



1- Objectivos gerais e específicos da disciplina de Geometria Descritiva e de Aplicação - Técnicas de Representação Gráfica	3
2- O plano projectivo	12
3- O plano de terra projectado	17
4- O arquiposicionamento de uma + de estruturas, no contexto de uma rede	19
5- O estabelecimento de uma + de estruturas e o modo de resolução do enunciado e do problema proposto, com o levantamento gráfico dos pontos espaciais determinados e a aplicação ao exercício proposto	22
6- ...	35
FACULDADE DE BELAS ARTES DA UNIVERSIDADE DE LISBOA	40
1- ...	41
2- ...	43
3- ...	44

PROVAS DE APTIDÃO PEDAGÓGICA E CAPACIDADE CIENTÍFICA

RELATÓRIO DE AULA

Determinação gráfica das projecções centrais das linhas de contorno aparente e das linhas de separatriz de sombra própria interior projectada – sombra autoprojectada – de um nicho composto, esférico e cilíndrico, e, a partir de uma direcção luminosa dada.

O autor: Assistente estagiário licenciado, pintor António Trindade.
Lisboa, 28 de Setembro de 1999.

Índice:

1- Objectivos gerais e a importância da disciplina de Geometria Descritiva e de Geometria –Técnicas de Representação Rigorosa.....	3
2- O tema proposto.....	12
3- O objectivo do tema proposto.....	17
4- O enquadramento da aula e do enunciado, no contexto do ano lectivo.....	19
5- O desenvolvimento da aula – as etapas e o raciocínio na resolução do enunciado e do problema proposto, com encadeamento gráfico dos registos esclarecedores. Memória descritiva da exposição do exercício proposto.....	22
6- Sumário.....	39
7- Apêndice.....	40
8- Bibliografia geral.....	41
9- Bibliografia para a aula exposta.....	43
10- Nota relativa às págs. 37 e 38 do presente relatório.....	44

representação plana (folha de papel, tela, entre outros)

A linguagem da Geometria é, desta forma, eficaz, na medida em que intervém directamente nas outras áreas de expressão com a pintura, com a escultura, com o design, com a arquitectura, com projectos artísticos multidisciplinares, com a restauração, com a conservação e mesmo com problemas que por vezes surgem no nosso quotidiano. Ela comunica em estilo e ajuda no diálogo aberto com o projectista, o engenheiro, o arquitecto, o ergonomista, o pintor, o escultor e o designer. Para além destes aspectos, a Geometria Descritiva – podemos dizê-lo seguramente – comunica com código próprio na transmissão da imagem gráfica de síntese, sem simplificações e como linguagem tendencialmente monossémica. Deste modo, uma geometria rigorosa possibilita e torna possível a representação e a comunicação de uma ideia.

Esta ideia de que falamos, manifesta-se sobre a forma de projecto e sobre a forma de pura expressão, ou seja, comunica informando; quer através de um qualquer projecto que normalmente se desenvolve em torno de um objecto utilitário, funcional e poético, onde a geometria é aplicada muitas vezes ao Design, à Escultura e à Arquitectura; quer também, sob a forma de teia estrutural que auxilia, constrói e é parte integrante de um programa estético bem delineado e bem definido. A, neste caso, temos como exemplo, as

1- Objectivos gerais e a importância da disciplina de Geometria Descritiva e de Geometria – Técnicas de Representação Rigorosa.

As disciplinas de Geometria Descritiva e de Geometria – Técnicas de Representação Rigorosa leccionadas, respectivamente, nos primeiro e segundo anos dos cursos da Faculdade de Belas Artes de Lisboa têm, como objectivo maior, possibilitar dando a conhecer aos interessados: as formas geométricas, as leis que as presidem, os métodos auxiliares fundamentais, os teoremas, os sistemas de projecção e os métodos de representação que permitem, posteriormente, descrever e posicionar qualquer forma geométrica, bi ou tridimensional – sob determinadas condições –, num suporte de representação plano (folha de papel, tela, entre outros).

A disciplina de Geometria é, desta forma, eficaz, na medida em que intervém directamente com outras áreas de expressão: com a pintura, com a escultura, com o design, com a arquitectura, com projectos artísticos multidisciplinares, com a estereotomia, com a conservação e mesmo com problemas que por vezes surgem no nosso quotidiano. Ela comunica em estilo de projecto e auxilia no diálogo aberto com o projectista, o engenheiro, o arquitecto, o encomendante, o pintor, o escultor e o designer. Para além destes aspectos, a Geometria Descritiva – podemos dizer-lo seguramente – comunica com códigos próprios na transmissão de imagens gráficas de síntese, sem ambiguidades e numa linguagem tendencialmente monossémica. Deste modo, uma geometria rigorosa possibilita e torna possível a representação e a comunicação de uma *ideia*.

Esta *ideia* de que falamos, manifesta-se sobre a forma de *projecto* e sobre a forma de pura *expressão*, ou seja, comunica informando: quer através de um qualquer projecto que normalmente se desenvolve em torno de um objecto utilitário, funcional e poético, onde a geometria é aplicada muitas vezes ao Design, à Escultura e à Arquitectura; quer, também, sob a forma de teia estrutural que auxilia, constrói e é parte integrante de um *programa estético* bem delineado e bem definido e, neste caso, temos como exemplo, as

aplicações das representações perspécticas à pintura e à escultura de baixo e de alto relevo. Nas representações perspécticas a Geometria serve a pintura, simulando a realidade: construindo cenários de espaços públicos, virtuais ou fictícios que, muitas vezes, são o suporte estrutural onde posteriormente se desenvolvem e se apoiam as *ideias* que estruturam um determinado programa estético com marcas poéticas de genialidade. Testemunhos destas aplicações teóricas e estéticas da geometria, e mais especificamente da perspectiva, foram-nos legados com grande abundância nos programas estéticos de quinhentos até à actualidade da arte contemporânea. Panofsky refere na sua obra *Perspectiva como forma simbólica*, que «*Não há lugar para dúvidas: o **espaço estético** e o **espaço teórico** fundem o espaço perceptual, sob a aparência de uma única e mesma sensação; no primeiro dos casos, tal sensação é simbolizada de forma visual; no segundo, apresenta uma forma lógica.*»¹

Para além daquelas considerações, a geometria nas manifestações pictóricas dos programas de quinhentos dão conta e referem aspectos da representação perspéctica, não apenas como *instrumento teórico*, construtor de cenários pictóricos mas, também, *como instrumento retórico de propaganda e de poder na pintura*. Nas pinturas quinhentistas depois da descoberta operada por Bruneleschi, a perspectiva muitas vezes servia e acentuava as figuras das classes mecénáticas detentoras de um determinado poder, onde a perspectiva codificava e propagandeava esse poder. Com efeito, nas pinturas retabulares, verificam-se muitas vezes as linhas convergentes que fugam para o centro e para a figura central da personagem principal: o doador, o bispo, a figura de Cristo, etc. Grandes artistas como Jan van Eyck, Albrecht Durer, Pierro della Francesca, Andrea del Sarto, Hans Holbein, entre muitos outros, proporcionaram-nos grandes obras de arte em que o uso da Geometria e da Perspectiva, constituíram, sem dúvida, um dos *códigos estéticos* fundamentais para a construção das suas propostas. Também na arte contemporânea assistimos ao uso abusivo da perspectiva em autores como, entre muitos

¹ Erwin Panofsky, *A Perspectiva como Forma Simbólica*, ed.70, Lisboa, 1993, pág. 45.

outros, Eduard Hooper, Escher e de Chirico, este último, chega mesmo, por vezes, a subverter as próprias leis, apontando diversas direcções de fuga e vários pontos de vista, conferindo às suas obras um carácter labiríntico, inquietante, insólito e metafísico.

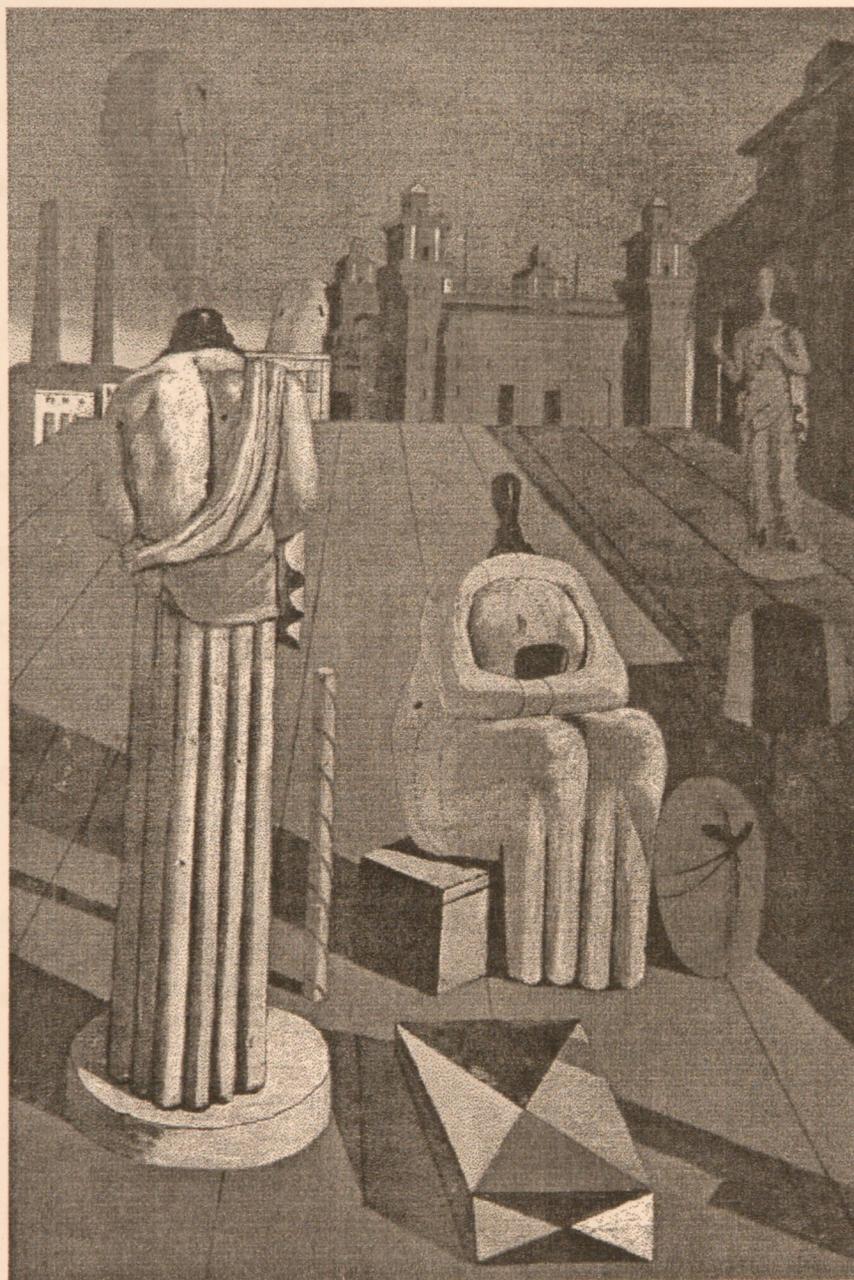


Fig.1 – Giorgio de Chirico. *Le Muse inquiende natura morta metafisica.*

No caso de Chirico, estas distorções perspécticas são ainda sublinhadas por outros valores plásticos não menos importantes como a luz e a cor, que criam – conjuntamente com a perspectiva – uma atmosfera vaga, indefinida e imprecisa, mas que não deixa no

entanto de constituir um diálogo de fascínios que desperta no fruidor. No quadro intitulado *Le Muse inquiende natura morta metafísica*, de 1918, Quirico apresenta uma aplicação da perspectiva criando um efeito algo desconcertante. Com efeito, se o observarmos (fig.1), verificamos que, no cenário criado pelo autor, surge um pormenor que deliberadamente inquieta o espectador ou o fruidor atento, trata-se do sólido que se encontra no primeiro plano. Ao observarmos atentamente as arestas que o delimitam, verifica-se um aspecto curioso: essas arestas parecem fugir para fora do próprio quadro, ou seja, o ponto de fuga parece situar-se fora do próprio espaço da composição. A ambiguidade deste pormenor – do sólido que se situa no primeiro plano –, que tanto pode estar correcto em termos perspécticos, se imaginarmos o sólido com as faces desiguais, como poderá estar errado, se imaginarmos o ponto de fuga a convergir no sentido oposto ao do próprio quadro, cria, com efeito, uma atmosférica diferente e original, que revelam um programa estético e uma poética singular deste autor mediterrânico. Com efeito, Quirico constitui um bom exemplo da aplicação da Geometria, não apenas do ponto de vista técnico, mas principalmente do ponto de vista estético. Na sua obra, a perspectiva (entre outros factores) formulou e codificou com efeitos surpreendentes, um determinado *programa*, um determinado *ideal* e, em suma, uma determinada *filosofia* de codificar a realidade.

Pelas considerações expostas, os conhecimentos na área da Geometria Descritiva são indispensáveis para a concretização de qualquer projecto, não apenas de empenhamento técnico e teórico, mas também de empenhamento estético. Assim, o programa e a disciplina de Geometria Descritiva sentiu a necessidade de se fasear em duas partes distintas – mas complementares – correspondentes, cada uma, a cada ano lectivo.

Numa primeira fase – a que corresponde o primeiro ano, os objectivos relacionam-se directamente com a análise das formas geométricas, que, em síntese, estão subjacentes à realidade visual. Nesta fase pretende-se, sobretudo, que os alunos

melhorem a sua capacidade de raciocínio perante qualquer situação particular, e, também, que melhorem a capacidade de percepção espacial.

Para a realização dos objectivos e dos problemas propostos, são referidos de início, os **sistemas de projecção** e os **métodos de representação** utilizados na Faculdade de Belas Artes de Lisboa, que permitem, no primeiro caso, verificar e seleccionar o comportamento das *projectantes* e, no segundo caso, eleger qual o *método* mais pertinente para a concepção de um *projecto*, de uma *ideia*, ou de um *problema*. No caso particular do primeiro ano, o único método utilizado é o da **representação por dupla projecção ortogonal**.

Neste tipo de representação serão sistematizados os conhecimentos gráficos e métricos indispensáveis para se poderem representar, com rigor, qualquer tipo de forma geométrica, qualquer tipo de enunciado, ou qualquer tipo de problema, relacionando, sempre, a realidade espacial com a realidade da representação. Pensamos que, com esta relação, será mais eficaz para os discentes a percepção dos enunciados e dos problemas propostos.

Neste primeiro ano, outro aspecto importante tem por objectivo de **fixar** e transmitir aos alunos, os **códigos particulares da linguagem geométrica**: as letras que designam as formas geométricas, os elementos geométricos, as figuras e as superfícies, os tipos de linha utilizados e, enfim, todas as regras e sinais que permitem ler, designar e descodificar as formas gráficas na sua totalidade. Deste modo, evitar-se-ão confusões ao nível da interpretação de qualquer registo gráfico.

Ao mesmo tempo em que se transmitem estas considerações e conhecimentos, de índole teórica, serão simuladas situações práticas concretas, onde se aplicam directamente soluções e exemplos relacionados com a actividade artística em geral, com: a Pintura, a Escultura, o Design, a Arquitectura, os Multimédia, entre outros.

Pelo conteúdo anteriormente exposto, o programa do primeiro ano inicia-se com o estudo dos alfabetos, onde a complexidade e o desenvolvimento progridem no decurso

do ano lectivo. Assim, são revistos numa primeira parte, os conhecimentos auferidos no ensino secundário. Posteriormente, serão facultados aos alunos, as bases que permitem construir o discurso geométrico: as leis e os teoremas relativos ao *paralelismo* e *perpendicularidade*; os **métodos auxiliares**, onde são transmitidos os conhecimentos relativos a mudança de planos e rotações (rebatimentos); os **problemas métricos**, que permitem representar um determinado problema ou situação, em casos muito particulares e muito específicos que, através de problemas relacionados com a determinação de distâncias e ângulos, auxiliam a encontrar e a localizar na folha do desenho, os **lugares geométricos** : quer sejam, de pontos, de rectas, de planos, ou de superfícies.

Numa segunda e terceira fase do ano lectivo, serão desenvolvidos com o auxílio dos conhecimentos anteriores, todo o tipo de problemas relacionados com **superfícies**, **intersecção de superfícies**, **planificações** e **sombras**. Nesta altura, serão exemplificados e simulados, exemplos práticos e concretos relacionados com a actividade da realidade artística, através de exercícios que compreendam formas e sólidos compostos de superfícies concordantes e secantes.

Dada a grandeza do programa neste primeiro ano, o ensino divide-se semanalmente, em duas aulas teóricas de uma hora cada e uma sessão prática de duas horas, onde serão simulados exercícios de aplicação prática à realidade artística, com base nos conhecimentos teóricos anteriormente assimilados.

Numa segunda parte, correspondente ao segundo ano, os objectivos – que se iniciaram no primeiro ano – pretendem de início, consciencializar os alunos na análise de formas geométricas directamente relacionadas com a realidade visual, alertando para o problema da percepção espacial da realidade real ou virtual. Deste modo, serão novamente referidos e transmitidos aos alunos, os *métodos de representação* e os *sistemas de projecção* que se utilizam para representar numa superfície, a duas dimensões, a realidade da terceira dimensão, segundo as variáveis X,Y e Z que

determinam os volumes das formas geométricas que variam em abcissa, afastamento e cota.

Os métodos de representação estudados em Geometria Descritiva no segundo ano são: o método por **representação axonométrica ortogonal**, o método por **projeções centrais** – onde se insere a **representação em perspectiva linear plana** – e, também, o método de **representação por múltiplas projeções ortogonais**. Com a assimilação dos métodos referidos, os alunos terão a oportunidade de ensaiar problemas diversos, sempre relacionados com situações concretas na procura de soluções para um projecto de concepção, quer seja ou não plástico.

Em termos metodológicos, as aulas serão faseadas em duas componentes distintas mas complementares: numa primeira componente teórica, serão transmitidos e divulgados os conhecimentos teóricos e gráficos – necessários e indispensáveis – para, posteriormente, se aplicarem nas sessões práticas em exemplos concretos. Pretende-se, neste segundo ano, que os alunos adquiram e assimilem a totalidade dos métodos e das metodologias adoptados nos diferentes métodos de representação. Desta forma, apreenderão a gramática dos códigos gráficos que posteriormente se aplicam na prática em exemplos de aplicação – tal como no primeiro ano.

Deste modo, achou-se conveniente, neste segundo ano, estipular um horário que somasse as cinco horas semanais. Nas quatro horas práticas serão lançados enunciados e realizados os respectivos exercícios, partindo dos conhecimentos anteriormente transmitidos nas aulas teóricas de uma hora semanal. Na aula teórica será facultada teoria de apoio à prática.

O programa da disciplina de Geometria – Técnicas de representação rigorosa, inicia-se com o estudo e divulgação dos métodos de representação plana, onde se esclarecem e referenciam os sistemas de projecção utilizados e que são, neste segundo ano, cónico ou central e cilíndrico ou paralelo. O primeiro aplica-se à perspectiva linear

plana; o segundo aplica-se à representação axonométrica ortogonal e à representação por múltiplas projecções ortogonais.

Poderá variar de ano para ano – pelo menos assim o tem sido – a ordem da programação. Ou seja, os três métodos que ocupam o ano lectivo poderão ser faseados em períodos diferentes, de ano para ano, consoante o acordo com o regente e o coordenador da disciplina.

Em relação ao programa da disciplina, para este segundo ano serão exemplificadas e ministradas as propriedades projectivas e as projecções de figuras planas, onde se incluem conceitos como: **homologia**, **homotetia** e **afinidade**. Ainda em relação ao programa específico em uso na Faculdade de Belas Artes de Lisboa, incluem-se vários pontos que seguem uma sequência lógica, faseada e crescente na sua complexidade. Assim, no capítulo das representações axonométricas ortogonais, serão ministrados por ordem cronológica, as seguintes matérias: os fundamentos; os coeficientes de redução e escalas; a representação de figuras geométricas elementares; os problemas relativos às figuras geométricas elementares; as rotações – os rebatimentos; as figuras planas; os teoremas relativos ao paralelismo e perpendicularidade; os problemas métricos; a representação de superfícies variadas; e, também, aplicações práticas em diversas situações – incluindo problemas de determinação de sombras.

No capítulo das *representações por projecções centrais*, e em *perspectiva linear plana*, serão ministrados por ordem cronológica os conhecimentos relativos a: fundamentos; ao sistema de planos que compõem o perspectógrafo; ao ponto de observação e ao ângulo visual; à representação e problemas relativos a figuras geométricas elementares; rotações e rebatimentos; figuras planas; paralelismo e perpendicularidade; problemas métricos; lugares geométricos; métodos de traçado – método directo, método das três coordenadas, método das coordenadas reduzidas e método dos traços e pontos de fuga; representação de superfícies poliédricas e de

curvatura variada – de simples curvatura, de dupla curvatura e de curvaturas opostas; imagens reflectidas e restituições perspécticas.

E, finalmente, no método de representação por múltiplas projecções ortogonais, serão ministrados, referidos e praticados – por ordem cronológica – os conhecimentos relativos às seguintes matérias, a saber: Normalização; Métodos de apresentação – Europeu e Americano; orientação do objecto; selecção de vistas; tipos de linha e sua precedência; representações convencionais e simbólicas; cortes e secções – execução, tipos e referenciação; escalas e cotagem; e interpretação e execução de registos gráficos, individualizando determinados pormenores na representação de conjuntos.

2- O tema proposto.

O tema proposto, *Determinação gráfica das projecções das linhas de contorno aparente e da linha de separatriz de sombra própria interior projectada no interior da superfície – sombra autoprojectada – de um nicho composto esférico e cilíndrico, a partir de uma direcção luminosa dada*, vem na sequência de toda a matéria leccionada durante os dois anos lectivos: de Geometria Descritiva e de Geometria –Técnicas de representação rigorosa. Do segundo ano, foi seleccionado o programa relativo à determinação por projecções centrais em perspectiva linear plana. O tema proposto seleccionou um exercício global em que intervêm os conhecimentos do primeiro e do segundo anos. Deste modo, escolheu-se um exercício que tivesse uma aplicação directa no campo das artes plásticas, mais particularmente, no campo da representação rigorosa de arquitecturas interiores – que muitas vezes são, mas foram sobretudo, parte integrante de determinadas pinturas relativas a determinados períodos históricos.

Exemplos de aplicação deste tipo de representação, de arquitecturas ilusórias e reais, foram-nos testemunhadas por autores pertencentes, principalmente, aos períodos do Renascimento, do Maneirismo, do Barroco e do Classicismo. As figuras 2,3 e 4 mostram três representações individualizadas e cronologicamente diferentes, de nichos – que constituem fragmentos integrados nas obras de arte. Pierro de la Francesca no quadro *Pala Brera (fig.2)*, deixa bem claro a sua preocupação em querer representar, com grande determinação, a linha de separatriz de sombra própria interior projectada no nicho.

Posteriormente, por volta de 1570, em Portugal, Lourenço de Salzedo – pintor privado da Rainha D.Catarina de Áustria – cria no retábulo da Nossa Senhora da Conceição na Igreja Matriz de Loures duas tábuas anichadas que representam as figuras de Santa Luzia e de Santa Maria Madalena. Nestas tábuas, em madeira de carvalho, os dois nichos que simulam dois espaços reais, dados pelas arquitecturas fingidas dos próprios nichos que funcionam como *trompe l'oeils*, criam de facto, um jogo lúdico e

ilusório no espectador que os olha a determinada distância, onde, por vezes, se pode confundir realidade com representação.



Fig.2 - Piero de la Francesca. *Pala Brera*. Séc.XV. (Pinacoteca de Milão).

Este jogo de espelhos atribuído a Salzedo é tanto mais sublinhado, quer pelo nicho escultórico que separa as duas pinturas, quer pelo forte sombreado do fundos arquitectónicos simulados quer, ainda, pelas fortes sugestões arquitectónicas das **geometrias** de fundo. Com efeito, as duas tábuas dão a sensação de se prolongarem no próprio espaço da parede onde se encontra o Altar – efeito que se acentua, ainda mais, se observarmos as duas pinturas a uma distância considerável. Neste retábulo

quinhentista existe de facto, uma preocupação em criar um jogo lúdico de espelhos em que o fruidor se vê confrontado com duas realidades distintas mas dialogáveis: a escultura, o nicho central em talha, e as duas pinturas adjacentes.

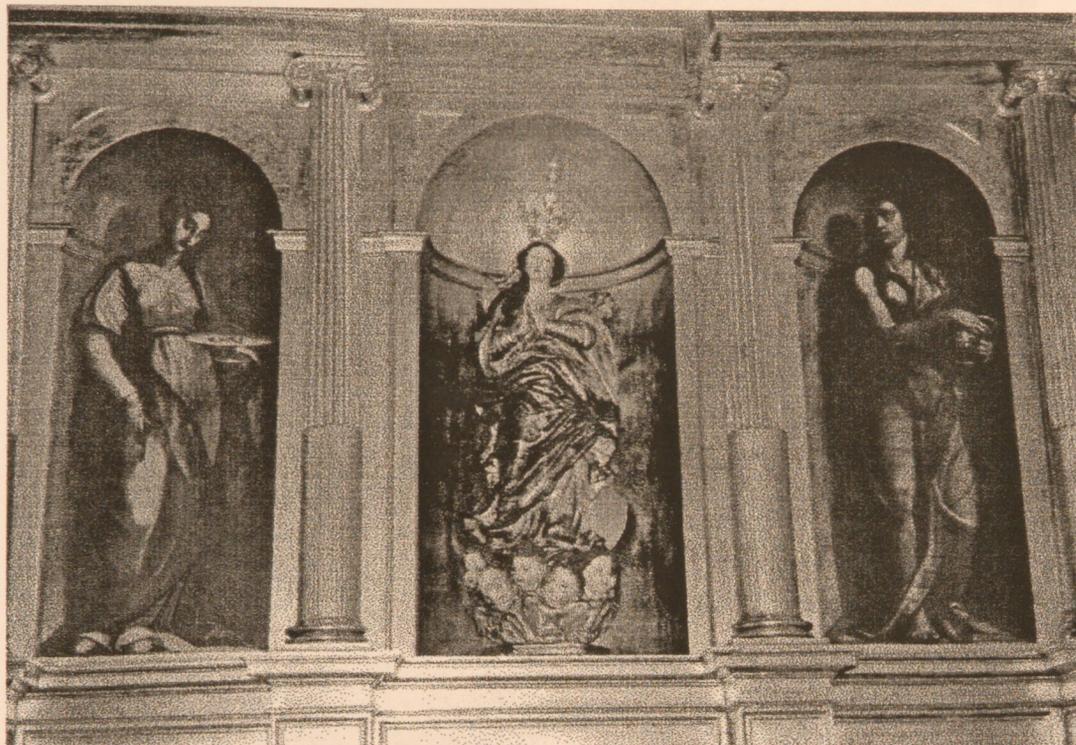


Fig.3 — Retábulo da Nossa Sra. da Conceição em Loures, com pinturas de Lourenço de Salzedo, de cerca de 1570.

Avançando cronologicamente no tempo, para a estética barroca, também Ticiano na sua Pietà (fig.4), surpreende-nos ao representar um nicho que apresenta um tratamento de claro-escuro bastante vibrante e que confere uma grande dinâmica a esta obra. Com efeito, os brilhos, a luz e as sombras, apresentam uma grande turbulência, muito característicos da estética barroca. O tratamento plástico da luz e da sombra neste nicho, mostram claramente que a atitude de Ticiano não foi de querer apenas representar o real, mas antes, eleva-lo em espiritualidade, em grandeza e em infinitude, muito ao gosto dos ideais tridentinos. A própria ideia de metamorfose está sublinhada pela forma sugerida que surge da luz intensa e vibrante, que emana do interior da porção de superfície esférica do nicho, na zona que rodeia o *ponto brilhante*.

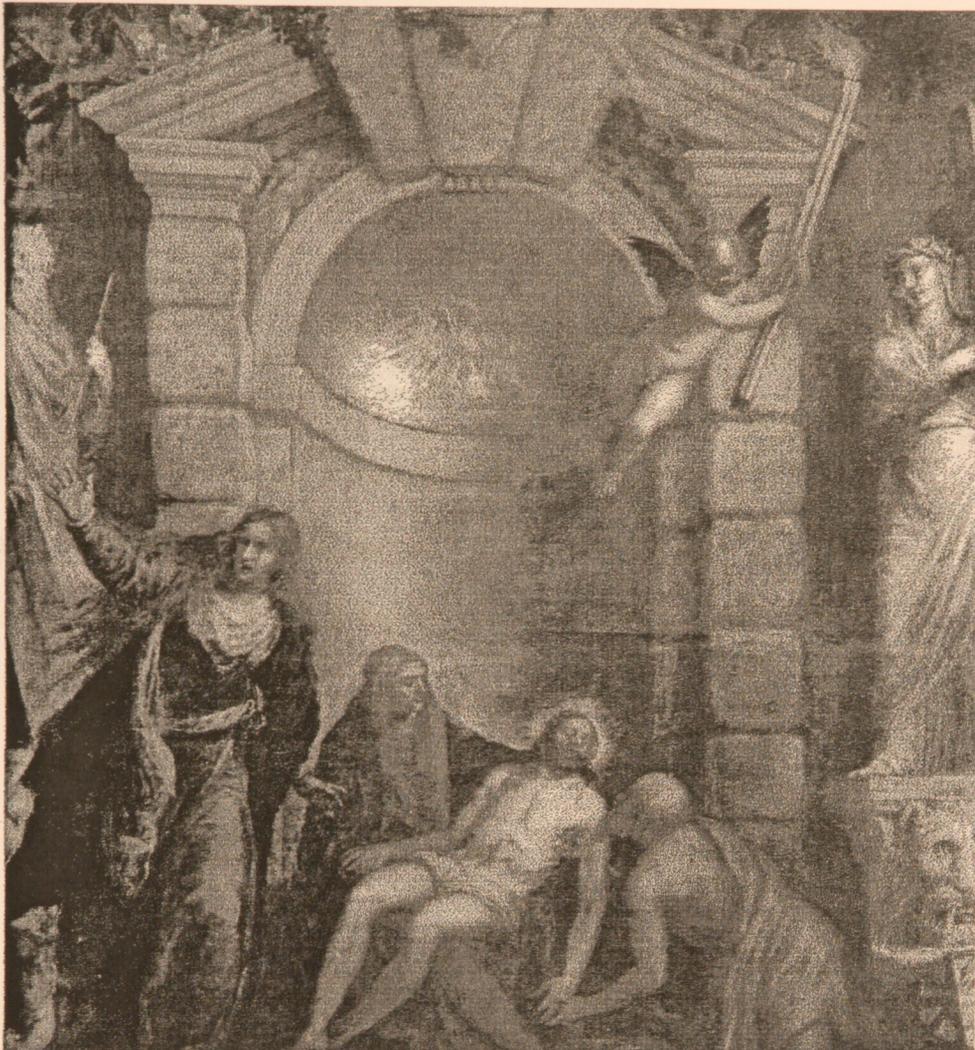


Fig.4 - Ticiano. *Pietà* (Galeria da Academia, Veneza).

Enfim, muitos mais exemplos de representação de arquitecturas ilusórias poderiam ser apresentados ou referidos, no entanto, apesar da subjectividade individual de cada artista ou da sua individualidade criadora, existem **regras** e **métodos** que permitem determinar em termos gráficos, e com rigor, as fronteiras que separam as regiões iluminadas e em sombra de superfícies, ou de formas compostas por porções de superfícies. Só unicamente com os métodos utilizados em Geometria Descritiva, tais fronteiras – as linhas de separatriz –, que separam as duas regiões complementares em luz e em sombra, poderão ser rigorosamente determinadas. Todos os outros valores de claro-escuro que se apresentam à vista nas ilustrações referidas: as gradações sucessivas das zonas iluminadas e em sombra, desenvolvem-se em torno daquela linha

de separatriz. Esta, constitui o objecto de estudo da presente aula e, por esta razão, à vantagem em determiná-la.

É claro, e natural, que no tempo em que foram pintados os quadros dos autores referidos, não se conhecessem ainda os métodos necessários para a determinação rigorosa das áreas em luz e das áreas em sombra, de qualquer forma geométrica. Tão pouco nos parece que os autores dessem muita importância a esse assunto, no entanto, o conhecimento de tais métodos – que apenas foram desenvolvidos nos grandes tratados de Geometria nos séculos XVIII e XIX ² –, permite uma apreensão muito maior da realidade, da Natureza e dos modelos que a constituem.

² Cfr. nos estudos do Prof. Vitor Serrão, *A Perspectiva na Teoria Estética Renascentista*, In, caderno de apontamentos para os alunos de História de Arte da Faculdade de Letras de Lisboa, pp. 2-3, que, no início do séc. VI, na Península Ibérica, foi muito difundido um tratado de Perspectiva, escrito em 1505, da autoria de Jean Pélerin Viator. Este tratado teve inúmeras edições posteriores, sendo de destacar uma mais detalhada de 1962 da autoria de Lilliane Brion Guerry. A respeito dele, refere o Prof. Vitor Serrão que: «...a coloração empírica e a prática do autor denuncia bases teóricas, desde Alberti a Leonardo e Pacioli, passando por Lefévre d'Étaples na sua *Arithmetica* de 1505. O autor compilou os métodos gráficos vigentes no trabalho das oficinas de artistas, para uso da perspectiva, com base na experiência laboral da arte centro europeia com que contactou. [...] o seu contributo para divulgar fora de Itália a prática da perspectiva pictural é imensa.» (cit., pág.3). Neste e noutros tratados realizados nesta altura não foram, no entanto, desenvolvidos aspectos relacionados com a determinação rigorosa de sombras de superfícies.

3- O objectivo do tema proposto.

O tema e o exercício proposto têm, como objectivo, verificar a acção da luz directa numa forma composta por duas porções de superfícies concordantes – um quarto de superfície esférica côncava e uma região semicilíndrica vertical, igualmente côncava. Estas duas concordâncias definem a forma composta do nicho. Este exercício constitui apenas um exemplo de aplicação da teoria das sombras às artes plásticas, tal como se verificou nos exemplos anteriormente referidos.

Os objectos representados em três dimensões ganham com a aplicação e determinação de sombras, um carácter de verosimilhança, de relevo e de destaque, sendo mais fácil a sua leitura no espaço. Deste modo, adquirem um aspecto real, aproximando-os de muitas situações que se verificam na realidade visual aparente e que, muitas vezes, são necessárias para se formularem quaisquer projectos – quer sejam de índole funcional e estético, onde se incluem os objectos de Design; quer sejam de carácter estético e estritamente artístico, onde se incluem as obras de arte em geral – pintura, escultura, instalações, entre outras manifestações. Os exemplos anteriormente referidos e ilustrados assim o testemunharam nas Artes Plásticas.

Deste modo, o exercício proposto tem também como objectivo, permitir, verificar e visualizar todo um processo de raciocínio faseado em várias etapas, e que, no fim, possibilitam demonstrar em síntese, o resultado dessa várias etapas, ou melhor, a linha de separatriz de sombra própria interior projectada no interior do nicho. **Importa referir, que esta linha resulta da intersecção com o nicho, da superfície cilíndrica luz-sombra que lhe é secante.** As várias etapas do exercício que culminam na determinação da linha de separatriz, compreendem a programação da disciplina de Geometria do primeiro e segundo anos da Faculdade de Belas artes de Lisboa, designadamente: a *representação por dupla projecção ortogonal* e a *representação por projecções centrais em perspectiva linear plana*. Por esta razão, podemos considerar este

exemplo como sendo um exercício de síntese, desfazendo a velha ideia – errada – de alguns que dizem que o «*programa de Geometria Descritiva do primeiro ano não tem aplicação posterior.*» Este exercício vem negar essa ideia e provar que, decididamente, são indispensáveis os conhecimentos ministrados nos dois anos.

Deste modo, para concretizar as várias etapas do exercício proposto, foram necessários e indispensáveis as seguintes matérias pertencentes ao programa da disciplina de Geometria Descritiva e de Geometria – Técnicas de Representação Rígida, a saber: os métodos de traçado; os métodos geométricos auxiliares; as rotações (rebatimentos); e, também, o método dos planos úteis, tangentes e secantes ao nicho e às duas superfícies luz-sombra, concordante e secante. Estes planos tangentes e secantes utilizados para a determinação da linha de separatriz de sombra própria interior procurada, estão directamente relacionados com a intersecção de superfícies. No caso particular, como o nicho é uma forma aberta, a superfície cilíndrica luz-sombra utilizada, para a determinação da linha de separatriz interior, é secante à forma composta eleita.

Em síntese, trata-se de um exercício que nos remete em termos temáticos para o estudo da teoria das sombras mas que tem, como objectivo principal, assimilar uma grande parte dos conhecimentos que fazem parte dos programas de Geometria ministrados na Faculdade de Belas Artes da Universidade de Lisboa.

Na preocupação de um melhor entendimento, o exercício proposto – anteriormente apresentado no trabalho de síntese – apresenta-se nesta aula numa versão mais alargada e pormenorizada.

4- O enquadramento da aula e do enunciado, no contexto do ano lectivo.

Esta aula e exercício de síntese enquadram-se no final do ano lectivo do segundo ano, altura em que já foram assimilados as bases e os conhecimentos necessários e fundamentais que possibilitam a resolução de qualquer tipo de enunciado relativo à problemática da determinação de sombras – e tendo em conta os limites do programa da disciplina.

Assim, no desenvolvimento da aula e na resolução do exercício, intervieram várias operações gráficas que foram leccionadas em várias fases durante os anos lectivos do primeiro e segundo anos.

Para a resolução do exercício foi, no entanto, seleccionado o sistema por **projecções centrais** e a representação em **perspectiva linear plana**. Contudo, foram necessárias algumas referências e operações respeitantes ao primeiro ano.

Relativamente ao **enunciado** da aula proposta seleccionou-se, de início, a vista superior da forma composta do nicho, dada em dupla projecção ortogonal (representação estudada no primeiro ano) e a uma determinada escala gráfica. Nesta vista, registam-se para além da vista superior do conjunto eleito, o ângulo que o plano vertical de projecção (plano frontal ou o quadro) faz com o plano de abertura do nicho e que, em vista superior, corresponde ao ângulo que esse plano δ faz com LT. Sendo dados, previamente, a vista superior do conjunto do nicho e outros dados do problema, referidos mais adiante, que determinam a forma composta, foi posteriormente mais fácil determinar as projecções centrais do dito conjunto recorrendo para tal, aos **métodos de traçado: directo** e dos **pontos de fuga**. Ainda relativamente ao primeiro ano, para além da vista superior e do ângulo referido, foram necessárias algumas operações de rebatimento que se discriminam nos capítulos seguintes mas que foram no entanto, necessárias para se determinarem alguns pontos da linha de separatriz de sombra própria interior projectada

no interior da superfície, zona que correspondente a um quarto de superfície esférica, aberto.

Relativamente ao segundo ano, para a realização do exercício, utilizaram-se os métodos de traçado referidos no parágrafo anterior e as rotações (rebatimentos), com a determinação do ponto de fuga das cordas de arco que coincide com a rotação (rebatimento) do ponto de vista ou centro de projecção em torno da *charneira homológica*.³ A determinação do ponto de fuga das cordas de arco facilita o rebatimento de vários pontos, rectas, planos, ou figuras planas, de um modo eficaz e sobretudo mais rápido. Deste modo, evitam-se os rebatimentos individuais – também possíveis – de cada ponto, recta, plano, ou figura plana, em particular.

Para a determinação das linhas de contorno aparente do *conjunto concordante*⁴ do nicho, para além de se considerarem a rotação (rebatimento) do plano da fachada do nicho e os métodos de traçado: directo e dos pontos de fuga, considerou-se também, o teorema de Pierre Dandelin, referido no quinto capítulo⁵.

Relativamente à determinação da linha de separatriz de sombra própria interior projectada no interior da forma composta do nicho – sombra autoprojectada – utilizaram-se os métodos necessários, já referidos e leccionados na terceira fase do primeiro ano da cadeira de Geometria da Faculdade de Belas Artes de Lisboa. Estes métodos são também aplicáveis no segundo ano, mudando apenas o sistema de projecção, que passou a ser o cónico ou central e o método de representação plana por projecções centrais.

³ A charneira homológica, resulta da intersecção com o quadro, do plano que contém o centro de projecção e é paralelo ao plano dado que se pretende rebater, ou que contém a forma plana que se pretende rebater. A esta recta de intersecção com o quadro, do plano paralelo ao dado e que contém o centro de projecção, convencionou-se designar de *recta de fuga*. A esta recta de fuga, corresponde uma orientação de infinitos planos paralelos.

⁴ Com efeito, o nicho é composto por duas regiões de superfícies concordantes: um meio de cilindro côncavo, delimitado por uma directriz que corresponde a uma semicircunferência pertencente a um plano de nível, e por outra semicircunferência que pertence ao geometral; estas, determinam a porção cilíndrica do nicho. A outra região do nicho corresponde a uma porção de um quarto de esfera côncavo. As duas regiões, esférica e cilíndrica, concordam no equador de concordância, que pertence ao plano de nível e delimita as regiões esférica e cilíndrica. Neste equador – linha de concordância, os planos tangentes são comuns às duas porções de superfícies.

⁵ Este teorema, permite determinar com rigor absoluto, uma parte integrante da linha de contorno aparente pertencente ao quarto de superfície esférica do nicho e que corresponde a um arco de elipse.

O exercício proposto tem a duração de quatro horas a que correspondem duas sessões. Na primeira sessão, o objectivo centra-se na determinação rigorosa das linhas que definem o contorno aparente das projecções centrais do nicho. Na sessão seguinte, o objectivo centra-se na determinação rigorosa da linha de separatriz de sombra própria interior procurada no nicho e sobre o geometral – aspectos que se desenvolvem no quinto capítulo.

Nas duas horas que correspondem à segunda sessão, procede-se à determinação rigorosa da linha de separatriz de sombra própria interior projectada – sombra susprojectada – na região limitada do nicho e sobre o geometral.

Assim, para a realização do exercício, foram dados e indicados provisoriamente no enunciado o formato A3 da folha e a sua colocação na horizontal (ao lado); a distância, 120, da linha do horizonte à margem superior de folha; a altura de visão = 45; a distância de visão = 100; a distância do ponto de vista à margem esquerda de folha = 180; a vista superior do conjunto, onde se verificam a relação angular entre o plano do quadro e o plano vertical que contém as linhas de abertura do nicho ou a frente do nicho = 25° (a.o.), que corresponde ao ângulo que h_1 faz com h_0 ; a posição do ponto de vista ou centro de projecção; a altura do cilindro = 70; o centro $C(60,0,70)$ do quarto de esfera de raio 70, que completa o conjunto do nicho; e, ainda, a direcção luminosa aleita, que neste exercício particular é a convencional.

Para a exposição e fazimento do exercício recorreu-se, para além da exposição oral, à utilização de dispositivos e de registos em suporte. Nos primeiros, registam-se alguns exemplos concretos que introduzem o problema e o exercício nas artes plásticas e na arquitectura; nos segundos, com a utilização do retroprojector, registam-se as várias etapas, fases e raciocínios do problema, com os respectivos registos gráficos, cada um, correspondente a cada fase ou passo. Acontece ser útil fazer em vários registos o desenvolvimento do exercício, evitando confusões que poderiam ser agravadas com a sobreposição dos traçados auxiliares.

5- O desenvolvimento da aula: as etapas e o raciocínio na resolução do enunciado e do problema proposto, com encadeamento gráfico de registos esclarecedores. Memória descritiva da exposição do exercício proposto.

A aula, como já se disse, tem a duração de quatro horas. Nas primeiras duas horas, que correspondem à primeira sessão, tem-se como objectivo determinar rigorosamente, as projecções centrais das linhas que determinam o contorno aparente da forma composta do nicho. Nas duas horas que correspondem à segunda sessão, proceder-se-á à determinação rigorosa da linha de separatriz da sombra própria interior projectada – sombra autoprojectada – na região limitada do nicho e sobre o geometral.

Assim, para a resolução do exercício, foram dados e indicados previamente no enunciado: o formato A3 da folha e a sua colocação na horizontal (ao baixo); a distância, 120, da linha do horizonte à margem superior da folha; a altura de visão = 45; a distância de visão = 100; a distância do ponto de vista à margem esquerda da folha = 180; a vista superior do conjunto, onde se verificam: a relação angular entre o plano do quadro e o plano vertical que contem as linhas de abertura do nicho ou a frente do nicho = 25° (a.e) , que corresponde ao ângulo que LT faz com $h\delta$; a posição do ponto de vista ou centro de projecção; a altura do cilindro = 70; o centro C(60,0,70) do quarto de esfera de raio 70, que completa o conjunto do nicho; e, ainda, a direcção luminosa eleita, que neste exercício particular é a convencional.

Para a exposição e faseamento do exercício recorreu-se, para além da exposição oral, à utilização de diapositivos e de registos em acetato. Nos primeiros, registam-se alguns exemplos concretos que introduzem o problema e o exercício nas artes plásticas e na arquitectura; nos segundos, com a utilização do retroprojector, registam-se as várias etapas, fases e raciocínios do problema, com os respectivos registos gráficos, cada um, correspondente a cada fase ou passo. Achou-se útil fasear em vários registos o desenvolvimento do exercício, evitando confusões que poderiam ser agravadas com a sobreposição dos traçados auxiliares.

a) Determinação das linhas de contorno aparente do nicho.

Após se terem enunciado os dados do problema, deu-se então início à aula, apresentando a vista superior do conjunto do nicho Δ com os dados já referidos que permitiram o seu desenvolvimento (fig.5).

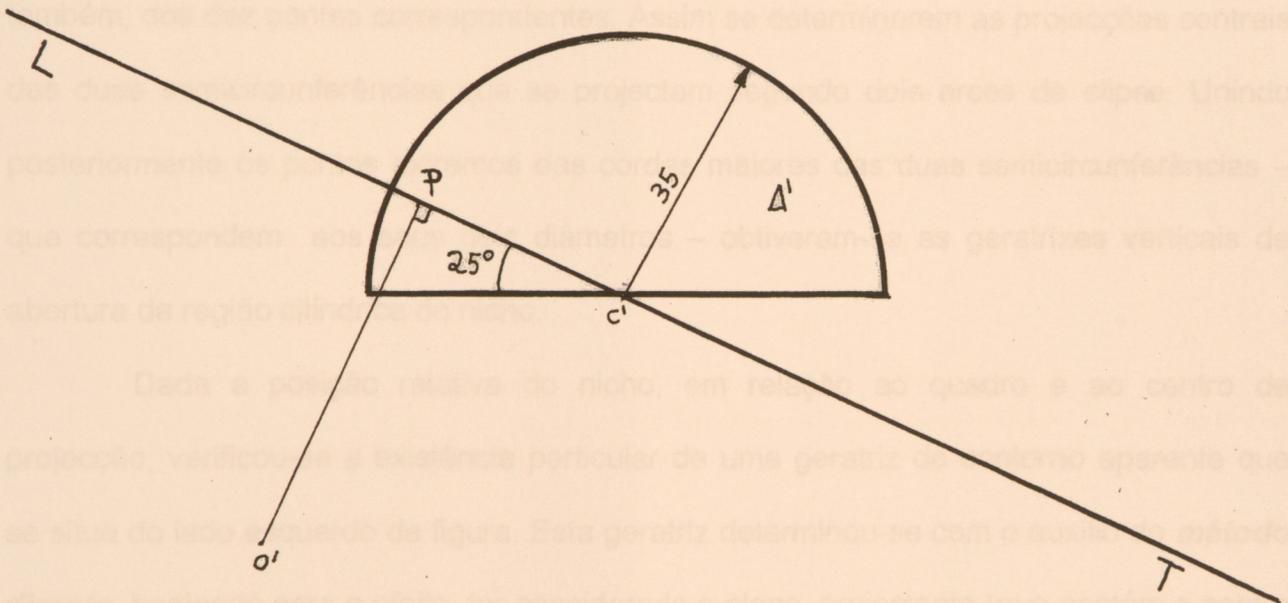


Fig.5- Vista superior do conjunto, dada numa representação à escala 1:2.

Definidas previamente em dupla projecção ortogonal as coordenadas desta região composta e respeitando os outros dados do problema procedeu-se, em primeiro lugar, à determinação das projecções centrais do conjunto utilizando para tal, o método dos pontos de fuga e o método directo. Estes métodos permitiram determinar com rigor, as projecções centrais das semicircunferências da região cilíndrica de revolução do nicho: da semicircunferência pertencente ao geometral e da semicircunferência que corresponde ao equador de concordância com a porção de superfície esférica do nicho, esta, existe

num plano de nível. Para efeitos de rigor, consideraram-se os semiquadrados circunscritos àquelas semicircunferências que permitiram determinar, com mais eficácia, as projecções centrais das dez tangentes necessárias à construção das semicircunferências que se encontram à distancia 70. Para tal, e utilizando o **método dos pontos de fuga**, consideraram-se em cada circunferência, cinco pontos e as respectivas tangentes que constituem os lados dos quadrados circunscritos, onde, de seguida, se determinaram os respectivos pontos de fuga. Sendo paralelas as tangentes das duas semicircunferências pertencentes ao geometral e ao plano de nível, têm por essa razão, o mesmo ponto de fuga, facilitando a determinação, não apenas das dez tangentes mas também, dos dez pontos correspondentes. Assim se determinaram as projecções centrais das duas semicircunferências que se projectam segundo dois arcos de elipse. Unindo posteriormente os pontos extremos das cordas maiores das duas semicircunferências – que correspondem aos seus dois diâmetros – obtiveram-se as geratrizes verticais de abertura da região cilíndrica do nicho.

Dada a posição relativa do nicho, em relação ao quadro e ao centro de projecção, verificou-se a existência particular de uma geratriz de contorno aparente que se situa do lado esquerdo da figura. Esta geratriz determinou-se com o auxilio do **método directo**, bastando para o efeito, ter considerado o plano projectante (que contém o centro de projecção) tangente à região cilíndrica e sua intersecção com o quadro. Ao segmento de porção de recta de intersecção daquele plano projectante com o quadro, delimitado pelos dois pontos de contacto pertencentes às duas semicircunferências horizontais, corresponde a geratriz vertical de contorno aparente do semicilindro aberto de revolução circular que compõe uma parte do nicho. Assim, com a determinação das projecções centrais das duas semicircunferências, das duas geratrizes verticais de abertura do nicho (que pertencem à região cilíndrica) e também, da geratriz de contorno aparente, foi possível encontrar as projecções centrais da porção cilíndrica do nicho (fig.6).

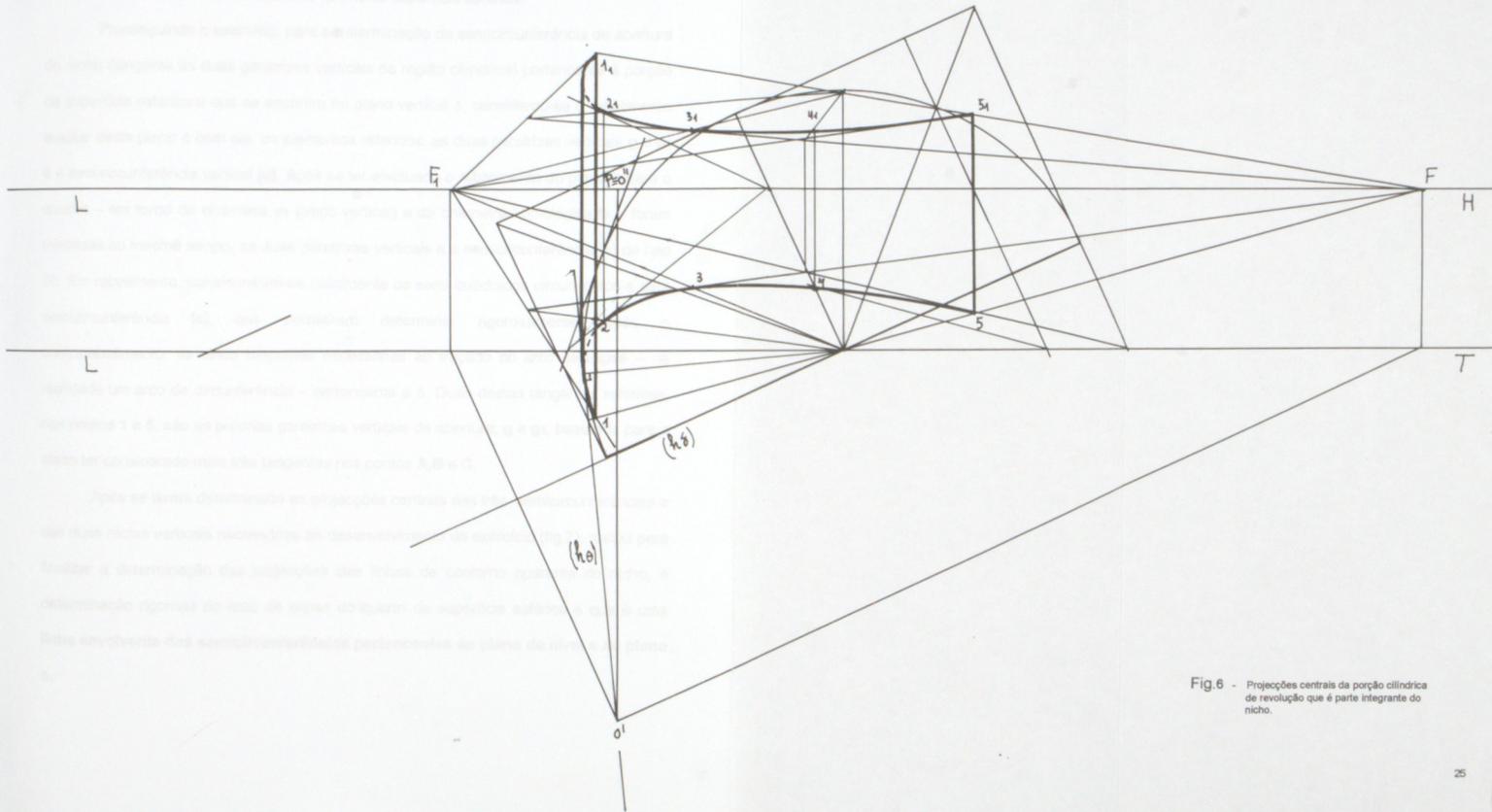


Fig.6 - Projeções centrais da porção cilíndrica de revolução que é parte integrante do nicho.

Para a determinação rigorosa das projecções centrais da porção de superfície esférica, que corresponde a um quarto de esfera côncava, recorreu-se ao semi equador de nível já determinado (semicircunferência superior), à porção de meridiano de raio máximo que pertence ao plano δ vertical, de abertura do nicho e também, ao teorema de Pierre Dandelin. Este teorema permitiu, com rigor, determinar a linha envolvente de contorno aparente do arco de elipse do quarto de superfície esférica.

Prosseguindo o exercício, para a determinação da semicircunferência de abertura do nicho (tangente às duas geratrizes verticais da região cilíndrica) pertencente à porção de superfície esférica e que se encontra no plano vertical δ , considerou-se o rebatimento auxiliar deste plano e com ele, os elementos referidos: as duas geratrizes verticais g e g_1 e a semicircunferência vertical $[c]$. Após se ter efectuado o rebatimento do plano δ para o quadro – em torno da charneira v_δ (traço vertical) e da charneira homóloga f_δ – foram rebatidas ao mesmo tempo, as duas geratrizes verticais e a semicircunferência $[c]$ de raio 70. Em rebatimento, consideraram-se novamente os semi quadrados circunscritos a esta semicircunferência $[c]$, que permitiram determinar rigorosamente, após o contrarebatimento, as cinco tangentes necessárias ao traçado do arco de elipse – na realidade um arco de circunferência – pertencente a δ . Duas destas tangentes referidas, nos pontos 1 e 5, são as próprias geratrizes verticais de abertura, g e g_1 , bastando para o efeito ter considerado mais três tangentes nos pontos **A, B e C**.

Após se terem determinado as projecções centrais das três semicircunferências e das duas rectas verticais necessárias ao desenvolvimento do exercício (fig.7), restou para finalizar a determinação das projecções das linhas de contorno aparente do nicho, a determinação rigorosa do arco de elipse do quarto de superfície esférica e que é uma **linha envolvente das semicircunferências pertencentes ao plano de nível e ao plano δ** .

FIG. 7 - Projecções centrais das três semicircunferências e das duas rectas verticais necessárias ao desenvolvimento do exercício.

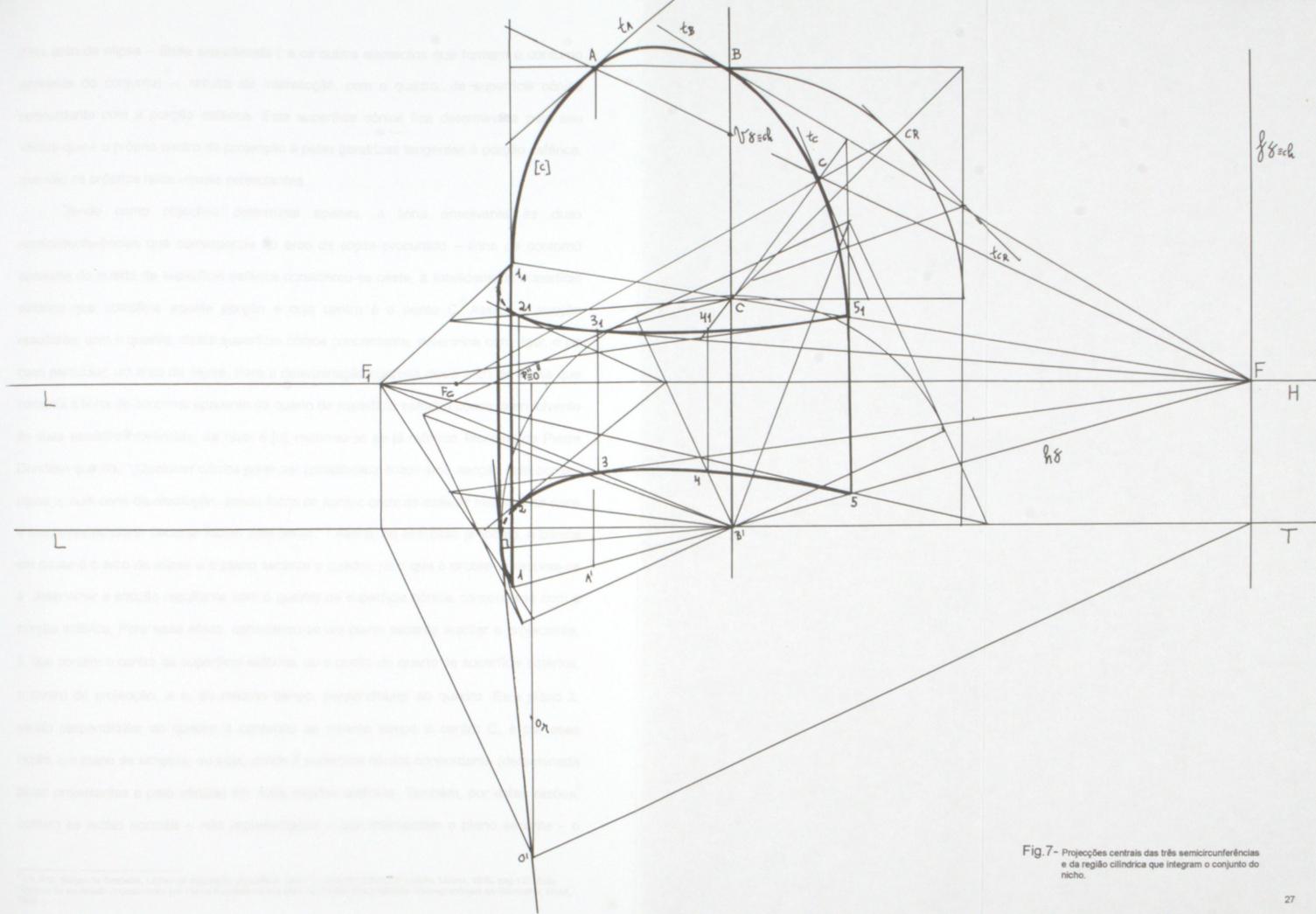


Fig.7- Projeções centrais das três semicircunferências e da região cilíndrica que integram o conjunto do nicho.

Este arco de elipse – **linha envolvente** (e os outros elementos que formam o contorno aparente do conjunto) –, resulta da intersecção, com o quadro, da superfície cónica concordante com a porção esférica. Esta superfície cónica fica determinada pelo seu vértice que é o próprio centro de projecção e pelas geratrizes tangentes à porção esférica, que são os próprios raios visuais projectantes.

Tendo como objectivo determinar apenas, a linha envolvente às duas semicircunferências que corresponde ao arco de elipse procurado – linha de contorno aparente do quarto de superfície esférica considerou-se neste, a totalidade da superfície esférica que completa aquela porção e cujo centro é o ponto C. Assim, a secção resultante, com o quadro, desta superfície cónica concordante, determina com rigor, e no caso particular, um arco de elipse. Para a determinação rigorosa deste arco de elipse que constitui a linha de contorno aparente do quarto de superfície esférica côncava envolvente às duas semicircunferências, de nível e [c], recorreu-se ao já referido Teorema de Pierre Dandelin que diz: “ *Qualquer cónica pode ser considerada como uma secção feita por um plano α , num cone de revolução, sendo focos os pontos onde as esferas inscritas no cone e tangentes ao plano secante tocam este plano.*”⁶ Assim, no exercício proposto, a cónica em causa é o arco de elipse e o plano secante o quadro, pelo que o problema resume-se a determinar a secção resultante com o quadro da superfície cónica concordante com a porção esférica. Para esse efeito, considerou-se um plano secante auxiliar e projectante, λ , que contém o centro da superfície esférica, ou o centro do quarto de superfície esférica, o centro de projecção, e é, ao mesmo tempo, perpendicular ao quadro. Este plano λ , sendo perpendicular ao quadro e contendo ao mesmo tempo o centro C, é por essa razão, um plano de simetria, ou seja, divide a superfície cónica concordante (determinada pelas projectantes e pelo vértice) em duas regiões distintas. Também, por estas razões, contém as *rectas normais* – não representadas – que intersectam o plano secante – o

⁶ Cfr. Prof. Borges de Sequeira, *Lições de Geometria Descritiva*, Livro 1 – Scientia editora, 3ª edição, Lisboa, 1940, pág.131. Este Teorema foi enunciado originalmente por Pierre Dandelin na sua obra *Sur l'emploi des projection stereographique en Géometrie*, Gand, 1827.

quadro – nos pontos de contacto das esferas inscritas, ou seja, nos **focos** que permitiram determinar com rigor e posteriormente, a elipse secção onde se encontra o arco de elipse procurado.

Assim, bastou para o efeito, ter considerado o plano λ e a sua intersecção com a superfície esférica que contém a porção esférica. Desta intersecção, resultou o meridiano de secção **[c₁]**, de centro C, que se rebateu. Rebateu-se para além do meridiano **[c₁]**, o centro de projecção que está contido no plano. Em rebatimento, e numa primeira fase, conduziram-se a partir do centro de projecção, duas tangentes ao meridiano referido cujo raio é 70. Estas tangentes são, pois, dois raios visuais que intersectam o quadro no traço vertical do plano em dois pontos **R** e **S**. O segmento de recta determinado por estes dois pontos define o **eixo maior** da elipse secção.

Para determinar os **focos** que possibilitaram traçar a elipse, considerou-se em primeiro lugar e a partir de C_R, centro da superfície esférica rebatido, o **segmento normal** perpendicular ao quadro (e que é um diâmetro da superfície esférica e do meridiano **[c₁]**). Este diâmetro, normal ao quadro em rebatimento, projecta-se perpendicularmente ao traço vertical $v\lambda$ e à recta de fuga $f\lambda$ (também, por esta razão, este segmento **n** é ao mesmo tempo, uma recta de maior inclinação do plano λ). A intersecção deste segmento **n** com o meridiano **[c₁]** pertencente ao plano λ , determinou os pontos FR e F₁R; esta operação fez-se em rebatimento. De seguida, a intersecção com o quadro, das rectas determinadas pelo centro de projecção e por aqueles pontos FR e F₁R, permitiu determinar os dois focos **F** e **F₁** da elipse ou do arco de elipse. No entanto, o foco F₁, determinou-se, considerando a mesma distância de F ao centro da elipse secção a que corresponde o ponto médio do eixo maior, ponto M.⁷ De notar que, os pontos F e F₁ – **focos da elipse** – correspondem aos pontos de contacto com o quadro, das superfícies esféricas inscritas ao cone visual de revolução concordante com a esfera considerada. Os

⁷ Cfr. Prof. Aux. Arq. José Manuel Patrício de Sousa Moutinho, *Perspectiva Cónica Linear*, Esbal, 1991, pp. 272-276.

centros e as respectivas normais dessas duas superfícies não foram, no entanto, representadas na fig.8 para não sobrecarregar o desenho.

Posteriormente e sabendo que numa elipse o eixo maior é perpendicular ao eixo menor considerou-se, desse modo, a recta que passa no ponto médio M perpendicular ao eixo maior já determinado e que vai conter o eixo menor. E finalmente, com o auxilio dos focos F e F1 e dos comprimentos dos semieixos do eixo maior, determinaram-se os pontos T e U que constituem o segmento de recta que é o **eixo menor** da elipse e que, possibilitaram, posteriormente, determinar as projecções centrais directa da elipse que contem o **arco de elipse procurado**. Note-se que, desta elipse, apenas uma parte integra as projecções da linha de contorno aparente. Essa pequena parte, que corresponde ao arco referido, fica delimitada pelo linha envolvente ao equador de nível, de concordância do semi cilindro vertical com o quarto de superfície esférica e, também, ao meridiano [c] de abertura da porção esférica que pertence ao plano vertical δ .

Com a determinação rigorosa deste último *arco de elipse* procurado, que é parte integrante das projecções da linha de contorno aparente, completaram-se as fases e todas as linhas que permitiram determinar as projecções centrais directa do nicho, que deste modo se concluíram (Figs. 8 e 9).

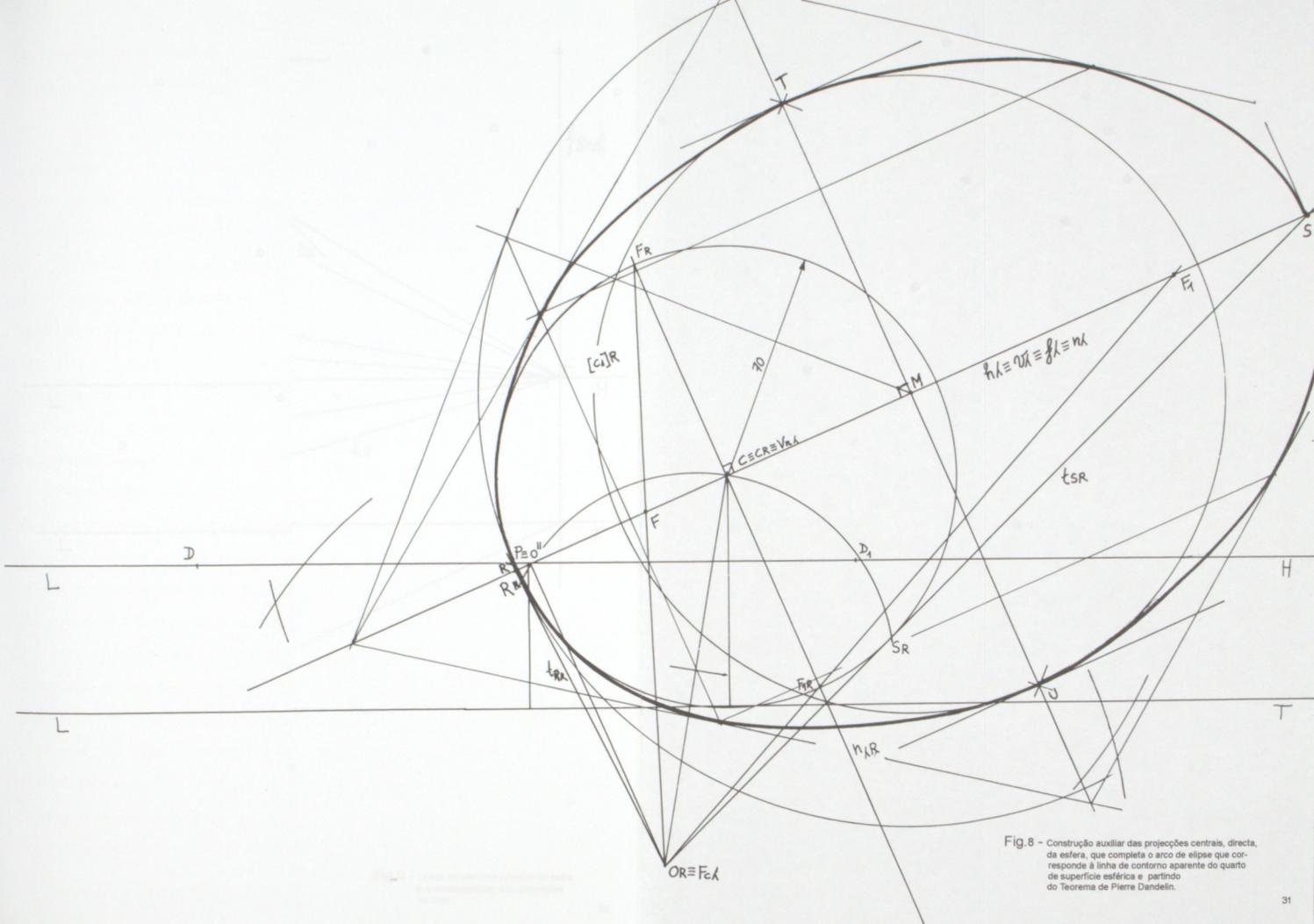


Fig. 8 - Construção auxiliar das projeções centrais, directa, da esfera, que completa o arco de elipse que corresponde à linha de contorno aparente do quarto de superfície esférica e partindo do Teorema de Pierre Dandelin.

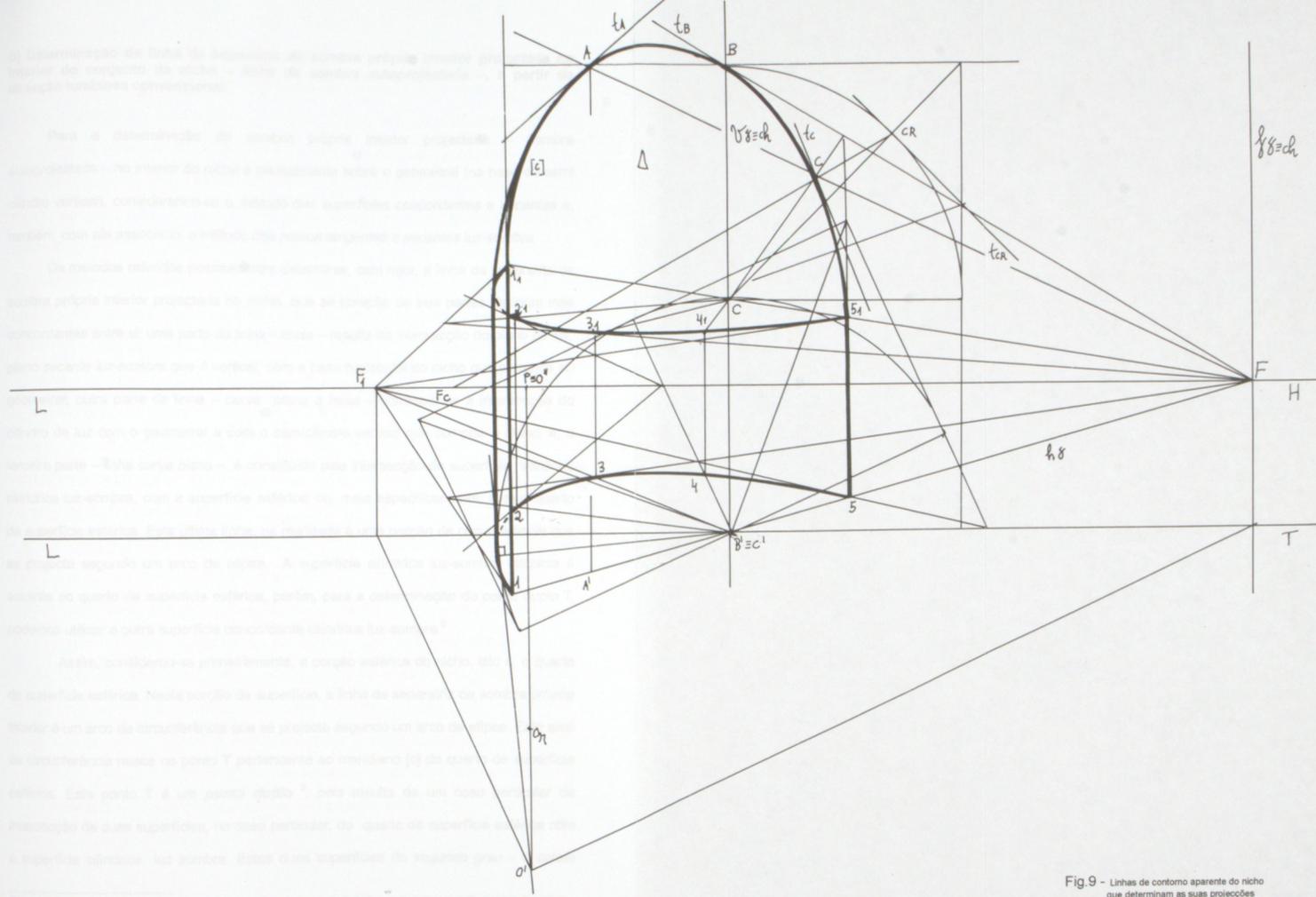


Fig.9 - Linhas de contorno aparente do nicho que determinam as suas projeções centrais.

b) Determinação da linha de separatriz de sombra própria interior projectada no interior do conjunto do nicho – linha de sombra autoprojectada –, a partir da direcção luminosa convencional.

Para a determinação da sombra própria interior projectada – sombra autoprojectada – no interior do nicho e parcialmente sobre o geometral (na base do semi cilindro vertical), consideraram-se o *método das superfícies concordantes e secantes* e, também, com ele associado, o *método dos planos tangentes e secantes luz-sombra*.

Os métodos referidos possibilitaram determinar, com rigor, a linha de separatriz de sombra própria interior projectada no nicho, que se compõe de três partes distintas mas concordantes entre si: uma parte da linha – *recta* – resulta da intersecção do plano de luz, *plano secante luz-sombra que é vertical*, com a base horizontal do nicho que pertence ao geometral; outra parte da linha – *curva plana e torsa* – corresponde à intersecção do cilindro de luz com o geometral e com o semicilindro vertical que compõe o nicho; e, a terceira parte – *linha curva plana* –, é constituída pela intersecção da superfície secante, cilíndrica luz-sombra, com a superfície esférica, ou, mais especificamente, com o quarto de superfície esférica. Esta última linha, na realidade é uma porção de circunferência que se projecta segundo um arco de elipse. A superfície cilíndrica luz-sombra utilizada é secante ao quarto de superfície esférica, porém, para a determinação do ponto duplo T, podemos utilizar a outra superfície concordante cilíndrica luz-sombra.⁸

Assim, considerou-se primeiramente, a porção esférica do nicho, isto é, o quarto de superfície esférica. Nesta porção de superfície, a linha de separatriz de sombra própria interior é um arco de circunferência que se projecta segundo um arco de elipse. Este arco de circunferência nasce no ponto T pertencente ao meridiano [c] do quarto de superfície esférica. Este ponto T é um **ponto duplo**⁹, pois resulta de um caso particular de intersecção de duas superfícies, no caso particular, do quarto de superfície esférica com a superfície cilíndrica luz sombra. Estas duas superfícies do segundo grau – a calote

⁸ Cfr. Professor Borges de Sequeira, Mss. do *Resumo das Lições de Geometria Descritiva* do Prof. Borges de Sequeira da Faculdade de Ciências de Lisboa e do Instituto Superior Técnico, Livro.II, 2ª edição, Lisboa, 1928, pp. 57-58.

⁹ Cfr. Jean Jules Pillet, *Cours de Géométrie Descriptive*, Ed. Librairie CH. Delagrave, Paris, 1887, pág. 80.

esférica que contém o quarto de superfície esférica e a superfície cilíndrica luz-sombra, na sua intersecção, admitem **dois planos tangentes comuns**, precisamente nos referidos *pontos duplos*. Estes pontos duplos surgem, sempre que na intersecção de duas superfícies de revolução, todas as geratrizes de uma superfície intersectarem todas as geratrizes ou linhas da outra superfície – intersecção a que se dá o nome de **penetração tangencial dupla**. Nestes casos, a linha de intersecção de duas superfícies é **sempre plana**. Com efeito, refere Jean Jules Pillet: « *Théoreme 3. – Lorsque deux surface du deuxieme degré se coupent, si la courbe d'entrée est plane; la courbe de sortie est aussi plane.* »¹⁰ No caso particular, como a superfície cilíndrica circunscrita e secante ao quarto de superfície esférica é uma superfície luz-sombra, as geratrizes da superfície cilíndrica são os próprios raios luminosos. Estes raios tangentes à curva de entrada – **o meridiano [c] que pertence ao plano δ** – intersectam o interior do quarto de superfície esférica segundo uma linha plana fechada que tem a forma de uma **semicircunferência**. Esta, projecta-se genericamente, e no presente exercício, segundo um **arco de elipse** que comporta os dois pontos duplos.

Como, no caso particular, apenas interessa um quarto de superfície esférica, por esta razão, a linha de sombra própria pertencente a essa região é **um quarto de circunferência**, razão suficiente para justificar a existência de apenas um ponto duplo.

Assim, na fig.10, considerou-se, em primeiro lugar, a determinação da linha de separatriz de sombra própria interior correspondente ao quarto de superfície esférica. Essa linha inicia-se, superiormente, no meridiano [c] com o ponto duplo **T**. Para esse efeito, considerou-se a **superfície auxiliar cilíndrica de nível**, concordante com o quarto de superfície esférica no meridiano [c] do plano vertical δ . Sendo de nível e concordante com o meridiano, esta superfície tem as suas geratrizes perpendiculares ao plano δ , por esta razão, fogam em Fi. Sendo esta superfície cilíndrica concordante com o quarto de

¹⁰ Jean Jules Pillet, *Op. cit.*, pág. 80. Trad: « *Sempre que duas superfícies do segundo grau se intersectam, se a curva de entrada é plana; a curva de saída é também plana.* ».

superfície esférica naquele meridiano, significa que o plano tangente luz-sombra, ω , é tangente, simultaneamente, à superfície cilíndrica e ao quarto de esfera. Deste modo, o ponto de contacto deste plano tangente luz-sombra determina o ponto duplo de nascença **T**. Este ponto determinou-se, considerando a orientação luminosa $f\omega$ do plano tangente ω , que se determinou unindo os pontos de fuga das referidas geratrizes de nível **Fi** com o ponto de fuga da direcção luminosa **FI**. Definida a orientação luminosa, escolheu-se um plano arbitrário ω com aquela orientação $f\omega$. Na intersecção deste plano luz-sombra ω com o plano do meridiano de concordância [c], plano δ , resultou a recta **i** que determinou a **direcção da tangente t** ao meridiano e que, desta forma, permitiu encontrar o ponto duplo de nascença **T** – operação feita, após o rebatimento do plano δ .

Para a determinação de mais um ponto desta linha pertencente ao quarto de superfície esférica, considerou-se o auxilio da representação por dupla projecção ortogonal. Deste modo, considerou-se o plano auxiliar, vertical e secante luz-sombra – **plano λ_1** –, que comporta a direcção luminosa dada. Este plano intersecta o quarto de superfície esférica segundo a porção de circunferência [c₂] de centro C₁, cujo raio, se projecta horizontalmente – e desta forma se determinou – na intersecção de **h λ_1** com a porção esférica. De seguida, fez-se o rebatimento desse plano λ_1 e, com ele, a porção de secção [c₂]. Em rebatimento, e na secção [c₂]R considerou-se um raio luminoso que partiu do ponto 6R; este raio luminoso em rebatimento vai intersectar a mesma secção [c₂] no ponto 6SR – que corresponde à sombra do ponto 6 no interior do quarto de superfície esférica do nicho. Bastou, posteriormente, contra rebater este ponto 6SR – pelo método da representação por dupla projecção ortogonal – e proceder à determinação das suas projecções centrais, resultando o ponto **6s**.

Para concluir a determinação da porção de linha de separatriz de sombra própria no interior da porção de superfície esférica, bastou determinar o ponto **Qs** que pertence ao equador de concordância do quarto de superfície esférica com o semicilindro vertical. Este ponto é particularmente importante visto ser um ponto de concordância das duas

linhas de separatriz luz-sombra interior: da que corresponde ao quarto de superfície esférica – que resulta da intersecção do cilindro de luz com aquela porção de superfície – e da que corresponde ao semi cilindro vertical, esta última, resulta da intersecção do cilindro luz-sombra com o semicilindro vertical. Por ser um ponto de encontro de duas curvas distintas que inflectem nesse ponto é, por essa razão, um **ponto de inflexão**. Neste ponto, **Qs**, à grande vantagem em determinar a respectiva **tangente** permitindo, posteriormente, desenhar, com rigor, a curva total de separatriz de sombra própria interior.

Para a determinação deste ponto de inflexão **Qs** e da respectiva tangente **t**, considerou-se a intersecção com o equador de concordância, do plano da linha de separatriz correspondente ao quarto de superfície esférica. Esta linha, *curva plana*, que se projecta segundo um arco de elipse é, na realidade, uma porção ou um quarto de circunferência cujo centro e raio é o mesmo do quarto de superfície esférica e é, também, por esta razão, concêntrica com aquela porção de superfície. O centro **C** do quarto de superfície esférica é, ao mesmo tempo, o centro da referida linha. Considerou-se, deste modo, o **plano** β dessa linha, que se determinou com o auxílio dos pontos já determinados **C**, **T** e **6s**, que pertencem à separatriz correspondente ao quarto de superfície esférica. As rectas **a** e **b** determinadas por estes três pontos – concorrentes no ponto **L** da recta **a** – permitiram encontrar os traços do plano β .

Como o ponto **Qs** pertence ao equador de concordância do nicho bastou, de seguida, proceder à intersecção do plano v_1 **de nível** do equador referido, com o plano β , resultando a recta **i₁**. A intersecção desta recta com o equador de concordância, determina com rigor o ponto de inflexão procurado **Qs** e; a respectiva tangente, resultou da intersecção do plano β referido com o **plano vertical** θ , tangente ao nicho ao longo da geratriz vertical que contém o ponto **Qs**. Determinados que foram os pontos **T**, **6s** e **Qs**, e as tangentes nos pontos **T** e **Qs**, procedeu-se ao traçado rigoroso da porção de linha de separatriz de sombra própria interior, correspondente ao quarto de superfície esférica.

Para a determinação da linha de sombra projectada sobre o geometral, correspondente à parte interior e inferior do nicho – à sua base –, considerou-se, primeiramente, a sombra no geometral da recta vertical de abertura do nicho, situada o mais à esquerda – recta 111. Bastou para o efeito, ter considerado o plano secante luz-sombra passante por aquela recta e a sua intersecção com o geometral. Esta intersecção é o próprio traço horizontal do referido plano secante (não representado na fig.10) e corresponde à porção recta da linha de separatriz que, no geometral – na base do nicho –, fica limitada pelo ponto **1s**.

Resta, para finalizar o exercício, a determinação da linha correspondente à intersecção do cilindro de sombra com o semicilindro vertical que compõe o nicho e ainda parcialmente com o geometral (ou plano de terra). Para tal, foram utilizados, novamente, o *método dos planos secantes* e o *método das sombras virtuais* – ou *método das projecções oblíquas*. Deste modo, o ponto **As**, determinou-se, considerando a intersecção, com o semicilindro vertical, do raio de sombra que partiu do ponto A pertencente ao meridiano [c] da porção de superfície esférica, o que equivale a dizer que se considerou o plano secante luz-sombra naquele ponto. O ponto **Q1s**, de quebra, determinou-se, recorrendo ao método das projecções oblíquas; com efeito, determinou-se no geometral, a projecção oblíqua do arco compreendido entre os pontos **1** e **B** do meridiano [c], resultando o arco compreendido pelos pontos **1s** e **Bv**. Este arco intersecta a semicircunferência do nicho pertencente ao geometral, no ponto **Q1s**. De **1s** a **Q1s** o arco é real; de **Q1s** a **Bv**, o arco é virtual.

Determinadas as tangentes fundamentais nos pontos T e Qs, e os pontos necessários e suficientes: 1, 1s, Q1s, As, Qs, 6s e T; concluiu-se o exercício, que se completou, com o traçado completo das três porções que desenharam a linha de sombra própria interior projectada – linha de sombra autoprojectada – no interior do conjunto do nicho.

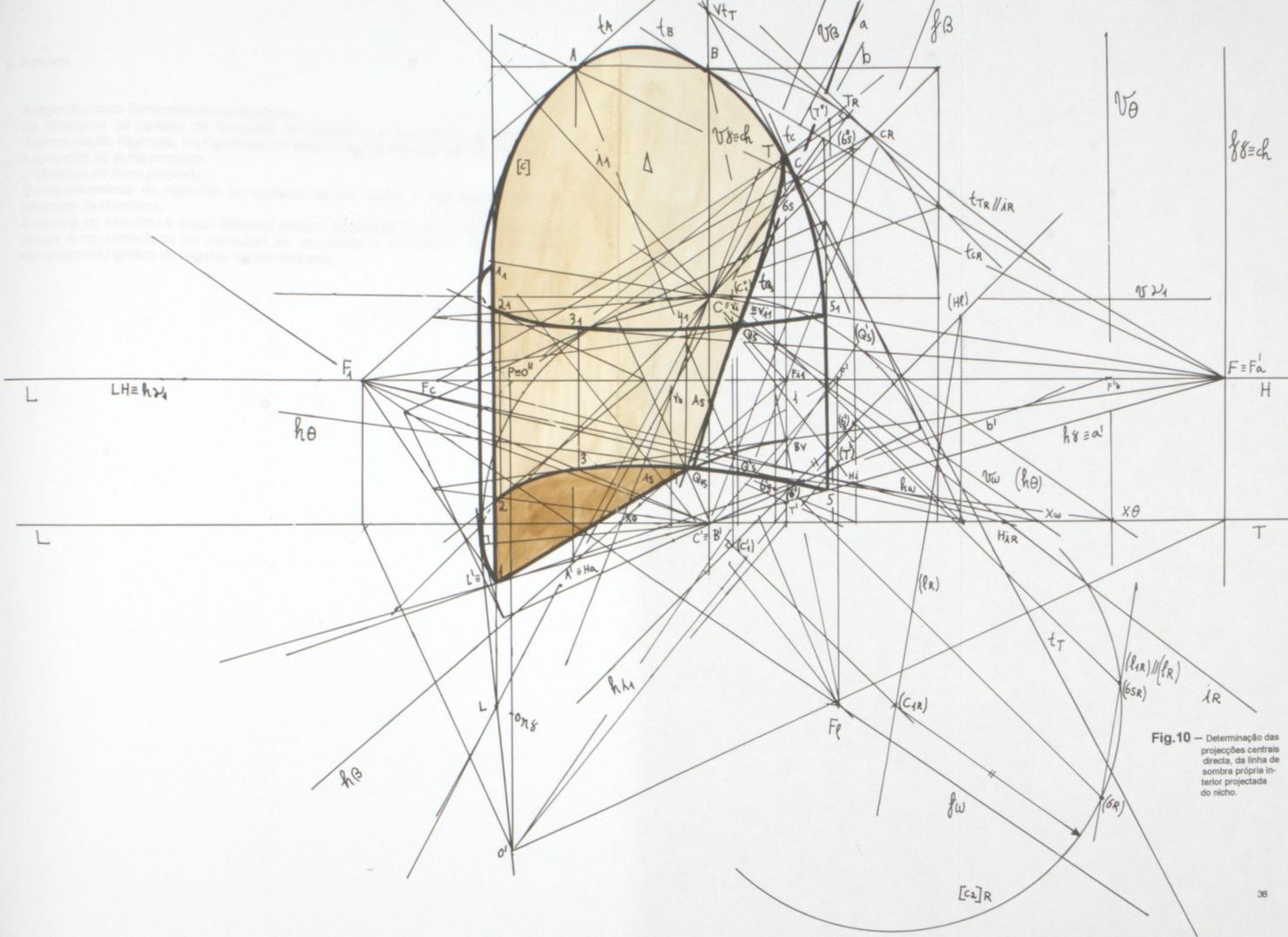


Fig.10 - Determinação das projeções centrais directa, da linha de sombra própria interior projectada do nicho.

6- Sumário.

- A importância da Geometria como disciplina.
- Os objectivos da cadeira da disciplina de Geometria e Geometria – Técnicas de Representação Rigorosa, na Faculdade de Belas Artes da Universidade de Lisboa.
- A aplicação do tema proposto.
- O objectivo do tema proposto.
- O enquadramento do exercício no contexto do ano lectivo – sua relação com o programa da disciplina.
- A escolha do exercício e o seu desenvolvimento. Exposição do exercício proposto: as etapas e os raciocínios na resolução do enunciado e a memória descritiva com encadeamento gráfico de registos esclarecedores.

7- Apêndice. Bibliografia geral.

Adao, F. Xavier Rodrigues. *Geometria Descritiva - Tomo I Sistema Diédrico*. Ed. Domus, Porto, 1972.

Neste apêndice, exceptuando as figuras do autor, citam-se apenas as obras de onde se extraíram as seguintes figuras:

Adao, F. Xavier Rodrigues, Vasco, Alberto Revilla. *Geometria Descritiva - Tomo V*

Fig.1 - Fusco, Renato de. *História da Arte Contemporânea*. Ed. Presença. Lisboa, 1988. Pág.187.

Fig.2 - *História da Arte*. Vol.5. Ed. Alfa. Lisboa, 1972. Pág. 217.

Fig.4 - *História da Arte*. Vol.6. Ed. Alfa. Lisboa, 1972. Pág. 161.

Alonso, Fernando. *Geometria Descritiva*. Ed. Livraria Bertrand, Lisboa, 1973.

Asens, Fernando Inguarín. *Geometria superior y aplicada*. Ed. Dossat Madrid, 1975.

Asens, Fernando Inguarín. *Geometria Descritiva*. Ed. Dossat Madrid, 1980.

Asens, Fernando Inguarín. *Ejercicios de geometria descriptiva I (sistema diédrico)*.

Ed. Paraninfo Madrid 1994.

Asens, Fernando Inguarín. *Ejercicios de geometria descriptiva I (sistema*

axonométrico). Ed. Paraninfo Madrid 1994.

Asens, Fernando Inguarín. *Ejercicios de geometria descriptiva I (sistema cónico)*. Ed.

Paraninfo Madrid 1997.

Aubert, Jean. *Cours de Dessin d'Architecture à partir de la géométrie descriptive*. Ed.

Les Éditions de La Vilette. Paris, 1995.

Biguonet, A et Duvet, R. *Notions de Géométrie dans l'Espace*. Ed. Eyrolles, Paris, 1963.

Brucard, Raoul. *Manuel Tracé de Perspective*. Ed. Librairie Maberl Paris, 1924.

Cavino, Rato. *Dez Propostas para o ensino médio*. Ed. Teorema. Lisboa, 1990.

Cardoso, Amândio. *Elementos de Geometria Descritiva*. Ed. Livraria Bertrand. Lisboa

1973.

Cardoso, Amândio. *Sombras e Perspectivas*. Ed. Livraria Bertrand. Lisboa 1973.

Carvalho, Benjamin de A. *Desenho Geométrico*. Ed. Ao Livro Técnico. Rio de Janeiro,

1959.

Cunha, Luis Volga de. *Desenho Técnico* 9ª ed. F.C Gulbenkian Lisboa, 1994.

Delgado, Ricardo. *Ejercicios de Axonometria e de Perspectiva Linear*. Ed. da

Associação de Estudantes de Artes Plásticas e Design da F.B.A.U.L. Lisboa, 1995.

Duane, Alvaro Rodrigues Vicente, Leonel Martins. *Ejercicios de Geometria Descritiva*.

Ed. Papelaria Fernandes. Lisboa, 1969.

Dupin, Charles. *Développemens de Géométrie*. Paris. Ed Courcier, 1813.

Fernández, A. Talbo. *Geometria Descritiva y sus aplicaciones*. Madrid. Escuela

Especial de Ingenieros Industriales, 1943.

F.G.M. (Gabriel-Maria, Frère). *Géométrie Descrptive Tome I. Elements*. Ed. Jacques

Gabay Paris, 1877.

F.G.M. (Gabriel-Maria, Frère). *Géométrie Descrptive Tome II. Exercices*. Ed. Jacques

Gabay Paris, 1877.

F.G.M. (Gabriel-Maria, Frère). *Cours de Géométrie Descrptive*. Ed. Maison A. Mame &

Fils. Tours, 1877.

Gill, Robert. *Basic Rendering*. Ed. Thames and Hudson. Londres, 1991.

Gonçalves, Luis. *Geometria Descritiva 1*. Ed. Fluminense. Porto, 1979.

Gonçalves, Luis. *Geometria Descritiva 2*. Ed. Fluminense. Porto, 1991.

Gonçalves, Luis. *Geometria Descritiva 3*. Ed. Fluminense. Porto, 1992.

Gordon, V.O / Semenov, M.V Oguievski. *Curso de Geometria Descritiva*. Ed. Mir.

Moscovo, 1960.

Hidalgo, J. del Soto. *Geometria Descritiva*. Madrid, 1999.

Hopkinson, R.G. Petherbridge, W Longmore, J. *Iluminação Natural*. Ed. F.C.

Gulbenkian. Lisboa, 1980.

8- Bibliografia geral.

- Abajo, F. Xavier Rodriguez . Geometria Descriptiva – Tomo I. Sistema Diedrico. Ed. Donostiarra. San Sebastian, 1992.
- Abajo, F. Xavier Rodriguez . Geometria Descriptiva – Tomo III. Perspectiva Axonometrica. Ed. Donostiarra. San Sebastian, 1995.
- Abajo, F. Xavier Rodriguez / Blanco, Alberto Revilla. Geometria Descriptiva – Tomo V. Perspectiva cónica. Ed. Donostiarra. San Sebastian, 1995.
- Aguilar, Leonildo Teixeira. Alguns conceitos geométricos. Lisboa. Ed. SPB, 1997.
- Albuquerque, Luis de. Elementos de geometria projectiva e de geometria descriptiva. Ed. Livraria Almedina. Coimbra, 1969.
- Asensi, Fernando Izquierdo. Geometria superior Y aplicada. Ed. Dossat. Madrid, 1975.
- Asensi, Fernando Izquierdo. Geometria Descriptiva. Ed. Dossat. Madrid, 1980.
- Asensi, Fernando Izquierdo. Ejercicios de geometria descriptiva I (sistema diedrico). Ed. Paraninfo. Madrid, 1994.
- Asensi, Fernando Izquierdo. Ejercicios de geometria descriptiva I (sistema axonometrico). Ed. Paraninfo. Madrid, 1994.
- Asensi, Fernando Izquierdo. Ejercicios de geometria descriptiva I (sistema cónico). Ed. Paraninfo. Madrid, 1997.
- Aubert, Jean. Cours de Dessin d'Architecture à partir de la géométrie descriptive. Ed. Les Éditions de La Villete. Paris, 1995.
- Biguenet. A et Duval. R. Notions de Géométrie dans l'espace. Ed. Eyrolles. Paris, 1963.
- Bricard, Raoul. Petit Traité de Perspective. Ed. Librairie Vuibert. Paris, 1924.
- Calvino, Italo. Seis Propostas para o próximo milénio. Ed. Teorema. Lisboa, 1990.
- Cardoso, Armando. Elementos de Geometria Descriptiva. Ed. Livraria Bertrand. Lisboa 1973.
- Cardoso, Armando. Sombras e Perspectivas. Ed. Livraria Bertrand. Lisboa 1973.
- Carvalho, Benjamin de A. Desenho Geométrico. Ed. Ao Livro Técnico. Rio de Janeiro, 1959.
- Cunha, Luis Veiga da. Desenho Técnico. 9ª ed. F.C. Gulbenkian. Lisboa, 1994.
- Delgado, Ricardo. Exercicios de Axonometria e de Perspectiva Linear. Ed. da Associação de Estudantes de Artes Plásticas e Design da F.B.A.U.L. Lisboa, 1995.
- Duarte, Alvaro Rodrigues/ Vicente, Leonel Martins. Exercicios de Geometria Descriptiva. Ed. Papelaria Fernandes. Lisboa, 1959.
- Dupin, Charles. Developments de Géométrie. Paris. Ed. Courcier, 1813.
- Fernandez, A. Taibo. Geometria Descriptiva y sus aplicaciones. Madrid. Escuela Especial de Ingenieros industriales, 1943.
- F.G.M. (Gabriel-Marie, Frère). Géométrie Descriptive. Tome I. Éléments. Ed. Jacques Gabay. Paris, 1877.
- F.G.M. (Gabriel-Marie, Frère). Géométrie Descriptive. Tome II. Exercices. Ed. Jacques Gabay. Paris, 1877.
- F.G.M. (Gabriel-Marie, Frère). Cours de Géométrie Descriptive. Ed. Maison A. Mame & Fils. Tours, 1917.
- Gill, Robert. Basic Rendering. Ed. Thames and Hudson. Londres, 1991.
- Gonçalves, Luís. Geometria Descriptiva 1. Ed. Fluminense. Porto, 1979.
- Gonçalves, Luís. Geometria Descriptiva 2. Ed. Fluminense. Porto, 1991.
- Gonçalves, Luís. Geometria Descriptiva 3. Ed. Fluminense. Porto, 1992.
- Gordon, V.O./ Sementsov, M.A/ Oguyevski. Curso de Geometria Descriptiva. Ed. Mir. Moscovo, 1980.
- Hidalgo, J. del Soto. Geometria Descriptiva. Madrid, 1959.
- Hopkinson, R.G/ Petherbridge, P/ Longmore. J. Iluminação Natural. Ed. F.C. Gulbenkian. Lisboa, 1980.

- Jungmann, Jean Paul. Ombres et Lumières. Paris. Ed. Les Éditions de La Villete, 1995.
- Lancastre, Luis. Um curso de Geometria Descritiva. Ed. das folhas da A.E.I.S.T. Lisboa, 1958.
- Le Roy, Charles. Traité de Géométrie Descriptive, avec une collection d'épures, composé de 60 planches; Dominique Avanzo et Compagnie Éditeurs. Liège, 1837.
- Le Roy, Charles. Traité de Stéréotomie – comprenant les applications de la Géométrie Descriptive à la Théorie des Ombres, la Perspective linéaire, la Gnomonique, la coupe des pierres et la charpente. Paris. Ed. Bachelier/Carilian – Goeury et Dalmont. 1844.
- Martinez, Emilio Diaz. Problemas de Geometria Descritiva. Ed. Publicaciones de la Universidad de Sevilla. 1980.
- Minguet, Enrique Bonet. Proyecciones Y Sombras. Ed. Renacimiento. Valencia, 1946.
- Monge, Gaspar. Géométrie Descriptive. Paris, 1847. Ed. Bachelier, Imprimeur – Libraire.
- Moreau, Abbé Th. Pour comprendre la Géométrie ... dans l'espace. Ed. Bibliothèque d'Education Scientifique. Paris, 1930.
- Moreira de Sousa, Marcelo. Desenho e Geometria Descritiva. Volumes I e II. 12º ano. Lisboa, 1995. Ed. Plátano.
- Moreira de Sousa, Marcelo. Geometria Descritiva. 10º ano. Lisboa, 1990. Ed. Plátano.
- Moutinho, José Manuel Patricio de Sousa. Perspectiva cónica linear. Lisboa. Esbal, 1991.
- Moutinho, José Manuel Patricio de Sousa. Escócia (separatriz de luz-sombra). Lisboa. Esbal, 1991.
- Pillet, Jean Jules. Traité de Perspective Linéaire. Paris. Ed. Libraire Philosophique J. Vrin, 1953.
- Pillet, Jean Jules. Traité de Géométrie Descriptive. Paris, 1887. Ed. Librairie CH. Delagrave.
- Pinheiro, Carlos da Silva./ Sousa, Pedro Fialho. Desenho / Tpu 13 e 39. Ed. Ministério da Educação. Lisboa, 1979.
- Pinheiro, Carlos da Silva. Sombras e pontos Brilhantes do Parabolóide Hiperbólico e do Hiperbolóide empenado escaleno. Ed. Sociedade Tipográfica. Lisboa, 1965.
- Ramos, José Augusto Gonçalves. Elementos de Geometria Descritiva. Lisboa, 1958/59.
- Ricca, Guilherme. Geometria Descritiva – Método de Monge. Ed. F.C. Gulbenkian. Lisboa, 1992.
- Rios, José Palacio. Perspectiva Aerotrifugada. Ed. Hemus. São Paulo.
- Rodrigues, Alvaro. Geometria Descritiva. Ed. Ao Livro Técnico Ltda. Rio de Janeiro, 1960.
- Roubaudi, Charles. Traité de Géométrie Descriptive. Paris. Ed. Masson et Courcier, 1961.
- Schmidt, Rudolf. Geometria Descritiva com figuras estereoscópicas. Ed. Reverté. Barcelona, 1983.
- Sequeira, Borges. Lições de Geometria Descritiva. Lisboa, Scientia Editora, 1940.
- Sequeira, Borges. Mss. do Resumo das lições de Geometria Descritiva do Professor Borges de Sequeira da Faculdade de Ciências de Lisboa e do Instituto Superior Técnico. Livro II, 2ª edição, 1928.
- Slaby, Steve. M. Fundamentals of Three-Dimensional Descriptive Geometry. Ed. Wiley. New York, 1966.
- Trindade, António. Exercícios de Geometria 1º ano. Ed. da Associação de Estudantes de Artes Plásticas e Design da F.B.A.U.L. Lisboa, 1999.
- Vilela, Antonio Lobo. Métodos geométricos. Ed. Livraria Sá da Costa. Lisboa, 1939.

9- Bibliografia para a aula exposta.

- Asensi, Fernando Izquierdo. Geometria superior Y aplicada. Ed. Dossat. Madrid, 1975.
- Asensi, Fernando Izquierdo. Geometria Descriptiva. Ed. Dossat. Madrid, 1980.
- Asensi, Fernando Izquierdo. Ejercicios de geometria descriptiva I (sistema diedrico). Ed. Paraninfo. Madrid, 1994.
- Asensi, Fernando Izquierdo. Ejercicios de geometria descriptiva I (sistema axonometrico). Ed. Paraninfo. Madrid, 1994.
- Asensi, Fernando Izquierdo. Ejercicios de geometria descriptiva I (sistema cónico). Ed. Paraninfo. Madrid, 1997.
- Delgado, Ricardo. Exercicios de Axonometria e de Perspectiva Linear. Ed. da Associação de Estudantes de Artes Plásticas e Design da F.B.A.U.L. Lisboa, 1995.
- Fusco, Renato de. História de Arte Contemporânea. Ed. Presença. Lisboa, 1988.
- História da Arte Portuguesa. Vols. 5 e 6. Ed. Alfa. Lisboa, 1972.
- Jungmann, Jean Paul. Ombres et Lumières. Paris. Ed. Les Éditions de La Villete, 1995.
- Moreira de Sousa, Marcelo. Desenho e Geometria Descritiva. Volumes I e II. 12º ano. Lisboa, 1995. Ed. Plátano.
- Moreira de Sousa, Marcelo. Geometria Descritiva. 10º ano. Lisboa, 1990. Ed. Plátano.
- Moutinho, José Manuel Patrício de Sousa. Perspectiva cónica linear. Lisboa. Esbal, 1991.
- Panofsky, Erwin. A perspectiva como forma simbólica. Ed. 70. Lisboa, 1993
- Pereira, José Fernandes Pereira. Arte e Cultura Portuguesa.
- Pillet, Jean Jules. Traité de Perspective Linéaire. Paris. Ed. Librairie Philosophique J. Vrin, 1953.
- Pillet, Jean Jules. Traité de Géometrie Descriptive. Paris, 1887. Ed. Librairie CH. Delagrave.
- Rodrigues, Alvaro. Geometria Descritiva. Ed. Ao Livro Técnico Ltda. Rio de Janeiro, 1960.
- Roubaudi, Charles. Traité de Géométrie Descriptive. Paris. Ed. Masson et Courcie, 1961.
- Sequeira, Borges. Lições de Geometria Descritiva. Lisboa, Scientia Editora, 1940.
- Sequeira, Borges. Mss. do Resumo das lições de Geometria Descritiva do Professor Borges de Sequeira da Faculdade de Ciências de Lisboa e do Instituto Superior Técnico. Livro II, 2ª edição, 1928.
- Serrão, Vitor. A pintura Maneirista em Portugal. 2ª edição, Biblioteca Breve. Lisboa, 1991.
- Serrão, Vitor. A perspectiva na Teoria Estética Renascentista. In, caderno de apontamentos para os alunos de História de Arte da Faculdade de Letras de Lisboa.
- Trindade, António. Exercícios de Geometria Descritiva 1ºano. Ed. da Associação de Estudantes de Artes Plásticas e Design da F.B.A.U.L. Lisboa, 1998.

Nota relativa às págs. 37 e 38 do presente relatório.

Embora não representada no presente relatório, importa referir que o *ponto duplo real*, **T**, pertencente à porção de um quarto de superfície esférica do nicho, admite uma tangente particularmente importante; esta, é tangente à linha de separatriz interior e permite traçar, com maior segurança, a linha de separatriz interior que corresponde ao quarto de esfera. Para a determinação desta tangente podemos recorrer, pelo menos, a três métodos: pela intersecção do plano β , que contém a porção de separatriz relativa ao quarto de superfície esférica, com o plano tangente, no ponto **T**, àquela porção de superfície; pela intersecção do mesmo plano β com o plano tangente, no ponto **T**, à superfície cilíndrica de luz-sombra, este último, fica determinado pelo raio luminoso (geratriz da superfície luz sombra) e pela tangente, **t**, à semicircunferência [c], que pertence ao plano δ que contém a frente do nicho – o raio luminoso e a tangente concorrem, naturalmente, no ponto **T**; ou, ainda, pela intersecção do plano tangente ao quarto de superfície esférica, no ponto **T**, com o plano tangente à superfície cilíndrica luz-sombra, no mesmo ponto.

No entanto, e na presente aula, optou-se por determinar a tangente, **tT**, pelo primeiro dos três métodos acima referidos (fig.11). Assim, para a determinação do plano tangente à superfície cilíndrica luz-sombra, θ_1 , no ponto **T**, considerou-se o raio luminoso e a tangente à semicircunferência [c] pertencente ao plano δ , ambas concorrem no referido ponto. Os traços do raio luminoso e os traços da tangente **t** permitiram encontrar os traços do plano θ_1 , onde a intersecção do traço horizontal, **h θ_1** , com o traço horizontal de β , **h β** , determinam o traço horizontal, **HtT**, da tangente procurada que, uma vez unido ao ponto **T**, permite obter as projecções da tangente **tT** que assim se determinou.

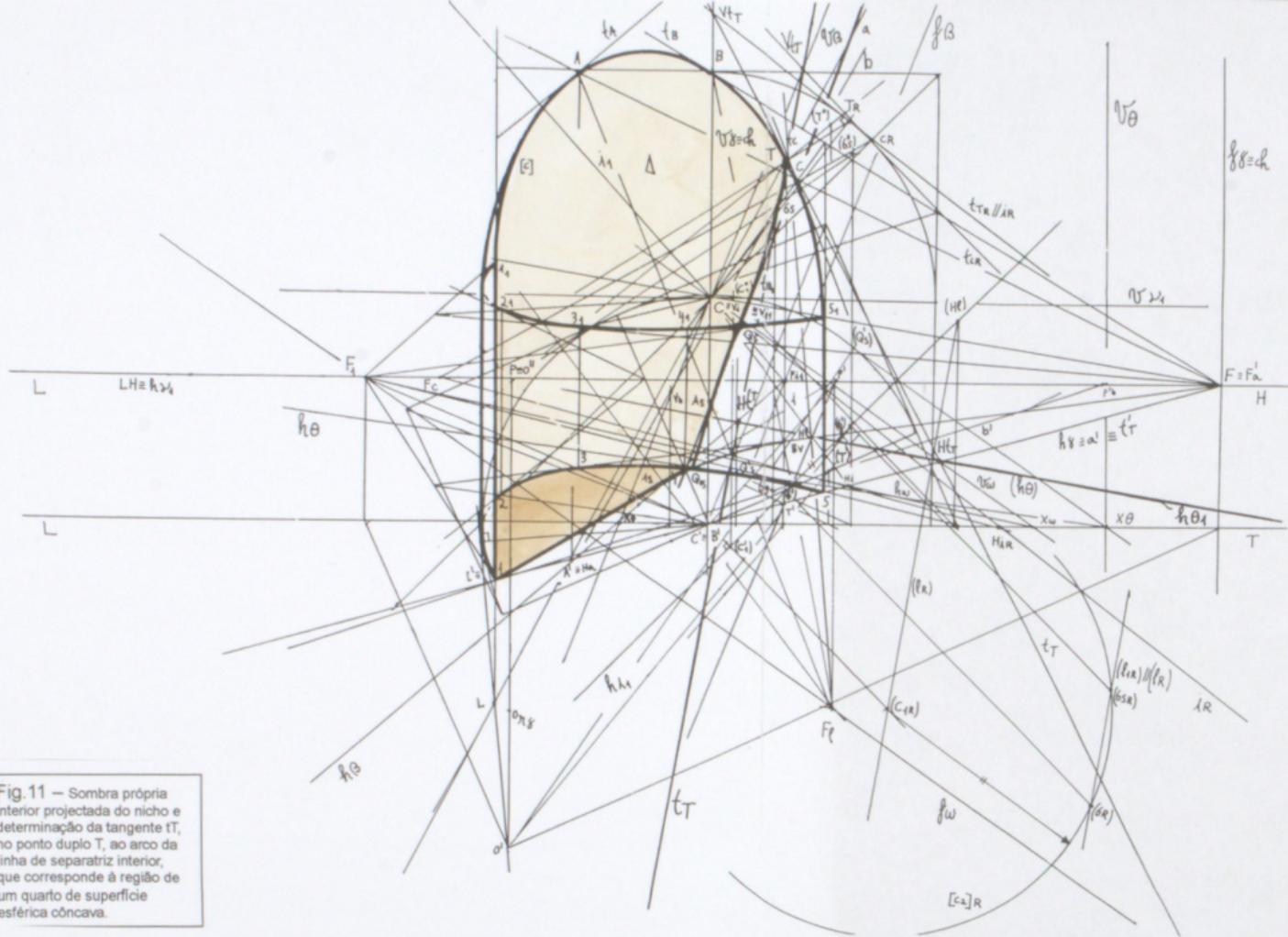


Fig. 11 — Sombra própria interior projectada do nicho e determinação da tangente T , no ponto duplo T , ao arco da linha de separatriz interior, que corresponde à região de um quarto de superfície esférica côncava.