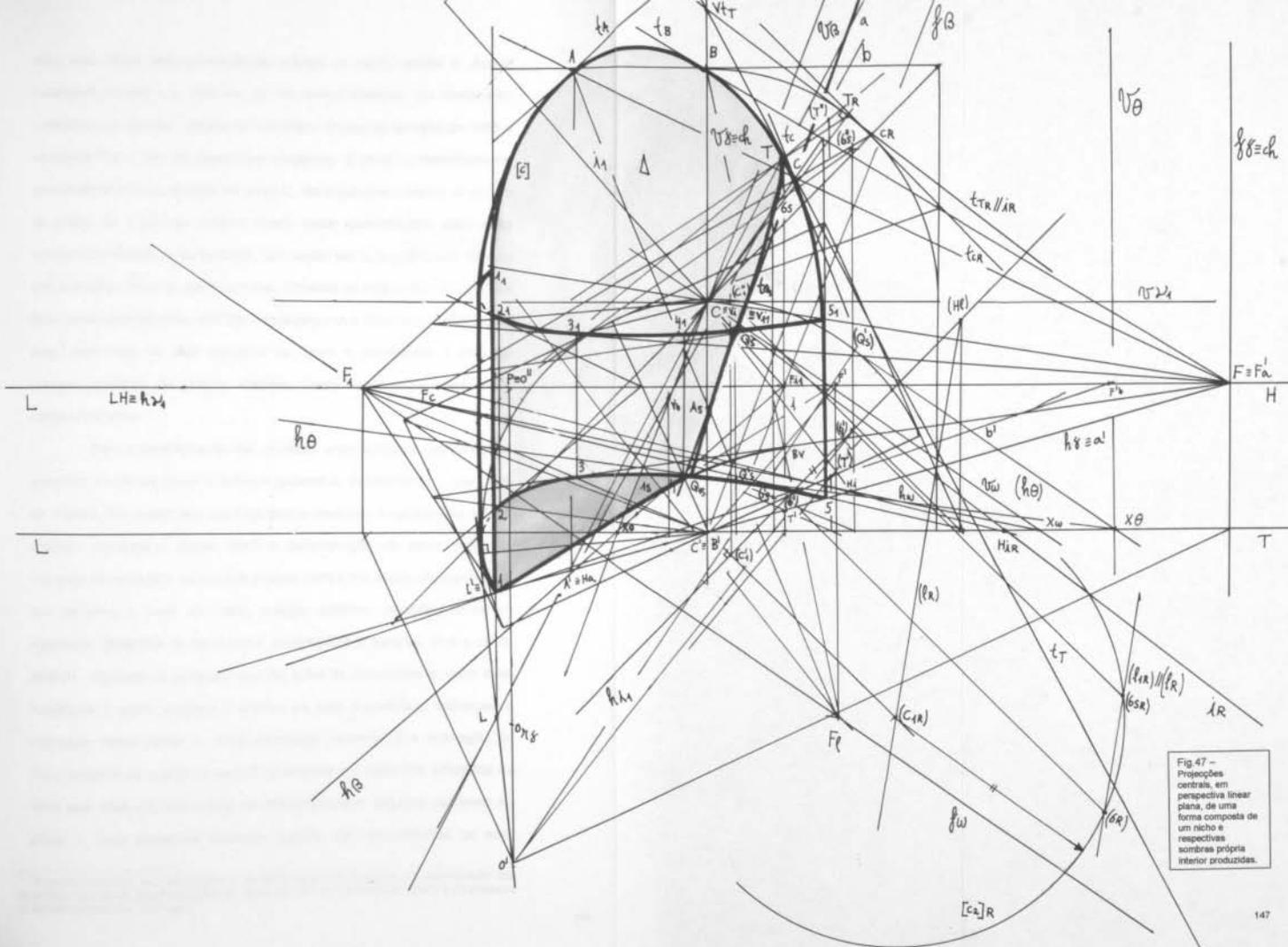


Fig. 47 -
 Projeções
 centrais, em
 perspectiva linear
 plana, de uma
 forma composta de
 um nicho e
 respectivas
 sombras própria
 interior produzidas.

mais esta última semicircunferência existem no plano vertical δ . Assim, rebateu-se o plano δ e, com ele, os elementos referidos. Em rebatimento considerou-se, apenas, metade do meridiano circular da fachada do nicho e os pontos B e C com as respectivas tangentes. O ponto A, determinou-se, considerando a recta de nível do ponto C. As projecções centrais da porção do quarto de superfície esférica foram assim determinadas pelas duas semicircunferências: a da fachada, que existe em δ , e a de concordância com a porção cilíndrica que é de nível. Obtendo as projecções centrais das duas semicircunferências referidas, considerou-se a linha envolvente destas duas, desenhada no lado esquerdo da figura e pertencente à linha de contorno aparente da porção esférica. Deste modo, completou-se o conjunto do nicho. ⁸¹

Para a determinação das sombras própria interior projectada na superfície (autoprojectada) e sobre o geometral, considerou-se, para além do *método das superfícies concordantes e secantes*, o *método dos planos secantes luz-sombra*. Assim, para a determinação do ponto duplo de nascença da separatriz de sombra própria interior, no interior da superfície e que pertence à testa do nicho, porção esférica, consideraram-se as superfícies cilíndricas de luz-sombra, concordante e secante, com a calote esférica.. Partindo do princípio que na linha de concordância entre duas superfícies o plano tangente é comum as duas superfícies, definimos a orientação desse plano, $f\omega$. Esta orientação luminosa é a orientação do plano tangente ao quarto de superfície esférica e à superfície **cilíndrica de nível que com ela concorda no semimeridiano [c] que pertence ao plano δ** . Esta *superfície cilíndrica auxiliar* tem naturalmente as suas

⁸¹ Também poderíamos ter considerado o teorema de Pierre Dandelin na determinação das projecções centrais da porção esférica do nicho. Tal não foi considerado, dada a simplicidade do problema neste caso particular.

geratrizes a fugar em Fi . Considerou-se posteriormente um plano ω arbitrário com aquela orientação e a sua intersecção com o plano δ , resultando a recta i . Esta recta i determina a *direcção da tangente* ao meridiano de raio maior que contém os pontos A, B e C e permite determinar, com rigor, o ponto duplo real de contacto T. Esta operação foi feita em rebatimento, onde se determinou o ponto e a respectiva tangente que foram contrarebatidas de seguida. Para a determinação de mais um ponto da separatriz de sombra própria interior projectada na superfície, particularmente na área esférica, considerou-se o auxílio da representação por dupla projecção ortogonal. Deste modo, considerou-se o plano vertical λ_1 que comporta aquela direcção luminosa *convencional* e que intersecta o quarto de superfície esférica segundo a porção de meridiano $[c_2]$ de centro C_1 , cujo raio, é ligeiramente menor ao do meridiano de δ . Posteriormente, rebateu-se o plano λ_1 e com ele a porção de meridiano $[c_2]$ e um raio luminoso l que parte do ponto 6. Este ponto 6 produz sombra no ponto $6s$, operação feita em rebatimento. Feito o contrarebatimento do ponto $6s$, determinou-se a sua projecção central que, com os pontos T e Q, permitiram desenhar a porção da linha de separatriz própria interior correspondente à porção de um quarto de superfície esférica do nicho.

Para a determinação dos pontos $1s$ e As , pertencentes à região cilíndrica do nicho, considerou-se o método dos planos secantes e procedeu-se à metodologia adoptada na fig.46. De notar, que o ponto Qs que pertence ao equador do nicho é **um ponto de inflexão**, logo, admite uma tangente especial. O ponto Qs resultou da intersecção do plano β que comporta a linha de separatriz interior correspondente à parte esférica com o equador de nível, para tal, considerou-se o plano ν_1 deste equador. A

respectiva tangente, naquele ponto, determinou-se, na intersecção do plano β com o plano θ , tangente ao nicho ao longo da geratriz que contém Q_s . Considerados os pontos 1_s , Q_{1s} (de quebra), A_s , 6_s , Q_s e T , e as tangentes nestes dois últimos, procedeu-se à determinação rigorosa da linha que separa as regiões em luz e em sombra.

Na determinação das sombras de *superfícies secantes* ou que se intersectam, intervêm, para além dos métodos e teoremas referidos anteriormente, o **teorema dos pontos de perca e quebra** e o **teorema das superfícies que se intersectam** –referidos na págs. 114 e 118 do presente ensaio.

A fig.48 que representa as sombras própria, própria interior projectada na superfície e projectada nos planos de projecção, de uma forma composta de porções de superfícies cilíndricas e esféricas, oferece um exemplo da aplicação do teorema dos pontos de perca e quebra, mais propriamente, no ponto P_s . Este ponto é um ponto de perca e quebra, resulta da projecção da separatriz da calote esférica exterior que compõe o sólido, com a separatriz da porção cilíndrica que sustenta o conjunto, isto é, resulta da intersecção da linha de sombra projectada do quarto de superfície esférica sobre a porção de superfície cilindro vertical. Importante reter é que, nesse ponto, a tangente t_s é o próprio raio luminoso.

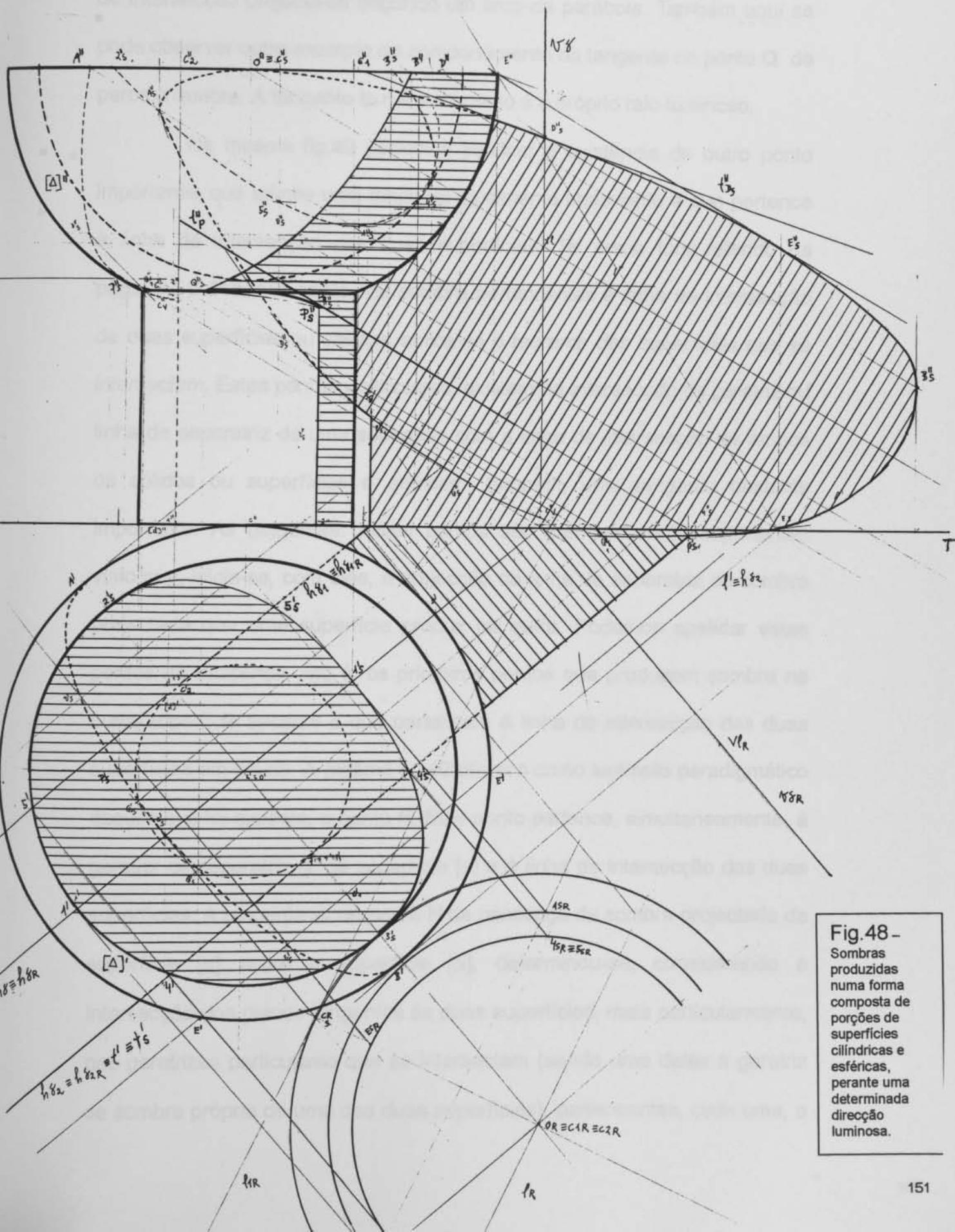


Fig.48 - Sombras produzidas numa forma composta de porções de superfícies cilíndricas e esféricas, perante uma determinada direcção luminosa.

Na fig.49, que representa um caso particular de intersecção de duas superfícies cónicas de revolução elíptica, a projecção vertical da linha de intersecção projecta-se segundo um arco de parábola. Também aqui se pode observar outro exemplo do comportamento da tangente no ponto Q de perca e quebra. A tangente t_q naquele ponto é o próprio raio luminoso.

Na mesma fig.49 podemos verificar a existência de outro ponto importante, que admite uma tangente igualmente importante e que pertence à linha de intersecção das duas superfícies. Tal como fora referido na págs.117 e 118, nos pontos de sombra pertencentes à linha de intersecção de duas superfícies ou sólidos, aplica-se o *teorema das superfícies que se intersectam*. Estes pontos particulares, existem na intersecção da geratriz ou linha de separatriz de uma superfície com a linha de intersecção de ambos os sólidos ou superfícies e admitem, também, uma tangente bastante importante. As tangentes nestes pontos são particularmente importantes visto que, inicia-se, com eles, a projecção da linha de separatriz de sombra projectada que uma superfície produz na outra. Podemos apelidar estes pontos de *nascença*, isto é, os primeiros pontos que produzem sombra na outra superfície secante e que pertencem à linha de intersecção das duas superfícies em causa. A mesma fig.49 oferece como exemplo paradigmático daquilo que foi exposto, o ponto N . Este ponto pertence, simultaneamente, à geratriz de separatriz g_1 da superfície $[\omega]$ e à linha de intersecção das duas superfícies. A tangente t_n , no ponto N de nascença da sombra projectada da superfície $[\omega]$ sobre a superfície $[\alpha]$, determinou-se, considerando a intersecção dos planos tangentes às duas superfícies, mais particularmente, nas geratrizes particulares que se intersectam (sendo uma delas a geratriz de sombra própria de uma das duas superfícies), pertencentes, cada uma, a

cada superfície. Estas geratrizes estão representadas na figura por g_1 e g_3 e os respectivos planos tangentes, por θ e θ_1 . Bastou para o efeito, considerar apenas, a intersecção dos seus traços horizontais, Ht_N , que, com o ponto N , determinam a tangente procurada.

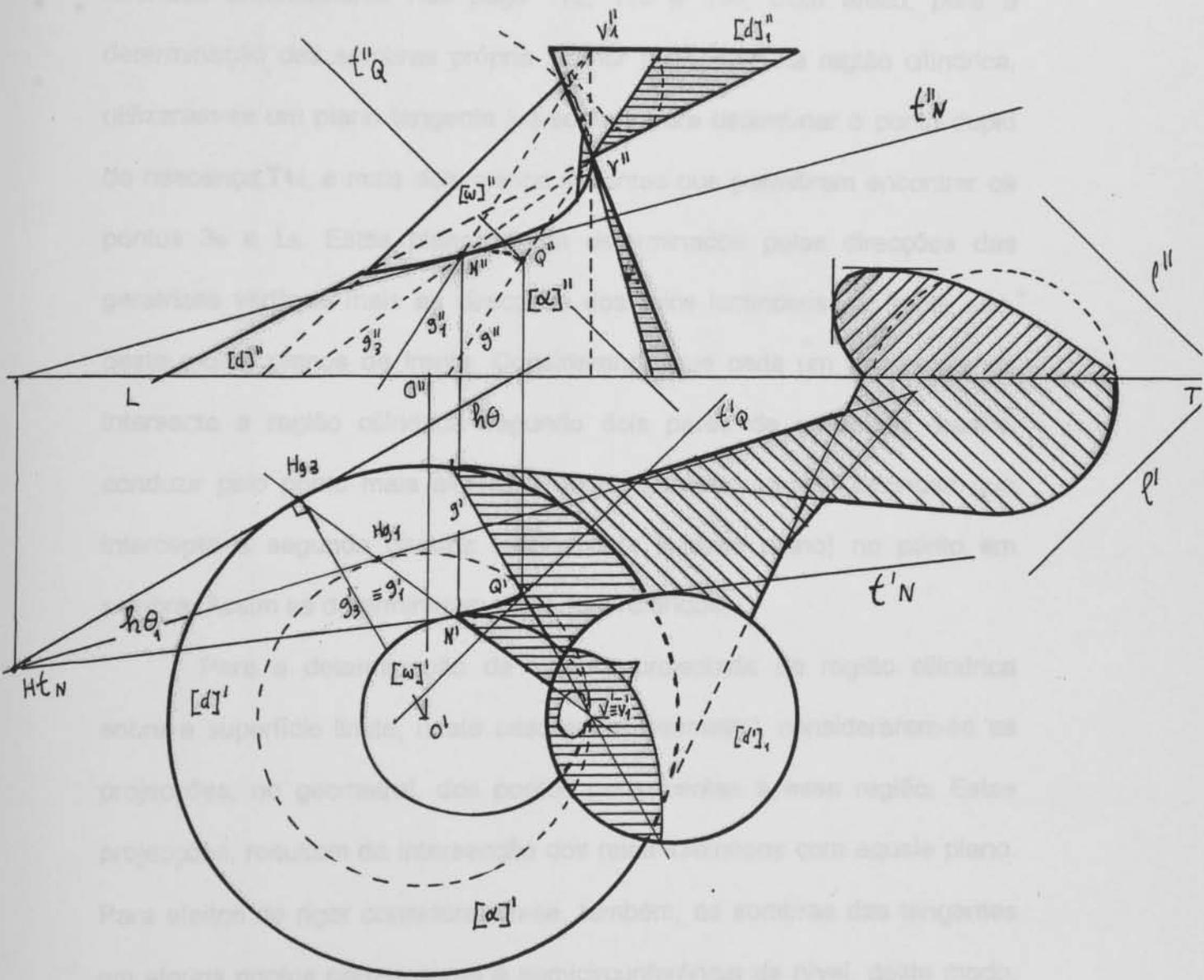


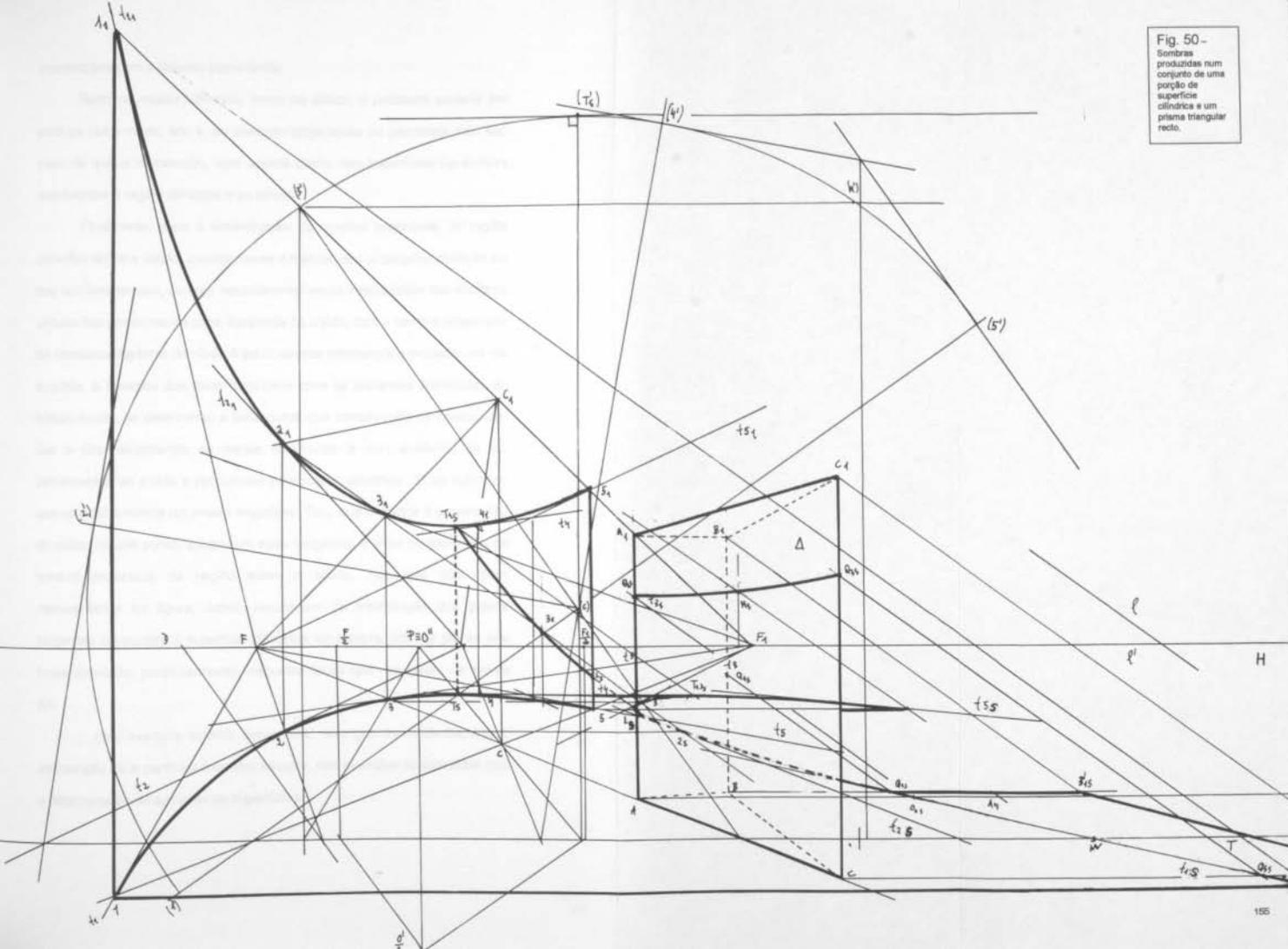
Fig.49 - Sombras produzidas num conjunto formado por uma intersecção de duas superfícies cónicas.

Exemplificando na fig. 50 com um conjunto formado por uma porção ou região de superfície cilíndrica circular e um prisma triangular recto e considerando o quadro transparente, determinaram-se as sombras do conjunto, no qual intervieram o *método dos planos tangentes e secantes* e, também, o *método das projecções oblíquas ou das sombras virtuais*, referidos anteriormente nas págs 112, 113 e 116. Com efeito, para a determinação das sombras própria interior projectada na região cilíndrica, utilizaram-se um plano tangente luz-sombra para determinar o ponto duplo de nascença, T_{1s} , e mais dois planos secantes que permitiram encontrar os pontos $3s$ e Ls . Estes planos ficam determinados pelas direcções das geratrizes verticais mais as direcções dos raios luminosos de frente são, deste modo, planos de frente. Considerando que cada um destes planos intersecta a região cilíndrica segundo dois pares de geratrizes, bastou conduzir pelo ponto mais alto da primeira geratriz um raio luminoso que intercepta a segunda geratriz (pertencente a esse plano) no ponto em sombra. Assim se determinaram os pontos referidos.

Para a determinação da sombra projectada da região cilíndrica sobre a superfície limite, neste caso sobre geometral, consideraram-se as projecções, no geometral, dos pontos pertencentes a essa região. Estas projecções, resultam da intersecção dos raios luminosos com aquele plano. Para efeitos de rigor consideraram-se, também, as sombras das tangentes em alguns pontos pertencentes à semicircunferência de nível, deste modo, facilmente se desenhou a sombra projectada.

Para a determinação da sombra projectada do sólido Δ sobre o geometral procedeu-se do mesmo modo, isto é, conduziram-se raios luminosos tangentes ao sólido e consideraram-se as respectivas

Fig. 50-
 Sombras
 produzidas num
 conjunto de uma
 porção de
 superfície
 cilíndrica e um
 prisma triangular
 recto.



intersecções com o referido plano limite.

Tanto na região cilíndrica, como no sólido, o problema poderia ser visto de outro modo, isto é, as sombras projectadas no geometral, não são mais do que a intersecção, com aquele plano, das superfícies luz-sombra envolventes à região cilíndrica e ao sólido.

Finalmente, para a determinação da sombra projectada da região cilíndrica sobre o sólido, considerou-se o método das projecções oblíquas ou das sombras virtuais, ou seja, consideraram-se as intersecções das sombras virtuais das geratrizes da zona iluminada do sólido, com a sombra projectada da semicircunferência de nível. A partir dessas intersecções procedeu-se, de seguida, à inversão dos raios luminosos para as geratrizes iluminadas do sólido. Assim, se determinou a linha curva que compreende os pontos Q_{1s} , Q_{2s} e Q_{3s} , delimitando as partes iluminadas e com ausência de luz pertencentes ao sólido e produzidas pela região cilíndrica. É de sublinhar que esta linha admite um **ponto anguloso**, Q_{2s} , que pertence à geratriz AA_1 do sólido. Nesse ponto, concorrem duas tangentes à linha de separatriz de sombra projectada da região sobre o sólido, mas que não foram representadas na figura, estas, resultariam da intersecção dos planos tangentes luz-sombra à superfície cilíndrica luz-sombra, com os planos das faces do sólido, particularmente, naquelas faces que resultaram na aresta AA_1 .

Este exemplo anterior demonstra, com grande evidência, que a *intersecção de superfícies* intervém sempre, nas questões relacionadas com a determinação de sombras de superfícies.

Para finalizar este capítulo, e este ensaio, apresentou-se, na fig.51, um exemplo de aplicação das superfícies concordantes, cilíndrica e esférica, na obtenção da linha de sombra própria de uma porção de uma superfície de curvaturas opostas, *a região interna um quarto de toro sólido*.⁸² Considerou-se, para o efeito, sólida, a região interna da porção do toro, delimitada pela base pertencente ao plano de topo α e pelo plano do círculo de gola, não representado na figura. Neste exemplo, verificou-se a aplicação da **teoria das tangentes ou diâmetros conjugados** que fora antes referida nas págs.38 e 39 do presente trabalho. Na figura, considerou-se, também, a direcção luminosa vertical. *A linha de sombra própria deste sólido, não é mais do que a linha de concordância com a superfície cilíndrica luz-sombra regradada e planificável.* Para a determinação da linha de sombra própria consideraram-se várias esferas auxiliares inscritas e concordantes, em vários paralelos. Os pontos da linha de sombra própria pertencentes aos paralelos de concordância são comuns às duas superfícies, logo, pertencem à linha de sombra própria do sólido Δ de curvaturas opostas. A determinação dos pontos desta linha determinaram-se fazendo uma mudança de planos de projecção, isto é, fez-se a mudança do plano horizontal de projecção, fazendo-o coincidir com o plano de topo onde assenta a base do sólido. Pela mesma forma, e após a mudança do v_0 , a direcção luminosa passou a ser de frente. Assim, com a mudança do plano horizontal de projecção, determinou-se a linha de separatriz de sombra própria, linha torsa ou empenada, e, de seguida procedeu-se à reposição do plano horizontal para a posição inicial transportando os afastamentos dos pontos da linha de sombra própria para o sistema inicial.

⁸² Este exemplo foi baseado directamente na aula proferida pelo Professor Arq. José Moutinho, *Escócia (separatriz luz-sombra)*, e também no capítulo dedicado ao Toro e à Escócia incluído na obra de Charles Le Roy, *Traité de Stéréotomie comprenant ...*

As tangentes, e os raios luminosos nos diversos pontos da linha de sombra própria desta superfície, são diâmetros conjugados das assíptotas da indicatriz nesse ponto.⁸³ Para tal, é necessário conhecer como se determinam essas assíptotas e, também, qual a natureza da indicatriz nos pontos pertencentes a este sólido de curvaturas opostas.

Nesta porção de superfície tórica circular, quase todos os seus pontos são *hipérbolicos*, isto é, os raios e os centros de curvatura das duas secções principais, perpendiculares entre si e ao plano tangente em quase todos os seus pontos, encontram-se situados em lados opostos do plano tangente e são, por essa razão, de sinal contrário. Nestes pontos B, C, D e L, indicados na fig.51, as *Indicatrizes* pertencentes aos planos tangentes naqueles pontos, resultam, cada uma, em duas hipérboles conjugadas de assíptotas comuns e cujos eixos, também perpendiculares entre si, são tangentes ás duas secções principais e directamente proporcionais aos raios de curvatura nessas secções principais. Para se obterem os valores ou os comprimentos dos semieixos da Indicatriz, num ponto do sólido Δ , consideramos a constante de proporcionalidade arbitrária, já referida na pág.33.

Assim, na fig.52, e considerando uma determinada direcção luminosa, l , representou-se em pormenor, no ponto A, a construção da tangente t_A , diâmetro conjugado das assíptotas da indicatriz, a e a_1 , e do raio luminoso l . Para a determinação das assíptotas da Indicatriz nesse ponto, que permitiram determinar a tangente, rodou-se o ponto A para o meridiano de frente situado o mais à esquerda. Na indicatriz no ponto A do sólido e perante aquela constante de proporcionalidade de Charles Dupin, verifica-se, que nos comprimentos dos semieixos: um é constante e

⁸³ Cfr. José Manuel Patricio de Sousa Moutinho, *Escócia (separatriz...*, pág. 9.

corresponde ao raio do meridiano [c] que constitui uma das secções principais; o comprimento do outro semieixo *determinou-se graficamente*, considerando o ponto médio do segmento de recta, normal, compreendida entre o centro de curvatura de uma das secções principais (o meridiano [c] referido naquele ponto) e o ponto de intersecção com o eixo axial do sólido, eixo e. Este segmento contém obviamente o ponto da superfície, no qual se pretendem encontrar as assíptotas. Considerando o ponto médio deste segmento, desenha-se, de seguida, a semicircunferência cujo raio é igual à metade do segmento e, para concluir, eleva-se a perpendicular ao segmento a partir do ponto do sólido que encontra a semicircunferência noutro ponto R. O comprimento do segundo semieixo da indicatriz fica, deste modo, determinado e é igual ao segmento de recta que compreende o ponto A do sólido e o ponto R de intersecção com a semicircunferência. Depois de determinados os comprimentos dos semieixos da indicatriz, procedemos ao seu transporte para as respectivas tangentes às duas secções principais, situadas no plano tangente θ e que constituem os eixos das hipérbolas conjugadas. Na tangente ao meridiano principal marcaram-se, para cima e para baixo do ponto, dois comprimentos iguais ao raio de curvatura desse meridiano, segmentos AV_1 e AV_2 , onde, neste caso, o raio de curvatura é o próprio raio do meridiano. Nas tangentes horizontais à outra secção principal, perpendicular à do meridiano, marcam-se para a esquerda e para a direita, do mesmo ponto do sólido, os comprimentos dos outros semieixos que se determinaram com o auxílio da semicircunferência: segmentos AV_3 e AV_4 . *Os quatro pontos, V_1 , V_2 , V_3 e V_4 , que se marcaram nas tangentes às duas secções principais constituem os vértices das duas hipérbolas conjugadas.*

Para a determinação das assíntotas da indicatriz no ponto A do sólido consideraram-se as diagonais do rectângulo cujas medianas horizontal e vertical são os segmentos determinados pelos valores dos semieixos da indicatriz: segmentos V_1V_2 e V_3V_4 , que se cruzam no ponto A. Essas diagonais, que contêm os pontos R_1 e R_2 , são as assíntotas da indicatriz procuradas e estão representadas por a_1 e a_2 .

Depois de se encontrarem as assíntotas da indicatriz no ponto A da linha de sombra própria do sólido e sabendo, também, que a tangente a essa linha é um diâmetro conjugado das duas assíntotas da indicatriz e do raio luminoso nesse ponto, bastou conduzir uma recta paralela ao raio luminoso l e complanar com as duas assíntotas: nos pontos 1 e 2. Considerou-se também, nesse ponto, a indicatriz da superfície cilíndrica luz-sombra – constituída por duas rectas paralelas e equidistantes do raio luminoso. O ponto médio, M , do segmento de recta de intersecção desta recta l , paralela ao raio luminoso, com as duas assíntotas define, com o ponto A, a tangente procurada à linha de sombra própria.

Na fig.51, para não sobrecarregar o desenho, não foram consideradas todas as tangentes nos vários pontos da linha de separatriz de sombra própria do sólido, no entanto, foram consideradas duas tangentes fundamentais – as que correspondem aos *pontos limites* e que, neste caso particular, coincidem com os *pontos de reversão do contorno aparente* do próprio sólido. Nesses pontos limites e de reversão, representados na fig.51 por L e L_1 , duas das assíntotas da indicatriz são os próprios raios luminosos, representados por l e l_1 ; deste modo, nesses pontos, os raios luminosos são conjugados deles próprios, ou autoconjugados. De notar que no exemplo particular da figura, a projecção horizontal da linha de sombra

própria coincide com uma parte da linha de contorno aparente, pelo que, os pontos limites de sombra própria, pontos onde se inicia a sombra autoprojectada (não representada na figura), coincidem com os pontos de reversão do contorno aparente. Esta curiosidade deve-se ao facto de os raios de luz coincidirem com os raios projectantes horizontais.

Para a determinação dos pontos limites ou de reversão, L e L1, e das respectivas assíptotas que constituem as tangentes autoconjugadas, que são os próprios raios luminosos nesses pontos, considerou-se a *superfície regrada e empenada*, cujas geratrizes são formadas pelas próprias assíptotas das indicatrizes nos vários pontos do meridiano de frente [c]. Escolheu-se este meridiano pela posição frontal que ocupa, facilitando, deste modo, as construções auxiliares para a determinação das assíptotas das indicatrizes em alguns dos seus pontos. Esta superfície regrada e empenada é um hiperbolóide osculador ao sólido Δ e o meridiano de frente é o círculo de gola dessa superfície regrada e empenada. Deste modo, consideraram-se, nesse meridiano, os pontos A, B, C e D e apenas uma família de assíptotas, dos dois sistemas possíveis. A superfície regrada empenada que oscula este sólido admite dois sistemas de geratrizes, cada um correspondente a cada assíptota. Assim, consideraram-se, apenas, um dos sistemas de geratrizes ou uma família de assíptotas naquele meridiano [c] e pertencentes, cada uma, aos pontos A, B, C e D. Posteriormente, determinou-se a linha [s₁] de intersecção desta superfície regrada empenada com o plano da base do sólido. Esta operação foi feita após ter-se mudado o plano horizontal de projecção, fazendo-o coincidir com o plano α .

Para encontrar naquela superfície regrada e empenada, a

assíntota que corresponde ao raio luminoso, isto é, à *tangente autoconjugada* que permite encontrar os pontos limites ou de reversão, consideraram-se duas superfícies cónicas directoras coaxiais com o sólido e cujo vértice comum, V_1 , está situado no centro do círculo de gola do sólido. Numa das superfícies cónicas directoras, as geratrizes fazem com o plano horizontal o mesmo ângulo que a direcção luminosa, permitindo traçar a directriz $[d_1]$ pela rotação em torno do eixo e de uma geratriz paralela à direcção luminosa. A outra superfície directora, com o mesmo vértice, ficou determinada por três rectas paralelas a três assíntotas da mesma família nas indicatrizes de três pontos pertencentes ao meridiano $[c]$, consideradas anteriormente, e que determinaram a linha $[s_1]$ – traço da superfície regrada empenada no plano α . As intersecções destas três rectas paralelas às três assíntotas naqueles três pontos, com o plano horizontal, determinam uma curva de erro $[s]$. Finalmente, verificou-se a intersecção destas duas superfícies coaxiais que permitiram encontrar a direcção da assíntota procurada – determinada pelo vértice e pelo ponto de intersecção das directrizes das duas superfícies cónicas coaxiais, $[d_1]$ e $[s']$. Posteriormente, conduziu-se uma normal àquela direcção l , a partir do centro de curvatura do meridiano $[c]$, permitindo encontrar com rigor o ponto de contacto L_r . Neste ponto, encontra-se o paralelo do sólido onde se situam os pontos L e L_1 , pontos limites de sombra própria, e que são, simultaneamente, os pontos de reversão do contorno aparente horizontal. Nesse pontos, como já se disse, as tangentes são os próprios raios luminosos, l e l_1 . Para encontrar os pontos limites, no sólido, bastou considerar a superfície esférica concordante naquele paralelo que passa em L_r e proceder à determinação dos pontos de sombra pertencentes ao paralelo de concordância do sólido com a esfera.

Esta operação foi também efectuada com o auxílio da mudança do plano horizontal de projecção, onde também, posteriormente, se transportaram os afastamentos para o plano horizontal inicial.

De notar que, após a reposição da linha de sombra própria para o sistema de planos de projecção inicial, e particularmente neste exemplo, as projecções da linha de sombra própria coincidiram com uma porção da própria linha de contorno aparente horizontal – linha de concordância do sólido com a superfície cilíndrica luz sombra. Esta superfície cilíndrica luz-sombra é, ao mesmo tempo, a superfície cilíndrica projectante horizontal que permitiu determinar, com rigor, para além da linha de sombra própria, a linha de contorno aparente horizontal.

De salientar que na linha torsa ou empenada que corresponde à separatriz de sombra própria ou de contorno aparente horizontal, os pontos limites ou de reversão, L e L_1 , admitem **dois planos osculadores**, θ_5 e θ_6 , determinados por duas tangentes já consideradas nesses pontos, os próprios raios luminosos (ou as projectantes horizontais), e por mais duas tangentes nos mesmos pontos, t_L e t_{L_1} . Estas últimas, são tangentes à superfície cónica concordante ao sólido, ao longo do paralelo de concordância, nos pontos L e L_1 . Bastou, para determiná-las, unir os pontos L e L_1 ao vértice V dessa superfície cónica concordante. Estas últimas tangentes consideradas permitiram, com rigor, traçar uma parte da linha de contorno aparente horizontal (na qual existem os pontos limites ou de reversão), esta, no exemplo particular, coincide com a projecção horizontal da linha de sombra própria.

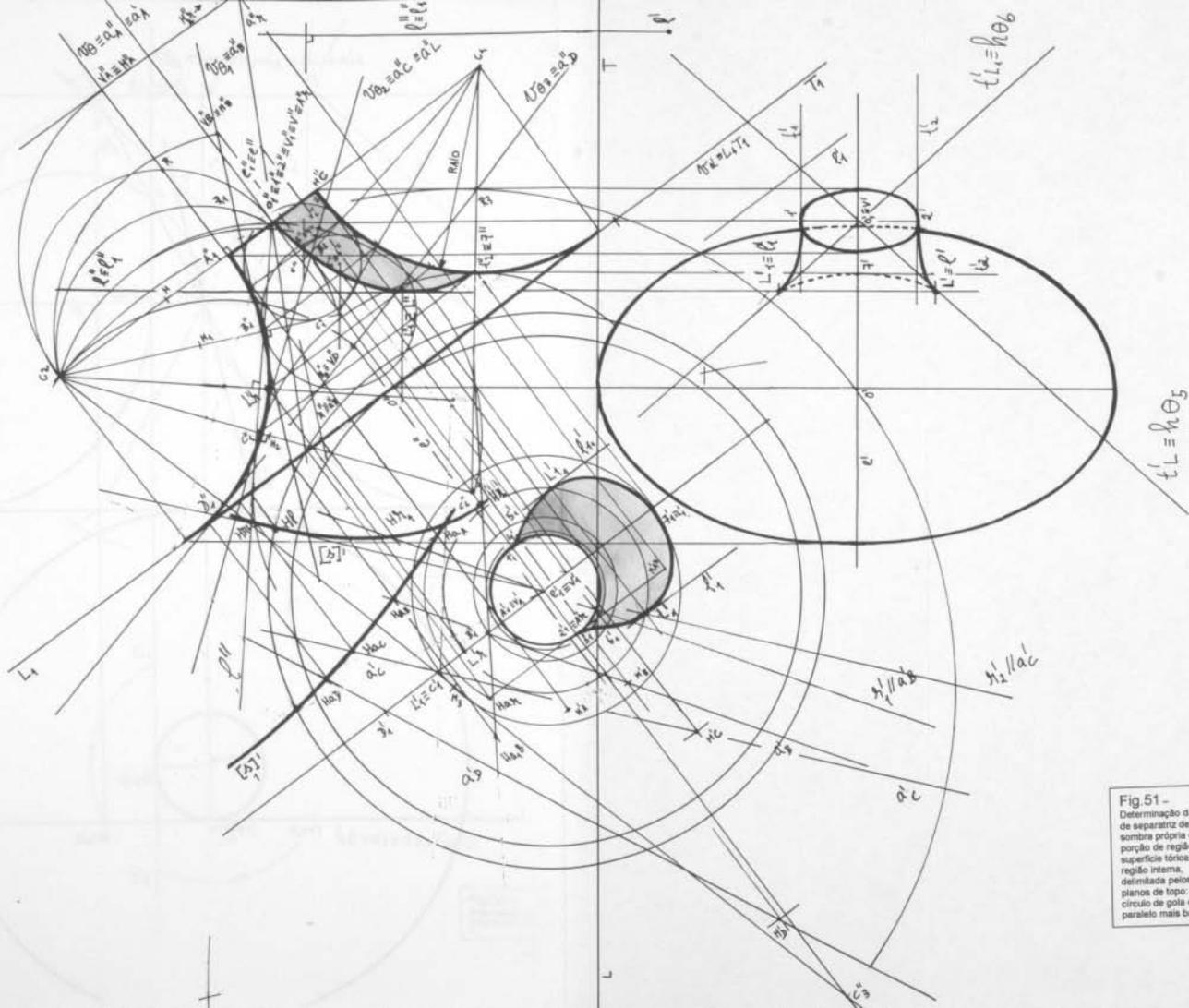


Fig 51-
 Determinação da linha
 de separatriz de
 sombra própria de
 uma
 porção de região de
 superfície fôrea, sólida,
 região interna,
 delimitada pelos dois
 planos de topo, do
 círculo de gola e do
 paralelo mais baixo.

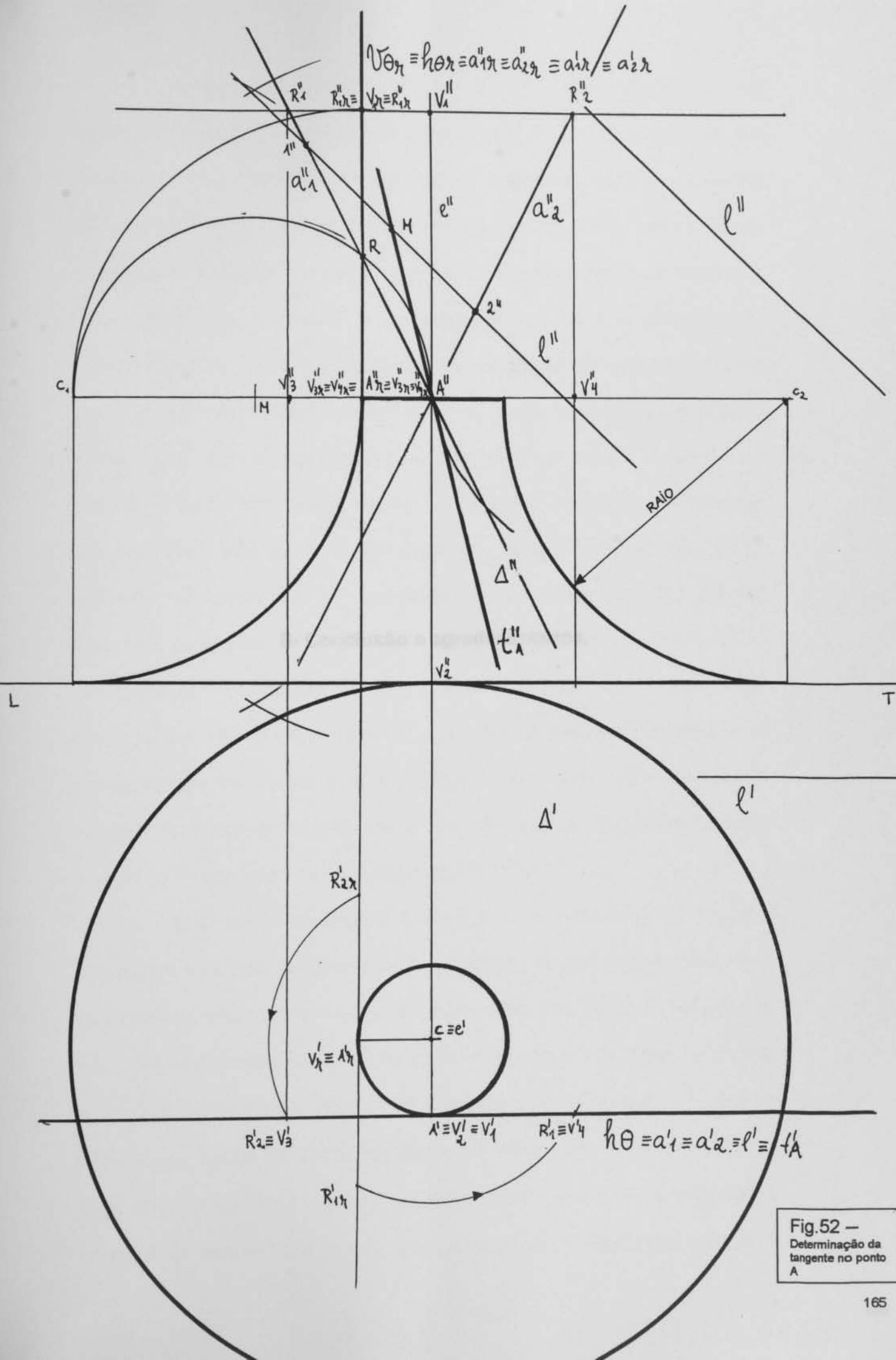


Fig.52 –
Determinação da
tangente no ponto
A

Na presente seção, inicialmente faz-se uma abordagem no estudo da iluminação nas superfícies que se consideram para o efeito. Os aspectos relacionados com a iluminação de superfícies, com as diferenças de luz e de sombra são também, efetuam um campo de pesquisa de investigação ainda em aberto. Tarefa vasta e que se vivencia ainda por desenvolver. Por outro lado, este campo que estuda a problemática da complexidade da iluminação é de importância maior na representação de volumes de objetos tridimensionais. Por esta razão, procurou-se de alguma forma, com este ensaio, contribuir para a disciplina de Desenho na Faculdade de Belas Artes de Lisboa, contribuindo à Geometria um caráter participativo, apontando certos aspectos, métodos e representações possíveis — aplicados na construção de objetos ou de formas tridimensionais com

8- Conclusão e agradecimentos.

Os pontos de vista ou das regras artísticas, desenvolvidas no presente ensaio, são de importância maior no que respeita à construção da representação de volumes e de estruturas com superfície ou efeitos que se vão iluminando. A partir desses pontos, os dados e as regras desenvolvidas apontam-se em direção satisfatória.

Este campo de estudo, que se tornou documentado a partir e a Geometria, foi apontado inicialmente por Gaspard Monge na obra *Descriptive Discipline* e desenvolvido por Jean Louis Poncelet em *Traité de Perspective Linéaire Méthodique*, entre outros, procurando revelar alguns resultados. Neste ensaio, no entanto, procurou-se apenas trazer, em síntese, essa complexidade de iluminação nas superfícies e nos sólidos que fazem parte do programa de disciplina e procurando os efeitos da representação de sombras com a luz direta, luz refletida próxima, espalhada, difusa e

No presente ensaio, inicialmente fez-se uma abordagem no estudo da iluminação nas superfícies que se consideraram para o efeito. Os aspectos relacionados com a iluminação de superfícies, com as ausências de luz e de sombra das mesmas, oferecem um campo de pesquisa e de investigação ainda em aberto. Tarefa vasta e que se encontra ainda por desenvolver. Por outro lado, este campo que estuda a problemática da complexidade da iluminação é de importância maior na representação de volumes de objectos tridimensionais. Por esta razão, procurou-se de alguma forma, com este ensaio, contribuir para a disciplina do Desenho na Faculdade de Belas Artes de Lisboa, conferindo à Geometria um carácter pluridisciplinar, apontando certos aspectos, métodos e representações possíveis – auxiliares na concepção de objectos ou de formas tridimensionais com forte carácter geométrico. Exemplos como o da determinação dos pontos ou das rectas brilhantes, demonstrados no presente ensaio, são de importância maior no que respeita à ordenação da representação de valores e de gradações numa superfície ou sólido que esteja a ser iluminado. A partir desses pontos, as cores e os valores claro-escuro acentuam-se ou diminuem harmónicamente.

Este campo de estudo, que relaciona directamente a Física e a Geometria, foi apontado inicialmente por Gaspar Monge na obra *Geométrie Descriptive* e desenvolvido por Jean Jules Pillet em *Traité de Perspective Linéaire*. Modernamente, outros autores procuraram revalorizar aqueles resultados. Neste ensaio, no entanto, procurou-se apenas tratar, em síntese, essa complexidade da iluminação nas superfícies e nos sólidos que fazem parte do programa da disciplina e privilegiando os efeitos da representação de sombras com a luz directa. Num futuro próximo, esperamos alargar o

presente ensaio, num estudo mais aprofundado acerca da reflectância e do comportamento da luz difusa nas formas geométricas.

Para a realização deste ensaio, o autor agradece às personalidades que ao longo destes três anos, e de outros anteriores, muito contribuíram para a construção desta compilação, para além de incrementarem, no autor, o desenvolvimento dos conhecimentos nestas matérias. Assim:

Ao seu irmão Bernardo, pelos livros que conseguiu encontrar e disponibilizar: que muito enriqueceram as fontes do presente ensaio.

Ao Ass. Convidado Des. Ricardo Delgado, pela sua sapiência, pelo apoio prestado como docente, pela cedência de algumas fontes importantes e, também, pelas conversas de café que muito enriqueceram o desenvolvimento da presente obra.

Ao falecido e malgrado, Prof. Aux. Arq. José Moutinho, outro mestre na matéria e do autor, e que em muito, contribuiu para a realização do presente ensaio.

Ao Prof. Aux. Arq. e Pint. Marcelo Moreira de Sousa, outro mestre na matéria, pela obra editada e pelas conversas extra escolares, nos corredores e nas salas da Faculdade de Belas Artes da Universidade de Lisboa.

Ao Prof. Luis Gonçalves, outro mestre da matéria e do autor, pela obra editada e pelas lições proferidas ao autor na escola Secundária de Pedro Nunes.

Aos responsáveis pela Biblioteca da Academia Militar de Lisboa, pelos excelentes e raros exemplares que disponibilizaram e que muito

contribuíram para o desenvolvimento de algumas questões do presente ensaio.

À prima Julia Trindade – antiga docente da nossa Faculdade e outro mestre na matéria, pelos poucos contactos, simpatia e diálogos, que sempre foram manifestados após o autor ter concluído o 12º ano.

Ao Prof. Doutor Pedro Fialho de Sousa, Associado da Faculdade de Arquitectura de Lisboa, pelas correções e pela observação que disponibilizou perante este ensaio.

Ao Prof. Aux. Pintor Jorge Vidal, pelo interesse manifestado na apresentação e divulgação do tema, para além de outras sugestões que beneficiaram o presente trabalho.

Neste apêndice, citam-se apenas as figuras extraídas das obras pertencentes a varios autores (por vezes com ligeiras alterações), as restantes, são da autoria do autor do presente ensaio.

- Fig.4 – Robert Gill, *Basic Rendering*, ed. Thames and Hudson, Londres, 1991, pág.31.
- Fig.5 – Jean-Paul Jungmann, *Ombres et Lumières*, Les éditions de La Villete, Paris, 1995, pág.13.
- Fig.6 – Robert Gill, *Basic Rendering*, ed. Thames and Hudson, Londres, 1991, pág.41.
- Fig.7 – Robert Gill, *Basic Rendering*, ed. Thames and Hudson, Londres, 1991, pág.46.
- Fig.8 – Robert Gill, *Basic Rendering*, ed. Thames and Hudson, Londres, 1991, pág.47.
- Fig.9 – Robert Gill, *Basic Rendering*, ed. Thames and Hudson, Londres, 1991, pág.54.
- Fig.10 – Jean-Paul Jungmann, *Ombres et Lumières*, Les éditions de La Villete, Paris, 1995, pág.31.
- Fig.12 – Jean Jules Pillet, *Traité de Perspective Linéaire*, Paris, 1887, ed. Librairie Philosophique J.Vrin, 1953, pág.48.
- Fig.15 – Jean Jules Pillet, *Traité de Perspective Linéaire*, Paris, 1887, Ed. Librairie Philosophique J.Vrin, 1953, pág.50.
- Fig.22 – Robert Gill. *Basic Rendering*, ed. Thames and Hudson, Londres, 1991, pág.109.
- Fig.23 – Jean-Paul Jungmann, *Ombres et Lumières*, Les éditions de La Villete, Paris, 1995, pág.35.
- Figs.31 e 32 – Jean-Paul Jungmann, *Ombres et Lumières*, Les éditions de La Villete, Paris, 1995, pág.42.
- Fig.33 – Luis de Lancastre, *Um curso de Geometria Descritiva*, ed. das folhas da A.E.I.S.T, Lisboa, 1958, pág. 143.
- Fig.41 – Alvaro Rodrigues, *Geometria Descritiva*, ed. Ao Livro Técnico Ltda, Rio de Janeiro, 1960, pp.109,112 e114.
- Fig. 49 – Emilio Diaz Martinez, *Problemas de Geometria Descriptiva*, Ed. Publicaciones da Universidad de Sevilla,1980.

- Abajo, F. Xavier Rodriguez. Geometria Descriptiva - Tomo I. Sistema Diédrico. Ed Donostiana San Sebastian, 1932.

- Abajo, F. Xavier Rodriguez. Geometria Descriptiva - Tomo II. Proyecciones Algorítmicas. Ed Donostiana San Sebastian, 1935.

- Abajo, F. Xavier Rodriguez / Blanco, Alberto Reñeta. Geometria Descriptiva - Tomo V. Ejercicios prácticos. Ed Donostiana San Sebastian, 1935.

- Aguiar, Leonardo Teixeira. Alguns conceitos geométricos. Lisboa. Ed. SPB, 1987.

- Albuquerque, Luis de. Elementos de geometria projectiva e de geometria descriptiva. Ed Livaria Alameda, Coimbra 1959.

- Azara, Fernando Izquierdo. Geometria Descriptiva Surcdo: Y Alícueto. Ed Dossat Madrid, 1975.

- Azara, Fernando Izquierdo. Geometria Descriptiva. Ed. Dossat Madrid, 1980.

- Azara, Fernando Izquierdo. Elementos de geometria descriptiva I (sistema diédrico). Ed. Paraninfo Madrid, 1984.

- Azara, Fernando Izquierdo. Elementos de geometria descriptiva I (sistema isométrico). Ed. Paraninfo Madrid, 1984.

- Azara, Fernando Izquierdo. Elementos de geometria descriptiva I (sistema cónico). Ed. Paraninfo Madrid, 1987.

- Aubert, Jean. Clavis de Dessin d'Architecture. A partir de la géométrie descriptive. Ed. Les Éditions de La Ville, Paris, 1995.

- Biquart, A. et Duval, R. Leçons de Géométrie des Éléments. Ed. Eyrolles, Paris, 1985.

- Biondi, Raimo. Arti della Prospettiva. Ed. Liviana Venezia, Paris, 1924.

- Cabrita, Inês. Sobre Projeções para o plano e sobre o círculo. Ed. Tezema Lisboa, 1990.

- Cardoso, Américo. Elementos de Geometria Descriptiva. Ed. Livaria Bertrand Lisboa 1973.

- Cardoso, Américo. Sombras e Perspectivas. Ed. Livaria Bertrand Lisboa 1973.

- Carvalho, Benjamin de A. Desenho Geométrico. Ed. Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1957.

10- Bibliografia.

- Abajo, F. Xavier Rodriguez . Geometria Descriptiva – Tomo I. Sistema Diedrico. Ed.Donostiarra. San Sebastian, 1992.
- Abajo, F. Xavier Rodriguez . Geometria Descriptiva – Tomo III. Perspectiva Axonometrica. Ed.Donostiarra. San Sebastian, 1995.
- Abajo, F. Xavier Rodriguez / Blanco, Alberto Revilla. Geometria Descriptiva – Tomo V. Perspectiva cónica. Ed.Donostiarra. San Sebastian, 1995.
- Aguilar, Leonildo Teixeira. Alguns conceitos geométricos. Lisboa. Ed. SPB, 1997.
- Albuquerque, Luis de. Elementos de geometria projectiva e de geometria descritiva. Ed. Livraria Almedina. Coimbra,1969.
- Asensi, Fernando Izquierdo. Geometria Descriptiva Superior Y Aplicada. Ed. Dossat. Madrid, 1975.
- Asensi, Fernando Izquierdo. Geometria Descriptiva. Ed. Dossat. Madrid, 1980.
- Asensi, Fernando Izquierdo. Ejercicios de geometria descriptiva I (sistema diedrico). Ed. Paraninfo.Madrid,1994.
- Asensi, Fernando Izquierdo. Ejercicios de geometria descriptiva I (sistema axonometrico). Ed. Paraninfo.Madrid,1994.
- Asensi, Fernando Izquierdo. Ejercicios de geometria descriptiva I (sistema cónico). Ed. Paraninfo.Madrid,1997.
- Aubert, Jean. Cours de Dessin d'Arqchitecture à partir de la géométrie descriptive. Ed. Les Éditions de La Villete. Paris, 1995.
- Biguenet.A et Duval.R. Notions de Géométrie dans l'espace. Ed. Eyrolles. Paris, 1963.
- Bricard, Raoul. Petit Traité de Perspective. Ed. Librairie Vuibert. Paris, 1924.
- Calvino, Italo. Seis Propostas para o próximo milénio. Ed. Teorema. Lisboa, 1990.
- Cardoso, Armando. Elementos de Geometria Descritiva. Ed. Livraria Bertrand. Lisboa 1973.
- Cardoso, Armando. Sombras e Perspectivas. Ed. Livraria Bertrand. Lisboa 1973.
- Carvalho, Benjamin de A. Desenho Geométrico. Ed. Ao Livro Técnico. Rio de Janeiro, 1959.

- Cunha, Luis Veiga da. Desenho Técnico. 9ª ed. F.C.Gulbenkian. Lisboa, 1994.
- Delgado, Ricardo. Exercicios de Axonometria e de Perspectiva Linear. Ed. da Associação de Estudantes de Artes Plásticas e Design da F.B.A.U.L. Lisboa, 1995.
- Duarte, Alvaro Rodrigues/ Vicente, Leonel Martins. Exercicios de Geometria Descritiva. Ed. Papelaria Fernandes. Lisboa, 1959.
- Dupin, Charles. Developments de Géometrie. Paris. Ed.Courcie, 1813.
- Fernandez, A. Taibo. Geometria Descriptiva y sus aplicaciones. Madrid. Escuela Especial de Ingenieros industriales, 1943.
- F.G.M. (Gabriel-Marie, Frère). Géométrie Descriptive. Tome I. Éléments. Ed. Jacques Gabay. Paris,1877.
- F.G.M. (Gabriel-Marie, Frère). Géométrie Descriptive. Tome II. Exercices. Ed. Jacques Gabay. Paris,1877.
- F.G.M. (Gabriel-Marie, Frère). Cours de Géométrie Descriptive. Ed.Maison A. Mame & Fils. Tours, 1917.
- Gill, Robert. Basic Rendering. Ed. Thames and Hudson. Londres, 1991.
- Gonçalves, Luís. Geometria Descritiva 1. Ed. Fluminense. Porto, 1979.
- Gonçalves, Luís. Geometria Descritiva 2. Ed. Fluminense. Porto, 1991.
- Gonçalves, Luís. Geometria Descritiva 3. Ed. Fluminense. Porto, 1992.
- Gordon, V.O./ Sementsov, M.A/ Oguiyevski. Curso de Geometria Descritiva. Ed.Mir. Moscovo, 1980.
- Hidalgo, J. del Soto. Geometria Descriptiva. Madrid, 1959.
- Hopkinson, R.G/ Petherbridge, P/ Longmore. J. Iluminação Natural. Ed. F.C. Gulbenkian. Lisboa, 1980.
- Jungmann, Jean Paul. Ombres et Lumières. Paris.Ed.Les Éditions deLa Villette, 1995.
- Lancastre, Luis. Um curso de Geometria Descritiva. Ed. das folhas da A.E.I.S.T. Lisboa,1958.
- Le Roy, Charles. Traité de Géometrie Descriptive, avec une collection d'épures. composé de 60 planches; Dominique Avanzo et Compagnie Éditeurs. Liège,1837.

- Le Roy, Charles. Traité de Stéréotomie – comprenant les applications de la Géométrie Descriptive à la Théorie des Ombres, la Perspective linéaire, la Gnomonique, la coupe des pierres et la charpente. Paris. Ed. Bachelier/Carilian – Goeury et Dalmont. 1844.
- Martinez, Emilio Diaz. Problemas de Geometria Descriptiva. Ed. Publicaciones de la Universidad de Sevilla. 1980.
- Minguet, Enrique Bonet. Proyecciones Y Sombras. Ed. Renacimiento. Valencia, 1946.
- Monge, Gaspar. Géométrie Descriptive. Paris, 1847. Ed. Bachelier, Imprimeur – Libraire.
- Moreau, Abbé Th. Pour comprendre la Géométrie ... dans l'espace. Ed. Bibliothèque d'Education Scientifique. Paris, 1930.
- Moreira de Sousa, Marcelo. Desenho e Geometria Descritiva. Volumes I e II. 12º ano. Lisboa, 1995. Ed. Plátano.
- Moreira de Sousa, Marcelo. Geometria Descritiva. 10º ano. Lisboa, 1990. Ed. Plátano.
- Moutinho, José Manuel Patricio de Sousa. Perspectiva cónica linear. Lisboa. Esbal, 1991.
- Moutinho, José Manuel Patricio de Sousa. Escócia (separatriz de luz-sombra). Lisboa. Esbal, 1991.
- Pillet, Jean Jules. Traité de Perspective Linéaire. Paris. Ed. Librairie Philosophique J. Vrin, 1953.
- Pillet, Jean Jules. Traité de Géométrie Descriptive. Paris, 1887. Ed. Librairie CH. Delagrave.
- Pinheiro, Carlos da Silva./ Sousa, Pedro Fialho. Desenho / Tpu 13 e 39. Ed. Ministério da Educação. Lisboa, 1979.
- Pinheiro, Carlos da Silva. Sombras e pontos Brilhantes do Parabolóide Hiperbólico e do Hiperbolóide empenado escaleno. Ed. Sociedade Tipográfica. Lisboa, 1965.
- Ramos, José Augusto Gonçalves. Elementos de Geometria Descritiva. Lisboa, 1958/59.
- Ricca, Guilherme. Geometria Descritiva – Método de Monge. Ed. F.C. Gulbenkian. Lisboa, 1992.
- Rios, José Palacio. Perspectiva Aerotrifugada. Ed. Hemus. São Paulo.
- Rodrigues, Alvaro. Geometria Descritiva. Ed. Ao Livro Técnico Ltda. Rio

de Janeiro, 1960.

- Roubaudi, Charles. Traité de Géométrie Descriptive. Paris. Ed. Masson et Courcie, 1961.

- Schmidt, Rudolf. Geometria Descritiva com figuras estereoscópicas. Ed. Reverté. Barcelona, 1983.

- Sequeira, Borges. Lições de Geometria Descritiva. Lisboa, Scientia Editora, 1940.

- Sequeira, Borges. Mss. do Resumo das lições de Geometria Descritiva do Professor Borges de Sequeira da Faculdade de Ciências de Lisboa e do Instituto Superior Técnico. Livro II, 2ª edição, 1928.

- Slaby, Steve. M. Fundamentals of Three-Dimensional Descriptive Geometry. Ed. Wiley. New York, 1966.

- Trindade, António. Exercícios de Geometria Descritiva 1ºano. Ed. da Associação de Estudantes de Artes Plásticas e Design da F.B.A.U.L. Lisboa, 1998.

- Vilela, Antonio Lobo. Métodos geométricos. Ed. Livraria Sá da Costa. Lisboa, 1939.

Este trabalho é dedicado à avó do autor, Maria Manuela, que faleceu em sua casa de Alcobaça no ano de 1998.

