

**UNIVERSIDADE DE LISBOA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO**



**CONHECIMENTO DIDÁTICO E PRÁTICA
PEDAGÓGICA DE FUTUROS PROFESSORES NO
ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS**

Nadia Diogo Ferreira

Orientador: Prof. Doutor João Pedro Mendes da Ponte

**Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de doutor em
Educação na Especialidade em Didática da Matemática**

2021

**UNIVERSIDADE DE LISBOA
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO**



**CONHECIMENTO DIDÁTICO E PRÁTICA PEDAGÓGICA DE FUTUROS
PROFESSORES NO ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS**

Nadia Diogo Ferreira

Orientador: Prof. Doutor João Pedro Mendes da Ponte

**Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de doutor no Ramo de
Educação, especialidade em Didática da Matemática**

Júri:

Presidente: Doutora Cecília Galvão Couto, Professora Catedrática e membro do
Conselho Científico do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Vogais:

- Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu, Professor Auxiliar
Instituto de Educação da Universidade do Minho;
- Doutora Maria de Fátima Pista Calado Mendes, Professora Coordenadora
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal;
- Doutora Neusa Cristina Vicente Branco, Professora Adjunta
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Santarém;
- Doutor João Pedro Mendes da Ponte, Professor Catedrático
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, orientador;
- Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira, Professora Auxiliar
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Marisa Alexandra Ferreira Quaresma, Professora Auxiliar Convidada
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

**Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para
a Ciência e Tecnologia por meio de bolsa com referência SFRH/ BD/ 99258/ 2013.**

Resumo

O conhecimento desenvolvido pelos formandos durante a sua formação inicial é um campo de muitas dúvidas e controvérsias. Independentemente das perspectivas, o ensino-aprendizagem dos números racionais é um tema matemático que levanta dificuldades na aprendizagem dos seus conceitos e desafia os professores a constituírem práticas que promovam aprendizagens significativas e conceptuais. Esta investigação teve como objetivo compreender o conhecimento didático e a prática pedagógica de futuros professores de 2.º ciclo sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais na prática de ensino supervisionada. Para tal, procuro analisar questões relativamente às tarefas, aos alunos, à comunicação e às ações dos futuros professores na sua prática pedagógica. Na discussão sobre o conhecimento didático, especificamente para ensinar o tema dos números racionais, emergiram as questões a considerar no ensino e na aprendizagem deste tema e nas práticas pedagógicas desenvolvidas. A investigação seguiu o paradigma interpretativo e uma abordagem qualitativa, seguindo um *design* de estudo de caso. As três futuras professoras participantes foram selecionadas em duas Escolas Superiores de Educação e são muito diferentes nos seus percursos escolares antes e na formação inicial, e ainda que tenham vivido algumas situações próximas, as perceções sobre o vivido foram diferentes. Também tiveram focos de trabalho diferentes durante a sua prática de ensino supervisionada. As três futuras professoras analisaram diferentes recursos, selecionaram ou (re)desenharam tarefas de natureza diferente e sequenciaram-nas estabelecendo um caminho com um propósito. Quando ajustaram ou desenharam as tarefas, sem apoio dos supervisores, desceram o seu nível de desafio. Durante a preparação das aulas, anteciparam erros e dificuldades ainda que não tenham previsto resoluções erradas, e previram orquestrar resoluções no momento de apresentação e discussão. Perante respostas esperadas desafiaram e apoiaram os alunos a ultrapassar as suas dificuldades. Perante as dificuldades que não foram previstas, recorreram a ações de apoiar, sugerir e informar alterando mais uma vez a natureza das tarefas. A comunicação e as ações a desenvolver foram previstas com diferentes níveis de detalhe. Quanto menos previram, mais desceram o nível de desafio da tarefa. No que respeita às representações, identificaram diferentes potencialidades para as representações e não previram que as representações pictóricas podiam não ser clarificadoras das ideias matemáticas. Assim, no que respeita à comunicação e às ações dos professores, em reflexões de natureza diferente, ficou clara a necessidade de uma previsão adequada dessas ações, quando o propósito é favorecer o desenvolvimento dos processos matemáticos e uma aprendizagem promotora da co-construção do conhecimento. A relação entre conhecimento e prática apresentou-se interrelacionada, espelhando de um modo mais ou menos nítido essa relação no que respeita aos alunos, às tarefas, às ações e à comunicação.

Palavras-Chave: Formação inicial de professores; Conhecimento didático; Prática pedagógica; Números racionais; Prática de ensino supervisionada.

Abstract

The development of pre services teachers' knowledge in initial education is a field of many questions and controversies. Regardless of the different perspectives, teaching and learning rational numbers is a mathematical topic that raises difficulties and challenges teachers to undertake practices to promote meaningful and conceptual learning. The aim of this study is to understand the didactic knowledge and the pedagogical practice of upper primary prospective teachers (grades 1-6) about rational numbers teaching and learning in supervised teaching practice. The research questions concern tasks, students, communication and actions of future teachers in their teaching practice. Within the discussion about didactics knowledge, specifically regarding teaching rational numbers, emerged aspects to consider about teaching and learning and about the teaching practices carried out in this mathematical topic. The investigation followed an interpretive paradigm and a qualitative approach, following a case study design. The three future teachers were selected from two Higher Schools of Education and are very different in their school journeys before and in initial training. Even though they have experienced similar situations, their perceptions about what they lived were different. They also had different focuses of work during their supervised teaching practice. The three future teachers analysed different resources, selected or (re) designed tasks of a different nature and sequenced them by establishing a path with a purpose. When they adjusted or designed tasks without the support of supervisors, the level of challenge decreased. During planning, they anticipated errors and difficulties even though they did not foresee wrong solutions, and they planned to orchestrate solutions at the time of presentation and discussion. Faced with expected responses, they challenged and supported students to overcome their difficulties. Faced with unpredicted difficulties, they resorted to actions to support, inform and suggest, changing once again the nature of the tasks. The communication and the actions to develop were planned with different levels of detail. The less they predicted, the more the challenge level of the task went down. With regard to representations, they identified the potential of different representations and did not expect that pictorial representations may not clarify mathematical ideas. Thus, with regard to communication and teachers' actions, in reflections of different nature, it became clear the need for an adequate planning of these actions, when the purpose is to promote the development of mathematical processes and learning that promotes knowledge co-construction. The relationship between knowledge and practice was interrelated, and it was mirrored in a more or less clear way with regard to students, tasks, actions and communication.

Key words: Pre service teacher education; didactic knowledge; pedagogical practice; rational numbers; supervised practice.

Agradecimentos

O processo de doutoramento implica um processo de aprendizagem e, por isso, de grande desenvolvimento profissional. Um processo destes, se for longo, mistura-se com a nossa vida... Assim, quem faz este processo connosco, tem um papel determinante na qualidade do processo e produto. Quem esteve, está e estará foi companheiro de um percurso que nem sempre é o planeado, mas que, com toda a certeza, foi o necessário e possível. A estes agradeço com um muito obrigada!

Ao Professor Doutor João Pedro da Ponte, pela orientação socrática e pelo exemplo de que em todas e quaisquer circunstâncias temos a responsabilidade de nos superar.

Aos formandos, que constituíram os meus estudos de caso, por aceitarem participar e pela disponibilidade e carinho que sempre manifestaram apesar de, no início, não me conhecerem.

Às Escolas Superiores de Educação que foram contatadas e aceitaram de imediato a minha presença nos diferentes contextos formativos. Um agradecimento muito especial às professoras de Didática da Matemática que me apoiaram a encontrar os casos para estudo e abriram as portas dos seus contextos de prática de ensino supervisionada.

A todos os meus colegas das diferentes instituições onde fui colaborando nestes anos e que me apoiaram e estimularam a continuar. Aos colegas do Catujal que me apoiaram no arranque. Aos colegas do ISCE, em particular à amiga Maria do Anjos, que me perguntavam sempre “Já está?”. Aos colegas e dirigentes da DGE que me compreenderam e disseram sim no momento certo, ajudando a encerrar este capítulo da minha vida.

Aos professores do Instituto de Educação, colegas e amigos, que sempre se disponibilizaram para discutir e refletir sobre este trabalho contribuindo para a sua evolução.

À Ana Isabel, à Renata, à Hélia, à Isabel, à Joana, à Marisa e à Raquel pelo apoio, pelas horas a ouvir as minhas ideias e pelas perguntas desafiadoras, mas sobretudo pela amizade que demonstraram e demonstram.

A todos os meus amigos, que estiveram comigo durante este processo, pelo apoio, pela força e pelo bem maior, a amizade. Em especial à Anabela, Carla e Sónia.

À minha família, avós, pais e irmãos pela compreensão e amor incondicional.

A quem esteve ao meu lado, perdendo a minha atenção e sofrendo com as vicissitudes do percurso. Obrigada João, por queres que me cumpra!

Finalmente dedico esta tese às minhas companheiras de vida, às minhas filhas, que cresceram com esta tese e que nesse processo passaram de bebés a meninas e de meninas a mulheres. Obrigada Margarida e Madalena!

Índice

Capítulo 1.....	1
Introdução.....	1
1.1. Motivações, contexto do estudo e relevância	1
1.1.1. Motivações pessoais.....	1
1.1.2. Contexto do estudo	4
1.1.3. Relevância do estudo.....	7
1.2. Objetivo, questões de investigação e organização da tese	11
Capítulo 2.....	13
Enquadramento Teórico.....	13
Conhecimento e prática pedagógica no ensino dos números racionais.....	13
2.1. Olhares sobre o conhecimento do professor.....	14
2.1.1. Meio século de investigação sobre o conhecimento do professor	14
2.1.2. Modelos sobre o conhecimento do professor.....	17
2.1.3. O conhecimento do futuro professor	26
2.2. Conhecimento matemático para ensinar números racionais	31
2.2.1. O sentido de número racional: representações e significados	32
2.2.2. Conhecimento dos futuros professores sobre os significados e a relação entre as diferentes representações dos números racionais.....	39
2.2.3. O sentido de operação e os significados das operações	41
2.2.4. Conhecimento de futuros professores sobre as operações com números racionais.....	51
2.3. Conhecimento didático para ensinar números racionais	59
2.3.1. Visão sobre a Matemática e sobre o seu Ensino e Aprendizagem	60
2.3.2. Conhecimento sobre as tarefas	62
2.3.3. Conhecimento sobre os alunos	69
2.3.4. Conhecimento sobre a comunicação e as ações dos futuros professores.....	79
2.3.5. Conhecimento sobre o currículo e avaliação.....	90

2.3.6. O desenvolvimento do conhecimento de futuros professores para a prática pedagógica.....	103
2.4. A prática pedagógica no ensino e aprendizagem dos números racionais.....	112
2.4.1. Tarefas matemáticas.....	114
2.4.2. Comunicação: questionamento, representações e explicações	119
2.4.3. As ações de promoção e gestão da aprendizagem e do ambiente de aprendizagem	125
2.4.4. Tipos de prática pedagógica e os momentos que as estruturam.....	128
2.4.5. As fases da prática pedagógica: Planificação, concretização e reflexão	136
Síntese final	141
Capítulo 3.....	145
Metodologia de Investigação	145
3.1. Opções metodológicas.....	145
3.2. Contexto do estudo e participantes.....	149
3.2.1. Instituições de ensino superior.....	149
3.2.2. Perfil dos casos	150
3.3 Recolha de dados	151
3.3.1. Entrevistas semiestruturadas	152
3.3.2. Observação	157
3.3.3. Recolha e análise documental.....	159
3.4 Procedimentos e técnicas de análise de dados.....	159
3.4.1. Processo de análise de dados	159
3.4.2. Análise dedutiva e indutiva.....	161
3.5 Questões éticas	162
Capítulo 4.....	165
Berta	165
4.1. Apresentação e caracterização	165
4.2. Visão sobre o ensino e aprendizagem da Matemática	166
4.2.1. Experiências na Escola Superior de Educação: Vivências significativas e enriquecedoras.....	166
4.2.2. Experiências no estágio: As diferenças do novo contexto.....	168
4.2.3. Perspetivas sobre o ensino-aprendizagem da Matemática: Foco na co-construção do conhecimento e na compreensão	169

4.3. A Prática de ensino supervisionada de Matemática no 2.º ciclo	174
4.3.1. Estágio: Um contexto colaborativo.....	174
4.3.2. Processo de planificação: Preparação conjunta de uma experiência de ensino	177
4.4. Prática pedagógica e conhecimento didático: Estabelecimento de relações entre representações dos números racionais.....	180
4.4.1. Antevisão das aulas.....	180
4.4.2. Concretização das aulas.....	193
4.4.3. Reflexão sobre as aulas e sobre a prática de ensino supervisionada.....	213
Síntese do caso de Berta.....	225
Capítulo 5.....	232
Glória.....	232
5.1. Apresentação e caracterização	232
5.2. Visão sobre o ensino-aprendizagem da Matemática	233
5.2.1. Experiências na ESE: O percurso necessário para obter a certificação	233
5.2.2. Experiências de estágio: A importância do aprendido no 1.º ciclo	235
5.2.3. Perspetivas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática: Foco nos procedimentos	237
5.3. A prática de ensino supervisionada de Matemática no 2.º ciclo	243
5.3.1. Estágio: Um contexto de tensão entre visões	243
5.3.2. O processo de planificação: Preparar para outros anteverem.....	247
5.4. Prática pedagógica e conhecimento didático: Multiplicação de números racionais sob a forma de fração e suas propriedades	252
5.4.1. Antevisão das aulas.....	252
5.4.2. Concretização das aulas.....	262
5.4.3. Reflexão sobre as aulas e sobre a prática de ensino supervisionada.....	278
Síntese.....	290
Capítulo 6.....	297
Ana.....	297
6.1. Apresentação e caracterização	297
6.2. Visão sobre o ensino-aprendizagem da Matemática	298
6.2.1. Experiências na Escola Superior de Educação: Aprendizagens nem sempre mobilizáveis	298

6.2.2. Experiências no estágio: Vivências nem sempre positivas	299
6.2.3. Perspetivas sobre o ensino-aprendizagem da Matemática: Visão nem sempre concretizável.....	302
6.3. Prática de ensino supervisionada de Matemática no 2.º ciclo.....	306
6.3.1. Estágio: Um contexto dividido por ideias fundamentais.....	306
6.3.2. Processo de planificação: Registos informal e formal	309
6.4. Prática pedagógica e conhecimento didático: Multiplicação de frações inversas e divisão de números racionais	311
6.4.1. Antevisão das aulas.....	312
6.4.2. Concretização das aulas.....	328
6.4.2. Reflexão sobre as aulas e sobre a prática supervisionada	347
Síntese do caso de Ana	360
Capítulo 7.....	368
Conclusão	368
7.1. Síntese do estudo	368
7.2. Conclusões do estudo	370
7.2.1. Visão sobre o ensino e aprendizagem de números racionais	370
7.2.2. Preparação e concretização do ensino e aprendizagem de números racionais	375
7.2.3. Reflexão sobre a prática pedagógica como resultado da experiência vivida ..	391
7.2.4. Relação entre conhecimento didático e prática pedagógica	398
7.3. Reflexão final	403
7.3.1. Desafios para a formação inicial de professores	404
7.3.2. Desafios para a Investigação	408
Referências Bibliográficas	411
Anexos	427

Índice de Quadros

Quadro 1. Caracterização das futuras professoras.....	149
Quadro 2. Métodos de recolha de dados utilizados.....	150
Quadro 3. Síntese dos cinco tipos de entrevistas	154
Quadro 4. Quadro sobre a natureza das questões e respetivas alíneas da tarefa 2.....	207
Quadro 5. Natureza das tarefas e respetivas questões.....	272
Quadro 6. Ações do professor nos momentos de trabalho com as tarefas...	273
Quadro 7. Natureza das tarefas e respetivas questões.....	339

Índice de Tabelas

Tabela 1. Ações do professor nos momentos de trabalho com as tarefas 207

Tabela 2. Momentos de trabalho com cada tarefa na fase 2 339

Índice de Figuras

Figura 1. Vertentes do conhecimento didático por Ponte (2012).....	24
Figura 2. Quadro comparativo entre classificações de padrões de interação por Martinho (2007)	119
Figura 3. Momentos de realização das entrevistas.....	153
Figura 4. Tarefa 3.....	180
Figura 5. Representação pictórica das condições da Tarefa 2	182
Figura 6. Esquema da resolução da última questão da Tarefa 2.....	183
Figura 7. Antevisão da prática letiva e respetivos comentários da supervisora	185
Figura 8: Antevisão de questões nas planificações antes e depois das sugestões da supervisora	186
Figura 9. Antecipação da segunda parte da aula da tarefa 3.....	187
Figura 10. Questão 1.1. da tarefa 2.....	190
Figura 11. Representações da Questão 1.1. da tarefa 2	192
Figura 12. Questão 2 da tarefa 2.....	193
Figura 13. Representação da resposta correta à questão 1.1	195
Figura 14. Representação da resposta à questão 1.2	196
Figura 15. Enunciado e questão 2.1.....	197
Figura 16. Questão 2.2. da tarefa 2.....	198
Figura 17. Resolução da questão 2.3. da tarefa 2	199

Figura 18. Resolução inicial do primeiro par da tarefa 3.....	202
Figura 19. Segunda parte da resolução do primeiro par à tarefa 3	202
Figura 20. Resolução do segundo par à tarefa 3	203
Figura 21. Representação da situação da tarefa 3	205
Figura 22. Reprodução de Berta da representação pictórica utilizada na aula da tarefa do rei.....	218
Figura 23. Expressão apresentada com o procedimento de cálculo da multiplicação	252
Figura 24. Vídeo para apresentar o procedimento de cálculo da multiplicação	253
Figura 25. Planificação de Glória: Aula sobre propriedades da multiplicação	256
Figura 26. Exemplo 1 apresentado por Glória na multiplicação de números racionais.....	259
Figura 27. Exemplo 1 apresentado e resolvido da multiplicação de números racionais.....	260
Figura 28. Expressão 3 do exemplo 1 na multiplicação de números racionais	260
Figura 29. Representação de $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$	261
Figura 30. Tarefa 1 proposta por Glória na multiplicação de frações.....	263
Figura 31. Tarefas 2 e 3 de aplicação de procedimentos na multiplicação de frações	265
Figura 32. Glória a monitorizar as Tarefas 2 e 3 da multiplicação de frações	266
Figura 33. Resolução da tarefa 2 de Tiago.....	267
Figura 34. Tarefa 3 e respetiva registada no quadro	268
Figura 35. Tarefa 4: jogo sobre multiplicação de números racionais	270

Figura 36. Tarefa 1 proposta na terceira aula.....	313
Figura 37. Tarefa 2 na brochura sobre divisão de números racionais.....	313
Figura 38. Resolução das tarefas propostas para as aulas 1 e 2 (1ª versão)	316
Figura 39. Segunda resolução para $2/5$ de $5/2$	316
Figura 40. Notas pessoais sobre divisão de números racionais.....	317
Figura 41. Representação pictórica prevista para a tarefa 1 da divisão de frações.....	318
Figura 42. Planificações das aulas sobre números racionais inversos entre si	320
Figura 43. Descrição na planificação do trabalho a realizar na aula 3 e 4..	321
Figura 44. Reprodução da representação de Ana na 1.ª aula	325
Figura 45. Quadro resumo projetado no quadro branco	326
Figura 46. PowerPoint da situação $2/5$ de $5/2$	327
Figura 47. Tarefa 1 para introduzir a divisão com frações (Ana)	328
Figura 48. Resolução no quadro da Tarefa 1 (par de Raquel)	330
Figura 49. Resolução no caderno e no quadro da Tarefa 1 (par de Iva)	331
Figura 50. Registos no quadro da Tarefa1 na terceira aula.....	334
Figura 51. Tarefa 3 proposta na divisão de números racionais.....	336
Figura 52. Representação apresentada no final da explicação da quarta aula	338
Figura 53. Conhecimento didático de futuros professores para ensinar números racionais.....	392
Figura 54. As fases da prática pedagógica e os momentos que estruturam a prática letiva.....	393
Figura 55. Relação entre conhecimento didático e a prática pedagógica	394

Índice de Anexos

Anexo 1. Calendarização das fases do estudo.....	421
Anexo 2. Entrevista Inicial aos futuros professores.....	422
Anexo 3. Entrevista a meio do estágio aos futuros professores	423
Anexo 4. Entrevista final aos futuros professores	424
Anexo 5. Guião de entrevistas aos Supervisores da ESE.....	426
Anexo 6. Guião de reflexão pós- aula e de análise do vídeo	427
Anexo 7. Guião de observação da prática letiva.....	429
Anexo 8. Categorias, subcategorias e descritores para a análise de conteúdo	431
Anexo 9. Autorização dos participantes.....	434
Anexo 10. Autorização do Diretor da Instituição Educativa	436
Anexo 11. Autorização dos Encarregados de Educação dos alunos.....	437
Anexo 12. Planificação das Aulas 1, 2 e 3 de Berta	438
Anexo 13. Planificação da Aula 4 de Berta	443
Anexo 14. Tarefa 2 resolvida.....	444
Anexo 15. Tarefa 3 resolvida.....	447
Anexo 16. Planificação da Aula 4 de Glória	448
Anexo 17. Aula 1: Multiplicação de números racionais	449
Anexo 18. Aula 2: Tarefas 1, 2 e 3	450
Anexo 19. Aula 3: Propriedades das operações com números racionais	451
Anexo 20. Planificação da Aula 1 de Ana	452
Anexo 21. Planificação da Aula 2 de Ana	453
Anexo 22. Planificação da Aula 3 de Ana	454
Anexo 23. Planificação da Aula 4 de Ana	455

Anexo 24. Aula 2: Multiplicação de números racionais inversos	456
Anexo 25. Aula 3: Divisão de números racionais	457

Capítulo 1

Introdução

No presente capítulo apresento as motivações pessoais, o contexto em que o estudo se insere e a sua relevância, indico os objetivos e questões orientadoras e, finalmente, descrevo a organização da presente tese.

1.1. Motivações, contexto do estudo e relevância

As experiências vividas como estudante e futuro professor influenciam o conhecimento que mais tarde esse mesmo professor tem sobre o que ensina, como ensina e como os alunos aprendem. Por sua vez, este conhecimento influencia as experiências vividas na sua prática, contribuindo para a permanente (re)construção do conhecimento profissional. Partindo desta relação complexa entre conhecimento e prática e refletindo sobre o meu percurso de desenvolvimento profissional, descrevo de seguida alguns momentos desse percurso que me levaram a um questionamento e interesse pelas questões abordadas nesta investigação.

1.1.1. Motivações pessoais

A investigação em Educação Matemática tem produzido conhecimento sobre a aprendizagem dos alunos e sobre a prática dos professores. Os ciclos curriculares, nas palavras de Maria do Céu Roldão, são vividos em movimentos pendulares, afastando-se

ou aproximando-se de determinado conhecimento produzido, acumulado e estabilizado no campo da Educação. Independentemente dos momentos curriculares, existem sempre discussões sobre o conhecimento e as práticas desenvolvidas pelos professores. Depois de um período rico em investimento no conhecimento dos professores, de 2006 a 2012, passámos por período de 4 anos, que vi como fértil para o desenvolvimento de um conhecimento baseado no senso comum e na experiência pessoal de cada professor. Nesses 4 anos, o discurso era colocado numa lógica em que cada professor faria as suas opções pedagógicas, sendo que o foco nacional estava nos resultados em Exames Nacionais, assumindo-se que estes permitiriam a monitorização dos conhecimentos dos alunos. Importava que os alunos atingissem metas e que o seu conhecimento fosse expresso adequadamente do ponto de vista formal, de modo a dar resposta às necessidades e expectativas das elites da sociedade. Nos últimos quatro anos vivemos um outro momento onde se pretende dar autonomia às escolas e aos professores para encontrarem soluções locais para o desenvolvimento de aprendizagens de qualidade numa escola para todos. Outra vez, o que importa é encontrar respostas diversas para os diversos alunos que frequentam a escola. O discurso tem colocado a tónica na articulação curricular entre disciplinas, constituindo-se um currículo mais integrado e com a finalidade de desenvolver competências transversais para uma aprendizagem ao longo da vida, inscritas no Perfil dos alunos ao final da escolaridade obrigatória. No entanto, do ponto de vista da Educação Matemática, também importa sublinhar que um currículo integrado e integrador pressupõe conexões entre temas matemáticos e uma matematização da realidade dos alunos, de modo a dar significado ao aprendido. Ou seja, mais uma vez os professores são desafiados a desenvolver práticas mais complexas e a constituir equipas pedagógicas, para procurar encontrar soluções para os problemas emergentes do contexto profissional. Mais uma vez estas práticas implicam um conhecimento profundo da Matemática e da sua Didática.

Nos 20 anos de vida profissional, enquanto professora e formadora, fui vivendo estes ciclos com diferentes papéis, mas sempre com a mesma preocupação: identificar e compreender experiências que fossem promotoras de novo conhecimento e de mudança nas práticas pedagógicas, evidenciando o conhecimento necessário para ensinar. Refletindo sobre as experiências vividas, em diversos contextos, identifico a relação entre o conhecimento e a prática.

Identifico o processo de doutoramento como mais um momento de desenvolvimento profissional onde, paulatinamente, se têm cruzando e modificando

teoria e prática. Como professora do 2.º ciclo procuro mais conhecimento e novos contextos que favoreçam o meu desenvolvimento profissional, preocupando-me com a adequação da minha prática às necessidades dos meus alunos, e questionando-me se o conhecimento que tenho é suficiente para desenvolver o papel social que me cabe numa escola para todos, cada um e com todos. Assim, tenho procurado refletir sobre o que já conheço e faço, identificando fragilidades, antecipando processos de ensino e de aprendizagem, e procurando formação contínua e pós-graduada suscetível de me apoiar nos processos de inovação que, necessariamente, trazem insegurança e desconforto, mas também transformação. Tal como indica Walshaw (2012), faço-o tendo em vista proporcionar experiências de aprendizagem significativas aos meus alunos e formandos, ajudando-os a construir mais e melhor conhecimento. Vivo o processo de desenvolvimento profissional deste modo porque concebo o professor como um profissional que reflete, investiga e desenvolve o seu conhecimento, seja sobre o que ensina, como ensina ou a quem ensina (Hargreaves, 1998; Schön, 1983).

O meu interesse pela formação e desenvolvimento profissional de professores não é de hoje. Na verdade, iniciei este percurso aquando da minha dissertação de mestrado onde tentei compreender o processo de quatro professoras de Matemática e Ciências da Natureza, debruçando-me sobre as suas práticas num contexto de inovação curricular e onde seria expectável um processo de desenvolvimento profissional (Ferreira, 2006). Nesse processo, procurando respostas, encontrei mais questões sobre os percursos profissionais e formação, e ainda sobre as ideias e conhecimento que estão na génese das opções na prática profissional. Enquanto formadora, procurei apoiar o desenvolvimento das práticas pedagógicas com quem me cruza. O meu interesse em desmistificar ideias sobre o ensino da Matemática e fazer emergir novas práticas tem-me colocado desafios no apoio aos professores na construção do seu conhecimento profissional. Esta experiência tem-me também colocado desafios em relação ao meu conhecimento, levando-me a procurar mais respostas, a procurar mais conhecimento e a aprofundar as questões relativas ao ensino-aprendizagem da Matemática. Em particular, procuro conhecimento para lidar com situações complexas relativas à prática letiva e analisar questões sobre o conhecimento e as práticas.

As preocupações que desenvolvi enquanto formadora de professores, no ensino superior, na formação inicial, transformaram-se em preocupações da professora de Didática da Matemática. Apesar de me parecer que nem tudo pode ser ensinado nem aprendido na formação inicial, e que existem aspetos que se vão ampliando na prática

profissional de cada professor, estou convicta que uma boa formação inicial pode influenciar as práticas dos futuros professores, dando-lhes ferramentas para uma aprendizagem ao longo da vida profissional. Assim, é no contexto da formação inicial que culminam as minhas questões, dúvidas e vontade de compreender o conhecimento dos professores que ensinam Matemática e, principalmente, compreender o conhecimento e o desenvolvimento do conhecimento dos futuros professores pois são eles o futuro da educação.

1.1.2. Contexto do estudo

A recolha de dados deste estudo foi desenvolvida num contexto de mudança curricular. Depois de 15 anos de mudanças nas escolas, na formação inicial e nas práticas profissionais, no que respeita ao ensino da Matemática, deu-se um retrocesso patente nos documentos curriculares do ensino básico. Os estudos sobre o papel dos professores no desenvolvimento de currículos indicam que estes são “fundamentais para a forma como o currículo é interpretado e vivido em sala de aula” (Chapman, 2012, p. 263). Contudo, as ideias e atitudes dos professores de Matemática para com um novo currículo estão diretamente relacionadas com a visão que têm sobre a aprendizagem e o ensino da Matemática (Chapman, 2012). Ou seja, quando a visão dos professores não está em harmonia com as perspetivas do currículo, isso pode afetar o nível de participação e o sucesso no desenvolvimento desse currículo. A manutenção de tais conflitos e barreiras traz, também, dificuldades e novas questões, tanto aos professores como aos formadores de professores (Chapman, 2012). Apesar da rotura resultante da aprovação do programa e metas de Matemática para o ensino básico (2013), alguns professores, os investigadores e os formadores continuaram a trabalhar para uma Matemática para todos, onde se pretende dar significado aos procedimentos, desenvolver um conhecimento conceptual e desenvolver capacidades transversais fundamentais da Matemática.

Centro a minha atenção nos números racionais dado ser um tema matemático que levanta grandes dificuldades na aprendizagem. Para que as aprendizagens sejam significativas e de natureza conceptual é necessário que se desenvolva uma prática de cariz exploratório (Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010; Lamon, 2006; Ma, 1999; NCTM, 2007). O trabalho a realizar com os alunos relativamente aos números racionais constitui uma grande preocupação dos professores e é alvo de atenção dos documentos curriculares. Isso acontece, primeiro, porque é um tema que surge ao longo

de toda a escolaridade, frequentemente com muito menos sucesso que o desejado (Monteiro & Pinto, 2006); segundo, porque é um tema, matemática e pedagogicamente complexo (Lamon, 2007, 2006); e, terceiro, porque constitui a base para ideias mais avançadas, como os conceitos algébricos, influenciando o sucesso dos alunos nos seus estudos posteriores (Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010; Schifter, 1997). A literatura e alguns documentos curriculares apontam para abordagens onde o enfoque na compreensão dos conceitos envolvidos, utilizando e relacionando as diferentes representações dos números racionais, permite apoiar os alunos na sua aprendizagem, propondo tarefas ricas e de cunho exploratório (Barnett-Clarke et al., 2010; ME, 2007; NCTM, 2007) e desenvolvendo o sentido de número (McIntosh, Reys, & Reys, 1992) e o sentido de operação (Huinker, 2002; Slavit, 1999). Assim, colocam-se aos professores novos desafios quando têm que criar espaços de discussão das estratégias pessoais ou quando têm que explorar representações diversas chegando a todos os seus alunos (Charalambous, Hill & Ball, 2011; Orrill & Brown, 2012). A prática letiva subjacente a esta visão é complexa e exige do professor um conhecimento profundo e conceptual da Matemática e do seu ensino. Apesar do consenso sobre a importância do conhecimento para ensinar Matemática, manifestam-se diferentes perspectivas trazendo tensões em torno do conhecimento matemático e didático necessário para ensinar (Ball, Thames & Phelps, 2008; Ponte & Chapman, 2015; Rowland, 2013; Shulman, 1986). Assim, compreender o conhecimento dos futuros professores no início, durante e no final da formação inicial é um importante campo a investigar. Considero necessário compreender o conhecimento dos futuros professores no final da sua formação e no momento da sua prática supervisionada, assumindo que nesse momento o conhecimento do futuro professor é sujeito a circunstâncias que podem evidenciar debilidades ou permitir o seu reforço e desenvolvimento.

À formação inicial de professores apontam-se, frequentemente, várias falhas aos conhecimentos constituídos nos formandos, tais como insuficiente conhecimento científico sobre as matérias a ensinar, reduzido conhecimento profissional para a enfrentar os desafios do “terreno”, reduzida preparação em questões-chave para o trabalho nas escolas, demonstrando, de forma geral, desconfiança em relação ao trabalho constituído no campo da educação (Ponte, 2006). Deste modo, são grandes os desafios colocados às instituições onde se desenvolve a formação inicial de professores, que têm que gerir vários elementos e vários intervenientes. Nos anos anteriores ao estudo, para além das transformações curriculares ocorridas, também a formação inicial

de professores sofreu mudanças decorrentes dos desafios do processo de Bolonha, tendo as estruturas dos cursos sofrido alterações, passando a envolver dois ciclos de formação. Por isso, foi importante dar atenção aos processos de formação de futuros professores e ao conhecimento constituído (Monteiro et al., 2004; Ponte, 2006c).

A formação inicial dos professores de 2.º ciclo do ensino básico era e é constituída por dois ciclos de estudos. Em 2014, deixaram de existir mestrados em Ensino do 1.º e do 2.º Ciclo do Ensino Básico separando a formação de docentes do 2.º ciclo de Português, História e Geografia de Portugal da formação de docentes do 2.º ciclo em Matemática e Ciências Naturais (Decreto-Lei nº 79/2014, de 14 de Maio, e Declaração de retificação nº 32/2014). Importa referir que as futuras professoras do estudo frequentaram uma licenciatura de seis semestres em Educação Básica constituída por 30 créditos em Matemática e 2,5 créditos em Didática da Matemática. Esta foi seguida de um mestrado de quatro semestres em Ensino do 1.º e do 2.º Ciclo do Ensino Básico, composto por 7,5 créditos em Matemática e 5 créditos em Didática da Matemática e uma prática pedagógica composta por 54 créditos. Neste quadro, as instituições de formação têm liberdade para constituir os seus currículos, assumindo a sua autonomia, e dar resposta aos perfis desejados para se ser professor de reconhecido valor profissional, indo ao encontro dos perfis preconizados pelas entidades reguladoras (Dec. Lei 43/2007 de 22 de Fevereiro). Assim, e decorrente do processo de Bolonha, a carga letiva e o investimento realizado no desenvolvimento do conhecimento de Matemática e sobre o ensino da Matemática tiveram um investimento reforçado. Desta mudança ficam questões sobre o conhecimento que foi desenvolvido durante os cinco anos de formação, culminando na prática pedagógica supervisionada. Contudo, só mais tempo de formação não será suficiente, dever-se-á sim, investir no tipo de conhecimento, competências, atitudes e valores que os candidatos a professores devem desenvolver (Ponte & Chapman, 2012). Ou seja, para além da reorganização dos cursos de formação é importante, no sentido do desenvolvimento do conhecimento necessário para ensinar, refletir e transformar os contextos onde as aprendizagens se desenrolam (escolas e universidades) e proporcionar abordagens que promovam o desenvolvimento desse conhecimento. Na implementação de tais abordagens, os formadores dos futuros professores e suas características, visões e práticas são cruciais, assim como os recursos que lhes são providos.

No contexto de prática de ensino supervisionada são relevantes as várias características dos diversos atores envolvidos. Os alunos, com quem o professor

trabalha, e suas características, podem influenciar as opções que toma sobre as tarefas e abordagens a seguir e nas dificuldades, ou não, que poderá viver no processo de ensino-aprendizagem. Ainda neste contexto, o professor coordenador de estágio, enquanto professor experiente que trabalha com a turma e com o futuro professor, tem também ele, características, uma visão e uma prática que poderão influenciar as opções e o conhecimento do futuro professor (Peterson & Williams, 2008). E, por fim, o supervisor de estágio, tem um papel regulador da prática para além do papel de avaliador influenciando o conhecimento constituído na prática letiva (Ponte & Chapman, 2012).

1.1.3. Relevância do estudo

O conhecimento que os futuros professores desenvolvem durante a sua formação inicial constitui um campo de muitas dúvidas e controvérsias (Ball, Thames & Phelps, 2008; Ma, 1999; Ponte & Chapman, 2015; Shulman, 1986). É necessário compreender qual é o conhecimento para ensinar Matemática dos futuros professores, à entrada, durante e no final da sua formação (Ponte & Chapman, 2015). Em particular, consideramos importante entender o conhecimento dos futuros professores no momento da sua prática supervisionada, assumindo que tal conhecimento é nessa altura sujeito a circunstâncias que permitem a perceção de debilidades e da eventual necessidade de reforço e desenvolvimento.

Como já referi, centro a atenção no conhecimento dos números racionais dado ser um tema que levanta sérias dificuldades na aprendizagem dos alunos, desafia os professores no que diz respeito ao conhecimento e às suas práticas, e tem grande relevância nos programas do 2.º ciclo do ensino básico. Um aspeto que contribui para a complexidade destes números é o facto de admitirem várias representações, nomeadamente, decimal, fracionária, percentagem e pictórica. Existem ainda questões desafiantes em torno dos diferentes significados que tanto as frações como as operações podem assumir. Para apoiar os alunos na compreensão das ideias subjacentes a este conjunto numérico importa representar as grandezas envolvidas em diferentes modelos.

O conhecimento do futuro professor pode ser considerado sob distintas perspetivas. Dois campos fundamentais são o conhecimento matemático e o conhecimento didático que, na prática pedagógica, surgem de forma integrada. Mas mais que mapear o conhecimento matemático e didático, é importante compreender a natureza deste conhecimento e como intervém na prática letiva. O conhecimento

matemático envolve dois aspetos essenciais: conhecimento conceptual e conhecimento processual (Hiebert, 1988; Rittle-Johnson & Schneider, 2012). Um professor pode ter conhecimento processual e não ter conhecimento conceptual, mas um professor que tem conhecimento conceptual tem necessariamente conhecimento processual (Bartell, Webel, Bowen & Dyson, 2012).

O conhecimento didático diz respeito ao modo como ensinar e é decisivo para que o professor possa exercer cabalmente o seu papel (Shulman, 1987). Envolve ideias gerais sobre a Matemática, o ensino da Matemática, o papel do professor e do aluno (Shulman, 1987). Sobre tarefas, os professores devem ser capazes de selecionar, desenhar e sequenciar tarefas com determinados propósitos, definir e explorar estratégias de resolução das tarefas para a construção de ideias matemáticas e estabelecer uma sequência de ensino reconhecendo que determinadas opções influenciam as oportunidades de aprendizagem (Chapman, 2013; Serrazina, 2012; Stein & Smith, 1998). Relativamente ao conhecimento sobre os alunos, os professores devem ser capazes de antecipar e identificar as dificuldades e erros comuns dos alunos quando ouvem e interpretam pensamentos incompletos. Devem também saber antecipar diferentes resoluções dos alunos em tarefas específicas e o que os seus alunos consideram desafiante e interessante ou confuso (Ball, Thames & Phelps, 2008; Son & Crespo, 2009). Segundo Barnett-Clarke et al. (2010). Uma das ideias fundamentais do ensino-aprendizagem dos números racionais é que “os números racionais têm múltiplas interpretações e dar-lhes sentido depende da identificação da unidade de referência” (p. 17). No que respeita às representações, os professores devem saber como os alunos lidam com as representações pictórica, verbal, fração, numeral decimal e percentagem dos números racionais e como as relacionam desenvolvendo uma compreensão do conjunto numérico na sua globalidade (Barnett-Clarke et al., 2010). Quando exploram tarefas, os professores devem reconhecer os prós e contras da utilização de determinadas representações e saber aproveitar as estratégias e representações dos alunos para promover ideias matemáticas (Ball et al., 2008; Mitchell, Charalambous & Hill, 2013; NCTM, 2007; Stylianou, 2010). Importa, também, que os futuros professores compreendam a importância de ouvir as ideias matemáticas dos alunos devendo aprender a fazê-lo e a analisar a validade dos seus pensamentos, de forma a colocar-lhes questões adequadas à constituição de uma compreensão dos conceitos (Schifter, 1997; Ponte & Serrazina, 2000; Silverman & Thompson, 2008; Zaslavsky, 2010). Também na interação com os alunos quando têm dúvidas ou necessitam de

sistematizar ideias é fundamental que concebam e desenvolvam explicações adequadas às questões e conhecimento dos alunos (Charalambous, Hill & Ball, 2011; Serrazina, 2012).

Também é necessário dar atenção às práticas que, na perspetiva de Ponte, Quaresma e Branco (2012) podem ser encaradas como as atividades que os professores conduzem regularmente num determinado contexto e com determinados significados. Para isso, é necessário que nos debrucemos sobre esses significados e o que os professores atribuem ao que fazem. Assim, apesar das práticas dos professores nem sempre espelharem o seu conhecimento, a realidade é que é na prática que se evidenciam as atitudes resultantes da visão de cada professor, não podendo deixar de ser analisadas (Guimarães, 2008; Son & Crespo, 2009). A caracterização da prática docente tem sido alvo de grande atenção por parte da investigação em Educação Matemática, quer em Portugal, quer internacionalmente. Nas perspetivas sociocultural e cognitiva encontramos elementos e olhares distintos, mas suscetíveis de combinação (Jaworski & Potari, 2009; Ponte, Quaresma & Branco, 2012). No entanto, no contexto escolar coexistem práticas diferentes, que se situam entre o ensino direto, numa abordagem tradicional, e práticas de ensino-aprendizagem numa abordagem de cunho exploratório (Ponte, 2005). Além disso, a estrutura de uma aula pode variar, com os diferentes momentos de trabalho organizados de diferentes modos, dependendo das características das tarefas, da comunicação constituída e dos papéis vividos por alunos e pelo professor (Ponte, 2005, 2014). Independentemente da estrutura e das suas características, as práticas de ensino em sala de aula, caracterizam-se em dois aspetos fundamentais: as tarefas propostas e a comunicação (Menezes, Tomás Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014; Ponte, 2005; Ponte, Quaresma, & Branco, 2012; Ponte & Serrazina, 2000).

Nos diferentes momentos da aula, enquanto exploram e discutem resoluções e estratégias, mais ou menos formais, os professores lidam com os erros e dificuldades dos seus alunos, levando a cabo ações de promoção e gestão da aprendizagem dos alunos (Ball, Thames & Phelps, 2008; Ponte, 2012; Ponte, Mata-Pereira e Quaresma, 2013; Pólya, 1977; Skovsmose, 2000). De modo a promoverem e gerirem um ambiente promotor de aprendizagem, os professores são chamados a gerir os materiais, o tempo e os modos de trabalho, a participação dos alunos com as suas ideias e as interações quando as discutem. Para a apresentação e discussão destas ideias necessitam de selecionar e sequenciar as diferentes resoluções para depois as orquestrar, corrigir e/ou

discutir (Canavarro et al., 2014; Jackson, Garrison, Wilson, Gibbons & Shahan, 2013; NCTM, 2007; Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

Analisar o conhecimento dos professores é um empreendimento complexo (Norton, McCloskey & Hudson, 2011), dada a sua íntima relação com a prática docente. A sua compreensão requer que o observemos na perspectiva dos principais atores (os futuros professores). Para tal, devemos compreender as razões das suas opções, observando e refletindo com os professores as suas experiências na prática letiva e acompanhando o desenvolvimento do conhecimento para ensinar (Davis, 2009; Steele & Rogers, 2012; Son & Crespo, 2009). Por exemplo, num dos poucos estudos sobre as estratégias que os futuros professores concebem o modo como apoiam os alunos a ultrapassar as suas dificuldades, Isiksal e Cakiroglu (2011) mostram que nesta fase da sua formação os futuros professores têm diferentes ideias sobre os erros e dificuldades dos alunos, neste estudo em particular na multiplicação de frações, e referem várias estratégias para os evitar e ultrapassar. Importa compreender o que acontece entre as suas ideias quando planificam e concretizam e ainda que reflexões emergem das suas experiências na prática pedagógica. Ainda sabemos pouco sobre *como*, com que propósito e as dificuldades que os professores têm quando usam as diferentes representações dos números racionais e significados das frações (Mitchell et al., 2013). Sendo o ensino-aprendizagem dos números racionais um significativo desafio profissional, é importante compreender o conhecimento do futuro professor que ensina este tópico (Isiksal & Cakiroglu, 2010). Assim, os resultados deste estudo poderão contribuir para um refinamento do quadro teórico referente ao conhecimento necessário para e na prática letiva, compreendendo o seu desenvolvimento (Ponte, 2012), o modo como se relacionam a prática letiva e o conhecimento e ainda o papel da visão que os futuros professores detêm neste processo (Potari, 2012). Tal como aponta Mewborn (2000), importa investigar as experiências de ensino-aprendizagem de futuros professores na sua prática de ensino supervisionada de modo a compreender as dinâmicas vividas, suas potencialidades e desafios. Por isso, neste estudo pretendo contribuir para um aprofundamento das questões relativas ao conhecimento didático do futuro professor e à prática pedagógica. Dando especial atenção aos números racionais, pretendo contribuir para este campo da investigação, para a melhoria da formação inicial de professores e na concretização de medidas de apoio e complemento de formação a professores no início da profissão.

1.2. Objetivo, questões de investigação e organização da tese

Este estudo tem como objetivo compreender o conhecimento didático e a prática de ensino de futuros professores de 2.º ciclo sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais na prática de ensino supervisionada. Para tal, analiso a prática de ensino supervisionada e as questões emergentes e que as futuras professoras reconhecem como relevantes, relativamente às tarefas, aos alunos, aos aspetos relativos à comunicação e às suas ações. Assim, pretendo responder às seguintes questões:

- (i) Qual a visão dos futuros professores sobre o papel do professor e alunos, as tarefas a propor e as dinâmicas a concretizar em sala de aula no que respeita ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática e, especificamente, dos números racionais?
- (ii) Como se caracteriza o modo como os futuros professores preparam e concretizam o processo de ensino-aprendizagem dos números racionais?
- (iii) Que aspetos são alvo de reflexão como resultado das experiências vividas e que desafios se manifestam na prática de ensino supervisionada quando lecionaram números racionais?

O presente trabalho está organizado em sete capítulos, tratando-se este primeiro de introdução ao estudo. O capítulo seguinte, de revisão de literatura, respeita ao conhecimento matemático, conhecimento didático para ensinar números racionais e à prática pedagógica de futuros professores. No capítulo 3, apresento as opções metodológicas da investigação, tendo em conta o objetivo do estudo. Fundamento, assim, a opção por um estudo de natureza qualitativa que segue um *design* de estudo de caso. Descrevo os instrumentos de recolha de dados e o processo de análise. Nos capítulos 4 a 6 apresento e analiso os casos particulares de Berta, Glória e Ana, iniciando com uma breve caracterização e descrição do percurso académico e da visão das futuras professoras sobre a Matemática e o seu ensino e considerando em particular os números racionais. A estrutura destes capítulos organiza-se nas três fases da Prática Pedagógica: Planificação, Concretização e Reflexão. Na fase da concretização apresento e interpreto os dados respeitando cronologicamente os acontecimentos. Debruço-me a fundo nos episódios fundamentais para a caracterização das práticas das futuras professoras. Finalmente, no capítulo 7, de conclusão do estudo, apresento os principais resultados do estudo, e as suas implicações para a formação inicial de professores e para a investigação.

Capítulo 2

Enquadramento Teórico

Conhecimento e prática pedagógica no ensino dos números racionais

Neste capítulo sistematizo as diferentes perspetivas sobre o conhecimento do professor ao longo das últimas décadas e apresento modelos sobre este conhecimento. Em seguida, debruço-me sobre o conhecimento matemático do professor. Apresento os principais conceitos envolvidos no ensino-aprendizagem dos números racionais não negativos, analisando as questões relativas ao sentido de número e de operação, focando a atenção no conceito de número racional, as suas diferentes representações e significados, as propriedades e significados das operações. Apresento, igualmente, estudos que se debruçam sobre o conhecimento matemático de professores e futuros professores sobre estes aspetos. Na terceira secção, debruço-me sobre o conhecimento didático no que se refere a tarefas, alunos e questões relativas à comunicação, ações do professor na prática pedagógica e abordagens curriculares e avaliação. Termino, revendo aspetos que estruturam e caracterizam a prática pedagógica no que respeita a tarefas, comunicação e ações dos professores nos diferentes momentos da aula.

2.1. Olhares sobre o conhecimento do professor

2.1.1. Meio século de investigação sobre o conhecimento do professor

A especificidade do conhecimento do professor de Matemática já é alvo de discussão há mais de 100 anos. O matemático Felix Klein, na sua obra *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*, já discutia a necessidade da formação de professores promover o conhecimento necessário para ensinar, sustentando a necessidade de o professor deter um conhecimento sobre a Matemática escolar do ponto de vista superior (Klein, 2009).

São vários os olhares sobre o conhecimento de Matemática para ensinar. O conhecimento do professor de Matemática, seja ele experiente ou ainda um futuro professor, tem sido objeto de atenção da investigação desde os anos 60 do século passado. Durante os anos 60 e 70 os estudos realizados eram de natureza quantitativa e tinham em vista estabelecer relações entre o conhecimento do professor e o conhecimento dos seus alunos. Estes objetivos não foram alcançados, uma vez que os resultados sobre a relação entre o conhecimento do professor (medido pela quantidade de unidades curriculares de Matemática realizadas) e os resultados dos seus alunos não foram estatisticamente significativos (Mewborn, 2001).

Segundo Mewborn (2001), durante os anos 60, 70 e 80 realizaram-se muitos estudos descritivos dando atenção às dificuldades e potencialidades do conhecimento dos professores em determinados temas matemáticos, entre eles o tema dos números racionais (Ponte & Chapman, 2006). Estes estudos usando dados quantitativos (questionários feitos a grande número de participantes) e qualitativos (entrevistas a pequenos grupos) concluíram que professores do ensino elementar tendiam a ter um conhecimento de natureza processual, compartimentado e, portanto, um fraco conhecimento de natureza conceptual. Deste período, com um olhar sobre o professor que não era necessariamente de Matemática, destaco o trabalho de Elbaz que distingue conhecimento teórico (sobre a matéria ensinada e sobre as teorias da aprendizagem e sociais), de conhecimento prático proveniente da experiência de ensinar. A autora define cinco dimensões do conhecimento do professor: o conhecimento de si mesmo, do contexto, do conteúdo a ensinar, de desenvolvimento curricular e do ensino (Guimarães, 2008). Schön, em 1983, com um foco no conhecimento-na-ação, sublinhava a existência de um conhecimento que se manifesta na prática. Este conhecimento é explicitado através da reflexão na ação, durante o processo de ensino, ou sobre a ação refletindo

depois desta. Esta perspetiva do professor reflexivo coloca-o no centro da resolução de problemas da sua prática, onde através da reflexão reconstrói a ação e procura reformulá-la, caso seja necessário (Schön, 1992). Na mesma linha de pensamento, Fenstermacher (1994) também analisa o conhecimento na prática dividindo-o em dois tipos que considera relacionados entre si: o conhecimento formal, relacionando-o com a ciência e o conhecimento prático, relativo às questões da prática e, por isso, experiencial, situado localmente e dependente do contexto. Este conhecimento é mais do que saber fazer e não se restringe ao conhecimento técnico/metodológico, mas também à visão que os professores têm sobre o ensino e a aprendizagem e sobre os seus propósitos, sustentados nas experiências vividas e nas ideias construídas a partir delas.

Ao longo dos anos 90 foi crescente o número de estudos comparativos entre professores dos primeiros anos e professores do ensino secundário, comparando futuros professores com professores experientes ou comparando professores oriundos de países diferentes. Para Mewborn (2001), os estudos comparativos entre professores de países diferentes mostraram que, apesar de existirem diferenças, de um modo geral, o conhecimento conceptual é insuficiente entre os professores. Exemplo destes estudos é o de Liping Ma (1999) comparando professores chineses e americanos. A autora constatou que os professores chineses, apesar de terem menos anos de estudo de Matemática, estudavam a Matemática que iriam ensinar de forma aprofundada e apresentavam um conhecimento de natureza conceptual mais robusto, mobilizando-o e construindo um conhecimento da mesma natureza nos seus alunos (Ma, 1999). Estes estudos mostram que o conhecimento de Matemática e a sua mobilização na prática são questões complexas sendo o próprio objeto (conhecimento do professor) complexo e multifacetado. Para Mewborn (2001), estes estudos mostraram que podem existir professores com conhecimento de natureza diferente, mas que acabam por assumir práticas de ensino muito similares, com enfoque em regras e procedimentos. Também tem sido claro que, para conduzir uma prática promotora de compreensão nos seus alunos, o professor necessita de ter um conhecimento de natureza conceptual. No entanto, a visão dos professores sobre a Matemática e o seu ensino e aprendizagem pode ter uma influência positiva ou negativa nas suas práticas independentemente do conhecimento matemático que detêm.

Nesta linha, existem estudos contemporâneos que tentam compreender este tipo de relações. Wilkins (2008) procurou estabelecer a relação entre o conhecimento matemático, as atitudes e crenças e a prática de 481 professores do ensino básico através

da resposta a um inquérito por questionário. No seu estudo concluiu que os educadores de infância e professores do ensino elementar (K-2 e K3-5) tinham níveis diferentes relativamente ao conhecimento matemático e nas atitudes relativamente à Matemática e ao seu ensino. Sendo que os professores (K3-5) tinham maior conhecimento matemático e atitudes mais positivas. No entanto, os professores (K-2) reportaram recorrer mais a abordagens mais exploratórias apesar de não existirem diferenças entre os dois grupos de professores sobre os benefícios dessa abordagem. Ou seja, nem sempre as crenças sobre os benefícios de determinadas abordagens implicam a constituição de práticas alinhadas com as crenças. Note-se que os professores que tinham uma prática exploratória acreditavam nos seus benefícios, mas os autores sublinham que existem estudos que contrariam estes resultados. Relativamente ao conhecimento matemático, o Wilkins (2008) concluiu que professores pouco eficientes matematicamente não têm práticas ensino exploratórias, mas se acreditarem nos seus benefícios a relação negativa é contrariada. Assim, segundo o autor, a atitude dos professores relativamente à Matemática influencia as suas crenças, o que por sua vez tem influência nas ações na prática letiva. Note-se que características relativas as diferentes características no perfil dos professores (idade, tempo de serviço, grau académico, formação continua) não estavam diretamente relacionados com o tipo de práticas. Recentemente, Putra (2018) comparou o conhecimento de futuros professores dinamarqueses e indonésios. A investigadora concluiu que, ainda que o conhecimento matemático sobre números racionais fosse próximo, nas entrevistas, os futuros professores da Dinamarca mostravam que a sua visão sobre o tema matemático era influenciada por teorias pedagógico-didáticas. Os seus discursos estavam alinhados com as teorias apresentadas e as suas análises sobre as tarefas propostas tinham uma ênfase pedagógica. Pelo contrário, os futuros professores da Indonésia “ainda confiam no ensino tradicional e modelos de aprendizagem onde o professor ainda é a fonte para a aprendizagem” (p. 45) relacionando estas ideias com as características das instituições e sociedade que frequentam.

O conhecimento do professor não envolve apenas a dimensão matemática, mas também a dimensão pedagógica. Na integração do conteúdo a ensinar nas questões iminentemente pedagógicas, emerge um conhecimento de natureza didática. A partir dos anos 2000, a investigação, partindo da premissa que o ensino da Matemática é um empreendimento complexo, tentou capturar o *como*, *quando* e *onde* o conhecimento matemático é mobilizado e desenvolvido, importando apresentar casos positivos onde

os professores evidenciam conhecimento na prática letiva (Mewborn, 2001; Ponte & Chapman, 2006; Rowland, 2013). Na procura de formas para compreender melhor o conhecimento do professor importa sublinhar que o professor aprende a partir da sua atividade e da reflexão sobre esta. A aprendizagem é mais rica e profunda, quanto mais envolvido estiver na sua atividade e essa e respetiva reflexão sejam realizadas com outros, que o desafiam e apoiam no processo (Ponte, 2012). Assim,

Um ensino de Matemática de qualidade passa necessariamente por professores com uma formação matemática apropriada, com competências reconhecidas no campo didático, com bom relacionamento com os alunos, que assumem uma atitude profissional perante os problemas com que se deparam e que demonstram capacidade de se atualizarem profissionalmente. (Ponte, 2016, p. 1)

2.1.2. Modelos sobre o conhecimento do professor

No campo sobre o conhecimento do professor para ensinar Matemática podemos encontrar diferentes olhares e diferentes perspetivas sobre este objeto. Um autor de referência no campo do conhecimento do professor e que tem ainda hoje estado na base do trabalho de muitos investigadores é Lee Shulman. Em 1986, interpelou o campo com a famosa frase de Bernard Shaw – “Quem sabe, faz. Quem não sabe, ensina” –, discutindo o conhecimento específico que o professor tem para ensinar. Neste artigo, Shulman (1986) organizou o conhecimento do professor em três categorias: conhecimento de conteúdo (SCK), conhecimento pedagógico de conteúdo (PCK) e conhecimento curricular (CK). Sublinhando a importância do conhecimento necessário para ensinar, refere que o professor tem que ter um conhecimento específico sobre o que ensina (SCK), sobre como ensina, transformando o seu conhecimento num conhecimento compreensível para os outros (PCK), e um conhecimento crítico sobre os documentos curriculares e sobre os tópicos a ensinar num determinado nível de ensino (CK).

Como conhecimento de conteúdo (SCK), Shulman (1986) entende o conteúdo substantivo que ensina e como se organiza *per se* mas indo além dos procedimentos e conceitos. Este conhecimento pressupõe compreender como se organizam e relacionam os conceitos e os factos que os estruturam, e o professor deve ser capaz de explicar a outros a importância de saber determinados conhecimentos, estabelecendo conexões entre tópicos da disciplina e não disciplinares. Estabelecendo a relação entre o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo, para Shulman

(1986, 1987) o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK), é um conhecimento especial sobre a matéria que ensina e a pedagogia. Esta noção serviu de ponto de partida para uma diversidade de investigações tendo sido alvo de ajustes, por falta de inclusão de aspetos críticos do processo de ensino-aprendizagem, tais como a falta de conhecimento acerca das dificuldades e formas comuns de pensamento dos alunos, o conhecimento adquirido na ação (Ball, 2000; Ball, Thames & Phelps, 2008; Shulman, 1987) e as capacidades de reflexão e investigação sobre a prática, constituindo um conhecimento pedagógico com base na experiência profissional do professor e das suas perceções sobre a prática. Assim, Shulman (1987) afirma que “ a ideia de raciocínio pedagógico e ação, considerada do ponto de vista do professor, que é desafiado a partir do que já sabe tornado este conhecimento num ensino eficaz” (p. 14). Shulman (1987) ampliou e sistematizou as categorias anteriores: (i) Conhecimento do conteúdo; (ii) conhecimento pedagógico em geral, como uma série de princípios e estratégias de gestão e organização que não dependem do conteúdo a ensinar; (iii) conhecimento sobre o currículo, conhecendo um conjunto de materiais e abordagens instrumentais (em Inglês, *programs*) para o professor; (iv) Conhecimento pedagógico do conteúdo, como um corpo de conhecimentos sobre o conhecimento a ensinar e pedagogia e que é único para o ensino de uma disciplina; (v) Conhecimento sobre os alunos e as suas características; (vi) Conhecimento sobre o contexto de educacional, referente à organização das instituições, como se trabalham os diferentes grupos de profissionais e de alunos num determinado contexto, a sua comunidade que tem determinada cultura; e (vii) Conhecimento sobre as finalidades da educação, seus propósitos e valores e a sua história e fundamentos.

Para Shulman (1987), mais do que as categorias o que importava eram sobretudo os fatores que influenciavam o conhecimento do professor e como este se desenvolvia. Nesta perspetiva, apresentou um modelo sobre o raciocínio pedagógico e ação, onde o professor desenvolve a sua ação em seis fases: primeiro, parte da sua compreensão sobre o conteúdo; segundo, transforma o conhecimento preparando o que vai ensinar (analisando criticamente materiais e leituras e os documentos curriculares), fazendo uso do seu reportório de representações e selecionando as suas ideias que considera importantes para o ensino do conteúdo e adaptando às características do(s) seu(s) aluno(s); terceiro, avança para o ensino, onde gere a aprendizagem, apresenta e interage com os alunos questiona e “observa” as formas de ensino que realiza; quarto, avalia as aprendizagens dos alunos e a forma como geriu o processo de ensino aprendizagem;

quinto, reflete revendo e reestruturando criticamente o trabalho conseguido por si e pelos alunos acrescentando explicações ao seu reportório; e, sexto, criando uma nova compreensão dos propósitos de ensino, do conteúdo dos alunos, do ensino e da aprendizagem a partir da sua experiência. Neste estudo fica evidenciada a relação entre o conhecimento e a prática como processo dinâmico.

Já neste século, Ball, Thames e Phelps (2008) apresentaram um modelo teórico sobre o conhecimento de Matemática para ensinar que pretendia completar o de Shulman (1986, 1987). Assumindo como uma categorização que pretendia descrever o conhecimento sobre ensino da Matemática mantiveram a divisão em conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo. As três categorias do conhecimento de conteúdo são: a) O *conhecimento comum* de conteúdo, o conhecimento associado com a capacidade de reconhecer respostas erradas, definições imprecisas nos manuais, usar as notações matemáticas corretamente, e construir as tarefas a propor aos alunos; b) O *conhecimento de conteúdo especializado*, necessário aos professores para analisar erros, avaliar ideias alternativas e explicações matemáticas, usar representações matemáticas e ser precisos na linguagem matemática durante a sua prática e ainda c) O *conhecimento do horizonte matemático*, quando os professores reconhecem como os tópicos se relacionam entre si no universo matemático e no currículo. Para tal o professor tem de conhecer as progressões de aprendizagem que estão implícitas nos documentos curriculares. Relativamente ao conhecimento pedagógico do conteúdo, subdividindo-o em: a) *Conhecimento sobre o conteúdo e os alunos*, isto é, o conhecimento que os professores têm quando antecipam os erros dos estudantes e equívocos comuns. Quando ouvem e interpretam os pensamentos incompletos dos estudantes, e quando preveem resoluções dos alunos em tarefas específicas. Incluía também o que os alunos podiam considerar desafiante e interessante ou pelo contrário o que podia ser confuso. b) *Conhecimento do conteúdo e do ensino*, isto é, o conhecimento que os professores têm sobre a sequenciação de tópicos no estabelecimento de um percurso de aprendizagem. Também identificavam o reconhecimento dos prós e contra da utilização de determinadas representações no processo de ensino-aprendizagem e saber aproveitar para questões matemáticas, as novas estratégias que os alunos traziam ao conteúdo. Por fim, conhecerem as sequências de ensino e as questões matemáticas a responder perante as novas estratégias dos alunos; e c) *Conhecimento do conteúdo e currículo*, ou seja, o conhecimento que os professores têm sobre os tópicos a abordar e como abordar tendo para tal um

conhecimento do currículo a desenvolver. Estes autores consideravam que o conhecimento para ensinar é multidimensional e continua a necessitar de revisão pois é importante identificar o conhecimento necessário para a prática, assumindo que diferentes situações mobilizam diferentes tipos de conhecimento. Ou seja, é importante compreender o conhecimento, mas também o raciocínio dos professores que está por trás das decisões que tomam, na forma como utilizam a Matemática no seu trabalho, quais as suas capacidades, hábitos, sensibilidades e julgamentos. Os autores apresentam ainda o desafio de compreender o conhecimento utilizado considerando a cultura e estilos de ensino Ball, Thames e Phelps (2008).

Analisando o contributo do trabalho de Ball, Thames e Phelps (2008), adequando o trabalho de Shulman (1986) ao conhecimento do professor de Matemática, verificamos que os autores desagregaram o conhecimento da Matemática em aspetos que remetem para o seu papel no trabalho docente (anexo X). Para tal, criaram categorias e descritores de análise de recursos, desenho de tarefas e comunicação da Matemática (Conhecimento Comum do Conteúdo); de análise do trabalho do professor quando mobiliza o conhecimento na comunicação matemática com os alunos (Conhecimento Especializado do Conteúdo); de análise do trabalho do professor quando mobiliza um conhecimento matemático de natureza conceptual e quando estabelece conexões entre tópicos (Conhecimento do Horizonte Matemático). No que respeita ao Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, os autores partiram de um olhar sobre o conhecimento Matemático na sua mobilização pedagógica. Assim, incluíram o Conhecimento Curricular do Conteúdo na Categoria do conhecimento para ensinar Matemática descrevendo o conhecimento matemático que é mobilizado na preparação da interação com os alunos (Conhecimento sobre o conteúdo e os alunos) e o conhecimento mobilizado quando prepara e ensina ao estabelecer percursos de aprendizagem, selecionar representações adequadas e estabelece progressões de aprendizagem (Conhecimento do conteúdo e do ensino). Assim, Ball et al. (2008) contribuíram para o campo do conhecimento do professor de Matemática numa perspetiva mais centrada no conteúdo e como este transforma a natureza do conhecimento pedagógico.

O contributo de Shulman (1986) na distinção do conhecimento do professor em conhecimento do conteúdo e o que designou por *pedagogical content knowledge*, por vezes traduzido por conhecimento didático, apoiou o trabalho de outros autores. Segundo Ponte e Chapman (2006), próprio Shulman também não se sentia totalmente

satisfeito com o conseguido sentindo que lhe faltava ênfase no conhecimento na ação, deixava de lado a ideia do professor como indivíduo com determinadas características e que pertencente a uma contexto onde existem diferentes intervenientes que podem contribuir para a transformação do conhecimento (alunos, outros professores, a comunidade educativa, políticas educativas, entre outros). Por isso outros autores, fazendo a distinção entre conhecimento do conteúdo e didática (Carrillo et al., 2018; Ponte & Chapman, 2008, 2015; Rowland, 2013; Silverman & Thompson, 2008; Sullivan, 2008), acrescentam outras dimensões e defendem um olhar menos compartimentado que o modelo de Ball et al. (2008). Assim, estas vertentes podem ser vistas interconectadas entre si e interrelacionadas com a prática pedagógica (Ponte & Chapman, 2006, 2008).

Partindo dos pressupostos de Shulman (1986, 1987) e de Ball et al. (2008) mas complementando-os, Silverman e Thompson (2008), propõem um quadro teórico sobre o conhecimento de Matemática para ensinar de forma compreensiva. Tal como os autores anteriores, também defendem que o professor deve ter um conhecimento especial sobre procedimentos matemáticos e representações para interagir de forma produtiva com os alunos, em contexto de ensino. Contudo, em relação aos quadros anteriores, o foco está na compreensão necessária para levar a cabo uma instrução sequenciada. O modelo de Silverman e Thompson (2008) fundamenta-se em três ideias fundamentais: i) *o modelo transformativo*; ii) *desenvolvimento da compreensão chave*; iii) *abstração reflexiva* (em inglês, *reflective abstraction*). Para analisar o desenvolvimento do conhecimento para ensinar Matemática consideram que os conhecimentos matemático e pedagógico não são independentes. Assim, partem do *modelo transformativo*, onde propositadamente se propõem experiências que permitam, aos professores, oportunidades para ampliar, integrando, o conhecimento matemático e pedagógico de forma a criar novo conhecimento. Uma segunda ideia-chave deste modelo é a ideia de *desenvolvimento da compreensão-chave* (em inglês, *key development understanding – KDU*), onde os indivíduos conseguem resolver uma variedade de problemas direta e indiretamente relacionados, em consequência da sua compreensão das ideias-chave, em contraponto aos indivíduos que resolvem determinados problemas de uma certa forma. Os autores argumentam que o conhecimento de Matemática para ensinar, envolve a transformação do seu KDU de um determinado conceito matemático compreendendo dois aspetos: i) Como é que o seu KDU pode potenciar a aprendizagem de determinadas ideias matemáticas nos seus

alunos; e ii) Quais as ações que o professor tem que realizar para apoiar o desenvolvimento dos alunos e as razões pelas quais as suas ações podem resultar. A terceira ideia apresentada por Silverman e Thompson (2008) é a de *abstração reflexiva* (em inglês, *reflective abstraction*), como um processo pelo qual novas e mais avançadas conceções se desenvolvem partindo das conceções existentes, envolvendo as capacidades de abstração e de ações coordenadas no sentido de desenvolver novas estruturas cognitivas no contexto da educação matemática dos professores. Para a constituição e desenvolvimento de um conhecimento novo, este teve que ser alvo de uma abstração reflexiva. Contudo, o facto de existir transformação do conhecimento não implica necessariamente que tenha efeitos no ensino destes professores. Para tal é necessário os professores tomarem consciência do seu desenvolvimento conceptual da Matemática para depois conceptualizarem pedagogicamente a Matemática. Assim, para Silverman e Thompson (2008), o professor desenvolve o conhecimento que suporta o ensino conceptual de um determinado tópico matemático quando: (i) desenvolveu um conhecimento de compreensão-chave (em inglês, *key development understanding*, KDU) nesse tópico, (ii) construiu representações das diversas formas de modo a que os alunos possam entender o conteúdo (descentrando-se), (iii) tem uma imagem de como “o outro” pode vir a pensar a ideia matemática de forma semelhante; (iv) tem uma imagem do tipo de atividades e de discurso sobre essas as atividades que podem apoiar o desenvolvimento e a compreensão de uma ideia matemática semelhante noutra pessoa; e (v) tem uma imagem como os estudantes que chegaram a uma ideia matemática podem ser apoiados a aprender outras ideias matemáticas que não as suas. Desta feita, o professor, refletindo, consegue: responder a questões sobre o conteúdo ensinado; antecipar a atividade que o aluno desenvolve quando contacta com o material disponibilizado e resolver problemas vivenciando dificuldades; antecipar que tipo de discurso deve ser construído com o aluno para compreender o que o aluno concebe. Ou seja, na perspetiva de Silverman e Thompson (2008), o desenvolvimento do conhecimento para ensinar Matemática parte da própria compreensão para a compreensão hipotética do aluno, mas separa as duas. O professor vê várias alternativas que podem ocorrer e desenvolver ao longo do processo. O professor também é capaz de ver o poder pedagógico de um desenvolvimento da compreensão-chave. Esta nova compreensão e, assim, novos conhecimentos, não é conhecimento para ensinar Matemática porque esse conhecimento não é transformado em si pedagogicamente. Ainda assim, este conhecimento matemático tem um potencial pedagógico. Só quando o

professor transforma o conhecimento em conhecimento que é pedagogicamente poderoso é que desenvolveu conhecimento para ensinar Matemática.

Os autores defendem que este quadro teórico abre a possibilidade de se definir o objetivo, na educação matemática de professores, de desenvolver um conhecimento de Matemática para ensinar especial para o desenvolvimento de práticas profissionais que sustentem a capacidade dos professores para o desenvolvimento do conhecimento de Matemática para ensinar ao longo de suas carreiras. Estas práticas incluem o desenvolvimento de KDU, tornando-se reflexivamente consciente deles, e coerente com o modelo de ensino-aprendizagem dos alunos (Silverman & Thompson, 2008).

Numa linha próxima, temos também o modelo apresentado por Rowland (2013). O autor argumenta que o conhecimento, neste caso, da Matemática para ensinar não é um constructo cognitivo ou seja “que está na mente do professor” (p. 17) mas sim na prática pedagógica. Para tal, quando prepara a sua prática, o professor, com outros ou sozinho, nem sempre prepara questões relativas ao conteúdo que vai ensinar dando atenção a questões de natureza organizacional. Assim, resultado de uma abordagem indutiva, analisou as planificações e vídeo gravações de aulas e identificou 17 categorias organizadas em 4 dimensões/ etapas contidas entre si: Fundação/ Base, Transformação, Conexão e Contingência. O autor considerou a Base (em inglês, Foundation) constituída pela compreensão do conhecimento, crenças sobre a Matemática e o papel no ensino-aprendizagem, que o professor aprendeu na formação inicial, continua ou ao longo da vida e, que informa as suas opções pedagógicas e estratégias. A Transformação (em inglês, Transformation) relativa ao conhecimento na ação, onde considerou a planificação e o ensino, e que respeita à capacidade de o professor transformar o seu conhecimento matemático de modo a que seja “pedagogicamente poderoso”, recorrendo à expressão de Shulman (1987). Ou seja, o conhecimento necessário para apresentar as ideias aos alunos, recorrendo a diferentes representações, exemplos, explicações e demonstrações das ideias matemáticas. A transformação respeita ao conhecimento que o professor tem sobre os seus alunos as decisões que toma sobre a sua ação junto dos alunos e os julgamentos sobre o que aprendem e como aprendem. À terceira dimensão chamou de Conexão e relaciona-se com as opções que o professor faz sobre a sequência que quer estabelecer num determinado momento da aula, durante a aula ou num conjunto de aulas. Deste modo, o professor terá que sequenciar os tópicos a ensinar na(s) aula(s), selecionando e sequenciando tarefas cruzando o conhecimento que considera estruturante para as suas

aulas com o nível de desafio a colocar aos alunos no que respeita aos conceitos e tarefas envolvidas. Por fim, identifica a dimensão Contingência (em inglês, Contingency) identificando o conhecimento necessário para dar resposta a episódios que não foram previstos como é o caso de dar resposta a questões ou ideias dos alunos que não foram antecipadas apesar de ter existido uma preparação da aula. Note-se que nestes momentos o professor pode optar por não dar atenção à ideia apresentada pelos alunos por não ser pertinente ou por não se ter apercebido da sua existência.

Podemos estabelecer uma relação de proximidade entre as ideias de Shulman (1987), Silverman e Thompson (2008) e Rowland (2013), uma vez que os três modelos respeitam ao conhecimento na ação, procurando compreender como este se vai mobilizando e transformando e como ele se transforma no planeamento e em interação com os alunos no processo de ensino-aprendizagem. Assim, estes autores partem da ideia de que o professor deve compreender o conteúdo, tendo um conhecimento conceptual com potencial pedagógico. O modelo de Rowland inclui a visão sobre a Matemática e o seu ensino. No modelo de Silverman e Thompson, o conhecimento é integrado e composto por conteúdo e pedagogia e a ênfase é colocada na importância de o professor ter tido oportunidades para ampliar, integrando, conteúdo e pedagogia. Uma ideia partilhada pelos três modelos é o facto de considerarem o momento em que o professor parte do seu conhecimento e concebe e concretiza experiências de aprendizagem sendo necessário ter um conhecimento sobre os alunos, como comunicar e com que pretensões o vai fazer. Ou seja, transformar o seu conhecimento matemático em conhecimento sobre os alunos e como os apoiar e desafiar a aprender. Posteriormente também vai ser importante refletir sobre o processo avaliando o trabalho dos alunos e o seu. Note-se que o modelo de Silverman e Thompson (2008) é omissivo no que respeita ao momento de interação com os alunos e que Rowland alerta para o conhecimento necessário para dar resposta a situações e ideias inesperadas aquando da interação. Tanto Shulman (1987) como Silverman e Thompson (2008) têm modelos cíclicos pelo que consideram importante dois momentos no processo de desenvolvimento do conhecimento, onde os professores revisitam o previsto e concretizado e refletem sobre o conseguido propondo novas soluções para os problemas da sua prática. Deste modo constitui-se novo conhecimento.

O conhecimento profissional do professor de Matemática é multifacetado e depende de fatores internos e externos aos professores. No que respeita ao conhecimento na prática letiva, aquele que tem maior força é o conhecimento didático.

Ponte (2012) apresenta um modelo que se distingue de outros por assumir claramente a existência de um núcleo central, o conhecimento da prática letiva. O autor defende que esta vertente do conhecimento é aquela que apoia as outras vertentes, pois é a base das opções fundamentais que orientam e regulam o processo de ensino-aprendizagem. Um outro aspeto distintivo é afirmar claramente que as diferentes vertentes estão fortemente interligadas e se informam mutuamente. Neste conhecimento:

Está presente a Matemática escolar, estão presentes objetivos e prioridades curriculares, está presente a visão do aluno e do modo como aprende, bem como um conhecimento de modos de trabalho, recursos e formas de atuação prática do professor. (p. 5)

Ponte (2012) debruça-se especificamente sobre o conhecimento didático, onde distingue quatro grandes vertentes: o conhecimento da Matemática, o conhecimento do currículo, o conhecimento do aluno e da aprendizagem e o conhecimento da prática letiva (figura 1).

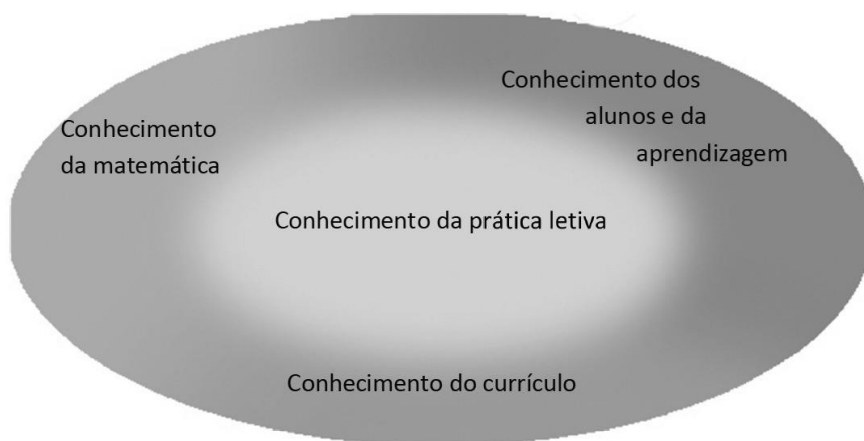


Figura 1 – Vertentes do conhecimento didático por Ponte (2012)

Para Ponte (2012), o conhecimento didático tem por primeira vertente a disciplina de Matemática. Na perspetiva do ensino não se refere à Matemática como ciência, mas sim à interpretação que o professor faz da Matemática como disciplina escolar. Por isso, o professor deve deter um conhecimento dos conceitos e procedimentos e de como representá-los e ainda como estabelecer conexões intradisciplinares e interdisciplinares. Uma segunda vertente é o conhecimento do aluno e da aprendizagem. Para além de conhecer os seus alunos como pessoas, com características e interesses próprios, conhece também as suas características culturais e o modo como aprendem. Estas ideias sobre como os alunos aprendem podem ser concordantes ou não com as teorias académicas. Uma terceira vertente do conhecimento

didático diz respeito ao currículo e desenvolvimento curricular. Este conhecimento serve de base a decisões sobre o tempo a investir em determinados temas, quais os tópicos prioritários e como organizar o processo de ensino-aprendizagem em função das perspectivas curriculares. Assim, implica que o professor conheça as grandes finalidades e objetivos do ensino da Matemática, a organização dos conteúdos, recursos e modalidades e técnicas de avaliação a utilizar. Por fim, o centro deste olhar sobre o conhecimento didático, está na vertente do conhecimento da prática letiva. Este conhecimento inclui o processo de planificação de longo e médio prazo e de cada aula. Implica também o desenho das tarefas das ações de organização do trabalho dos alunos, a criação de uma cultura de aprendizagem na sala de aula, o desenvolvimento e a regulação da comunicação e a avaliação das aprendizagens dos alunos e do ensino do próprio professor.

2.1.3. O conhecimento do futuro professor

O conhecimento de professores experientes e futuros professores tem diferente natureza uma vez que a falta de experiência, ou conhecimento prático, tem necessariamente implicações nas ideias que uns e outros vão constituindo através de uma reflexão sobre os diversos acontecimentos e episódios críticos que vão vivendo ao longo da vida (Marcelo, 2009). Segundo Marcelo (2009), os futuros professores tendem a ter ideias gerais e alguns detalhes relacionados com as ideias gerais, mas nem sempre interrelacionam diferentes ideias, dificilmente estabelecendo generalizações. Por isso, importa compreender o conhecimento e prática dos futuros professores.

Debruçando-se especificamente sobre o conhecimento dos futuros professores, Ponte e Chapman (2008; 2015) apresentam-nos a revisão de estudos publicados no período de 2006-2014 sobre o conhecimento do futuro professor, o seu desenvolvimento e identidade, concluindo que a investigação se tem sobretudo desenvolvido em estudos qualitativos de pequena escala. Os estudos analisados sugerem que os futuros professores têm frequentemente um défice de conhecimento matemático e didático que merece atenção. Ainda assim, os autores sublinham que existem resultados encorajadores que mostram que muitos futuros professores querem constituir práticas de ensino exploratório.

Para Ponte e Chapman (2015), apesar de todas as limitações, é necessário que a formação inicial promova experiências formativas que permitam aos futuros professores

compreenderem a complexa tarefa que é ensinar no século XXI, nas circunstâncias correntes no quotidiano diário das escolas, abraçando tais circunstâncias como desafios e problemas da prática para os quais devem procurar soluções locais desenvolvendo o seu conhecimento ao longo do seu percurso formativo. Assumindo que a formação inicial de professores é um processo intrincado onde se estabelecem relações entre o conhecimento e ideias prévias sobre a prática letiva trazidas das experiências vividas como alunos, (Swars, Smith, Smith & Hart, 2009) discutem as dimensões envolvidas no conhecimento dos futuros professores e os fatores que o influenciam. Para além do conhecimento e experiências prévias, interagem na formação inicial as características dos planos de estudo e as características dos formadores que intervêm nos contextos de estágio. Peterson e Williams (2008) debruçaram-se sobre o papel do professor cooperante no contexto de prática supervisionada. Os autores, considerando a importância destes intervenientes no desenvolvimento do conhecimento de futuros professores sobre a Matemática e o seu ensino, tentaram compreender as dinâmicas desenvolvidas. Da análise de dois casos de pares supervisionados, onde o foco das conversas entre futuros professores e professores cooperantes eram diferentes, identificaram duas dinâmicas com focos diferentes. Um dos casos mostrou que as conversas desenvolvidas eram em torno da gestão do comportamento dos alunos e raramente sobre a Matemática a ensinar e aprender. No outro caso, o foco das conversas estava em desenvolver uma prática que colocasse os alunos no centro da aprendizagem e ainda nas práticas matemáticas dos alunos (Peterson & Williams, 2008).

As características socioculturais, políticas e organizacionais da sociedade também influenciam o processo formativo (Ponte & Chapman, 2015). Segundo Ponte, no que respeita à realidade portuguesa, o processo de Bolonha trouxe novos desafios à formação inicial de professores, quer pelo facto da habilitação para a docência implicar a formação em dois ciclos de formação, quer ao nível da estrutura dos cursos, as componentes que os devem constituir e as aprendizagens a promover numa perspetiva de desenvolvimento profissional ao longo da vida (Ponte, 2006b). Assim, num quadro onde se exige que a formação inicial atenda às ideias e experiências prévias à formação inicial do candidatos a professores, tornar evidente a necessidade de um conhecimento profissional que está longe do senso comum uma vez que deve dar a devida atenção ao conhecimento de natureza didática sem separar a teoria e a prática, tanto fisicamente como conceptualmente. Importa também que seja dada a devida importância à prática profissional. Por isso, importa combinar uma preparação profunda sobre o que vão

ensinar e como vão ensinar sistematizada na prática de ensino supervisionada que não dependa das idiossincrasias das escolas cooperantes e com ênfase na avaliação das competências de ensino (Ponte, 2006b).

Os futuros professores precisam de aprender a Matemática para ensinar através de abordagens exploratórias, no quadro da constituição de uma visão sobre a sua futura prática letiva (Carrillo, Contreras, Linán-Garcia, & Barrera-Castarnado, 2019; Ghousseini & Herbst, 2014; Montes, Swars, Smith, Smith & Hart, 2009). Na sua prática letiva, os professores, e naturalmente também os futuros professores, devem saber fornecer situações do mundo real e contextos onde os alunos construam ideias matemáticas, dando oportunidades para que reconheçam e realizem conexões matemáticas tendo em atenção as suas experiências. Para que tal aconteça, os próprios futuros professores devem ser capazes de reconhecer e compreender tais conexões, o que provavelmente vai exigir que considerem o ensino da Matemática de uma nova forma, integrando o conhecimento sobre conteúdos e processos, sobre questões relativas aos seus alunos e às orientações curriculares (Ghousseini & Herbst, 2014). Para isso, precisam de se envolver em ciclos de preparação, experiência/exploração e reflexão, construindo conhecimento. De modo a considerar o ensino da Matemática de uma nova forma, devem conseguir contextualizar, descontextualizar e recontextualizar as ideias matemáticas de modo a não perderem a autenticidade das tarefas e a riqueza da própria Matemática (Chapman, 2012). Analisar a quantidade do conhecimento envolvido não será suficiente para compreender o conhecimento dos professores, sendo importante analisar a natureza do conhecimento, ou seja, é necessário analisar como esse conhecimento é mobilizado e é eficiente quando o professor ensina. Ou seja, a existência de uma relação entre a qualidade do ensino e o conhecimento sobre o que se ensina, devendo este ser profundo, amplo e completo (Ponte & Chapman, 2008). Um ensino de natureza conceptual é desejável porque também é importante que a aprendizagem, por parte dos alunos, seja conceptual (Bartell, Webel, Bowen & Dyson, 2012; Ma, 1999; Orril & Brown, 2012; Peterson & Williams, 2008).

Segundo Ponte e Chapman (2008), desde há muito que as disciplinas de “metodologia da Matemática” nos cursos de formação de professores estão organizadas em torno de temas como o “currículo” e o “ensino” onde se debruçam sobre tarefas e materiais a usar na sala de aula, planificação, organização dos alunos, comunicação na sala de aula e avaliação. A partir de 1970, a investigação começou a apontar para a importância dos professores conhecerem os raciocínios dos alunos e processos de

aprendizagem e terem em atenção as exigências decorrentes da implementação de um currículo de natureza exploratória que visa a compreensão por parte dos alunos. Nesta perspetiva, o processo formativo deve envolver experiências que permitam aos futuros professores ampliar e integrar o conhecimento matemático e pedagógico de forma a criar novo conhecimento (Ghousseini & Herbst, 2014; Ponte & Chapman, 2015). Assim, embora existam aspetos definidos acerca da natureza do conhecimento de professores, no que diz respeito a fazerem Matemática de forma significativa, desenvolvendo o seu conhecimento de Matemática para ensinar, existe ainda, necessidade de explorar a natureza do conhecimento de Matemática à entrada, durante e no final dos seus cursos de formação de futuros professores, de forma a obter mais informação e compreender a natureza dos programas de formação (Ponte & Chapman, 2008). Além da natureza do conhecimento sobre a Matemática, também importa dissecar o conhecimento que os professores mobilizam quando ensinam. Ou seja, não é apenas saber o que os professores sabem, mas também saber como usam esse conhecimento quando ensinam, pois não basta saber como fazer Matemática, sendo necessário também saber como usá-la na sua prática letiva (Ball, Thames & Phelps, 2008; Ponte, 2012; Ponte & Chapman, 2008, 2015; Rowland, 2013; Shulman, 1987; Silverman & Thompson, 2008).

Em síntese, o conhecimento do professor que ensina Matemática tem sido alvo de preocupação e análise há mais de 100 anos. Num primeiro movimento, nos últimos 50 anos, a atenção focou-se no conhecimento matemático específico que o professor de Matemática tem que deter, procurando encontrar, sem sucesso, relações de causalidade entre o conhecimento do professor e o conhecimento desenvolvido nos seus alunos. Em seguida destacaram-se estudos que procuravam as fragilidades do conhecimento dos professores e futuros professores em determinados temas matemáticos e, entre eles, o tema dos números racionais. Em comum estes estudos concluíam que os professores possuem um conhecimento de natureza processual, apesar da importância que o conhecimento de natureza conceptual detém na qualidade de um ensino promotor de aprendizagens profundas e significativas. Para além do conhecimento específico para ensinar Matemática é de salientar o surgimento de autores que discutem as dimensões envolvidas no conhecimento do professor e um olhar sobre o conhecimento na ação de ensinar. Simultaneamente, foram crescendo estudos empíricos que comparavam o conhecimento de professores em momentos diferentes da profissão ou professores formados em contextos social e geográficos diferentes. Dos estudos comparativos

emergiram resultados que nos alertaram para a complexidade do estudo do conhecimento e das múltiplas variáveis envolvidas e influenciadoras do olhar a prestar e das interpelações existentes entre as variáveis. É de sublinhar que os estudos que relacionam a visão do professor sobre o que ensina e como ensina trouxeram-nos esta variável como sendo importante para como o professor ensina. Para além de estudos que se debruçavam sobre o conhecimento matemático também existem bastantes estudos cuja atenção estava no conhecimento didático ou, para alguns autores, do conhecimento pedagógico do conteúdo. Estes estudos davam atenção ao conhecimento emergente na prática de ensinar onde a reflexão tinha um papel determinante no desenvolvimento do conhecimento sobre ensinar e onde diferentes dimensões estão envolvidas, a saber: a Matemática, a Didática e os intervenientes no contexto onde a prática se constrói e desenvolve.

Sem que estas dimensões se neguem, diferentes autores descrevem de modo distinto e com diferentes perspetivas o conhecimento do professor. O trabalho de Shulman foi determinante para muitos ainda que o modo como os modelos foram sendo desenvolvidos se distingam consoante partem, ou não, de processos indutivos das práticas dos professores. Também uma maior atenção dada ao conhecimento matemático e a partir deste as outras dimensões ou vice-versa determinam diferentes modelos. Finalmente, o facto de se terem olhares mais fotográficos ou mais dinâmicos, ou seja, procurando dissecar as dimensões do conhecimento ou, de outro modo, procurando inter-relações entre dimensões fez emergir diferentes modelos. Também a caracterização do conhecimento da prática letiva traz distintos olhares. Entre os diferentes modelos podemos identificar aspetos estruturantes organizados de um modo ou de outro, a saber: conhecimento sobre a Matemática; conhecimento sobre os alunos; conhecimento sobre o currículo e conhecimento sobre ensinar ou, noutra perspetiva, mais alargada, sobre a prática letiva. O conhecimento do futuro professor pode ter uma natureza diferente em alguns aspetos decorrente da fase de desenvolvimento profissional em que este está e o próprio papel que o futuro professore pode ter nos contextos onde desenvolve a sua prática. Assim, devemos considerar também as diferentes variáveis que influenciam o conhecimento dos futuros professores e sua mobilização na prática pedagógica, como: conhecimento e ideias prévias sobre a prática letiva, experiências formativas vividas na formação inicial e características dos formadores, características socioculturais, políticas e organizacionais da sociedade e

ciclos de preparação, experiência/exploração e reflexão estabelecendo uma estreita relação entre teoria e prática.

2.2. Conhecimento matemático para ensinar números racionais

O conhecimento matemático é o conhecimento que o professor tem sobre o que ensina e como este se organiza. O conhecimento matemático é fundamental na medida em que permite ao futuro professor a identificação de ideias matemáticas importantes, a compreensão de definições corretas e incorretas, usar a linguagem matemática apropriada e ter confiança nos processos realizados (Ball et al., 2008; Rowland, 2013; Shulman, 1987). O professor constrói este conhecimento ao longo do seu percurso de vida formativo, recorrendo a ele e organizando-o para a sua prática (Shulman, 1987; Silverman & Thompson, 2008; Rowland, 2013). O conhecimento matemático para ensinar envolve dois aspetos essenciais: o conhecimento processual e o conhecimento conceptual (Hiebert, 1988; Rittle-Johnson & Schneider, 2012; Star, 2000, 2005).

O conhecimento processual é constituído por regras ou por uma série de procedimentos, como por exemplo algoritmos, para resolver situações matemáticas. Este conhecimento deve ser desenvolvido partindo da resolução de problemas onde se recorre a determinados procedimentos (Hiebert, 1988; Rittle-Johnson & Schneider, 2012). O conhecimento conceptual é um conhecimento em rede dos conceitos fundamentais. Um professor pode ter conhecimento processual e não ter conhecimento conceptual, mas um professor que tem conhecimento conceptual tem necessariamente conhecimento processual (Bartell, Webel, Bowen & Dyson, 2012). Apenas com um conhecimento conceptual se podem relacionar tópicos, reconhecer definições corretas e incorretas de modo e considerar as definições adequadas ou não adequadas (Bartell et al, 2013). O conhecimento conceptual sobre números racionais envolve saber diferentes representações dos números e seus significados. No que respeita às operações com racionais implica, por exemplo, compreender que para adicionar e subtrair duas frações é necessário que a unidade tenha a mesma grandeza. Envolve também saber relacionar representações simbólicas e pictóricas (Lo & Luo, 2012) e apoiar a matematização das ideias matemáticas dos alunos (McClain, 2000). Para interpretar ou “para criar uma representação [quando se desenvolve uma explicação] deve-se primeiro saber o que se representa” (Ma, 1999, p.135).

A falta deste conhecimento leva a uma abordagem essencialmente processual, centrada, portanto, na mecanização, com ênfase nos procedimentos de cálculo (Ball, 1990). Note-se que mesmo quando o professor acredita que lhe cumpre ensinar Matemática de forma a promover a compreensão, a sua ação fica limitada pelo tipo de conhecimento que detém. Se o seu conhecimento for processual, torna-se impossível o estabelecimento de conexões entre conceitos e a construção do conhecimento com compreensão nos seus alunos (Ma, 1999). Assim, importa compreender o conhecimento matemático dos futuros professores, uma vez que os alunos aprendem mais matemática quando os seus professores sabem mais Matemática (Mewborn, 2001). No entanto, saber mais não é necessariamente saber o necessário, sendo importante compreender profundamente o que se vai ensinar. Ball (1990) identificou que apesar de muitos professores e futuros professores serem capazes de dar respostas corretas às tarefas propostas, recorrendo a procedimentos, alguns não eram capazes e poucos eram capazes de explicar matematicamente o conceito e significados, por exemplo, da divisão.

Como já referi, a relação entre conhecimento Matemático e prática não é linear. Tanto professores com debilidades no seu conhecimento como sem debilidades, podem tender apenas a apresentar regras e a explicar procedimentos algorítmicos. Mas um professor não pode ensinar o que não sabe, ainda que acredite que deve ensinar Matemática de forma a promover a compreensão ou desenvolva práticas com características diferentes (Ma, 1999; Mewborn, 2001; Wilkins, 2008). Um professor que tem um conhecimento limitado aos aspetos processuais não consegue promover uma aprendizagem conceptual (Ma, 1999). Um conhecimento marcadamente processual, interfere também no modo como o professor define, lida e apoia os alunos relativamente aos erros que estes cometem. Assim, um professor que não estabelece uma estrutura em rede dos tópicos a ensinar, reconhecendo os conhecimentos de Matemática como um conjunto de procedimentos mais ou menos desconectados, também não consegue apoiar os seus alunos a encontrar conexões entre conceitos, construindo o conhecimento compreensivamente (Ma, 1999).

2.2.1. O sentido de número racional: representações e significados

O número racional pode ser representado sob a forma de fração, numeral decimal e percentagem. Todos os números racionais resultam do quociente entre dois números inteiros a e b , sendo b diferente de zero ($a \div b$ e $b \neq 0$), estabelecendo-se uma

classe de equivalência. Assim, nem todas as frações representam números racionais (por exemplo $\frac{\pi}{2}$) (Godino, 2003; Griffiths & Hilton, 1976). Do ponto de vista matemático, os numerais decimais (ou simplesmente “decimais”) podem representar-se por uma fração na forma $\frac{a}{10^n}$ em que a é um número inteiro e n é um número natural (esta representação sob a forma de uma fração deste tipo, designa-se por fração decimal). Se na definição de numeral decimal considerarmos que em $\frac{a}{10^n}$ tanto a como n são números naturais, obteremos o conjunto dos números decimais positivos (Boavida & Marques, 2010).

Nem sempre foram aceites todas as representações de números racionais hoje conhecidas. Barnett-Clarke e os seus colegas (2010) lembram que o sistema hindu-árabe demorou mais de 1400 anos para incluir uma representação dos números racionais na forma de numeral decimal. E, apesar de os chineses e os árabes já os usarem há centenas de anos, apenas no final do século XVI Simon Stevin publicou, na Europa, a explicação do conceito de numeral decimal, explicitando o seu significado e a importância desta representação. Só quase um século depois, em 1670, em França, foi proposto o uso do sistema de medição decimal.

Os números racionais fazem parte do quotidiano humano. Na nossa realidade, quando medimos, pagamos ou recebemos dinheiro, estamos a trabalhar com números racionais o que, mais uma vez, reforça a importância de um trabalho adequado com estes números, nas mais diversas representações, no ensino básico (Ponte, 2006c). Na tradição escolar as os números racionais na representação fracionária e de numeral decimal são trabalhados de forma separada impossibilitando os estudantes de compreender completamente os números racionais. Através de um trabalho apoiado em representações diversas os alunos podem desenvolver o sentido de número tornando a sua aprendizagem mais significativa (Hodges, Cady & Collins, 2008; Monteiro, Pinto & Figueiredo, 2005; Ponte, 2006c; Scaptura, Suh & Mahaffey, 2007). Uma das abordagens recentes, onde se estabelece relações entre representações, é a de Moss e Case (1999) onde se estabelecem trajetórias de aprendizagem que privilegiam inicialmente a compreensão da percentagem permitindo a interpretação de relações e promovendo a compreensão de conceitos relativos aos números racionais (Guerreiro & Serrazina, 2017).

Os números racionais podem ser representados de várias formas matematicamente formais (fração, decimal, percentagem) mas também podem ser representados com esquemas ou outras representações incluindo materiais

manipuláveis. Algumas destas representações são apresentadas pelos professores e outras surgem de forma intuitiva, partindo de situações contextualizadas e significativas para os alunos. Steffe e Olive (2008) defendem que é desta forma que devemos partir para o trabalho de operar com racionais. No seu trabalho os autores depararam-se com representações informais muito próximas dos algoritmos tradicionais trabalhando com barras em papel que podem ser divididas, transformando-se partes de unidades diferentes em partes de unidades iguais, explorando, por exemplo, a adição de números racionais sob a forma de fração com denominadores diferentes. Também Mamede (2011) conclui a importância do papel do material manipulável para a exploração de relações entre quantidades e para a representação racionais, sendo este facto muito importante no trabalho inicial com os racionais. Segundo a autora o trabalho começa-se do concreto para o abstrato, de forma compreensiva e desenvolvendo o raciocínio matemático, estabelecendo conexões entre diversas representações e significados.

Existem várias questões em torno do conjunto dos números racionais que dificultam a sua compreensão. A investigação tem-se debruçado sobre as dificuldades relativas a este conjunto numérico apontando, como primeira causa, a generalização de ideias relativas ao conjunto dos números inteiros aos números racionais (Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen, & Keijzer, 2008; Lamon, 2001; Moss & Case, 1999; Ni & Zhou, 2005; Perez, 1997). Uma outra dificuldade prende-se com o facto de os alunos perante uma fração considerarem que estão perante dois números, não encontrando a relação entre o numerador e o denominador e, não identificando esta como a representação de uma grandeza. A dificuldade em compreender a representação fracionária e a grandeza envolvida, pode levar os alunos a não conseguirem estimar resultados e, portanto, demonstrar espírito crítico perante os resultados na resolução de problemas (Cramer e Henry, 2002). A falta de compreensão da natureza das grandezas envolvidas e do facto dos números racionais poderem ser representados por frações, decimais e percentagens pode resultar numa falta de flexibilidade em usar as diferentes representações dos números racionais levando a que cometam erros na resolução de procedimentos e a compreenderem e resolverem problemas contextualizados (Scaptura, Su & Mahaffey, 2007), onde é natural que se apresentem números com várias representações resultando muitas vezes que alguns alunos ignorem os números que não compreendem - racionais nas suas várias representações - ou não sabendo representar simbolicamente situações problemáticas que intuitivamente e informalmente conseguem resolver (Cruz e Spinillo, 2004). Ainda Cruz e Spinillo (2004) sublinham que as

crianças tendem a “julgar a magnitude entre frações decorre da aprendizagem que tiveram sobre a sequência numérica” (p.4). Os alunos tendem a generalizar a sequência dos números inteiros para os racionais fracionários. Ou seja, se primeiro vem 3 e depois 4 então primeiro vem $\frac{1}{3}$ e depois $\frac{1}{4}$, considerando erradamente $\frac{1}{4}$ maior que $\frac{1}{3}$. Por isso importa a reconstrução de ideias em torno dos diferentes conjuntos numéricos e estabelecer relações entre as diversas representações destes números.

Wu (2008), autor que se reconhece como matemático e não como educador, critica a utilização de outras representações, e em especial a abordagem do projeto “*Rational Number Project*”, como estando longe dos conceitos puramente matemáticos. Por isso, afirma que “aos nossos alunos devemos ensinar a matemática correta antes de podermos começar a considerar os seus processos de aprendizagem” (p.36), propõe a reta numérica como uma representação natural, simples e eficaz partindo de pontos de referência, tal como os dedos quando fazemos contagens com os números naturais. Para este autor, esta representação para o conjunto dos números racionais, permite colocar os números decimais nos seus lugares adequados, como frações que são, e ainda permite que a aritmética dos números racionais seja análoga à dos números naturais. Contudo, já vários autores se debruçaram sobre a utilização da reta numérica como representação possível para o trabalho com os números e apesar de ser reconhecida como uma representação adequada para determinar o alcance do desenvolvimento da interpretação de racional como medida e para ensinar a adicionar frações (Lamon, 2006) existem alunos que enfrentam determinadas dificuldades em reconhecer números na reta numérica. Charalambos e Pitta- Pantazi (2007), cruzando os resultados do seu estudo com outros dos últimos vinte anos, concluíram que existem alunos que na utilização da reta numérica, como representação para trabalhar os números racionais, cometem erros, como por exemplo contarem as marcas de partição na reta numérica, em vez de contarem os intervalos. Assim, reforçando algumas ideias que têm vindo a ser investigadas, concluíram que se deve implementar tarefas para além da localização de frações na reta numérica, para medir o conhecimento dos alunos, sobre frações e que a reta numérica compõe um modelo difícil para ser manipulado pelos alunos, devendo estes serem ajudados pelos professores a adquirir conhecimento sobre outros conceitos, tais como a equivalência de frações, antes de apressarem a introdução dessa representação modelo no ensino. Também no estudo realizado por Isza, Tillema e Tunç-Pekkan (2008), sobre a aprendizagem da adição com racionais, num estudo de caso

sobre os conhecimentos dos professores e dos seus os alunos, concluíram que nem todos os alunos compreendem a representação na reta numérica. Estes autores referem ainda que existiram alunos, neste estudo, que compreenderam desde o primeiro momento os tópicos trabalhados com recurso à reta numérica, mas que ainda assim é importante que os professores estejam despertos para as dificuldades de alguns, de forma a conseguirem diversificar representações onde se apoiam e a diversificarem as tarefas propostas.

Para minimizar as dificuldades descritas anteriormente pode-se introduzir a barra numérica, sugerida pela matemática realista para o trabalho com racionais como uma representação de transição para a reta numérica substanciando-se como uma representação central para o trabalho com a adição e subtração de racionais. A barra numérica ou também chamada linha numérica dupla, faz uma boa articulação com os procedimentos informais, devido ao seu carácter linear, permitindo estratégias de contagem informais; pelo seu formato vazio estimula a representação mental dos números e das operações de adição e subtração; e o seu comprimento representa uma extensão da unidade e suas subdivisões. Ou seja, favorece a criação de uma imagem mental das estratégias de contagem e das operações, estimulando o cálculo mental e, mais globalmente, o sentido de número. Estudos indicam que esta se revela uma ferramenta útil para se resolver problemas com números racionais, onde os alunos conseguem resolver com sucesso o problema e explicar as estratégias seguidas. Embora o seu uso revele graus de sofisticação e de apropriação diferentes entre os vários grupos, verifica-se que todos conseguem reconhecer uma unidade de referência, desenvolver estratégias para definir a subunidade e identificar uma relação entre a parte e o todo (Ventura e Oliveira, 2009).

Temos ainda o conceito de unidade de referência que é de difícil compreensão. Por um lado, uma unidade pode ser uma quantidade contínua (uma folha) ou pode representar um conjunto discreto de objetos como bombons). Por outro, importa identificar a unidade de referência reconstruindo-a, traduzindo através de uma quantidade absoluta, dada uma parte, ou identificando uma parte, através da quantidade absoluta ou de uma quantidade relativa, dada a unidade (Lamon, 2007). A conceção da unidade de referência é um dos fatores responsáveis pela complexidade do ensino-aprendizagem das frações. É muito importante o papel desempenhado pela unidade de referência no percurso do desenvolvimento do conhecimento matemático e na compreensão das frações, dado que uma fração em contexto tem sempre subjacente uma unidade (Fosnot & Dolk, 2002; Lamon, 2007; Pinto, 2011).

Um outro aspeto importante é o facto de os números racionais sob a forma de fração poderem ter vários significados – parte-todo, quociente, medida, razão e operador. Esta diversidade de significados implica que no processo de ensino-aprendizagem se comece por um trabalho intuitivo promovendo a compreensão das quantidades envolvidas, realçando o significado dos números nos contextos apresentados e tornando assim as representações significativas para os alunos (Barnett-Clarke et al., 2010; Behr et al., 1983; Monteiro, Pinto & Figueiredo, 2005; Lamon, 2001, 2007). Sendo um conceito pluridimensional, os diferentes significados estão interligados com a familiaridade com a unidade de referência dos números racionais. O *significado parte-todo* é apresentado em situações em que uma quantidade contínua ($\frac{1}{5}$ de uma folha pintada) ou discreta ($\frac{1}{5}$ de 5 bombons são recheados) é dividida em partes de igual grandeza, por exemplo (Charalambous & Pantazi, 2007; Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Lamon, 2001, 2007). O número racional representado na forma de fração trata-se de uma comparação entre o numerador (número de partes consideradas da unidade repartida) e o denominador (número total de partes em que a unidade foi dividida). O significado de parte-todo requer que se divida e redivida a unidade: *unitizing* e *reunitizing* e a reconstrução do todo a partir das partes ou repartir o todo já repartido em partes iguais (Charalambous & Pantazi, 2007). O *significado de razão* é a comparação entre duas quantidades sendo considerada a sua relação em vez de um número, refletindo relações proporcionais, sendo a unidade irrelevante. A relação entre duas quantidades intensivas representa uma relação entre duas partes de um mesmo todo (razão parte-parte), ou entre grandezas de natureza distinta (razão entre grandezas diferentes). Temos como exemplo a razão entre o número de crianças que toca violino e de crianças que toca piano numa turma é de $\frac{1}{5}$ - lê-se é de 1 para cinco (Monteiro & Pinto, 2005; Pinto, 2011; Lamon, 2001, 2007). O número racional interpretado *como um operador* corresponde a uma função aplicada a algum número, objeto ou conjunto (Charalambous & Pantazi, 2007; Behr et al., 1983) ou, de outro modo, surge em situações onde a fração é aplicada ao cardinal de um conjunto discreto ($\frac{1}{4}$ de 12 lápis são 3 lápis) ou, transforma uma figura, reduzindo-a ou ampliando-a (Pinto, 2011). A interpretação do número racional como operador implica compreender a unidade em causa (Charalambous & Pantazi, 2007). Quando um número de objetos é igualmente repartido por um certo número de grupos estamos na presença do *significado de*

quociente. Este surge em situações de partilha equitativa (quando distribuímos 4 sandes por 5 crianças). O numerador representa o que é partilhado e o denominador os recetores dessa partilha, relacionando duas quantidades (Charalambous & Pantazi, 2007; Mamede, 2011; Pinto 2011). Este significado surge como a solução de uma situação de divisão, relacionada com uma situação de partilha equitativa. O número racional pode também ser interpretado com o *significado de medida*, ou seja, compara-se uma grandeza com outra tomada como unidade de medida. Posteriormente ela é usada repetidamente de modo a determinar a distância de um ponto ao outro (Charalambous & Pantazi, 2007; Monteiro & Pinto, 2006).

Para McIntosh, Reys e Reys (1992), no caso dos números racionais, para ter sentido de número, é fundamental a compreensão de que estes números podem ser representados de diversas formas, adequando as representações às situações colocadas e compreendendo a grandeza relativa e absoluta dos números envolvidos. Assim, para McIntosh et al. (1992), o sentido de número é demonstrado quando o indivíduo calcula, quer através dos algoritmos em papel e lápis, quer em cálculo mental, ou pela forma crítica como utiliza as operações e suas propriedades, em vários contextos. Na perspetiva destes autores, o desenvolvimento do sentido de número é um processo evolutivo, gradual, que começa antes mesmo de o indivíduo iniciar a sua escolaridade básica desenvolvendo-se ao longo da vida. Uma vez que o desenvolvimento do sentido de número está estreitamente ligado ao trabalho com as operações nos seus contextos. Neste sentido, os alunos devem desenvolver um raciocínio reflexivo utilizando, quando necessário, números de referência e evidenciando espírito crítico relativamente aos resultados obtidos num determinado contexto, distinguindo as propriedades e os efeitos das várias operações nos vários conjuntos numéricos (McIntosh et al, 1992). Exemplificativo destas situações é a compreensão do efeito das operações de multiplicação e divisão no conjunto dos números racionais que pode ser diferente do efeito nos inteiros e naturais. Ou seja, os alunos devem perceber que na multiplicação com números racionais nem sempre o produto é maior que o multiplicando e que nem sempre o quociente é menor que o dividendo. Deste modo, alunos que não tenham desenvolvido o sentido de número no conjunto dos números racionais podem resolver problemas utilizando os procedimentos dos algoritmos mas, no final do processo, não conseguem verificar se os resultados obtidos estão corretos ou se fazem sentido no contexto de um problema (Barnett-Clarke et al., 2010; McIntosh et al., 1992).

2.2.2. Conhecimento dos futuros professores sobre os significados e a relação entre as diferentes representações dos números racionais

O conhecimento matemático dos professores e futuros professores sobre números racionais tem sido alvo de diversos estudos desde há bastante tempo. Olanoff, Lo & Tobias (2014) revisitaram 43 artigos, escritos entre 1998 e 2103, em torno do conhecimento dos futuros professores sobre este conjunto numérico debruçando-se especificamente na representação fracionária. Da análise realizada constatarem como um resultado consistente que apesar dos futuros professores serem proficientes na resolução de tarefas recorrendo aos procedimentos de cálculo, quando era necessário um conhecimento mais flexível que fosse além dos conhecimentos dos procedimentos evidenciando sentido de número evidenciaram dificuldades na compreensão dos significados dos procedimentos levados a cabo e as razões para os utilizarem. Segundo os autores, se inicialmente a tendência era de realizar investigação em torno das operações, principalmente multiplicação e divisão, ao longo do tempo o foco foi sendo mais equilibrado focando-se também nas ideias em torno do conceito de fração.

Para além das representações, conhecidas e utilizadas pelos futuros professores, terem um papel fundamental no conjunto dos conhecimentos de Matemática para ensinar (Ball et al., 2008), tanto Leinhardt & Smith (1985), como Olanoff, Lo & Tobias (2014) apontaram vários aspetos onde os futuros professores revelam dificuldades. Assim, existem outros aspetos a considerar: (i) dificuldades em identificar a unidade de referência quando representam pictoricamente frações, principalmente em unidades discretas; (ii) dificuldades com os diferentes significados da fração para além do significado parte-todo; (iii) dificuldades dos futuros professores representarem os números racionais pictoricamente ou recorrendo à reta numérica, também identificada por Orril e Brown (2012); (iv) dificuldades na resolução de problemas com contextos não matemáticos; (v) dificuldades em interpretar algoritmos não tradicionais. Leinhardt & Smith (1985) acrescentam ainda dificuldades: (vi) na compreensão em existirem diferentes frações que representam a mesma quantidade; (vii) identificar representações equivalentes e a sua utilidade na resolução das operações; (viii) nas relações existentes entre representações; na natureza das grandezas; e (ix) nos diferentes significados das frações. Recentemente, em Portugal, Tavares, Pinto, Menino, Rodrigues e Raínho (2017) realizaram um estudo a alunos no primeiro semestre da licenciatura em Educação Básica e identificaram as mesmas dificuldades já apresentadas mas

acrescentaram ainda as dificuldades em: evidenciar sentido crítico relativamente aos resultados, em função do contexto da tarefa, reforçando a ideia de que os procedimentos (corretos ou incorretos) são realizados de forma acrítica, sem que seja estabelecida uma relação conceptual que os justifique; lidar com numerais mistos e na comparação e ordenação de números racionais,

Apesar destas dificuldades, Leinhardt e Smith (1985) sublinharam que existiam professores que pareciam não ter dificuldade em ensinar estas questões. Os autores através de entrevistas quiseram conhecer e compreender o conhecimento destes professores. As conclusões indicaram que esses professores detinham um conhecimento conceptual sobre os tópicos, mas existiam alguns que consideravam não ter dificuldades em ensinar este tema matemático porque “confiavam no rigor dos procedimentos”.

Assim, importa que os futuros professores tenham oportunidades de reconstruir o seu conhecimento matemático sobre este conjunto numérico e com abordagens diferentes das utilizadas para os alunos uma vez que os futuros professores já trazem consigo um determinado tipo de conhecimento que pode não ser o necessário para ensinar (Depaepe, Roy, Torbeyns, Kleickmann, Dooren & Verschaffel, 2018; Putra, 2018). Por exemplo, Orril e Brown (2012) consideram importantes as capacidades de: reconhecer ideias matemáticas embebidas numa variedade de sistemas de representações; manipular de forma flexível ideias nos sistemas de representações; traduzir corretamente ideias de um sistema de representação para outro; e diagnosticar as dificuldades dos alunos, de identificar oportunidades para utilizar determinadas estratégias de forma adequada, conceber e realizar uma variedade de questões de modo a apresentar uma ideia com uma determinada representação pedindo aos alunos para ilustrar, descrever e representar uma ideia de outra forma. Os autores sublinham a importância de ir além da colmatação de défices significativos de conhecimento e que importa apoiar os futuros professores a organizar o seu conhecimento e a seleccionar e propor tarefas que salientem a importância das representações para suportar e relacionar o conhecimento. Ou seja, é comum aos diferentes autores, a ideia de que importa promover experiências matemáticas ricas, através de tarefas de natureza mais aberta permitindo evidenciar e refletir sobre as estratégias e raciocínios utilizados (Depaepe et al, 2018; Leinhardt & Smith, 1985; Olanoff, Lo & Tobias, 2014; Orril & Brown, 2012; Putra, 2018; Tavares et al, 2017).

Em síntese, no que respeita ao sentido de número racional, importa ter atenção a várias questões como: (i) a possível generalização errónea de ideias relativas ao

conjunto dos números inteiros; (ii) a representação fracionária é constituída por dois números, menosprezando a relação entre o numerador e o denominador e que representa uma grandeza; (iii) as relações existentes entre as diferentes representações dos números racionais; (iv) a possibilidade de poder representar os números racionais com diferentes modelos (circular, retangular, barra numérica e reta numérica); (v) a importância da unidade de referência; e (vi) o facto de os números racionais sob a forma de fração poderem ter vários significados – parte-todo, quociente, medida, razão e operador. Os estudos sobre o conhecimento matemático dos futuros professores sobre os números racionais tem demonstrado que estes podem ser proficientes na resolução de tarefas recorrendo aos procedimentos de cálculo mas que têm fragilidades no conhecimento necessário para flexivelmente lidarem com este conjunto numérico. Assim, no trabalho com futuros professores importa dar atenção aos seguintes aspetos: (i) identificação da unidade de referência quando representam pictoricamente frações, principalmente em unidades discretas; (ii) o reconhecimento de que existem representações equivalentes entre os números racionais e que diferentes frações que representam a mesma quantidade (iii) a representação dos números recorrendo à reta numérica; (iv) a natureza das grandezas; (v) os significados das frações; e (vi) a resolução de problemas com contextos não matemáticos onde devem evidenciar sentido crítico relativamente aos resultados, em função do contexto da tarefa. Assim, importa ir além da colmatação de défices e apostar no apoio à (re)organização o seu conhecimento sobre este conjunto numérico.

2.2.3. O sentido de operação e os significados das operações

Estando o desenvolvimento do sentido de operação relacionado com o estabelecimento das propriedades das operações nos conjuntos numéricos existentes, importa rever o que vários autores referem a propósito do desenvolvimento de sentido de operação. Voltando a McIntosh et al. (1992) é de referir que não separam o conceito de “sentido de número” do conceito de “sentido de operação”, mas existem outros autores que o fazem. Ainda assim é importante referir que existem aspetos relativos às operações que os autores consideram estruturantes, tais como: i) *Conhecimento e destreza com operações*, onde se inclui a compreensão dos efeitos das operações, as propriedades das operações e as relações entre as operações e ii) *Aplicar o conhecimento e destreza com números e operações em situações de cálculo*, onde se engloba a compreensão da relação do contexto do problema e o cálculo necessário,

noção que existem múltiplas estratégias, inclinação para usar uma representação e/ou um método eficiente e a inclinação para rever os dados e a razoabilidade do resultado (McIntosh et al., 1992).

Para Slavit (1999), o sentido de operação pressupõe a compreensão das estruturas envolvidas nas operações envolvendo a capacidade de usar as operações num conjunto de objetos matemáticos, usar as relações entre as várias operações e estruturas e potenciais generalizações, estabelecendo as propriedades das operações, os significados destas operações nos seus contextos e como é que as operações se relacionam. No sentido de clarificar esta noção o autor propõe um modelo para clarificar o sentido de operação desenvolvido pelos alunos em dez aspetos: 1) “Conceptualização dos componentes base do processo”¹, onde está envolvida a habilidade de compreender as ações por detrás das operações (por exemplo: na adição temos a contagem; 2) Familiarização com as propriedades das operações; 3) Relação com outras operações; 4) Familiaridade com a variedade de símbolos envolvidos em determinada operação; 5) Familiaridade com os contextos de onde emergem as operações; 6) Familiaridade com os fatos das operações; 7) Habilidade de operar sem situações concretas e sem situações de referência; 8) Habilidade para operar com valores desconhecidos ou arbitrários; 9) Habilidade para relacionar as operações com diferentes objetos matemáticos; 10) Habilidade de se mover para a frente e para trás nos conceitos. Assim, Slavit (1999) acrescenta a McIntosh et al. (1992) as questões relativas à simbolização, a operar em situações abstratas e de relacionar os conceitos.

Por sua vez, Huinker (2002) sistematiza sete dimensões do sentido de operação: 1) Compreensão do significado e das representações² das operações. Os alunos devem ainda estar familiarizados com representações tais como, retas numéricas, regiões retangulares ou circulares, etc.; 2) Habilidade para reconhecer e identificar problemas sobre situações reais; 3) Dar significado a símbolos e linguagem formal matemática conectando-os com a linguagem corrente e utilizando-os como ferramentas; 4) Transição entre diversas representações mostrando habilidade para usar o conhecimento matemático de forma flexível para resolver problemas; 5) Compreensão das relações entre as operações como, e utilização destas relações como estratégias na resolução das tarefas propostas; 6) Habilidade de decompor e compor números e utilizar as

¹Nota de tradução: No original, *conceptualization of the base components of the process*.

² O autor fala em “modelos”, que neste texto refiro como “representações”.

propriedades das operações na resolução de tarefas; 7) Compreensão dos efeitos das operações nos números operados – por exemplo, quando adicionamos dois números a soma é maior que esses dois números e o inverso acontece na subtração e apenas no caso dos conjuntos maiores que zero ou que, tal acontece na multiplicação e divisão de números inteiros mas que com os números racionais pode não acontecer, dependendo dos números racionais envolvidos. Deste modo, também Huinker (2002), acrescenta a McIntosh et al. (1992) as questões relativas à simbolização, tal como Slavit (1999) mas, ao contrário deste último, relacionando-as com as situações concretas.

De uma análise comparativa entre dois dos autores Slavit (1999) e Huinker (2002) pode-se concluir que Slavit (1999) identifica um número maior de noções envolvidas no sentido de operação, isto porque o primeiro acrescenta, em relação ao segundo autor, como fundamental o conhecimento dos factos matemáticos, assim como operar com números em contextos conhecidos e não conhecidos, incluindo situações em contextos puramente matemáticos, alargando o sentido de operação a contextos abstratos e simbólicos. Por sua vez, Huinker (2002), acrescenta a importância de reconhecer os efeitos das operações nos números operados e a necessidade de compor e decompor números utilizando as propriedades das operações. Apresenta ainda a importância de contextualizar as expressões simbólicas. Em comum, estes autores, referem o uso das propriedades das operações, dando relevo às relações entre operações, e à identificação, compreensão e uso dos símbolos. Também é comum a preocupação relativa ao reconhecimento dos contextos de onde emergem as operações. Esta diferença pode ser uma consequência da relação que Slavit (1999) estabelece entre a Aritmética e a Álgebra sendo o desenvolvimento do sentido de operação o caminho para a algebrização e daí a importância dada à simbolização e à resolução de tarefas em contextos puramente matemáticos. Note-se que estes aspetos não foram alvo de atenção maior na categorização de Huinker (2002).

Os autores acima referidos sistematizaram os aspetos envolvidos no desenvolvimento do sentido de operação, mas existem outros autores que sublinham a importância de alguns dos aspetos acima enunciados. Schifter (1997) refere a importância de se dar oportunidades e desafiar os alunos no desenvolvimento de estratégias sofisticadas na resolução de operações, através da resolução de problemas de palavras e exercícios de cálculo, aplicando as propriedades das operações de forma compreensiva levando à compreensão das operações, suas relações e suas propriedades sendo “um caminho eficiente” para o “desafio” de representar num sistema simbólico

convencional, as propriedades e as relações entre as operações, facilitando a aprendizagem da álgebra como nova linguagem. Também neste sentido, Empson, Levi e Carpenter (2011), apresentando resultados de estudos empíricos onde as crianças utilizavam as propriedades e as equivalências entre representações dos números racionais (representação fracionária e em numeral misto) para resolverem expressões algébricas modelando os problemas propostos, referem que os alunos ao relacionarem as estruturas algébricas das operações e usarem as propriedades fundamentais das operações na resolução de problemas com racionais na forma de fração, estão a usar pensamento relacional, um modo de pensamento fundamental na aprendizagem da álgebra, no ensino secundário.

2.2.3.1. As operações adição e subtração com racionais

Os significados das operações de adição e subtração com números racionais são essencialmente os mesmos dos números naturais, mas requerem algumas adaptações e cuidados na contextualização das operações, tendo em atenção que existem algoritmos diferentes (Barnett-Clarke et al., 2010). Assim, a adição continua a significar “juntar/combinar” e “acrescentar” e a subtração a significar “retirar”, “comparar” e “completar”, mudando apenas os objetos que intervêm que agora são um quociente entre uma parte um todo e que antes eram cardinais ou ordinais (Barnett-Clarke et al, 2010; Kraemer, 2010; Godino, 2003). Em contexto de ensino-aprendizagem, quando adicionamos e subtraímos números racionais, na forma de fração, com o mesmo denominador facilmente é perceptível que se mantém o significado que já existia para os números inteiros. Por exemplo, quando juntamos um quarto de maçã a um quarto de maçã obtemos dois quartos de maçã. Contudo, quando adicionamos e subtraímos números racionais, na forma de frações com denominadores diferentes, este significado não é tão óbvio para os alunos. Por exemplo, quando juntamos metade de uma maçã com um quarto de maçã ficamos com três quartos de maçã, ou seja, ficamos com três partes de maçã (e não duas como deveria acontecer no conjunto dos naturais) mas de dimensão menor. Esta diferença entre os números naturais e os números racionais, na forma de fração, torna as questões relativas aos significados destas duas operações mais complexos (Barnett-Clarke et al., 2010; Cruz & Spinillo, 2004; Streefland, 1982, 1991).

Segundo Cruz e Spinillo (2004) nas crianças existem dificuldades quando tratamos a adição e subtração com números racionais. Quando realizam adições com frações, tendem a recorrer à aritmética utilizada para os números inteiros considerando

apenas os numeradores (quando os denominadores eram iguais) ou os denominadores (quando os numeradores eram iguais) ou ainda, somando numerador com numerador e denominador com denominador. Assim, importa começar por trabalho intuitivo que implique a compreensão das quantidades envolvidas de modo a que as crianças possam compreender que para adicionar e subtrair frações têm de transformar as frações envolvidas em frações com o mesmo denominador e depois operar. No percurso de aprendizagem importa o recurso a frações de referência, ou âncoras (Cruz & Spinillo, 2004), como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{10}$ e seus múltiplos para depois avançar para outros racionais.

O trabalho com operações nos números naturais começa, tradicionalmente, pela adição e subtração, e naturalmente o mesmo acontece com os números racionais. Contudo quando o professor trabalha os algoritmos das operações com números racionais tem que distinguir entre as representações decimal e fracionária. Relativamente a *adicionar e subtrair na representação em fração* o professor tem que ter presente a definição onde, “a soma ou diferença de números racionais será o racional definido pela soma e diferença de duas frações representantes de cada um dos racionais que se deseja somar ou subtrair” (Godino, 2003, p.324). Assim, quando se opera com números racionais na representação fracionária, temos a operação definida pela expressão: $\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} = \frac{ab' + a'b}{a'b'}$, para $a'b' \neq 0$. No caso da adição de duas frações com denominadores iguais, Barnett-Clarke et al. (2010) indicam que podemos ilustrar formalmente, por uma expressão algébrica usando a propriedade distributiva: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = (a + c) \div b$. Quando os professores trabalham a subtração esta será expressa pela operação inversa da adição (Barnett-Clarke et al., 2010).

Como já foi referido anteriormente, quando o professor coloca tarefas onde estão envolvidas a adição e a subtração de números racionais na forma de fração, podem ser colocadas duas situações distintas: (i) quando operamos frações com o mesmo denominador, seguimos a expressão anterior (Pastor, Calleja & Trejo, 1969). Ou seja, a soma de duas frações de igual denominador tem como resultado a soma dos numeradores deixando invariante o denominador (Godino, 2003); (ii) quando estamos a operar com a representação fracionária de um número racional com denominadores diferentes, podemos substituir tais frações, por uma infinidade de frações equivalentes, sendo geralmente preferível [mas não obrigatório] trabalhar com as frações equivalentes com a representação mais simples possível mas que tenham em comum o mesmo denominador. Este processo pode ser formalizado pela seguinte expressão algébrica:

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$. Ou seja, substitui-se as frações dadas por outras equivalentes, mas com o mesmo denominador, de forma a poder usar a regra para a adição de tais frações (Barnett-Clarke et al., 2010; Godino, 2003; Kraemer, 2010). No caso de frações com o mesmo denominador, a diferença resulta do que resta dos numeradores mantendo invariante o denominador. Tal como no conjunto dos números naturais o professor deve ter presente que para que a diferença entre frações seja possível [no conjunto dos racionais não negativos] é necessário que o numerador da primeira fração seja maior que o da segunda (Godino, 2003).

O trabalho com os algoritmos das operações adição e subtração com a representação decimal pode iniciar-se antes mesmo do trabalho com os algoritmos com a representação fracionária. No entanto, o professor deve ter presente que para *adicionar e subtrair na representação em numeral decimal* seguimos a definição já referida de número racional. Vejamos então: se um numeral decimal é definido por $a/10^n$ e se quando operamos com frações fazemo-lo com frações com o mesmo denominador, então temos que substituir as frações por outras com denominador comum. Por exemplo: $2,5 + 3,23 = \frac{25}{10} + \frac{323}{100} = \frac{250}{100} + \frac{323}{100} = \frac{250+323}{100} = \frac{573}{100} = 5,73$ ou $2,5 + 3,23 = 2,50 + 3,23 = 5,73$. Assim, usando o algoritmo, temos $2,5 + 3,23 = \left(2 + \frac{5}{10}\right) + \left(3 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100}\right) = (2 + 3) + \left(\frac{5}{10} + \frac{2}{10}\right) + \frac{3}{100} = 5 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} = \frac{500}{100} + \frac{70}{100} + \frac{3}{100} = \frac{573}{100} = 5,73$. No caso da subtração segue-se o processo similar ao anterior encontrando-se a diferença.

No trabalho com as operações envolvendo números racionais é importante que o professor explore as propriedades das operações permitindo que os alunos compreendam a natureza das operações e as relações que se estabelecem. Assim, independentemente da representação de número racional não negativo, a operação de adição respeita diversas propriedades fundamentais: propriedade associativa $[(a+b)+c = a+(b+c)]$; existência de elemento neutro $\left[\frac{a}{b} + \frac{0}{b} = \frac{a}{b}\right]$; propriedade comutativa $[a+b=b+a]$ e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição $[a \times (b + c) = a \times b + a \times c]$, relacionando as operações adição e multiplicação (Godino, 2003; Pastor, Calleja & Trejo, 1969).

2.2.3.2. As operações multiplicação e divisão com racionais

Relativamente a *multiplicar com a representação em fração* segue-se a expressão já definida. Contudo quando o professor trabalha a *multiplicação na representação em numeral decimal*, deve estar alerta que está a seguir a definição de número racional já referida fundamentando alguns dos procedimentos adotados quando multiplica com a representação decimal. Se quando se opera com a representação fracionária, fazemo-lo multiplicando os numeradores e os denominadores, então o produto, de números racionais representados na forma decimal, é um racional que pode ser expresso em fração ou em numeral decimal e onde nesta última forma de representar, o número de casas decimais é resultante da ordem de grandeza envolvida no denominador da representação fracionária, por exemplo: $2,5 \times 0,25 = \frac{25}{10} \times \frac{25}{100} = \frac{25 \times 25}{10 \times 100} = \frac{625}{1000} = 0,625$. Ou seja, usando o algoritmo da multiplicação, envolvendo a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, operamos $2,5 \times 0,25 = \frac{25}{10} \times \frac{25}{100} = \frac{25}{10} \times \left(\frac{20}{100} + \frac{5}{100} \right) = \frac{25 \times 20}{10 \times 100} + \frac{25 \times 5}{10 \times 100} = \frac{500}{1000} + \frac{125}{1000} = \frac{625}{1000} = 0,625$.

Também na divisão o professor deve ter presente algumas situações distintas, quer porque opera com representações diferentes, quer porque quando opera especificamente com a representação fracionária pode deparar-se com números com determinadas características. Analisemos, então, o caso da *divisão com a representação fração* onde, tradicionalmente, operamos a divisão com racionais sobre a forma de fração aplicando o procedimento, decorrente da relação inversa com a multiplicação, de substituir o divisor pelo seu inverso e multiplicar os fatores resultantes (exceto no caso de 0), ou seja, se $\frac{a}{b} \div \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \times \frac{b'}{a'} = \frac{a \times b'}{b \times a'}$ (Barnett-Clarke et al., 2010).

No ensino do algoritmo da divisão, o professor pode ainda sublinhar que nem sempre é necessário e mais ágil utilizar o procedimento “inverte e multiplica” Pode-se, ainda, sublinhar outros procedimentos possíveis, dependendo dos números envolvidos: (i) quando o numerador e o denominador do dividendo são ambos divisíveis pelo numerador e denominador do divisor, temos $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$, ou seja, o quociente é a divisão dos numeradores (por exemplo, $\frac{10}{6} \div \frac{2}{3} = \frac{10 \div 2}{6 \div 3} = 5 \div 2 = \frac{5}{2}$); (ii) quando dividimos frações com o mesmo denominador temos $\frac{a}{b} \div \frac{c}{b} = \frac{a \div c}{b \div b} = \frac{a \div c}{1} = \frac{a}{c}$, recorrendo-se à relação anterior e à existência de elemento neutro; c) quando o dividendo é múltiplo do divisor, recorre-se à relação da *alínea a* e

então o quociente é um número inteiro, por exemplo $\frac{10}{4} \div \frac{5}{4} = 2$ (Ma, 1999; Son e Crespo, 2009).

Tradicionalmente, o professor opera os números racionais na representação decimal depois de operar com números naturais. No entanto deve estar atento ao facto que, quando está a operar com números racionais na representação decimal, está a operar com um número definido por $\frac{a}{10^n}$. Assim, no caso da *divisão com a representação em numeral decimal*, definindo-se o número racional como $\frac{a}{10^n}$, podemos considerar a expressão $\frac{a}{10^n} \div \frac{b}{10^{n'}} = \frac{a \div b}{10^{n \div 10^{n'}}} = \frac{a \div b}{10^{n-n'}}$. Assim, a expressão anterior vem explicitar o procedimento seguido, tradicionalmente em Portugal, de “acertar as casas decimais” depois de se resolver o algoritmo com o mesmo procedimento do algoritmo com números naturais, por exemplo: $2,5 \div 0,25 = \frac{25}{10^1} \div \frac{25}{10^2} = \frac{25 \div 25}{10^{1 \div 10^2}} = \frac{1}{10^{1-2}} = \frac{1}{10^{-1}} = 10$.

De outro modo, a partir de um exemplo similar de Barnett-Clarke et al. (2010) podemos generalizar outra forma de operar: $\frac{a}{10} \div \frac{b}{100} = \frac{\frac{a}{10}}{\frac{b}{100}} \times \frac{100}{100} = \frac{\frac{a}{10} \times 100}{\frac{b}{100} \times 100} = \frac{a \times 100}{10} \div \frac{b \times 100}{100} = a \times 10 \div b = \frac{a \times 10 \times 1}{b} = \frac{a \times 10}{b}$, ou seja, por exemplo: $2,5 \div 0,25 = \frac{2,5}{0,25} = \frac{2,5}{0,25} \times \frac{100}{100} = \frac{2,5 \times 100}{0,25 \times 100} = \frac{250}{25} = 10$.

Também quando o professor explora as operações multiplicação e divisão deve evidenciar as propriedades existentes, ou não, nestas operações, tal como o fez nas restantes operações. Assim, independentemente da representação de número racional não negativo, a operação de multiplicação respeita diversas propriedades fundamentais: propriedade associativa $[(a \times b) \times c = a \times (b \times c)]$; existência de elemento neutro $\left[\frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{a}{b}\right]$; existência de elemento absorvente $\left[\frac{a}{b} \times 0 = 0\right]$; propriedade comutativa $[a \cdot b = b \cdot a]$ e propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição $[a \times (b + c) = a \times b + a \times c]$, relacionando as operações adição e multiplicação (Godino, 2003; Pastor, Calleja & Trejo, 1969).

No trabalho com a multiplicação e divisão com números racionais, o professor tem de reconhecer algumas questões relativas aos significados da multiplicação e divisão com números inteiros (Barnett-Clarke et al., 2010; Godino, 2003). Assim, nos números inteiros, os *significados da multiplicação* são o sentido aditivo, o combinatório, o conceito de área (em inglês *área concepts*) e o produto cartesiano e os

significados da divisão são de medida, partilha, razão, operação inversa da multiplicação (Barnett-Clarke et al., 2010) e inversa de um produto cartesiano (Sinicrope, Mick & Kolb, 2002).

Na multiplicação, os significados aditivo e combinatório com números racionais, dificilmente têm significado (Prediger, 2011). Por exemplo, quando o multiplicador é um número inteiro, pode dar-se o significado à multiplicação de adição repetida (por exemplo $3 \times 0,5 = 0,5 + 0,5 + 0,5$, tal como no conjunto dos números inteiros, mas não com números racionais (Barnett-Clarke et al., 2010, Prediger, 2008, 2011). Neste sentido, o professor deve selecionar tarefas tendo em consideração contextos onde estejam envolvidos números inteiros e racionais de modo a trabalhar o significado de adição sucessiva. Relativamente aos outros significados o professor deve antecipar situações distintas: a) quando são racionais na representação fracionária, o significado de operador é significativo (por exemplo $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$) mas com a representação decimal, com unidades discretas nem sempre o é (o contexto de dinheiro que normalmente é muito significativo para os alunos mas não se adequa a estas situações, por exemplo, 0,25€ de 0,25€); b) quando se colocam situações de área o professor terá que antever os contextos utilizados pois nem todos são significativos (por exemplo, quando se colocam situações com unidades discretas) (Barnett-Clarke et al., 2010).

A operação de multiplicação com números racionais define-se por $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$, para $b \neq 0$ e $d \neq 0$. Estabelecendo a relação inversa, temos a operação de divisão, onde ao contrário dos números inteiros, não existe resto (Godino, 2003). Para trabalhar os algoritmos das operações com números racionais pode-se distinguir entre as representações decimal e fracionária. Note-se que na divisão com números racionais, o professor também tem que antever, quais as situações que têm significado, percebendo se as unidades envolvidas (discreta ou continua) têm sentido no contexto apresentado. Por exemplo num caso aparentemente de divisão como partilha $-\frac{1}{2}$ a repartir por $\frac{5}{4}$ de crianças – os números não têm qualquer significado (Barnett-Clarke et al., 2010).

Ma (1999), ao debruçar-se sobre o conhecimento à cerca da divisão de racionais sob a forma de fração, alerta para o facto de existir uma série de conceitos interrelacionados que dão significado à divisão com frações. Um conhecimento conceptual sobre a divisão com frações implica um conhecimento em rede relativo ao conceito de unidade de referência, os significados da multiplicação quer com números inteiros como com fracionários, o conceito de divisão como operação inversa da

multiplicação, os significados da divisão com números inteiros, o conceito de fração e os significados da operação adição. Existem dois significados muito relevantes no conjunto dos números racionais: a medida e a partilha equitativa (Jansen & Hohensee, 2016; Lo & Luo, 2012; Pinto, 2011; Sinicrope, Mick & Kolb, 2002). Na divisão como medida determinamos o número de grupos, sabendo a dimensão do grupo, que cabem numa quantidade dada (objeto, ou conjunto de objetos). Por exemplo, recorreremos ao significado de medida quando questionamos – O João tem 6 bolos que arrumou em caixas onde cabem dois bolos. Quantas caixas de bolos tem o João? – onde calculamos $6 \div 2 = 3$. Assim, o conceito de medida implica retirar a unidade definida, uma a uma, de modo a perceber quantas vezes foi retirada (Jansen & Hohensee, 2016; Lo & Luo, 2012; Pinto, 2011). Para além do significado de medida a divisão também pode ter o significado de partilha. O sentido de partilha surge quando o objetivo é encontrar o valor unitário necessário para distribuir igualmente, ou seja, o valor que cabe a cada um dos elementos do divisor. Assim, temos como exemplo a situação do João que quer distribuir igualmente os seus bolos por dois amigos. Sabendo que o João tem 12 bolos, com quantos bolos ficará cada amigo? - onde calculamos $12 \div 2 = 6$ (Jansen & Hohensee, 2016; Lo & Luo, 2012; Pinto, 2011). Note-se que estas ideias também são analisadas do ponto de vista de Vergnaud a respeito do isomorfismo de medidas (Pinto, 2011).

Lo e Luo (2012) sublinham que na conceptualização da divisão com racionais temos que considerar que a divisão como partilha usa o conceito de partição (em inglês, *partitioning*) mas que também envolve a reconstrução da unidade (em inglês, *iterating*), quando o divisor é um número racional que não representa um número inteiro. Também podem ser usados os dois conceitos combinados. Os mesmo autores argumentam que faz parte do conceito de divisão uma compreensão profunda do conceito de *unitizing*, clarificado por Leslie P. Steffe, como sendo uma operação mental envolvendo um objeto ou um conjunto de objetos como uma unidade de referência (em inglês, *unit or whole*), por exemplo quando queremos saber quantos copos de farinha de 1,5 kg precisamos para encher o saco de 6 kg de farinha, tendo que conceptualizar o 1,5 kg como unidade para medir 6 kg (Lo & Luo, 2012; Steffe & Olive, 2010). Numa divisão como partilha podemos ter, por exemplo, a situação de como encontrar a quantidade de doces necessários para uma turma completa se $1\frac{1}{3}$ deles for suficiente para $\frac{2}{3}$ da turma. Para tal, temos que partir da ideia de que $\frac{2}{3}$ da turma é o dobro de $\frac{1}{3}$. Em seguida

calculamos metade de $\left(\frac{1}{3} \text{ ou } \frac{4}{3}\right)$ que é $\frac{2}{3}$. Assim, são suficientes $\frac{2}{3}$ dos doces para a $\frac{1}{3}$ da turma completa. Calculando $\frac{2}{3} \times 3 = 2$ encontramos a resposta: São necessários 2 doces para a turma toda (Lo & Luo, 2012).

Finalmente, importa estar atento à questão da generalização das ideias subjacente às operações com números inteiros onde o produto é maior que o multiplicando e multiplicador e no caso da divisão o quociente é uma quantidade inferior às quantidades envolvidas na divisão (Prediger, 2008). Assim, o modo como os alunos desenvolvem o seu raciocínio multiplicativo é consequência das suas experiências com o raciocínio aditivo. Importa, portanto, ter atenção às continuidades entre os dois raciocínios, já que se podem resolver alguns problemas de multiplicação recorrendo à adição sucessiva, bem como de divisão pelo recurso à subtração sucessiva. Porém, nem sempre existe uma continuidade entre os dois tipos de raciocínio levando a ideias erróneas e erros nas tarefas de raciocínio multiplicativo. Por isso, é importante tarefas que promovam as diferenças entre os dois tipos de raciocínio (Pinto, 2011).

2.2.4. Conhecimento de futuros professores sobre as operações com números racionais.

A tendência da investigação sobre o conhecimento de futuros professores sobre as operações com números racionais tem sido de olhar principalmente para as operações da multiplicação e divisão. No entanto esse foco tem-se esbatido e, entretanto, já têm surgido estudos sobre as restantes operações e sobre o conceito de fração, como já vimos anteriormente (Olanoff, Lo & Tobias, 2014). De modo geral o conhecimento dos futuros professores sobre os procedimentos envolvidos nas operações com números racionais é satisfatório, mas o mesmo não acontece quando é analisada a flexibilidade no uso dos procedimentos, ou quando têm que explicar o significado desses procedimentos e porque os realizam (Olanoff, Lo & Tobias, 2014; Sweetland & Fogarty, 2008). Para além, de não conseguirem dar significado aos procedimentos, também não reconhecem algoritmos alternativos como é o caso do cálculo da adição e subtração de frações com numeradores iguais: $\frac{a}{b} \pm \frac{a}{c} = \frac{a}{\frac{b \times c}{b \pm c}}$ (Danielson, 2009). Também é habitual generalizarem ideias do conjuntos dos números inteiros quando trabalham com o números racionais levando a conceções erróneas, empobrecendo as ideias em torno do conjuntos dos números racionais, como por exemplo, a ideia de que da

multiplicação de dois números resulta num produto maior que os outros dois números envolvidos (dividendo e divisor) ou que não existe diferença entre a razão e uma fração uma vez que se representam com a mesma notação (Mewborn, 2001).

Um outro aspeto que tem sido relevante é o facto dos futuros professores terem dificuldades quando querem adicionar frações com recurso à reta numérica (Olanoff, Lo & Tobias, 2014; Wyberg, Whitney, Cramer, Monson & Leavitt, 2012). Neste sentido, Izsák, Tillema e Tunç-Pekkan (2008), no seu estudo, debruçaram-se nas questões do ensino e aprendizagem da adição de frações recorrendo à reta numérica e concluíram que, por vezes, o que o professor entende como claro nem sempre o é para os alunos. Neste estudo ficou clara a dificuldade que alunos e futuros professores tiveram em compreender o que representam as marcas da partição e a distância entre estas na reta numérica, de modo a representar números racionais, decompô-los para posteriormente realizar adições. Esta dificuldade com as diferentes formas de representar a quantidade dos números racionais não se relaciona apenas com a reta numérica mas também com o estabelecimento de relações entre diferentes representações dos números racionais (Jansen & Hohensee, 2016).

No que respeita à multiplicação de racionais sob a forma de frações, mais uma vez não existem dificuldades no uso do procedimento mas o mesmo não acontece quando os professores têm que recorrer a outras formas de representação da multiplicação, como é o caso da representação retangular, para explicarem os conceitos envolvidos (Sweetland & Fogarty, 2008).

Há muito que a investigação se debruça sobre o conhecimento sobre a operação divisão necessário para ensinar a dividir racionais sob a forma de fração. Ball (1990) analisou a compreensão do conhecimento matemático que candidatos a cursos de formação de professores traziam para a formação inicial. Para tal questionou, em entrevistas, como é que os candidatos a professores se posicionam relativamente ao seu conhecimento matemáticos e em seguida realizou um questionário a 252 candidatos com várias questões sobre a divisão com números racionais. As conclusões do estudo evidenciaram dificuldades dos futuros professores com os diferentes significados de divisão com frações. Foi evidente que o conhecimento era em torno de procedimentos e regras e que cerca de 30% dos futuros professores tiveram dificuldades em relacionar uma tarefa com um contexto não matemático e a respetiva representação simbólica da divisão envolvida. Apesar de todos os candidatos a professores dos primeiros anos e secundário terem conseguido resolver

as expressões numéricas de divisão com números racionais, recorrendo ao procedimento inverte e multiplica, apenas alguns candidatos a professores do secundário conseguiram representar as operações envolvidas recorrendo à reta numérica. Também, revelaram dificuldades com tarefas com contexto não matemático ou outro tipo de representação como a representação circular ou retangular. O significado de divisão atribuído pelos futuros professores foi predominantemente o de partilha. A autora sublinhou a importância de na formação inicial de professores serem colocadas tarefas que permitam representar de diversas formas a divisão com frações e a discussão dos diferentes significados da divisão (Ball, 1990). Ball (1990), e mais tarde Lee & Sztajn (2008), mostraram que apesar dos futuros professores conseguirem calcular algoritmicamente a divisão têm dificuldades em explicar conceptualmente os procedimentos. Uma outra dificuldade dos futuros professores está na identificação de algoritmos não tradicionais ou informais (Son & Crespo, 2009). Existe, ainda, uma extrema dificuldade por parte dos futuros professores em elaborar problemas envolvendo ideias em torno da divisão recorrendo ao significado de partilha onde um inteiro é dividido por uma fração confundindo com situações de multiplicação (Ma, 1999).

Também enquadrável no conhecimento para ensinar a divisão de números racionais e na importância dos professores explorarem múltiplas estratégias e representações é o estudo de Lo e Luo (2012). No estudo de Lo e Luo (2012) participaram 45 futuros professores de Taiwan que ainda não se graduaram. Foram realizadas entrevistas e questionários, procurando-se identificar a natureza do conhecimento, analisando a robustez deste sobre divisão de racionais (representação fracionária), que tipo de estratégias usam e se estas refletiam flexibilidade e o estabelecimento de conexões. Para além destes aspetos foram analisados aspetos como que contextos do quotidiano e que tipo de representações os futuros professores usam para representar e contextualizar problemas de palavras. Os resultados deste estudo de Lo e Luo (2012) indicam que os futuros professores de Taiwan: 1) eram proficientes na resolução de problemas com a divisão de frações, onde muitos deles desenvolvem múltiplas estratégias para resolverem problemas de divisão de frações e demonstraram flexibilidades em utilizá-las. As três estratégias mais utilizadas para resolverem problemas foram: abordagem através da fração unitária, abordagem parte-todo e a abordagem razão. 2) demonstraram compreensão do conceito de unidade e a relação parte-todo, sendo capazes de utilizar diferentes estratégias demonstrando a flexibilidade

do seu raciocínio. 3) tinham capacidade de se movimentarem entre o raciocínio aritmético e algébrico. Contudo foram encontradas dificuldades, tais como: 1) Os futuros professores preferiam usar a divisão enquanto medida, na criação de problemas e preferiam a representação linear em relação a outras representações. 2) Os futuros professores não usaram o conceito de partilha na divisão para resolverem problemas quando o divisor é uma fração própria. 3) Os futuros professores tiveram dificuldades em usar diagramas pictóricos na resolução de problemas. Note-se que Taiwan é um dos países com melhores resultados nos estudos internacionais, pelo que o conhecimento que os seus professores detêm pode ser visto como o desejável para todos os professores. Deste modo, este estudo ilumina quais os conhecimentos de divisão de racionais sob a forma de fração que são necessários abordar nos cursos de formação inicial.

Jansen e Hohensee (2016) realizaram um estudo com o de analisar as ideias que futuros professores tinham sobre a divisão com frações com o significado de partilha. Os autores partiram da ideia de que este conceito está relacionado com o estabelecimento de relações entre frações, a ideia de que a divisão como partilha implica identificar a unidade de referência do quociente e com a flexibilidade de recorrer à reconstrução da unidade e identificação da unidade e sua relação na divisão. No estudo os autores analisaram as respostas a tarefas de 17 futuros professores onde os ficando evidente a dificuldade do significado da divisão como partilha. Para além dessa constatação descobriram que os futuros professores que tinham como foco os procedimentos de cálculo tendiam a elaborar problemas com as operações numéricas baseados nos procedimentos a mobilizar focam-se nos números envolvidos. No desenho de problemas com contexto não matemático incluíam pistas ou palavras que permitam identificar ou relacionar as operações de modo descontextualizado e sem atribuírem significado, assumindo que as operações só tem um significado. Os autores relacionaram estes resultados com as experiências que os futuros professores tiveram como alunos tendo aprendido através de abordagens tradicionais descontextualizadas e baseadas em exercícios com algoritmos. Também ficou evidente que para os futuros professores eram desafiantes tarefas onde tinham que representar pictoricamente situações envolvendo diferenças entre grandezas ou entre as diferentes operações (adição versos subtração ou divisão versos multiplicação) (Jassen & Hohensee, 2016).

Olanoff, Lo e Tobias (2014), depois de uma extensa revisão sobre estudos que se debruçavam no conhecimento matemático de futuros professores concluíram que existe

falta de estudos que analisem experiências de ensino que desenvolvam, em futuros professores, o conhecimento sobre números racionais. Os autores apontam questões a necessitar de atenção como é o caso do papel dos materiais manipuláveis no desenvolvimento do conhecimento matemático, o papel da linguagem com frações, as dificuldades dos futuros professores com a representação na reta numérica e na representação retangular. Também importa discutir os diferentes algoritmos possíveis no cálculo das diferentes operações com racionais na forma de fração (Gregg & Gregg, 2007). De outro modo, Ponte e Chapman (2008) também discutem a natureza das tarefas propostas e o tipo de dinâmicas desenvolvidas na formação inicial de professores. Ponte e Chapman (2008) identificam várias abordagens seguidas para desenvolver o conhecimento de matemática nos futuros professores sendo coerentes com as abordagens seguidas com os alunos. Assim, as abordagens evidenciam características comuns tais como: a) a promoção de um processo aberto e orientado, descobrindo a Matemática como um objeto plural, refletindo sobre a Matemática escolar de modo a promover o desenvolvimento de estilos e processos de ensino orientados; b) os tópicos e as abordagens seguidas são influenciados por determinadas perspetivas curriculares e recomendações para reformar a educação matemática. Ou seja, a proposta não é ensinar mais Matemática mas sim que se permita compreender e reconstruir o que os futuros professores sabem com profundidade e significado (Ponte & Chapman, 2008). Deste modo, identificaram-se cinco abordagens para desenvolver o conhecimento de matemática para ensinar: 1) Utilização de tarefas de investigação; 2) Debate sobre diferentes explicações matemáticas para um conceito matemático; 3) Autorreflexão e métodos de *inquiry* sobre processos e conceitos matemáticos na melhoria da resolução de problemas; 4) Uso de tecnologia para explorar e testar conceitos matemáticos; 5) Utilização de mapas de conceito organizando e reforçando o conhecimento construído e avaliando os conhecimentos que os participantes já têm (Ponte & Chapman, 2008).

Em síntese, nesta seção o foco esteve no conhecimento matemático sobre os números racionais. O conhecimento matemático é o conhecimento que o professor tem sobre o que ensina e como se organiza o conteúdo. O conhecimento matemático pode assumir essencialmente duas vertentes: o conhecimento processual e o conhecimento conceptual. O conhecimento processual pode existir *per si* mas o conhecimento conceptual implica ter conhecimento processual.

O conhecimento processual é constituído pelo conhecimento de regras e procedimentos, como por exemplo o domínio dos procedimentos de conversão entre racionais e dos algoritmos das diferentes operações com diferentes representações. Importa sublinhar que este conhecimento pode ser compartimentado e não inclui a compreensão das razões pelas quais se pode recorrer às regras e procedimentos de cálculo. O conhecimento conceptual é um conhecimento em rede dos conceitos fundamentais, como por exemplo: saber diferentes representações dos números e seus significados; saber relacionar representações simbólicas e pictóricas; apoiar a matematização das ideias matemáticas dos alunos; reconhecer como válidos algoritmos não tradicionais; e explicar matematicamente os conceitos e significados das operações ainda que sejam eficientes na sua resolução. A relação entre conhecimento Matemático e prática não é linear. Um professor que tem um conhecimento limitado aos aspetos processuais não consegue promover uma aprendizagem conceptual. Assim, a natureza do seu conhecimento traz implicações no modo como o professor estrutura, gere e apoia os alunos relativamente às aprendizagens e aos erros que estes cometem. O modo como entende a estrutura em rede dos tópicos a ensinar implica, também, no modo como apoia e desafia os seus alunos a encontrar conexões entre conceitos, construindo o conhecimento compreensivamente. Note-se que o professor pode ter um conhecimento conceptual e ainda assim não promover conhecimento conceptual.

No que respeita aos futuros professores existem vários estudos sobre o seu conhecimento sobre dois aspetos estruturantes: O sentido de número racional, no que concerne às suas representações e significados, e o conhecimento sobre as operações e os seus significados.

O sentido de número racional implica reconhecer que existem várias representações (fração, numeral decimal e percentagem) ainda que todos resultem do quociente entre dois números inteiros a e b , sendo b diferente de zero ($a \div b$ e $b \neq 0$), estabelecendo-se uma classe de equivalência. No caso específico dos numerais decimais podem representar-se por uma fração na forma $\frac{a}{10^n}$ em que a é um número inteiro e n é um número natural (esta representação sob a forma de uma fração deste tipo, designa-se por fração decimal). Também importa sublinhar que podem representar unidades discretas ou contínuas e sob a forma de fração podem ter vários significados – parte-todo, quociente, medida, razão e operador. Os números racionais podem, ainda, ser representados com esquemas ou outras representações incluindo materiais manipuláveis

ou seja com representações simbólicas, pictóricas e ativas. Os estudos sobre o conhecimento matemático dos futuros professores sobre os números racionais tem demonstrado que estes podem ser proficientes na resolução de tarefas recorrendo aos procedimentos de cálculo mas que têm fragilidades no conhecimento necessário para flexivelmente lidarem com este conjunto numérico. Relativamente ao sentido de número racional, importa ter atenção, no trabalho com futuros professores, aos seguintes aspetos: (i) a possível generalização errónea de ideias relativas ao conjunto dos números inteiros; (ii) que a representação fracionária é constituída por dois números, menosprezando a relação entre o numerador e o denominador e que representa uma grandeza; (iii) a natureza contínua e discreta das grandezas; (iv) as relações existentes entre as diferentes representações dos números racionais; (v) a possibilidade de poder representar os números racionais com diferentes modelos (circular, retangular, barra numérica e reta numérica); (vi) a importância da unidade de referência; e (vii) o facto de os números racionais sob a forma de fração poderem ter vários significados – parte-todo, quociente, medida, razão e operador; (viii) a resolução de problemas com contextos não matemáticos onde devem evidenciar sentido crítico relativamente aos resultados, em função do contexto da tarefa. Assim, importa ir além da colmatação de défices e apostar no apoio na organização o seu conhecimento.

No que respeita ao sentido de operação e os significados das operações com números racionais podemos analisar conjuntamente as operações adição e subtração e as operações multiplicação e divisão. Relativamente à operação adição, que se representa algebricamente com $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, esta pode significar *juntar/combinar* e *acrescentar* e a subtração, com um algoritmo similar, significa *retirar*, *comparar* e *completar*, onde no conjunto dos números racionais muda a natureza dos objetos que intervêm. Quando adicionamos e subtraímos números racionais, na forma de fração, com o mesmo denominador facilmente é perceptível que se mantém o significado que já existia para os números inteiros, com denominadores diferentes este significado não é tão óbvio para os alunos. Assim, recorrendo à aritmética utilizada para os números inteiros, consideram apenas os numeradores (quando os denominadores são iguais) ou os denominadores (quando os numeradores são iguais) ou ainda, somando numerador com numerador e denominador com denominador.

Na multiplicação e divisão com números racionais também importa estar atento aos significados das operações. Na multiplicação, com o algoritmo definido por

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$, para $b \neq 0$ e $d \neq 0$, podemos ter o *sentido aditivo, combinatório, de área e produto cartesiano*. Na divisão, definida pelo algoritmo $\frac{a}{b} \div \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \times \frac{b'}{a'} = \frac{a \times b'}{b \times a'}$, temos os *significados de medida, partilha, razão, operação inversa da multiplicação e inversa de um produto cartesiano*. Importa sublinhar que na multiplicação com números racionais é difícil encontrar contextos onde se atribuam os significados aditivo e combinatório. Neste sentido também importa atender que com frações, o significado de operador é significativo, mas com a representação decimal, com unidades discretas nem sempre o é. Por fim, quando se colocam situações de área é importante antever os contextos utilizados pois nem todos são significativos com unidades discretas. Na divisão com números racionais também existem questões a considerar: (i), o professor tem que antever, quais as situações que têm significado, percebendo se as unidades envolvidas (discreta ou continua) têm sentido no contexto apresentado; (ii) a relação com o conceito de unidade de referência, o conceito de fração, os significados da operação de adição e da operação de multiplicação; (iii) o significado de partilha, onde se procura encontrar o valor unitário necessário para distribuir igualmente, ou seja, o valor que cabe a cada um dos elementos do divisor; (iv) o significado de medida, onde determinamos o número de grupos, sabendo a dimensão do grupo, que cabem numa quantidade dada; (v) uma compreensão profunda do conceito de *unitizing*; e (vi) a generalização das ideias subjacente às operações com números inteiros. Também nos estudos sobre o conhecimento dos futuros professores sobre as operações com números racionais têm demonstrado que estes mobilizam os procedimentos de cálculo, mas nem sempre têm um conhecimento de natureza conceptual. Relativamente às operações com números racionais, importa ter atenção às seguintes questões: (i) flexibilidade no uso dos procedimentos; (ii) explicar o significado dos procedimentos e porque os realizam; (iii) reconhecer algoritmos alternativos; (iv) generalizar ideias do conjuntos dos números inteiros; (v) adicionar frações com recurso à reta numérica uma vez que importa compreender o que representam as marcas da partição e a distância entre estas na reta numérica; (vi) na multiplicação e divisão o recurso à representação retangular e/ou circular, para explicar os conceitos envolvidos; (vii) na divisão, relacionar uma tarefa com contexto não matemático e a respetiva representação simbólica da divisão envolvida; (viii) representar de diversas formas a divisão com frações e a discussão dos diferentes significados da divisão, onde o significado de medida é o mais identificado correta e incorretamente ou assumindo que as operações só tem um

significado; (ix) na divisão, reconhecer algoritmos não tradicionais ou informais; (x) desenharem problemas envolvendo ideias da divisão recorrendo ao significado de partilha, onde um inteiro é dividido por uma fração confundindo com situações de multiplicação; e (xi) no desenho de problemas com contexto não matemático desmistificar a importância das pistas ou palavras que permitam identificar ou relacionar as operações. No trabalho com os futuros professores importa recorrer às a uma abordagem coerente com a abordagem seguida com os alunos e que permita compreender e reconstruir com profundidade e significado o que os futuros professores já sabem.

2.3. Conhecimento didático para ensinar números racionais

O processo de ensino-aprendizagem da Matemática é complexo e multidimensional. Assim, o olhar sobre o conhecimento para ensinar, no que respeita à dimensão didática, assume a mesma complexidade. Quando o professor ensina, é desafiado a tomar decisões sobre o tipo de prática a constituir onde se incluem decisões sobre as tarefas a propor, as aprendizagens a desenvolver nos seus alunos e o ambiente de aprendizagem, estruturado pelo tipo de comunicação e interações a promover (Potari, 2012). O *pedagogical content knowledge* ou conhecimento didático, dizendo respeito ao modo como ensinar, é decisivo para que o professor possa exercer cabalmente o seu papel (Shulman, 1986). Este, num primeiro momento, diz respeito a ideias gerais sobre a Matemática, o ensino da Matemática, o papel do professor e do aluno, as potencialidades de determinadas tarefas no ensino e aprendizagem da Matemática, sobre aspetos relativos à aprendizagem dos alunos e finalmente sobre o processo de ensino-aprendizagem (Shulman, 1987; Ponte, 2012). Na prática letiva intervêm duas dimensões essenciais no conhecimento didático: o conhecimento sobre as tarefas e o conhecimento sobre os alunos (Ponte & Chapman, 2015). Relacionando estas duas dimensões podemos identificar aspetos relativos à comunicação e às ações dos professores desenvolvidas na prática letiva. Temos ainda, transversal e integrado nestas dimensões o conhecimento sobre o currículo e avaliação. Nesta seção debruço-me sobre estas dimensões.

2.3.1. Visão sobre a Matemática e sobre o seu Ensino e Aprendizagem

As decisões a tomar na prática pedagógica dependem da visão do professor e futuro professor sobre a Matemática que ensina e como a ensina (Guimarães, 2010; Walshaw, 2012). O professor ou futuro professor pode ter uma visão da Matemática como um corpo estruturado e imutável do conhecimento (visão platônica), como um conjunto de procedimentos, fatos e habilidades (visão instrumentalista), ou como um campo da expansão da invenção humana, que é dinâmica e conduzida por problemas (visão *problem-solving*). Esta visão pode influenciar a forma de olhar a construção do conhecimento matemático e, por isso, a forma como se faz e se aprende Matemática (Carrillo & Contreras-González, 1995; Grootenboer, 2008). Os futuros professores também têm uma visão sobre como ensinar para promover aprendizagem, ou seja, têm diferentes representações sobre o que é um bom ensino. Esta visão implica um repertório de representações de como se pode iniciar e gerir uma discussão matemática na sala de aula, como os alunos lidam com determinado tipo de tarefas e que respostas são esperadas. Estas ideias dependem da visão que os futuros professores têm da própria Matemática. No entanto, ainda que a visão sobre o ensino e aprendizagem possa guiar as decisões dos futuros professores, concretizar uma determinada visão nem sempre é simples (Ghousseini & Herbst, 2014).

A visão dos professores quer sobre a Matemática, quer sobre como se ensina e aprende Matemática, é constituída por ideias gerais, a que alguns autores denominam de conceções, que podem ser usadas em diversas situações recorrentes ou novas. As decisões a tomar são ainda mais complexas para os futuros professores que ainda estão num momento inicial do seu desenvolvimento profissional podendo ou não ter usufruído de processos formativos que lhes deem ferramentas e suporte para tomar decisões. O ato de ensinar pressupõe razões, propósitos e objetivos, que sustentam as opções concretizadas na prática de ensino. Nesse sentido as decisões dos professores, e também dos futuros professores, dependem das interpretações que fazem do vivido, ou seja, “aquilo que o professor pensa influencia de maneira significativa aquilo que o professor faz” (Guimarães, 2010, p. 82). Ou seja, dependendo das experiências vividas como alunos, como formandos no ensino superior e das experiências de ensino já vividas, os futuros professores podem ter visões diferentes sobre a Matemática e o seu ensino e a sua aprendizagem (Grootenboer, 2008; Potari, 2012; Wilkins, 2008). No entanto, os futuros professores podem ter como propósito o desenvolvimento de

aprendizagens profundas e de natureza conceptual e ainda assim não conseguirem levar a cabo os seus intentos. O repertório de conhecimento didático que detêm tem implicações determinantes na concretização da sua visão. O conhecimento didático dos futuros professores tem implicações nas conexões a estabelecer entre tópicos matemáticos e na interação que estabelecem com os seus alunos, com outros professores e ainda na reflexão sobre a ação que desenvolvem. O conhecimento também implica nas decisões que têm que tomar sobre as tarefas e recursos a recorrer e explorar e sobre como comunicar e agir de modo promover e gerir as aprendizagens dos alunos (Walshaw, 2012).

Um estudo que exemplifica a preocupação com estas questões e que procura relacionar a visão (o autor denomina de concepções), o conhecimento e a prática desenvolvida é o de Wilkins (2008), que modelou estatisticamente as práticas de ensino em função do conhecimento sobre a Matemática, atitudes sobre a Matemática e concepções sobre um ensino eficiente. No seu estudo a prática letiva é vista como um possível mediador entre as características do professor e a aprendizagem dos alunos. Ou seja, em vez de se assumir que as características do professor influenciam diretamente a aprendizagens dos alunos, considera que serão as características do professor que influenciam como o professor ensina e, portanto, influenciam a aprendizagem dos alunos. Wilkins (2008) considerou que o conhecimento do professor é constituído por: conhecimento de Matemática e de outros conteúdos; pedagogia e currículo; gestão de sala de aula; contexto do ensino; educação e as concepções. Relativamente às ideias que os futuros professores têm, identificou ideias sobre: (i) sobre a natureza da Matemática; (ii) sobre as abordagens de ensino; (iii) sobre princípios de educação. Neste quadro teórico destaca ainda as atitudes dividindo-as em atitudes sobre a Matemática e sobre o seu ensino. Assim, considerou que o conhecimento, as concepções e as atitudes influenciam a prática letiva, pois as concepções derivam de experiências particulares ou episódios do passado, por exemplo experiências escolares. Wilkins (2008) contou com 481 professores com formação em linha com os princípios para o ensino-aprendizagem do NCTM, recolhendo os dados através de um questionário de escolha múltipla, tendo encontrado resultados que permitem estabelecer relações entre as concepções e atitudes, o conhecimento e a prática. Os resultados confirmam outros estudos em que os professores de níveis escolares superiores tendem a ter mais conhecimento de Matemática e atitudes mais positivas em relação à Matemática. Em média os professores afirmavam usar um ensino exploratório “por vezes” nas suas aulas, sendo

que os professores nos níveis mais elevados são os que usam menos. Os professores que acreditam que o ensino exploratório é eficiente tendem a usar mais este tipo de ensino. Existe consistência entre as práticas e as concepções, ou seja: os professores com menor conhecimento tendem a não usar o ensino exploratório e as concepções apenas medeiam parcialmente os efeitos dos conhecimentos e atitudes relativamente à prática. As características do passado dos professores influenciam diretamente a prática sendo mediados pelo conhecimento e atitudes. As atitudes influenciam positivamente as concepções, que por sua vez têm total efeito nas atitudes sobre o tipo de ensino. Não só as concepções mostraram influenciar diretamente a prática mas também têm um papel de mediador sobre o conhecimento e atitudes. Estes resultados convergem com estudos anteriores que indicam que compreender a visão dos futuros professores é um passo importante para compreender as suas práticas letivas (Wilkins, 2008).

Assim, a visão do futuro professor sobre Matemática que ensina e como a ensina influencia as decisões que toma na prática pedagógica. A visão sobre Matemática pode ser como de natureza platónica, instrumental ou como sendo de *problem-solving*. Esta visão influencia, por sua vez, a forma de olhar a construção do conhecimento matemático, ou seja, como se faz e se aprende matemática. Assim, o futuro professor constitui um repertório de representações que tem sobre o processo de ensino-aprendizagem que pode com mais ou menos sucesso levar a cabo. Por sua vez as experiências que vão tendo quer como alunos, antes e durante a formação inicial, quer na prática de ensino supervisionada podem permitir a (re)construção de visão sobre como ensinar e como os alunos aprendem. Ou seja, o conhecimento didático dos futuros professores tem implicações nas conexões a estabelecer entre tópicos matemáticos, nas decisões que têm que tomar sobre as tarefas e na interação que estabelecem com os seus alunos, com outros professores e ainda na reflexão sobre a ação que desenvolvem. Transversalmente tem implicações no modo como perspetivam os princípios de educação e as abordagens de ensino.

2.3.2. Conhecimento sobre as tarefas

No que diz respeito às tarefas, os futuros professores devem ser capazes de selecionar, desenhar e sequenciar tarefas, estabelecendo um percurso de aprendizagem, reconhecendo que determinadas opções influenciam as oportunidades de aprendizagem. (Ball et al., 2008; Chapman, 2013; Ferreira & Ponte, 2014; Scherrer & Stein, 2012; Serrazina, 2012). Thanheiser, Olanoff, Hillen, Feldman, Tobias e Welder (2015), no que

respeita aos futuros professores, sublinham a importância de estes analisarem ou desenharem tarefas de natureza diferente de modo a desenvolverem o seu conhecimento sobre *task redesign*. Este aspeto é importante uma vez que uma tarefa que originalmente foi desenhada, pelos seus autores, como tendo um determinado nível de complexidade pode sofrer alterações no nível de complexidade quando interpretada pelo professor ou quando explorada com os alunos. Também o que cada aluno aprende com uma determinada tarefa depende da sua experiência matemática (Stein et al, 1998). Também Crespo e Sinclair (2008) e Lee (2012) salientam a importância dos futuros professores saberem desenhar tarefas. Crespo e Sinclair (2008) sublinhando a capacidade do *problema posing* e Lee (2012) de selecionarem e desenharem tarefas com contextos não matemáticos e refletirem sobre as suas potencialidades.

No que respeita à natureza das tarefas os professores devem considerar o seu nível de desafio e abertura e ainda a duração do trabalho em torno da tarefa. O tipo de contexto envolvido, matemático ou não matemático, também tem um papel importante (Chapman, 2012, 2013; Guberman & Leikin, 2013); Ponte 2005). Tarefas com um contexto não matemático de resolução de problemas podem ter a mais-valia de proporcionar a conexão de vários tópicos do currículo de matemática. Howe, Nunes e Bryant (2010) defendem que os racionais devem ser trabalhados com problemas onde existam contextos de partilha equitativa e onde os alunos, em simultâneo, possam fazer aprendizagens significativas sobre os números racionais e – onde está implicado o significado de razão – simultaneamente desenvolvendo o raciocínio proporcional. Num dos seus estudos foi desenhada uma unidade de ensino onde são propostos problemas com quantidades intensivas (densidade, velocidade e temperatura) proporcionando contextos que suportam os números racionais e o pensamento proporcional, sendo, portanto, e tendo em conta os resultados do estudo realizado, contextos ricos para aprendizagem destes dois aspetos do currículo do ensino básico. Mesmo para os alunos que normalmente resolvem problemas de diversas formas é importante a existência contextos concretos pois estes ajudam-nos a dar sentido às soluções encontradas, podendo concluir e estabilizar conceitos que mais tarde podem mobilizar, tal como também acontece na experiência proporcionada por Stephens, Bottge & Ruenda na construção de rampas de skates. Neste sentido é importante que estes discutam e justifiquem as estratégias utilizadas fazendo, desta forma, a matemática necessária, desenvolvendo as suas capacidades colaborativas, beneficiando tanto os alunos que conseguem resolver os problemas, como também os alunos que sozinhos não o

conseguiam fazer. Para além destes aspetos, a resolução de problemas concretos pode apoiar a compreensão das regras algorítmicas e desenvolver a capacidade de estimação tão importante no desenvolvimento do sentido de número racional (Newton, 2010).

Assim, partindo do pressuposto que as crianças entram na escola com um conhecimento informal da Matemática, que advém da sua experiência (Schifter, 1997), será importante partir de contextos reais para explorar conceitos matemáticos motivando os alunos, mesmo os que têm mais dificuldades, envolvendo-os e motivando para problemas de níveis de complexidade mais elevada (Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen, & Keijzer, 2008; Fosnot & Dolk, 2001; Stephens, Bottge & Rueda, 2009). Também Boavida e Marques (2010) propõem o uso e exploração de situações do quotidiano como medir, formar, estruturar, comparar e ordenar comprimentos, pesos, capacidades e quantias de dinheiro, onde surgem os números racionais (explicitando o caso concreto dos decimais). Estas autoras apresentam um esquema de trabalho com os racionais, da autoria de Jean-Marie Kraemer, onde, partindo de situações do quotidiano, se dá sentido aos conceitos a trabalhar discutindo, interpretando e organizando os conhecimentos e procedimentos, para depois – através da exploração de composições e decomposições; da exploração de relações com a máquina de calcular e utilizando a linha numérica para representar determinadas situações – se constituir um sistema de referências e relações numéricas que posteriormente apoiam os raciocínios e cálculos para adicionar e subtrair através de cálculo mental e cálculo algorítmico.

Lee (2012) procurou conhecer as ideias que 71 futuros professores do ensino básico (8.º ano), no final da sua formação, tinham sobre problemas com histórias do dia-a-dia. Grande maioria considerava que este tipo de tarefas era importante no trabalho com os alunos, mas importava perceber as razões para terem essa atitude positiva. Depois de cada um ter recolhido, a partir de diferentes fontes, e desenhado problemas, os futuros professores teriam justificar as suas opções. As justificações dos futuros professores para selecionarem ou desenharem determinados problemas com histórias relacionadas com o quotidiano foram agrupadas em grandes categorias, a saber: 88,7% (N=63) consideraram importante que os problemas tivessem contextos significativos para os alunos; 36,6 % (N = 26) consideraram que este tipo de tarefas tinham potencial para motivar os alunos; para 18,3% (N = 13) dos futuros professores importava a estrutura e que a da informação dada aos alunos fosse apenas parcialmente pertinente; 14% (N = 10) dos professores consideraram que estas tarefas deveriam implicar

trabalho prático; 9,8% (N = 7) estavam preocupados com a equidade das tarefas. Existiram ainda aspetos pontuais a considerar, como: Instrução clara e de fácil compreensão; adequação à idade e/ou ano de escolaridade partindo dos documentos em vigor; adequação do nível de desafio; elevado potencial de envolvimento e desenvolvimento do pensamento crítico; e implicar múltiplas representações como desenhos e bandas desenhadas.

Os professores devem também formular questões matemáticas aproveitando e explorando as estratégias dos alunos levando-os à construção de ideias matemáticas (Chapman, 2013; Scherrer & Stein, 2012; Serrazina, 2012). Por exemplo, os *word problems* e os exercícios de cálculo podem apresentar-se como contexto de aprendizagens das operações. Tradicionalmente as lições sobre cálculo não são vistas como oportunidades para desenvolver uma compreensão profunda sobre o valor posicional e as propriedades das operações, mas estas podem proporcionar contextos ricos para desenvolver o sentido de operação. Schinfter (1997) defende que implícito ao método tradicional de cálculo dos algoritmos está a estrutura do sistema de números de base 10 e a aplicação das propriedades comutativa, associativa e distributiva. As operações fazendo sentido para as crianças, podem proporcionar uma variedade de procedimentos para calcular, constituindo um conjunto de factos que apoiam cálculos posteriores com números mais complexos. Assim, ao propor aos alunos problemas e exercícios proporcionando contextos para a construção da compreensão das operações, estes descobrem os factos sobre as quantidades envolvidas. O trabalho com diferentes problemas e a partilha de diferentes estratégias vai aumentando as experiências dos alunos, aprendendo como podem modelar os problemas com diferentes operações. Ou seja, proporcionando contextos para uma construção significativa das operações e das estruturas dos sistemas numéricos, torna-os fluentes numa variedade de estratégias de cálculo que têm implícitas as propriedades das operações. (Schinfter, 1997).

O cálculo mental e a estimação são formas de cálculo a propor aos alunos porque têm um papel importante no desenvolvimento do sentido de número e de operação (ME, 2007). Apesar de existirem poucos estudos no que se refere ao desenvolvimento do cálculo mental, como contexto de aprendizagem e compreensão dos números racionais, podemos analisar alguns resultados relevantes, que demonstram o papel que o cálculo mental pode ter no desenvolvimento do sentido de número e de operação. Os alunos têm estratégias de cálculo mental próprias e que, mesmo não tendo sido estimuladas pelos professores, demonstram potencialidades, sendo necessário um

trabalho focado de forma a aprofundá-las. As estratégias de cálculo mental são aplicações rápidas numa tarefa proposta de conhecimentos, factos numéricos conhecidos e das propriedades dos números e das operações sendo bons contextos de aprendizagem, quando as estratégias utilizadas foram exploradas em plenário com os alunos (Thompson, 1999, 2009). Renata Carvalho (2016) desenvolveu experiências de ensino onde pretende analisar os resultados de um trabalho focado nas estratégias de cálculo mental e compreender quais as aprendizagens decorrentes num contexto de ensino e aprendizagem de números racionais no 2.º ciclo do ensino básico. Os resultados obtidos relevaram-se muito positivos relativamente ao desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, onde se desenvolveram o sentido de número racional e o sentido de operação. Em contextos onde se trabalham diversas representações e onde se faz um trabalho focado no desenvolvimento do sentido do número também é importante trabalhar a estimação. Os alunos devem desenvolver e usar estratégias de resolução de tarefas matemáticas, mas também devem antecipar e julgar os resultados obtidos. Para tal a estimação tem um papel fundamental (NCTM, 2007). Johanning (2011), sistematizando os aspetos que apoiam e estimulam a estimação de números racionais, definiu que se deve fazer um trabalho focado nesta capacidade através: a) da utilização de representações de natureza mais estruturada ajudando os alunos na compreensão das grandezas envolvidas e portanto a desenvolver a capacidade de estimar; b) da utilização de números de referencia permitindo ajuizar resultados e/ ou as estimativas realizadas (Cruz & Spinillo, 2004); c) da proposta de tarefas onde os alunos possam realizar conexões entre as situações apresentadas, as representações conhecidas e os procedimentos dos algoritmos com racionais e d) de um bom conjunto de questões podendo levar os alunos a refletir sobre a estimação realizada ou os resultados obtidos em determinada operação, permitindo portanto, o desenvolvimento do seu sentido de número e de operação no conjunto dos racionais. Ou seja, é importante que existam espaços para que os alunos discutam os resultados obtidos e se as operações utilizadas discutindo se são adequadas às tarefas e situações propostas.

Nos dias de hoje existem muitos materiais e tarefas disponíveis na internet ou noutros documentos de apoio ao professor incluindo brochuras e manuais escolares. Assim, o professor deve ser capaz de avaliar a qualidade matemática das tarefas e adequá-la aos propósitos de ensino e aos interesses dos seus alunos (Clarke, Clarke & Roche, 2013; Choppin, 2011; Lee & Shin, 2016; Norton, McCloskey & Hudson, 2011; Serrazina, 2012; Sullivan,). Segundo Smith, Hughes, Engle e Stein (2009) importa que

o professor se envolva na análise de tarefas e como se adequam cognitivamente aos seus alunos. Para tal devem resolvê-las recorrendo a diferentes estratégias possíveis (Guberman & Leikin, 2013). Desse modo “a oportunidade de construírem ou reconstruírem a sua própria compreensão acerca do que é a matemática e de como se faz matemática” (p. 140).

No estudo realizado por Davis (2009) para além de analisar o papel do manual escolar como mediador e “impulsionador” do conhecimento Matemático para ensinar nos futuros professores também analisou como diferentes futuros professores interagiram com dois manuais escolares apresentados e explorados. Assim, foi dada atenção à forma como as características pessoais dos professores (por exemplo, crenças sobre a Matemática) influenciaram as suas interpretações do manual, bem como quais componentes do material desencadearam essas interpretações. O estudo contou com 13 participantes que receberam fotocópias das páginas introdutórias de cada um dos manuais, materiais de apoio e tarefas e suas resoluções. Com estes materiais passaram uma semana a ler e planear com um dos manuais e realizaram o primeiro pós-teste para depois passarem mais uma semana a ler e planear sem manual e em seguida realizaram o segundo pós-teste. Foram ainda realizadas entrevistas para esclarecimento de algumas respostas. Davis (2009), de um modo geral, considerou que os futuros professores possuíam um entendimento limitado dos conteúdos e do conhecimento pedagógico do conteúdo, o que se manifestou de diversas formas no pré-teste. A influência dos manuais no conhecimento de conteúdo e pedagógico foi evidenciada de diversas formas: a) os futuros professores desenvolveram estratégias para interagir com os manuais escolares e existiram evidências de que, para alguns professores, as suas crenças sobre a Matemática influenciaram a forma de interagir com os manuais; b) a organização de cada um dos manuais influenciou a forma como os professores interagiram com eles; c) a ausência de contraexemplos provou ser uma barreira para ajudar os professores a compreender os limites das propriedades expoente diferentes; d) os futuros professores tiveram mais sucesso, com um dos manuais, em aprender conhecimento pedagógico do conteúdo (quando os manuais não são claros sobre o conhecimento a ensinar, os futuros professores tendem a não usar esse manual); e) com a utilização dos manuais os futuros professores utilizaram uma representação educativa ou outra, em vez de pensar em vários métodos que podem ser usados ou conjugando uns com outros de forma a complementarem-se; f) os manuais forneceram algum apoio aos professores, tanto no conhecimento do conteúdo, como no conhecimento pedagógico de

conteúdo; g) a aprendizagem dos professores foi influenciada pelas suas características pessoais, existindo uma consciência crescente de que o material curricular tem o potencial de influenciar o conhecimento dos professores. Como futuros estudos o autor sugere que se investigue questões situadas nas salas de aula, durante o estágio, para compreender os efeitos do currículo em vigor nestas questões.

Assim, o conhecimento didático dos futuros professores sobre as tarefas implica serem capazes de avaliar, selecionar, desenhar e sequenciar tarefas, estabelecendo um percurso de aprendizagem. Também implica reconhecer as tarefas que influenciam determinadas de aprendizagem adaptando-as aos propósitos de ensino e aos interesses dos seus alunos, sem que para tal se altere a natureza das tarefas em função dos propósitos definidos. Devem ainda formular questões matemáticas e explorar as estratégias dos alunos promovendo novas aprendizagens. Por fim, o futuro professor deve ser capaz de resolvê-las recorrendo a diferentes estratégias possíveis. No que respeita ao ensino aprendizagem dos números racionais importa que reconheçam que este conjunto numérico deve ser abordando com problemas com contextos de partilha equitativa e onde os alunos, em simultâneo, possam fazer aprendizagens significativas e desenvolver o raciocínio proporcional. No que respeita ao tipo de tarefas e, especificamente, sobre tarefas de natureza mais aberta e desafiante são importantes porque permitem discutir e justificar estratégias onde ficam beneficiados os alunos que conseguem resolver os problemas, mas também os que têm dificuldades. Note-se que a resolução de problemas com contexto não matemáticos pode apoiar a compreensão das regras algorítmicas e desenvolver a capacidade de estimação. Os futuros professores selecionam ou desenham problemas com contextos porque são significativos, motivam os alunos e promovem a equidade. Para tal, estas tarefas têm que respeitar determinadas condições: instrução clara e de fácil compreensão; adequação à idade e/ou ano de escolaridade partindo dos documentos em vigor; adequação do nível de desafio; implicar trabalho prático; elevado potencial de envolvimento e desenvolvimento do pensamento crítico; implicar múltiplas representações como desenhos e bandas desenhadas; e serem estruturas de modo a que a informação dada aos alunos fosse apenas parcialmente pertinente. Os problemas e exercícios, de cálculo mental e a estimação, podem promover a compreensão do valor posicional, o sentido de operação proporcionando a compreensão das estruturas dos sistemas numéricos, a fluência numa variedade de estratégias de cálculo que têm implícitas as propriedades das operações e factos sobre as quantidades envolvidas. Importa discutir as estratégias de resolução e

antecipar e julgar os resultados obtidos. No que respeita aos manuais escolares como fontes de tarefas importa sublinhar que estes têm um duplo papel, uma vez que têm que ser analisados pelos professores e futuros professores mobilizando o seu conhecimento, mas simultaneamente podem ser fontes de conhecimento sendo que a qualidade dos manuais é influenciadora do desenvolvimento do conhecimento quando os docentes.

2.3.3. Conhecimento sobre os alunos

Relativamente ao conhecimento sobre os alunos, os professores devem ser capazes de antecipar e identificar as dificuldades e erros comuns dos alunos, quando ouvem e interpretam os seus pensamentos incompletos. Devem também saber antecipar as resoluções dos alunos em tarefas específicas e o que os alunos consideram desafiante e interessante ou confuso (Ball et al., 2008; Son & Crespo, 2009). Assim, o professor transforma o seu conhecimento em conhecimento sobre os alunos de modo a apoiar identificando: o conhecimento do que devem aprender, as suas dificuldades, quando aprendem e as orientações curriculares para o ensino de um conteúdo (Shulman, 1986).

Antes de tudo importa sublinhar que erros e dificuldades são aspetos distintos a analisar, sendo que os primeiros são entendidos como evidências das segundas, podendo as dificuldades ser obstáculos à deteção e correção dos erros e a o erro recorrente, não identificado e não discutido, servir de obstáculo para ultrapassar determinada dificuldade (Pérez, 1997). Tais dificuldades identificam-se desde os primeiros anos de escolaridade e acompanham os alunos ao longo da vida escolar influenciando negativamente a aprendizagem de outros temas na Matemática do ensino básico e secundário (Monteiro & Pinto, 2007; Wu, 2008). Como dificuldades ou erros relativamente ao conjunto dos números racionais podemos apontar questões que se relacionam mais com o sentido de número racional, as suas diferentes representações e significados e questões específicas com as diferentes operações com números racionais. Estando o sentido de número relacionado com o conhecimento que o indivíduo tem acerca dos números e respetivas operações mobilizando tais conhecimentos de forma flexível (McIntosh, Reys & Reys, 1992) existem vários erros que têm como base a falta deste. Uma das evidências da falta de conhecimento sobre os números racionais refere-se ao facto dos alunos perante uma fração, como representação de um número racional, cometerem o erro de considerarem que estão perante dois números, não encontrando a relação entre o numerador e o denominador e, não identificando esta como a representação de uma grandeza. A dificuldade em compreender a representação

fracionária e a grandeza envolvida, pode levar os alunos a não conseguirem estimar resultados e, portanto, demonstrar espírito crítico perante os resultados na resolução de problemas. Exemplo disto é o caso da adição de números racionais onde os alunos não compreendem o efeito da adição de dois racionais, não relacionando com o contexto e não compreendendo que aquele resultado não representa a realidade apresentada (Cramer e Henry, 2002). A falta de compreensão da natureza das grandezas envolvidas e do facto dos números racionais poderem ser representados por frações, decimais e percentagens pode resultar numa falta de flexibilidade em usar as diferentes representações dos números racionais levando a que cometam erros na resolução de procedimentos e a compreenderem e resolverem problemas contextualizados (Scaptura, Su & Mahaffey, 2007), onde é natural que se apresentem números com várias representações resultando muitas vezes que alguns alunos ignorem os números que não compreendem - racionais nas suas várias representações- ou não sabendo representar simbolicamente situações problemáticas que intuitivamente e informalmente conseguem resolver (Cruz & Spinillo, 2004). Os números racionais podem ter vários significados (parte-todo, razão, operador, quociente e medida) e quando os alunos não compreendem estes significados e os contextos de onde emergem, pode levar a erros na resolução das operações (Charalambos, Charalambous & Demetra Pitta- Pantazi, 2006; Monteiro, Pinto & Figueiredo, 2005) uma vez que os símbolos são utilizados sem sentido crítico relativamente aos resultados obtidos, o que está subjacente à compreensão das quantidades envolvidas e aos conceitos envolvidos (Cruz e Spinillo, 2004).

Relativamente às operações com a representação de números racionais na forma decimal existem dificuldades específicas. Os alunos contatam com os números racionais, na forma decimal, desde uma fase muito inicial da escolarização e até mesmo no seu quotidiano. Contudo as dificuldades relativas a esta forma de representação são algumas podendo o trabalho com esta representação levantar desafios quando as crianças não compreendem o valor de grandeza dos algarismos nesta representação. Julia Pérez (1997) sistematizou quatro tipos de erros no trabalho com os numerais decimais: 1) Erros relacionados com a leitura dos números que podem estar relacionados com a dificuldade na compreensão do sistema de numeração decimal; 2) Erros relacionados com o zero, onde os alunos ou ignoram os zeros lendo os números como inteiros ou diferenciando os números decimais que terminam no algarismo zero; 3) Erros relacionados com as ordens dos decimais, onde os números são lidos e ordenados como inteiros dando ou não lugar a resultados errados e podendo ou não

reforçar o erro; 4) Erros relacionados com as operações, onde se evidenciam os erros anteriores dificultando a resolução das operações com racionais na forma de decimal. Ainda neste sentido, nem sempre os alunos compreendem a ordem de grandeza dos números, demonstrando essa dificuldade quando não sabem posicionar os números de forma a calcular o algoritmo com sucesso (NCTM, 2000).

No que respeita às questões operatórias temos o facto de os alunos generalizarem as regras operatórias com números inteiros, para os números racionais, sob a forma de fração. Na adição, quando os alunos erram somando os numeradores e os denominadores, podem estar a generalizar as definições de adição dos números naturais (Charalambos, Charalambous & Demetra Pitta- Pantazi, 2006; Cruz & Spinillo, 2004; Monteiro, Pinto & Figueiredo, 2005; Monteiro & Pinto, 2006; Schifter, 1997; Wu, 2008;). Mesmo quando se colocam situações contextualizadas e significativas, onde se trabalham com unidades diferentes, os alunos adicionam ou subtraem os números sem terem em conta que estão a somar partes de unidades diferentes, parecendo completamente alienados do contexto onde os números são operados (Cruz e Spinillo, 2004). Ou seja, não compreendem que devem utilizar representações fracionárias equivalentes com a mesma unidade de referência e, mesmo quando compreendem que devem ter a mesma unidade, parecem não saber qual a unidade que devem escolher (Newton, 2010).

A resolução de problemas, onde estão envolvidas operações, apresenta dificuldades resultantes de todos os aspetos anteriormente referidos. Tais dificuldades evidenciam-se quando os alunos não modelam as situações para determinar a operação a realizar, optando por adivinhar, tentando as várias operações, e depois escolhendo o resultado que lhes parece mais razoável levando a cometer erros e à incapacidade na resolução dos problemas propostos (Schifter, 1997). Estas dificuldades podem resultar do caminho realizado entre a compreensão intuitiva, a capacidade de resolver situações informalmente, mobilizando conhecimentos, e as representações simbólicas. Este é um percurso não linear e que implica a vivência de experiências variadas, permitindo o estabelecimento de relações entre os diferentes aspetos dos números racionais (Monteiro e Pinto, 2006).

Os erros acima identificados podem levantar a questões muito interessantes e motivantes no trabalho de sala de aula devendo-se explorar os mesmos fazendo progredir os alunos e permitindo a compreensão de conceitos importantes (Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen, Keijzer, 2008). Assim, os erros detetados dão-nos

“evidências da necessidade de transformar a pedagogia da Matemática, criando salas de aula onde dar sentido à Matemática é simultaneamente o meio e o objetivo da instrução” (Schifter, 1997, p.3). Quando os estudantes aprendem aritmética como um conjunto de procedimentos memorizados, estes perdem contato com as suas habilidades de fazer sentido o cálculo das operações, o que resultará por um lado, que os algoritmos estruturados não façam sentido e que estes parem de pensar sobre a grandeza dos números e sua natureza, e por outro que tenham de depender de se lembrar das regras e procedimentos (Schifter, 1997).

A dificuldade em ensinar e aprender os números racionais está identificada largamente (Lamon, 2007). Daí que seja importante rever algumas propostas de como se pode trabalhar o conjunto dos números racionais no ensino básico. Importa trabalhar os números racionais nas suas diversas representações de modo a salientar as relações existentes. Também devem considerar e explorar os diferentes significados que os números racionais, na forma de fração, podem ter e a ideia de que a quantidade representada por uma fração depende da sua unidade de referência (Barnett-Clarke et al., 2010). Clarke, Roche e Mitchell (2008) apresentam 10 grandes ideias para prevenir as dificuldades dos alunos com os números racionais, a saber: 1) Dar maior ênfase ao significado das frações para chegar aos procedimentos; 2) Tornar claro o que significa o numerador e o denominador; 3) Enfatizar que as frações são números e recorrer à reta numérica para representar frações e decimais; 4) Aproveitar oportunidades para explorar frações impróprias e frações equivalentes; 5) Disponibilizar diferentes modelos para representar frações; 6) Recorrer a frações como números de referência e encorajar a estimação; 7) Dar ênfase ao significado de divisão das frações; 8) Estabelecer relações entre as diferentes representações dos números racionais (fração, decimal e percentagem); 9) Explorar individualmente as tarefas com os alunos recorrendo às ideias já apresentadas de modo a conhecer os seus raciocínios e estratégias; e 10) Procurar diferentes exemplos e tarefas que envolvam os alunos a raciocinar sobre frações e restantes representações dos números racionais.

No que respeita aos futuros professores, estes também devem prever como as crianças vão responder a uma tarefa pois deste modo conseguem uma melhor análise do seu pensamento, resultando numa prática mais rica em perguntas de inquirição e estando mais disponíveis para ouvir as explicações dos alunos (Norton, McCloskey, & Hudson, 2011; Stylianou, 2010). Neste sentido os estudos de Tobias (2012) e de Bartell, Webel, Bowen e Dyson (2012) debruçaram-se no desenvolvimento da capacidade dos

futuros professores em compreender as ideias das crianças. No caso de Bartell et al (2012), através de episódios de sala de aula, onde as crianças resolvem situações matemáticas e comunicam as suas ideias, os futuros professores refletem sobre a Matemática a ensinar. Nas suas reflexões, os futuros professores antecipam os raciocínios e estratégias dos alunos (Bartell et al., 2012) e no estudo de Tobias (2012) discutem a importância do rigor da linguagem no apoio aos alunos nas suas aprendizagens a partir de episódios críticos de sala de aula transcritos e posteriormente discutidos. Bartell et al. (2012), fazem uso de uma metodologia idêntica, mas recorreram a vídeos de crianças a resolver situações matemáticas. Os autores pretendiam identificar se os futuros professores atribuem compreensão conceptual às explicações dadas pelas crianças, quando o fazem através de cálculos, existindo apenas evidências de conhecimento processual. Os autores antecipam que, por vezes, os futuros professores consideram que provas irrelevantes são demonstrações de aprendizagem ou que as explicações do professor são evidências de aprendizagem dos alunos. Assim, realizaram uma experiência de formação com 54 futuros professores a frequentar a primeira de três disciplinas de Matemática. A disciplina foca-se em questões matemáticas sobre números e operações (apresentando tarefas com racionais, adição e subtração de decimais, comparação de frações e multiplicação de frações). Para introduzir questões sobre a aprendizagem das crianças são visionados vídeos de crianças a resolver problemas, pedindo aos futuros professores para tirarem conclusões sobre a compreensão matemática das crianças. A metodologia foi sendo repetida em várias situações de modo a preparar os futuros professores para distinguir compreensão processual de compreensão conceptual. Os resultados sobre o conhecimento conteúdo revelados no início do estudo mostraram que o conhecimento do conteúdo parecia apoiar as análises dos futuros professores e que existiam evidências da compreensão conceptual de subtração de números decimais, na compreensão conceptual de comparação de frações, mas poucos evidenciaram compreensão conceptual da multiplicação de frações. Antes da intervenção nas três áreas de conteúdo, a maioria dos futuros professores reconheceram o conhecimento nas respostas das crianças, indicando compreensão conceptual mesmo quando as crianças demonstravam apenas conhecimento processual. Este estudo reforça a ideia de que o conhecimento sobre o conteúdo não é suficiente para apoiar os futuros professores a reconhecer a compreensão conceptual dos alunos, sendo necessário desenvolver um conhecimento de natureza didática. Os autores sublinham que avaliar a compreensão do aluno é uma

capacidade essencial para o ensino que é necessário desenvolver nos futuros professores, aprendendo a identificar a diferença entre dados que indicam compreensão conceptual e conhecimento processual (Bartell et al.;2012).

É natural que os professores tenham que dar feedback às ideias que os alunos apresentam de modo a promover aprendizagem. Assim, podem deparar-se com uma grande variedade de estratégias de resolução das tarefas propostas aos alunos. Com o objetivo de saber como raciocinam e respondem os futuros professores perante determinadas estratégias, Son e Crespo (2009) realizaram um estudo qualitativo com 34 participantes (17 finalistas do curso de professores do ensino básico e 17 futuros professores do ensino secundário) dos USA. Os investigadores propuseram a análise de um episódio crítico onde os alunos resolviam a divisão de números racionais sob a forma de frações, dividindo com uma estratégia não tradicional. Depois do visionamento do episódio de sala de aula, os futuros professores analisaram as resoluções e respostas dos alunos e anteciparam possíveis perguntas e respostas a dar. Para estruturar a tarefa proposta e enquadrar as respostas dos alunos foi realizada uma revisão das possíveis estratégias dos alunos (formais e informais) da divisão de números racionais na forma de frações, encontradas na literatura e em estudos com alunos, e onde foram identificadas estratégias e suas características, explicitadas em determinadas abordagens. Os principais resultados deste estudo mostram que: a) a falta de conhecimento limita o raciocínio e diversidade na exploração de estratégias diferentes, limitando as discussões em sala de aula; b) mais ou menos conhecimento não influencia a abordagem seguida; c) na maioria dos casos mais conhecimento leva a uma abordagem do tipo “focado no professor” e menos conhecimento numa abordagem do tipo ” focado no aluno”; e d) a formação inicial, influencia o tipo de respostas dos futuros professores. Deste modo, a formação inicial é enunciada como importante para uma abordagem do tipo “focado no aluno” e as conceções, funcionando como limitadores da abordagem “focada no aluno”. Neste estudo concluiu-se que é relevante que se analise o conhecimento/raciocínio mobilizado na prática letiva e que é importante trabalhar com os futuros professores diversas estratégias, ideias matemáticas e abordagens focadas nos alunos (Son & Crespo, 2009).

Depaepe, Torbeyns, Vermeersch, Janssens, Kelchtermans, Verschaffel e Van Dooren (2015), reconhecendo que os futuros professores têm fragilidades no seu conhecimento didático, identificam dificuldades, tais como: em prever os erros e dificuldades dos alunos na multiplicação e divisão de números racionais fracionários.

Quando o fazem apenas preveem dificuldades com procedimentos; quando preveem erros ou dificuldades, no caso da resolução de problemas com a representação decimal, propõem como estratégias de apoio passam mais por explicar os procedimentos e regras e menos por desafiar os alunos a descobrir as relações matemáticas existentes nas tarefas. A mesma equipa em 2018 procurou compreender qual o conhecimento didático que os futuros professores detinham para apoiar os seus alunos a ultrapassar as dificuldades relativas à transição entre o conjunto dos números naturais e os números racionais. Os autores sublinharam a terceira dificuldade, ou seja, que nem sempre os futuros professores têm conhecimento sobre como representar os números racionais de modo a prevenir ou apoiar os alunos a ultrapassar as suas dificuldades (Depaepe, Van Roy, Torbeyns, Kleickmann, Van Dooren, & Verschaffel, 2018).

Spitzer, Phelps, Beyers, Johnson e Sieminski (2011) identificam a dificuldades que os futuros professores têm em reconhecer evidências de aprendizagem. Por vezes os futuros professores consideram que porque explicaram e os alunos acenaram positivamente essa resposta significa que aprenderam o explicado. Também tendem a identificar aprendizagens em respostas que nem sempre são adequadas para os objetivos de aprendizagem. Os autores alertando que no tempo existente na formação inicial dos futuros professores não é possível desenvolver todas as aprendizagens necessárias para se equipararem aos professores experientes, sublinham a importância de desenvolver ferramentas de aprendizagem ao longo da vida. Assim, para os autores, importa que se invista em capacidades de investigação sobre a própria prática, contribuindo para o desenvolvimento do seu conhecimento, capacidades e atitudes. Os autores identificam como aspetos a desenvolver: (i) Reconhecer de evidências de aprendizagem por parte dos alunos; (ii) Distinguir evidências de que os objetivos de aprendizagem foram atingidos e evidências irrelevantes para os objetivos definidos; (iii) Saber como e quando recolher evidências de aprendizagem tendo em consideração os objetivos de aprendizagem definidos; Gerar hipóteses de ensino promotoras de aprendizagem; e (iv) Refletir em torno das hipóteses levadas a cabo e as aprendizagens desenvolvidas nos alunos de modo a ajustar e melhorar o processo de ensino-aprendizagem de modo a concretizar o objetivos de aprendizagem definidos. Neste sentido, foi realizado o estudo com 192 futuros professores recorrendo à análise de vídeos de práticas de ensino-aprendizagem. Os resultados do estudo foram positivos uma vez que os futuros professores melhoraram as suas capacidades em analisar as

ideias dos alunos como evidências de aprendizagem considerando os objetivos definidos. Ainda assim ainda mostraram dificuldades em reconhecer evidências que não eram reveladoras de aprendizagem. Esta última capacidade é bastante importante para a tomada de decisões para possíveis alterações às decisões sobre a prática a desenvolver. No entanto, os autores referem que a intervenção foi de curta duração (duas aulas) e que importa que existam estudos na fase final do ciclo de estudos dos futuros professores depois de desenvolverem as suas primeiras experiências de prática.

Analisando as previsões de futuros professores temos o estudo de Norton, McCloskey e Hudson (2011). Neste estudo os futuros professores, partindo da análise de vídeos, tinham que construir um modelo da matemática da criança e, em seguida, usar esse modelo para prever como a criança vai responder a uma tarefa. Debruçando-se sobre o desenvolvimento do conhecimento sobre as aprendizagens dos alunos a resolver tarefas matemáticas. Os autores partem de estudos anteriores que indicam que os professores que analisam o pensamento dos alunos, fora da sala de aula, tendem a fazer mais perguntas de inquirição e a passar mais tempo a ouvir as explicações dos alunos dentro da sala de aula. Assim, o projeto apresentado envolve futuros professores do ensino básico na construção de modelos da matemática dos alunos. A construção de um modelo das atividades em curso e da iteratividade decorrente dessas atividades pode promover explicações e antecipações (incluindo as verbalizações) sobre como as crianças resolvem as tarefas matemáticas (Norton et al, 2011). Partindo da definição de modelo como uma simulação da realidade consideram que “é uma construção conceptual que é tratada como uma imagem exata do mundo real” (p. 95). Ou seja, os modelos da matemática dos alunos são simulações das ações mentais dos alunos que se dão quando estão a resolver problemas matemáticos, prevendo-se o comportamento dos alunos na resolução de problemas do futuro. Assim, o vídeo pode desempenhar um papel fundamental no apoio à aprendizagem do docente na construção de um modelo, porque oferece oportunidade para os professores avaliarem e refletirem sobre as ações dos alunos e as atividades mentais subjacentes. Por outro lado, as discussões sobre o ensino podem ser enquadradas em torno de uma única fonte de dados (Norton et al., 2011). Para analisar o impacto da experiência formativa realizaram entrevistas fazendo a análise da aula incluindo a análise das conceções em reflexões escritas, planos de aula, observações de aulas e das previsões discutidas. Os dados foram recolhidos com futuros professores em diferentes momentos do seu percurso:

enquanto estão inscritos em Matemática, nas disciplinas de metodologia, no estágio e no primeiro ano enquanto professores.

O processo formativo pressupõe interações intensas com um par de crianças, posterior entrevista de análise das suas formas de pensar sobre um determinado tópico. Após a entrevista, o par de futuros professores reúne-se para discutir as respostas das crianças, mudanças no pensamento das crianças e as implicações nas aulas com uma turma definindo-se um modelo que depois é discutido num grupo de futuros professores. Por fim os futuros professores preparam e co-ensinam uma aula numa turma de ensino básico. Após a aula, o par de futuros professores reúne com outros observadores para discutir o pensamento dos alunos durante a aula e rever a mesma usando o protocolo do estudo (Norton et al., 2011). Os autores concluíram que existe uma forte correlação entre a participação no curso experimental e as performances dos futuros professores. Foram identificadas quatro componentes relacionadas com o processo de construção do modelo: (i) conhecimento sobre o conteúdo; (ii) modelação; (iii) inferências baseadas em evidências das explicações dos alunos (previsão); e (iv) uso do modelo. Os autores referem ainda que analisar o conhecimento dos professores é um processo complexo, pois a conexão entre o conhecimento e a prática docente não é simples, tendo-se que investigar mais para entender sua complexidade (Norton, McCloskey & Hudson, 2011).

Também fazendo a análise de práticas mas desta feita presencialmente e partindo de transcrições temos o estudo de Scherrer e Stein (2012) onde utilizando um modelo de codificação para discussão na sala de aula, se pôde promover o modo como os professores compreendem as contribuições dos alunos que emergem durante a resolução de tarefas de nível de complexidade elevada. Não foi utilizado o vídeo porque os autores entendem que pode fazer dispersar o observador dos aspetos centrais a analisar. Os autores defendem que a análise de transcrições permite um foco maior sobre os aspetos centrais a discutir. Assim, os futuros professores, codificaram diversas situações o que lhes permitiu: a) identificar interações entre professores e alunos; b) identificar determinadas ações de professores que levam os alunos a passar de passivos a ativos aprendentes; c) desenvolver a compreensão do impacto das ações dos professores em oportunidades de aprendizagem. Os resultados sugerem que a intervenção foi bem-sucedida existindo mudança na forma como os professores identificaram as discussões de sala de aula, mas não foi tão bem sucedida no apoio em identificar diferentes interações que criam diferentes oportunidades para alunos pensarem. O esquema de

categorização permitiu um vocabulário comum entre professores (Scherrer & Stein, 2012).

Assim, relativamente ao conhecimento sobre os alunos, os professores devem ser capazes de antecipar e identificar as dificuldades e erros comuns dos alunos, quando ouvem e interpretam os seus pensamentos incompletos. Devem também saber antecipar as resoluções dos alunos em tarefas específicas e o que os alunos consideram desafiante e interessante ou confuso. No que respeita às dificuldades recorrentes com o tema dos números racionais temos: (i) o facto dos alunos perante uma fração considerarem que estão perante dois números, não encontrando a relação entre o numerador e o denominador negligenciando que é a representação de uma grandeza; (ii) dificuldade em estimar resultados e demonstrar espírito crítico perante os resultados obtidos; (iii) desconhecimento das relações entre as representações fracionária, decimal e percentagem e falta de flexibilidade em usar as diferentes representações; não conseguir representar simbolicamente situações problemáticas que intuitivamente e informalmente conseguem resolver; (iv) falta de compreensão dos diferentes significados e os contextos de onde emergem as frações; recurso aos símbolos sem sentido crítico. Especificamente sobre a representação decimal os alunos têm dificuldades: (v) na leitura dos números subjacente à falta de compreensão do sistema de numeração decimal; relacionadas com o zero, lendo os números como inteiros; as ordens dos decimais, onde os números são lidos e ordenados como inteiros; e na resolução das operações, quando não sabem posicionar os números de forma a calcular o algoritmo com sucesso. Relativamente às questões operatórias os alunos têm dificuldades quando, com a representação fracionária, generalizarem as regras operatórias com números inteiros somando os numeradores e os denominadores não modelam as situações para determinar a operação a realizar. Por isso, o conjunto dos números racionais desafia os professores a promover experiências matemáticas que permitam prevenir ou discutir os erros e dificuldades conhecidos. Importa trabalhar os números racionais cuidando de: (i) relacionar as suas diversas representações; (ii) considerar e explorar os diferentes significados dos números racionais na forma de fração, (iii) focar a atenção dos alunos na importância da quantidade representada e das implicações trazidas pela unidade de referência; dar significado ao numerador e o denominador; (iv) representar os racionais em diferentes modelos; explorar frações impróprias e frações equivalentes; (v) partir da exploração de números de referência e promover a estimação das quantidades envolvidas; (vi) enfatizar os significados das operações; (vii) diversificar o tipo de

tarefas que envolvam as diferentes representações dos números racionais. No que respeita aos futuros professores, estes também devem prever como as crianças vão responder a uma tarefa permitindo que estejam mais despertos para as respostas e como podem apoiar e desafiar os seus alunos tornando a prática mais rica em perguntas de inquirição e estando mais disponíveis para ouvir as explicações dos alunos. No entanto, os futuros professores têm fragilidades no seu conhecimento didático no que respeita à previsão de dificuldades, tais como, na multiplicação e divisão de números racionais fracionários e quando o fazem preveem apenas dificuldades com procedimentos. Os futuros professores também evidenciam dificuldades em representar os números racionais de modo a prevenir ou apoiar os alunos a ultrapassar as suas dificuldades. Por fim, nem sempre os futuros professores reconhecem evidências de aprendizagem. Neste sentido implica promover experiências na formação inicial que permitam aos futuros professores ouvir, analisar resoluções e prever ações de promoção da aprendizagem. Ou seja, importa um investimento nas capacidades de investigação sobre a própria prática, contribuído para o desenvolvimento do seu conhecimento didático sobre os alunos.

2.3.4. Conhecimento sobre a comunicação e as ações dos futuros professores

A comunicação é um aspeto essencial da Matemática, quer enquanto disciplina científica, quer enquanto disciplina escolar, estando intimamente ligada ao processo de ensino-aprendizagem (NCTM, 2000, 2007; Menezes, 2004). É também um aspeto essencial de qualquer prática pedagógica (Bishop & Goffree, 1986; Menezes et al., 2014; Ponte, Quaresma & Branco, 2012; Yackel & Cobb, 1996). Por vezes os professores ouvem “a mais” ou perdem informação em conformidade com o que esperam ouvir dos seus alunos. Assim, para comunicar é necessário ouvir para então questionar ou explicar ao outro (Zaslavsky, 2010).

Comunicar envolve partilhar algo com alguém e para tal existe o recurso a gestos, imagens e símbolos. A comunicação pode ser oral ou escrita e pode envolver representações linguísticas e matemáticas (Ponte & Serrazina, 2000). Também pode ser vista como uma capacidade transversal da Matemática (NCTM e PMEB, 2007). De modo geral, esta define-se como a “capacidade de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega”. Deste modo, importa “elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas”

e “usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais” (p.3, ME, 2007). Para tal, os professores devem promover a comunicação oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados, processos e ideias matemáticos (ME, 2007).

Ponte, Guerreiro, Cunha, Duarte, Martinho, Martins, Menezes, Menino, Pinto, Santos, Varandas, Veia e Viseu (2007), alertam que os futuros professores que lecionam Matemática ao ensino básico, revelam ideias nem sempre alinhadas com os resultados da investigação. Ainda assim, alguns futuros professores sublinham a importância das questões abertas, de levar os alunos a construir as suas ideias sem que lhes sejam dadas as respostas e de os alunos comunicarem as suas questões, ideias e raciocínios. Assim, no que respeita ao conhecimento dos futuros professores os aspetos relativos à comunicação e às ações que os professores desenvolvem durante a sua prática, quer para promover e gerir aprendizagens, quer para promover e um determinado ambiente de aprendizagem, são aspetos que emergem interrelacionados com o conhecimento sobre as tarefas e sobre os alunos. Relacionados com estas duas dimensões do conhecimento didático (tarefas e sobre alunos), é necessário considerar aspetos relativos à comunicação. Sendo a prática de ensino exigente na gestão dos contributos dos alunos e na explicitação das ideias matemáticas, importa dar relevo à comunicação que decorre na sala de aula. Durante o processo de ensino-aprendizagem, quer professores, quer os alunos recorrem a diferentes representações das ideias matemáticas ao ensinar e aprender. Ou seja, é importante que os futuros professores saibam dar explicações, colocar questões, ouvir as respostas das crianças e responder de forma diferenciada aos alunos.

2.3.4.1. Conhecimento para questionar

O modo como o professor questiona influencia no modo como os alunos constroem as suas ideias. O questionamento é um aspeto estruturante da comunicação dos professores. Como veremos mais na seção seguinte, dependendo da razão pela qual se questiona, podem identificar-se diferentes tipos de questões (Ponte & Serrazina, 2000). No estudo de Martinho (2007) as três professoras questionavam bastante os alunos, individualmente e em grande grupo. No entanto o tipo de questões a que recorriam predominantemente eram diferentes. Todas recorriam a questões de confirmação dando mais ou menos espaço aos alunos para darem a resposta. Também

todas recorriam a questões de focalização principalmente quando questionavam individualmente. As questões de inquirição foram menos frequentes nas práticas das docentes e surgiram quando as professoras começaram a estar despertas para a importância deste tipo de questões para a promoção das aprendizagens.

Para além da função das questões o seu foco também pode ser díspar. No seu estudo Johar, Patahuddin e Widjaja (2017) debruçam-se sobre as implicações que a natureza das tarefas e do questionamento influencia o tipo de conhecimento, sobre frações, que é construído. Analisando o questionamento realizado por futuros professores de diferentes países encontram diferentes focos. Assim, na resolução de problemas com contexto não matemático, na perspetiva da Matemática realista, os futuros professores Holandeses questionaram menos que os Indonésios, mas os Holandeses exploraram uma maior diversidade de estratégias, mostrando maior flexibilidade na abordagem às tarefas propostas. O questionamento e indicações dos futuros professores Indonésios mostrou-se eficaz no apoio aos alunos na resolução de problemas com diferentes estratégias ainda que focado apenas nas ideias em torno das frações como parte-todo, recorrendo normalmente ao modelo de área como representação habitual. Os autores enquadram estas diferenças no foco do questionamento em aspetos curriculares e culturais dos países de origem dos participantes. Nesse sentido questionam a influência da formação dos professores, o seu conhecimento matemático, a cultura de “sala de aula” e os recursos curriculares disponíveis como os manuais escolares.

Assim, o questionamento que é um aspeto estruturante da comunicação dos professores. Podem ser analisadas o tipo de questões que o professor faz e quando faz ou o foco das questões sendo que, é importante que o futuro professor esteja atento, quer aos propósitos do seu questionamento, quer ao foco que terá nas suas questões. Os professores apesar de realizarem todo o tipo de questões recorriam predominantemente e a questões de confirmação, recorriam a questões de focalização na interação individualmente e com menos frequência as questões de inquirição. O questionamento pode ter vários focos podendo ser na diversificação de estratégias ou num determinado tipo de estratégia ou conceito.

2.3.4.2. Conhecimento sobre representações

A exploração de representações que apoiem a resolução de tarefas, sejam ou não representações construídas pelos alunos, de modo a construir ou ilustrar objetos,

conceitos e situações matemáticas (Mitchell et al., 2013) são um elemento importante do processo de ensino aprendizagem. Importa que os professores reconheçam os prós e contra da utilização de determinadas representações no processo de ensino-aprendizagem. Relativamente aos números racionais, é importante saber como equacionam a sua exploração a par das várias representações dos racionais (fração, numeral decimal, percentagem) e as relações que se estabelecem, permitindo que os alunos tenham uma compreensão global do conjunto numérico.

Importa que os alunos sejam capazes de criar e usar representações de diferente natureza para comunicar as suas ideias matemáticas e de modo a modelar situações do dia-a-dia e a resolver problemas matemáticos, que lhes sejam colocados (NCTM, 2007). Por seu lado, os professores devem apoiar e desafiar os alunos a representar de várias formas as suas ideias matemáticas, comunicando matematicamente e resolvendo problemas. No entanto estes processos não são simples, quer para os alunos, como para os professores (Stylianou, 2010).

Para comunicar podem ser exploradas representações ativas, pictóricas (icónicas como ponto, linhas e círculos e desenhos) simbólicas (retas numéricas, tabelas, setas e símbolos) e verbais. Todo o tipo de representações apoiam a resolução de tarefas de modo a construir ou ilustrar objetos, conceitos e situações matemáticas (Bishop & Goffree, 1986; Bruner, 1999; Ponte & Serrazina, 2000; Serrazina, 2012; Thomas, Mulligan & Goldin, 2002). Estas representações podem ser trazidas pelos alunos ou pelos professores (Mitchell, Charalambous & Hill, 2014). Quando preparam e exploram tarefas, os professores devem reconhecer os prós e contras da utilização de determinadas representações no processo de ensino-aprendizagem e saber aproveitar as estratégias e representações dos alunos para promover ideias matemáticas (Ball et al., 2008; Isiksal & Cakiroglu, 2011; Lo & Luo, 2012; Stylianou, 2010).

No caso dos números racionais, é importante saber como os alunos usam as várias representações (ativa, pictórica, verbal, fração, numeral decimal, percentagem) e as relações que estabelecem, desenvolvendo uma compreensão dos objetos matemáticos e do conjunto numérico na sua globalidade (Barnett-Clarke, Fisher, Marks & Ross 2010; NCTM, 2007). A representação pictórica destes números é por vezes menorizada, mas o seu uso pode iluminar questões de natureza conceptual para alunos e professores (Cox, 1999; Ponte & Quaresma, 2011). Assim, os professores enfrentam o desafio de escolher as representações a usar nas tarefas e também explorar ideias matemáticas a partir de representações elaboradas pelos alunos (NCTM, 2007). Note-se que nem

sempre representações matematicamente “corretas” iluminam conceptualmente os processos e procedimentos realizados ou a realizar, e podem levantar desafios aos futuros professores e/ou levar os alunos a cometer erros, ao realizar conversões erróneas (Ferreira & Ponte, 2015).

No estudo de Stylianou (2010) tinha como objetivo analisar as ideias dos professores em torno das representações como processo de fazer Matemática e o seu papel no processo de ensino – aprendizagem. Para tal, entrevistaram 18 professores do ensino básico em diferentes fases do seu desenvolvimento profissional (desde 1 ano a 18 anos de experiência). Das entrevistas resultaram evidências de que os professores usam as representações em variadas situações do seu trabalho. Primeiramente os professores partiam da perspetiva de que as representações são produtos da resolução de problemas e que são um objetivo de aprendizagem apenas ao alcance dos alunos com melhores desempenhos. Segundo, para os professores as representações são produtos visuais, como desenhos e figuras ou esquemas. Ou seja, as representações são apresentações visuais de ideias matemáticas e não a ideia em si e tendem a ver as representações como formas informais de representar matemática. A ideia de as representações serem processos e uma prática matemática emerge, nos resultados, de modo menos acentuado. Assim, quando tal acontece, o autor infere que as representações podem ter um papel secundário na prática dos professores.

Stylianou (2010) tentou compreender qual o papel atribuído às representações nos diferentes momentos da aula. Para os professores entrevistados, no momento da proposta das tarefas consideram as representações como úteis para apresentar situações envolvidas nas tarefas ou os conceitos a aprender. Neste sentido, as representações são ferramentas usadas na explicação de ideias ou conceitos. No momento da exploração, dois terços dos professores afirmaram que poucas vezes solicitam aos alunos que representassem as suas ideias de múltiplas formas. Também não têm presentes os objetivos de aprendizagem relativos ao uso de representações e o papel que as diferentes representações podem ter no processo cognitivo durante a resolução das tarefas. No momento de discussão das tarefas não é evidente que os professores recorram a diferentes representações de modo intencional. De facto, estas são exploradas como mais uma resolução a discutir. Assim o autor sublinha a importância de se realizar um trabalho junto dos professores relativamente ao papel das representações e ao modo como o trabalho é realizado em torno destas (Stylianou, 2010). Em Portugal, Velez (2020) sublinha as mesmas necessidades. Relativamente aos futuros professores estas

questões ganham relevância, tanto do ponto de vista pedagógico, como matemático, onde o desafio se coloca na transformação entre representações (Ball, 2015) e no papel que podem ter nos diferentes momentos da prática letiva.

Assim, as representações exploradas, apresentadas e promovidas podem ser vistas pelos professores como produtos e processos. O processo de prever e explorar diferentes representações é uma tarefa desafiante. No caso dos números racionais estão envolvidas as diferentes representações mas também as representações relativas ao conjunto numérico sendo importante o estabelecimento de relações entre as várias representações. Nem todas as representações clarificam os conceitos e, por isso, os futuros professores devem reconhecer os prós e contras da utilização de determinadas representações no processo de ensino-aprendizagem e nos vários momentos da aula. Os consideram importante apresentar situações com representações pictóricas no momento da proposta das tarefas apoiando a compreensão das situações. Assim, são vistas como ferramentas na explicação de ideias ou conceitos. As representações pictóricas são pedidas com frequência no momento da exploração para apoiarem a explicação dos alunos. Os professores nem sempre estão para o papel das diferentes representações como processo cognitivo. No momento de discussão das tarefas as diferentes representações são exploradas intencionalmente.

2.3.4.3. *Conhecimento para explicar*

As explicações são um outro aspeto importante da comunicação. Explicar é um ato comunicativo que visa a clarificação de aspetos do pensamento matemático de um sujeito que podem não ser visíveis a outros. Tendo uma função essencialmente social, a explicação acaba por conduzir a uma maior clarificação conceptual do próprio sujeito (Yackel & Cobb, 1996). Explicar é um processo onde se estabelecem relações entre ideias matemáticas. Para estabelecer relações entre ideias matemáticas podem ser usadas metáforas e analogias ou outras representações que permitam aos alunos compreender os conceitos e procedimentos (Medeiros & Ponte, 2010).

Para Leinhardt (1993), explicar (em inglês, *instructional explanation*) é uma prática difícil mas fundamental na prática letiva, quaisquer que sejam as suas características, pois dá-se explicações quando se realiza a introdução de um novo conteúdo, responde a questões dos alunos, apoia os alunos em dificuldades e ajuda os alunos a compreender os seus erros e concepções erróneas (Ferreira & Ponte, 2016). Assim, é fundamental que o professor tenha um conhecimento matemático de natureza

conceptual e que considere os seus alunos nessa explicação (Charalambous, Hill, & Ball, 2011; Serrazina, 2012). Uma explicação incoerente, incompleta ou pouco clara pode influenciar negativamente a aprendizagem dos alunos. Por outro lado, uma “boa explicação” é significativa e de fácil entendimento. Para além de apoiar a aprendizagem dos alunos, uma boa explicação pode eliminar ideias, significados e processos assim como uma metacognição de comportamentos de pensar e trabalhar nesta disciplina, estabelecendo normas e uma cultura de sala de aula constituindo uma identidade relativa à Matemática.

No estudo de Tobias (2012), a autora discute a importância do rigor da linguagem no apoio aos alunos nas suas aprendizagens. Assim, neste estudo os futuros professores analisam episódios críticos de sala de aula transcritos e posteriormente discutidos, sendo o seu objetivo compreender e desenvolver a linguagem utilizada pelos futuros professores para definir a unidade no conjunto dos racionais (frações). Esta importância dada à linguagem do professor decorre da relevância que a comunicação assume no processo de ensino-aprendizagem. Como refere a autora, uma linguagem matemática correta e compreendida, “é fundamental para a compreensão e o trabalho, com sucesso, dos números racionais na forma de fração, onde o uso de uma linguagem correta é muito importante” (p.2).

Realizar uma explicação acarreta o uso de representações como ferramentas, e associa quatro fatores: Conhecimento sobre o conteúdo, reflexão ativa e intencional sobre a prática e a criação de imagens (Charalambous, Hill & Ball, 2011). Apesar da importância desta prática, pouco se sabe sobre a performance dos professores. Interessados em melhorar as futuras práticas dos futuros professores, Charalambous et al., (2011) consideram que é possível aprender a explicar e que ao trabalhar estes aspetos podemos contribuir para a melhoria da prática letiva. Assim, os autores começaram por definir os aspetos presentes numa explicação bem estruturada e clara. Assim, o futuro professor deve: (i) ter o público em mente, usando uma linguagem apropriada aos alunos; (ii) definir de forma adequada os principais termos e conceitos; (iii) destacar as principais ideias matemáticas explicando o processo de pensamento passo-a-passo; (iv) usar exemplos adequados e representações modelando procedimentos e conceitos; e (v) esclarecer a questão em análise, mostrando como deve ser respondida (Charalambous et al., 2011). Em seguida, foram analisados os processos e produções das sessões de formação e as entrevistas realizadas, antes e depois da intervenção, a 16 futuros professores (K-8). Com os resultados obtidos definiram quatro

perfis diferentes no que respeita às aprendizagens realizadas na melhoria da compreensão do conteúdo, a saber: (i) conhecimento substantivo, sendo o conhecimento sobre factos procedimentos, conceitos, e as ligações entre eles; (ii) conhecimento sintático, onde temos conhecimento sobre o que se faz numa boa prática de explicação e assim que prática pode ser gerada; (iii) uso das representações como ferramentas de explicação (usando múltiplas representações e exemplos que ilustrem e conectem ideias, clarificação das representações escolhidas e opções realizadas, apresentar o pensamento numa série de passos lógicos, assegurar que passos intermédios e decisões não sejam deixados de forma implícita); (iv) imagens alternativas do raciocínio na matemática (quer no geral, quer relativamente à prática de explicar; e (v) melhoria na apreciação do papel das representações visuais na desconstrução e explicação do seu pensamento); (vi) reflexão sobre a prática, que contribui para a compreensão e melhoria da prática de explicar; (vii) desenvolvimento da confiança e autonomia em promover explicações. Note-se que nem todos melhoraram os seus desempenhos e um dos casos ficou mais inseguro mas passou a identificar os aspetos a desenvolver (Charalambous, Hill & Ball, 2011).

Assim, fazer explicações com qualidade implica ter conhecimento sobre o conteúdo, reflexão ativa e intencional sobre a prática e a criação de imagens do pretendido. As explicações têm o papel de clarificar aspetos do pensamento matemático nem sempre visíveis aos alunos. Para a elaboração de explicações os futuros professores devem considerar os conhecimentos dos seus alunos e explicitar as principais ideias matemáticas usando exemplos e representações das ideias e conceitos matemáticos construindo um discurso claro e estruturado.

2.3.4.4. Conhecimento sobre ações dos professores na prática pedagógica

Para o futuro professor agir, primeiro tem que ter uma visão do ambiente de aprendizagem que quer constituir. Mason e Mary (2000), fazem uma reflexão em torno do conhecimento necessário para agir durante o processo de ensino aprendizagem. Os autores defendem que o *saber para* (em inglês, *knowing-to*) é um conhecimento que é ativado no momento em que é necessário. Tradicionalmente, na formação de professores inicial e contínua, de modo a contribuir para o conhecimento necessário para o ensino foca-se no conhecimento do conteúdo (dos factos), no conhecimento sobre como ensinar (técnicas e capacidades) e no conhecimento sobre o porquê (debruçando-se nas narrativas do esperado sobre a ação do professor e sobre a ação de

modo a reconstruir as ações desenvolvidas). Em contraponto, os autores consideram que será de investir no conhecimento necessário para agir no momento, o que implica que os professores estejam alertados para determinada situação onde devem ter uma determinada ação que conhecem e que já realizam “sem pensar nisso” (Mason & Spence, 2000).

Assumindo que existem crenças dos professores, mais ou menos produtivas, a NCTM (2014) publicou o livro *“Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em Matemática”*. Neste, os autores identificam 8 práticas do ensino da Matemática sublinhando a importância de os professores: estabelecerem metas matemáticas claras sobre o que os alunos devem aprender definindo progressões de aprendizagem e recorrendo a estas para a tomada de decisões; envolverem os alunos em tarefas desafiantes e abertas de modo a promover a resolução e discussão de diferentes resoluções desenvolvendo o raciocínio e a resolução de problemas; recorrer e promover a múltiplas representações matemáticas envolvendo os alunos no estabelecimento de conexões entre representações; favorecerem uma comunicação matemática promovendo a discussão recorrendo a argumentos comparando diferentes ideias, argumentos e abordagens à mesma tarefa; colocarem questões que promovam a construção de ideias e relações matemáticas; partirem da compreensão conceptual de modo a gradualmente serem fluentes no recurso a procedimentos e que o façam de modo flexível; apoiem um esforço consequente na aprendizagem matemática; e partam das evidências recolhidas para avaliar a progressão dos alunos e tomarem decisões sobre o ensino.

No entanto, os autores assumem que os professores tomam decisões a partir das ideias que têm sobre o ensino e a aprendizagem. Estas ideias podem ser mais ou menos produtivas e andam em torno de diferentes aspetos, a saber: (i) a aprendizagem deve ter o seu centro no treino e memorização de procedimentos ou na compreensão dos conceitos e procedimentos, através da resolução de problemas, do raciocínio e comunicação; (ii) os alunos só conseguem aprender a aplicar matemática depois de dominarem as capacidades básicas ou, pelo contrário, os alunos aprendem matemática explorando e resolvendo tarefas contextualizadas e matemáticas; (iii) o papel do professor é dizer aos alunos as definições e regras e ainda como devem usar para resolver problemas matemáticos e o aluno memorizar o ensinado de modo a resolver eficazmente tarefas rotineiras, quer em trabalhos de casa como nos testes ou pelo contrário o papel do professor é envolver os alunos e propor tarefas ricas matematicamente e os alunos devem ser ativos na resolução das tarefas dando-lhes

sentido e recorrendo a diferentes estratégias e estabelecendo conexões intradisciplinares e com os contextos externos à disciplina; (iv) o professor guia os alunos passo-a-passo na resolução dos problemas ou encoraja e favorece a resolução de tarefas desafiantes levando os alunos a serem perseverantes.

É importante conhecer as ideias que os professores têm sobre as práticas que querem desenvolver e como as desenvolvem. Com um olhar na prática dos professores e procurando sublinhar aspetos centrais do conhecimento prático dos professores na promoção de uma aprendizagem cooperativa, Chapman (2004) apresenta um estudo que se debruça sobre o conhecimento dos professores sobre as interações entre alunos na aprendizagem da Matemática. Com o foco nos professores do ensino básico que pretendem desenvolver uma prática promotora da cooperação entre alunos, a autora recolheu dados através de entrevistas e da observação das práticas de 10 professores e futuros professores. Os resultados indicam que o conhecimento dos professores sobre os papéis dos alunos, sobre as tarefas promotoras de aprendizagem Matemática e sobre as ações que os professores devem desenvolver na promoção do trabalho cooperativo entre alunos, está relacionado com a promoção de um ambiente de aprendizagem facilitador da interação dos alunos. Todos os professores consideravam importante que os alunos aprendessem Matemática em interação com os seus pares, uma vez que permite que comparem experiências e ideias, estabeleçam conexões entre as ideias matemáticas, coloquem questões entre si, estejam motivados e confiantes, desenvolvam a sua autonomia e aprendam a avaliar as ideias matemáticas apresentadas. Na prática pedagógica, os professores desenvolveram essencialmente cinco tipos de experiências de aprendizagem: aprender a resolver problemas, discutindo diferentes estratégias em pequeno e grande grupo; exploração autónoma de situações onde estão envolvidos novos conceitos para os alunos; apresentação à turma onde eram discutidas as estratégias apresentadas; desenvolvimento de investigações/ projetos recorrendo a tecnologia, usando a arte como ponto de partida ou desenvolvendo essas atividades fora da sala de aula. Durante as aulas observadas, para apoiar os alunos e de modo a promover a interação entre alunos, os professores observavam e ouviam as estratégias dos alunos, questionavam e davam informação quando os alunos não conseguiam avançar no seu trabalho, apoiavam e desafiavam os alunos a construir as suas ideias, recorriam a perguntas tipo para apoiar e desafiar os alunos na resolução das tarefas e promoviam um relação de confiança e cooperação entre os alunos. Assim, a autora evidencia as relações existentes entre as ideias que os professores sobre o processo-

ensino-aprendizagem e as ações desenvolvidas de modo a alcançar a visão que tinham (Chapman, 2004).

No estudo desenvolvido por Alsawaie e Alghazo (2010) procurou-se utilizar as potencialidades de uma plataforma de *e-learning* onde foram discutidas as características da abordagem do NCTM, analisadas as interações na sala de aula através de episódios gravados em vídeo e estabelecendo relações entre as interações e abordagem do NCTM. Para tal os futuros professores deveriam identificar o que é importante no ensino, quais os princípios do ensino e estabelecer conexões entre os eventos e realizar reflexões depois do visionamento dos filmes. Os resultados apoiam o uso da análise de aulas em vídeo na formação de professores. A intervenção ajudou os futuros professores a melhorar a sua análise do ensino da matemática nos seguintes níveis: (i) a prestar atenção às interações de sala de aula; (ii) a desenvolver a capacidade de prestar atenção à aprendizagem do aluno quando se observa e a analisa uma aula; (iii) os futuros professores aprenderam a interpretar os acontecimentos da sala de aula ao invés de apenas descrever e criticar ou elogiá-los; (iv) aprenderam a fazer conexões entre os eventos de sala de aula e a visão de NCTM. A ligação entre as especificidades da sala de aula com uma visão mais ampla de um novo de ensino e aprendizagem reflete uma compreensão profunda desta visão e mais consciência do que significa implementar as normas na sala de aula (Alsawaie & Alghazo, 2010).

No entanto, como apontam Marbach-Ad e McGinnis (2009) quando os futuros professores começam a sua experiência inicial de estágio são confrontados com ideias, ensinamentos e filosofias diferentes das suas e das defendidas pelos seus professores na formação inicial. Neste contexto os futuros professores têm que se posicionar sobre o que pensam sobre o ensino e aprendizagem ainda numa fase em que são simultaneamente professores e alunos. Ao longo da sua carreira as suas ideias vão sendo colocadas em causa muitas vezes pelas dificuldades encontradas com o tempo, diferenças entre as suas ideias e as dos colegas com quem tomam decisões sobre a prática pedagógica a desenvolver e dificuldades no desenvolvimento das práticas desejadas sem o apoio de mentores ou supervisores. Por isso, importa que os futuros professores tenham uma visão sustentável sobre como querem ensinar e promover a aprendizagem desejada para agirem e refletirem sobre as ações que desenvolveram na gestão da aprendizagem e na promoção do ambiente de aprendizagem desejado. Assim, relacionado com o conhecimento sobre as tarefas e sobre os alunos, o conhecimento sobre as ações a desenvolver na promoção e gestão da aprendizagem e do ambiente de

aprendizagem é fundamental na concretização da prática pedagógica dos futuros professores, principalmente quando querem desenvolver práticas pedagógicas mais complexas onde são propostas tarefas desafiantes e abertas e quando querem promover uma aprendizagem cooperativa.

Assim, para constituir um ambiente de aprendizagem com determinados propósitos o futuro professor deve ter uma visão do ambiente que querem constituir e prever as ações necessárias para promover aprendizagem. De modo a promover a construção de ideias e relações matemáticas deve colocar questões que promovam a comunicação, o raciocínio matemático na resolução de problemas e apoiem os alunos em dificuldades partindo das evidências para avaliar a progressão dos alunos e tomarem decisões sobre o ensino. De modo a promover de um ambiente de aprendizagem facilitador da interação dos alunos devem estimular que os alunos coloquem questões entre si e aprendam a avaliar as ideias matemáticas. Na resolução de problemas, importa que o professor esteja atento que deve promover a discussão de diferentes estratégias em pequeno e grande grupo chegando a conclusões comuns.

2.3.5. Conhecimento sobre o currículo e avaliação

O conhecimento sobre o currículo e o conhecimento sobre a avaliação de aprendizagens podem ser vistos como transversais e integrados no conhecimento sobre os alunos, as tarefas e a comunicação e ações do professor. Neste sentido, Santos e Cai (2016) trazem-nos uma reflexão importante e pertinente sobre a investigação levada a cabo no campo do currículo e avaliação, estabelecendo pontes entre as duas dimensões pedagógico-didáticas e discutindo o conhecimento dos professores sobre currículo e avaliação. No que respeita ao conhecimento sobre o currículo importa que os professores reconheçam as características de determinadas abordagens, identificando quais os princípios do ensino destas e dos documentos curriculares, por exemplo os programas de Matemática de 2007 e 2013 ou a abordagem seguida pelo NCTM (2007) (Alsawaie & Alghazo, 2010). Assim, para os professores compreenderem e criticarem os documentos curriculares, de modo a terem um papel ativo na sua implementação, devem ter conhecimento em todas as dimensões do conhecimento já descritas. Note-se que o professor tem de conhecer os documentos curriculares para além dos ciclos que leciona, perspetivando o currículo, o ensino e a aprendizagem como um processo contínuo e onde as ideias matemáticas se vão ampliando relacionando-as (Serrazina, 2012). Assim, o conhecimento sobre o currículo está relacionado com a compreensão

que o professor tem sobre a adequação de um determinado documento ou orientação curricular ao ensino e a aprendizagem de temas específicos. O professor deve conhecer e mobilizar o conteúdo dos documentos curriculares, quer do ponto de vista horizontal como verticalmente, de modo a que possa selecionar e desenhar tarefas adequadas às orientações dos documentos e antecipar ideias matemáticas dos alunos e apoiar e desafiar a aprenderem o esperado (Shulman, 1986).

Mas esta transposição entre o conhecimento sobre o currículo e a prática docente, nem sempre é linear. Chapman (2012) alerta para a importância das ideias e atitudes dos docentes no que respeita aos documentos curriculares em processo de implementação, ou seja, na apropriação de novas intenções curriculares. A autora conclui que podem acontecer três cenários possíveis. Se os professores tiverem uma visão alinhada com uma determinada abordagem curricular naturalmente desenvolvem práticas em linha com as ideias curriculares. No sentido inverso, se a visão dos professores for contrária ao preconizado por novos documentos curriculares, mais dificilmente a sua prática pedagógica se transformará para estar em linha com o prescrito. Mesmo quando existem materiais de apoio, avaliação externa e programas de formação contínua, que sustentem as ideias preconizadas nos novos documentos, os professores podem ignorar as ideias sobre *como* e o *que* os alunos devem aprender e os professores ensinar. No entanto, existem professores que apesar de não concordarem se sentem obrigados a incorporar as ideias e, assim, podem observar-se algumas mudanças.

Ainda assim, é importante, quer na formação inicial, quer na formação contínua, promover o desenvolvimento do conhecimento sobre o currículo. Para orientar este processo pode ser interessante considerar que os professores e/ou futuros professores podem estar em diferentes níveis de desenvolvimento sendo considerados consumidores autónomos, consumidores-autores e autores autónomos dependendo da relação que estabelecem com os documentos curriculares prescritos e como os mobilizam na sua prática pedagógica. Assim, o professor que é um autor autónomo planeia, desenha e desenvolve percursos de aprendizagem com poucos ou nenhuns materiais curriculares como brochuras e manuais e não são mais que interpretações dos documentos curriculares (Santos & Cai, 2016).

Relativamente ao conhecimento sobre a avaliação de aprendizagens importa sublinhar que na avaliação está implicada uma tomada de decisão sobre o que é relevante para determinado fim (Santos, 2011). Para avaliar é importante que se faça

uma recolha de informação para posteriormente interpretar e tomar decisões sobre o processo ensino-aprendizagem a partir da informação e análise. Importa referir que

A confiança na avaliação assenta exatamente na crença de que a objectividade pode ser alcançada, que os erros ou os sucessos numa prova se ficam a dever ao saber do aluno e não a factores ocasionais ou circunstanciais, aleatórios, portanto. (Pinto & Santos, 2006, p.1)

Sendo condição indispensável na prática pedagógica, pelo peso social que tem, não só influencia as relações entre professores e alunos, mas também as próprias relações entre pares. Deste modo, é uma dimensão integrada na prática pedagógica onde os resultados da avaliação não são neutros no contexto escolar. Para Santos e Pinto (2006) a avaliação é uma das tarefas profissionais que se interrelaciona com outras como a gestão pedagógica, o compreender as crianças e o apoio nas suas dificuldades. A tarefa de avaliar torna-se mais visível nos momentos formais de avaliação, que ocorrem ocasionalmente, o que contribui para uma visão restrita da tarefa de avaliar. “Tal assim é que muitas vezes nem merece destaque em termos da formação inicial de professores” (p. 26).

Segundo Santos e Pinto (2006), a forma como o professor age, no que respeita aos processos de avaliação, está interrelacionada com a visão que tem sobre a relação entre a avaliação e a aprendizagem, do seu papel como avaliador e com a visão que tem sobre o papel do erro no processo de ensino-aprendizagem. A forma como o professor usa os resultados da avaliação é fundamental nas ações que, tanto professores como os alunos, desenvolvem no processo de ensino-aprendizagem. O processo de avaliar qualquer trabalho só pode ser executado se o professor tiver uma visão ou “modelo de referência” prévio, ainda que se possa modificar durante o processo. Esta visão implica diversos elementos: (i) o produto norma, ou seja, a interpretação que faz de um programa, das ideias que tem de um desempenho de excelência e ainda o modo como é desenvolvido o trabalho em torno da tarefa de avaliação. Assim, a norma depende do conhecimento do professor sobre o currículo, o esperado dos alunos e as propósitos da tarefa a propor; (ii) os produtos esperados, dependem das expectativas que o professor tem sobre os alunos tendo criado hipótese sobre a resposta de um aluno; (iii) a escala de medida, de onde o professor parte para tomar uma decisão (Santos & Pinto, 2006).

Importa também sublinhar que existem diferentes modalidades de avaliação. Santos (2011) distingue as modalidades considerando a função, ou funções, para a qual

é pensada e executada a avaliação. Assim, a avaliação formativa e sumativa diferem nos seus propósitos mas não no seu tipo de processos ou instrumentos. Relacionada com a dimensão social da avaliação, temos a função certificativa e prognóstica da avaliação sumativa e subjacente à dimensão pedagógica, a função de promoção das aprendizagens da avaliação formativa. Importa sublinhar que atualmente, emerge a importância de uma avaliação ao serviço da aprendizagem.

Santos e Cai (2016), no que respeita à avaliação fazem depender o sucesso do processo de avaliação do ambiente de aprendizagem constituído e do papel do professor no processo de avaliação. No entanto, é incontornável a necessidade de um conhecimento profundo sobre o currículo e a avaliação para levar a cabo um processo de avaliação adequado e de qualidade. Os autores consideram que esta premissa é problemática uma vez que os estudos que têm sido realizados mostram que os professores têm lacunas no seu conhecimento substantivo e processual sobre avaliação. Ou seja, não conhecem os conceitos relativos à avaliação e têm dificuldade em mobilizar a formação que tiveram para a sua prática.

Um outro aspeto importante no conhecimento sobre a avaliação é a sua estreita relação com a capacidade de ouvir e interpretar as ideias dos alunos (em inglês, *noticing*). Ou seja, o conhecimento que os professores têm sobre os alunos e as suas aprendizagens traz implicações nos julgamentos que devem fazer sobre o que os alunos sabem e aprendem. Também as questões relativas ao esperado com determinadas tarefas estão implicadas no processo de avaliação. Estas questões também emergem em estudos que se debruçam especificamente sobre futuros professores (Boerst, Blunk, Shaughnessy, Farmer, DeFino, Pfaff & Pynes, 2020; Santos & Cai, 2016;).

No que respeita às estratégias de avaliação para promover o envolvimento dos alunos no processo de aprendizagem importa considerar três aspetos. (i) os contextos que permitem o desenvolvimento de determinadas estratégias; (ii) as características das estratégias em si; e (iii) a eficácia das estratégias usadas na aprendizagem matemática. Como estratégias fundamentais temos o feedback e os mecanismos de autorregulação. De modo a que os processos de autorregulação da aprendizagem e que o feedback sejam de qualidade, por parte do professor aos alunos ou entre alunos, importa que os professores tenham claras para si as condições para o desenvolvimento dos processos de avaliação (Semana & Santos, 2011). Também é importante que os critérios sobre o que esperam que os alunos aprendam e evidenciem do aprendido, sejam compreensíveis e significativos, quer para o professor, mas mais importante, do ponto de vista do

desenvolvimento da aprendizagem, para os alunos. Note-se que ao feedback está subjacente a natureza da comunicação e as ações do professor na promoção da aprendizagem (Santos & Cai, 2016; Santos & Santos, 2019, 2020). No que respeita aos processos de autorregulação para além das questões cognitivas e emocionais também o ambiente de aprendizagem que é promovido é importante para que estes processos de desenvolvam (Santos & Cai, 2016).

2.3.5.1. Abordagem dos números racionais em diferentes documentos curriculares

A abordagem dos números racionais do NCTM

No espaço internacional as orientações emanadas pelo NCTM são uma referência, quer para a elaboração de documentos curriculares nacionais em vários países, como para a conceção de formação inicial e contínua de professores. O documento *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2007), aconselha a que durante o processo de aprendizagem o aluno gradualmente formalize o seu conhecimento, resolvendo problemas, explorando os conhecimentos que já tem e construindo novos. As tarefas propostas devem ser significativas e relacionadas com a sua realidade, sublinhando-se essa importância com as crianças mais novas. Para além de problemas são também sugeridas outras tarefas de natureza mais aberta como as investigações matemáticas. No centro da abordagem curricular do NCTM estão as discussões coletivas das várias estratégias formais e informais dos alunos, construindo-se um conhecimento coletivo e estabelecendo conexões entre o conhecimento matemático e não matemático e entre ideias matemáticas. Deste modo, num contexto de ensino-aprendizagem de cariz exploratório os alunos desenvolvem a sua comunicação matemática e o seu raciocínio matemático quando confrontados com uma grande diversidade de tarefas.

Relativamente ao trabalho com os números racionais, estes devem partir de uma compreensão profunda das diferentes representações na forma de fração, decimal e percentagem. Para trabalhar a compreensão das operações aconselham o uso de diversas representações ou modelos facilitando a compreensão das operações. Para tal, aconselham proporcionar tarefas que permitam a atribuição de significado ao numerador, ao denominador e à equivalência de frações, encorajando os alunos a recorrerem a referências e à realização de estimativas. Pretende-se, ainda, o desenvolvimento de flexibilidade com o uso das diversas representações dos números

racionais de modo a contribuir para a compreensão da proporcionalidade. Recomendam também que, nos primeiros anos, não se dê ênfase no desenvolvimento de procedimentos gerais para resolver problemas com decimais e frações, mas sim que, no decurso da escolaridade, os alunos adquiram as bases conceptuais dos números racionais, começando a resolver problemas utilizando estratégias e representações diversas, quer tenham sido desenvolvidas pelos alunos ou pelos colegas, emergindo de discussões coletivas. Estas estratégias devem ser exploradas de modo a promover o desenvolvimento do sentido de número, a compreensão das propriedades das operações e os seus significados e relações existentes entre as várias operações. De modo a desenvolver o sentido de número é dada relevância à estimativa como ferramenta importante para avaliar a plausibilidade dos cálculos, podendo estes, ser realizados na calculadora, mentalmente ou com papel e lápis.

Analisando o aconselhado para as diferentes etapas educacionais, o documento recomenda que o trabalho com o conjunto dos números racionais comece desde o jardim-de-infância. O currículo do NCTM (2000) prevê que se comece desde logo a trabalhar, representando, as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$. Contudo, apenas no 3.º ano os alunos conhecem a representação decimal dos racionais estabelecendo relações entre as representações fracionária, decimal e percentagem. Do 3.º ao 5.º ano os alunos devem representar racionais em retas e outras representações de modo a comparar racionais nas suas diversas representações, desenvolvendo o seu sentido de número neste conjunto numérico. É neste momento do currículo que os alunos deverão começar a adicionar e subtrair números racionais, mas ainda recorrendo a estratégias informais, usando modelos, pontos de referência e “formas equivalentes” (p.172). Do 6.º ao 8.º ano aprofundam-se os conhecimentos sobre frações decimais e percentagens relacionando-se as representações e promovendo o raciocínio proporcional na resolução de problemas. Os vários significados dos racionais e das operações aprofundam-se procurando diversificar os contextos e as tarefas a propor aos alunos, permitindo dar significado às operações, usando as várias propriedades das operações e reconhecendo as relações entre as mesmas. Mais uma vez, dá-se ênfase à estimativa de modo a desenvolver o espírito crítico relativamente aos resultados obtidos nas operações que podem ser resolvidas recorrendo à calculadora, ao cálculo mental e escrito. É também nesta fase que os alunos ganham destreza com o cálculo algorítmico com as várias representações dos racionais.

Assim, pode-se concluir que o documento curricular da NCTM dá grande atenção ao desenvolvimento do sentido de número, à compreensão das operações, seus significados e relações entre as várias operações, com recurso a tarefas significativas. Denota-se, também, uma ênfase numa prática exploratória onde a exploração de representações diversas se faz num crescente de formalização. A progressão culmina na compreensão dos algoritmos tradicionais, como estratégia adequada na resolução de determinados problemas, conectando a Matemática com o quotidiano.

Programa de Matemática para o Ensino Básico de 2007

Em 2007 no âmbito do Plano de Ação da Matemática foi homologado um novo programa de Matemática. Para uma gestão curricular, com uma forte aposta no ensino da Matemática para todos, o documento curricular recomendou a proposta de diversos tipos de tarefas, quanto à sua natureza, deixando claro os seus propósitos. Também era aconselhado o apoio aos alunos partindo dos conhecimentos prévios dos alunos permitindo uma exploração, consolidação e aprofundando novos conceitos. Ao desenvolver a capacidade de resolução de problemas, os alunos deveriam desenvolver a comunicação matemática, o raciocínio matemático e estabelecendo conexões entre diferentes tópicos e temas em contextos matemáticos e não matemáticos, conhecidos ou não. Assim, era sugerido que se proporcionem percursos de aprendizagem que permitissem a construção dos conceitos essenciais constituindo-se uma prática de ensino-aprendizagem exploratório (ME, 2007).

A jusante do trabalho a realizar nos tópicos relativos aos números racionais, existiam objetivos gerais relativos ao trabalho a realizar no tema Números e Operações onde, entre outros aspetos, era sublinhada a importância de conhecer os factos e procedimentos básicos efetuando os algoritmos de cálculo rotineiro. Para uma melhor aprendizagem os alunos deveriam compreender as razões dos algoritmos, usar as diversas representações dos números, passando de uma representação para outra, e compreender e utilizar os números e operações em contextos matemáticos, não matemáticos e no seu quotidiano. O recurso às estratégias mais adequadas para o efeito também era importante assim como o desenvolvimento de uma atitude crítica relativamente aos resultados obtidos.

No que diz respeito ao ensino-aprendizagem dos números racionais, o programa (ME, 2007) tinha como ideias fundamentais a exploração paralela entre as representações decimal e fracionária devendo o aluno passar de uma representação para

a outra e utilizar a representação mais adequada à situação colocada. Neste sentido era sugerido que representassem os números racionais na reta numérica. Quando comparado com o documento curricular anterior, o ensino dos números racionais saiu reforçado, principalmente no 1.º ciclo. Os números racionais, na sua representação decimal, sempre tiveram tradição de trabalho no 1.º ciclo, mas relativamente às frações o seu trabalho era diminuto, trabalhando apenas as frações unitárias como operadores (metade, terça parte, quarta parte e décima parte) (Ponte, 2006c). Sendo o desenvolvimento do sentido de número racional uma questão fundamental, o trabalho com racionais deveria ser realizado logo nos dois primeiros anos. Com uma abordagem intuitiva, em situações simples, de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, sendo aconselhado o uso de vários tipos de representações, dever-se-ia chegar à simbolização da fração. Ainda no 1.º ciclo, mas nos dois últimos anos, o estudo deveria ser mais aprofundado, propondo situações problemáticas que permitam trabalhar outros significados dos racionais (quociente, parte-todo e operador) e introduzindo a representação decimal. Relativamente a esta forma de representação dos racionais, pretendia-se o desenvolvimento do cálculo mental e escrito e a realização dos vários algoritmos com decimais. Era ainda referida, e sublinhada, a importância de trabalhar as várias representações dos racionais em simultâneo (ME, 2007).

No 2.º ciclo, sublinhava-se a importância do trabalho a realizar na compreensão dos múltiplos significados dos racionais (quociente, parte todo, razão, medida e operador), assim como, das diversas representações, tendo em vista o desenvolvimento do sentido de número. Deviam-se trabalhar os números racionais como um conjunto onde coexistiam representações fracionárias equivalentes, explorando este facto em diversos contextos e representações. Assim, a representação fracionária ganhava importância relativamente ao trabalho realizado no 1.º ciclo, sendo os algoritmos apresentados com números racionais não negativos na forma de fração. Neste ciclo os alunos deveriam, ainda, alargar a compreensão das propriedades das operações com este conjunto numérico, apreciar a ordem de grandeza, mas acrescentando-se a compreensão dos efeitos das operações nestas relações de grandeza e desenvolver a capacidade de estimação, do cálculo aproximado e o espírito crítico relativamente aos resultados das operações efetuadas. As percentagens deviam ser exploradas nas suas diversas representações, traduzindo-se para a representação fracionária e decimal, e vice-versa. O cálculo mental e escrito era desenvolvido utilizando as várias representações dos números racionais (fracionária, decimal e numeral misto) de forma apropriada.

Contudo, e em problemas do cotidiano, importava privilegiar a representação decimal, por ser a forma mais utilizada na realidade portuguesa.

No 3.º ciclo, o estudo dos números racionais e suas operações era alargado, considerando-se os números racionais, positivos e negativos. Os aspetos relacionados com a abordagem a seguir mantinha-se, e pretendia-se que os alunos compreendessem a relação do conjunto numérico dos números racionais com os restantes grupos, assim como a sua integração no conjunto $\mathbb{R}$. A representação na reta numérica continuava a ser importante, sendo sublinhada a importância da representação na reta das dízimas infinitas periódicas. Era sublinhada a importância de comparar os números racionais representados na forma de fração e decimal e o trabalho relacionado com a representação de números racionais em notação científica. A compreensão das propriedades das operações em $\mathbb{Q}$ continuava a merecer relevância.

Desta forma, o programa de matemática de 2007 deixava bem clara a importância do trabalho com as operações para o desenvolvimento do sentido de número [racional], estando enquadrado com a investigação nacional e internacional, que revela que deve ser dada a oportunidade aos alunos de construir relações entre os números e as operações pensando e agindo sobre os números relacionando-os com as operações envolvidas (Dolk, 2009; NCTM, 2000, 2007).

O Programa e Metas para a Matemática (2013)

Num processo em contraciclo com o preconizado internacionalmente, em 2013 um outro programa foi aprovado. Inicialmente surgiram as metas curriculares que tinham como objetivo clarificar o pretendido pelo programa de 2007. No entanto foram identificados conflitos nas abordagens, como era exemplo a organização das metas propostas com um foco na estruturação do algoritmo standard logo desde os primeiros anos do 1.º ciclo e da sua utilização em problemas de passos. Talvez por isso, foi homologado um novo documento curricular denominado de Programa e Metas para a Matemática.

Nas páginas iniciais do programa, no seu enunciado, há várias ideias consensuais com outros documentos curriculares. Assim, o desenvolvimento da compreensão, o gosto pela Matemática, a importância da resolução de problemas, do raciocínio e da comunicação são ideias-chave. Contudo, nas metas curriculares apesar de estar sublinhada a importância da resolução de problemas, da comunicação matemática e do raciocínio matemático como “indispensáveis ao cumprimento dos objetivos elencados”

(p. 1), a leitura do documento mostra que não há referência explícita à comunicação matemática e ações dos alunos relacionadas com estas capacidades como por exemplo: explicar, argumentar, e questionar. Ao contrário, predominam verbos como “Definir”; “Designar” e “Identificar” que correspondem a ações dos alunos cognitivamente diferentes do ponto de vista do desafio com o pressuposto numa abordagem focada na resolução de problemas, na comunicação matemática e no desenvolvimento do raciocínio matemático. No que respeita à abordagem às ideias matemáticas a ensinar e aprender o documento assume que as opções a realizar são da responsabilidade do professor, conferindo uma autonomia que pode ser difícil de levar a cabo uma vez que as metas curriculares prescritas apontam para uma abordagem associada a um saber descontextualizado e precocemente formalizado, quando comparadas com outros documentos curriculares nacionais e internacionais. Note-se que o documento é prescrito por anos de escolaridade ao contrário do programa anterior deixando menos autonomia ao professor para uma gestão curricular por ciclos.

Relativamente ao domínio Números e Operações é previsto o estudo das operações elementares sobre frações desde o 1.º ciclo e completa-se a construção dos números racionais, introduzindo os negativos no 2.º ciclo, onde todas as operações são ensinadas no 5.º ano de escolaridade. Os alunos deverão, à entrada do 3.º ciclo, mostrar fluência e desembaraço na utilização de números racionais em contextos variados, relacionar de forma eficaz as suas diversas representações (frações, dízimas, numerais mistos, percentagens) e tratar situações que envolvam proporcionalidade direta entre grandezas. Estão também previstas as potências de base racional positiva e expoente natural, sendo outros expoentes mais gerais introduzidos no 3.º ciclo e no Secundário (MEC, 2013). Ou seja, quanto ao conceito de número racional, não é referido o trabalho a realizar inicialmente com abordagens informais. De outro modo, não são consideradas as experiências das crianças nos primeiros anos no que respeita a situações de partilha equitativa de unidades discretas onde fica ausente a articulação com a divisão inteira. A opção é de apresentar a fração como a representação de uma medida de uma grandeza (p. 9). Importa referir que a percentagem, como representação dos números racionais, está ausente sendo tratada no domínio da Estatística.

Assim, podemos verificar que houve uma rotura de abordagens quando analisamos e comparamos o programa de 2007, em linha com a abordagem do NCTM, e o programa e metas de 2013. Neste enfatiza-se a fluência do cálculo algorítmico dando um forte cunho instrumental à aprendizagem matemática.

O processo de Autonomia e Flexibilidade Curricular e a abordagem das Aprendizagens Essenciais

A última e mais recente mudança curricular aconteceu em 2018 e fez emergir algumas das ideias já apresentadas na abordagem do programa de 2007, mas num movimento curricular de carácter iminentemente pedagógico e menos didático introduzindo duas novas “camadas” de documentos curriculares. Num currículo com diferentes documentos curriculares orientadores podemos considerar como camada superior, enquanto referencial principal, o Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.

Como documento estrutural e fundamental para o ensino e aprendizagem da Matemática temos as Aprendizagens Essenciais. O conceito de “aprendizagens essenciais” no Decreto-Lei n.º 55/2018 de 6 de julho estabelece que as “aprendizagens essenciais” são o “conjunto comum de conhecimentos a adquirir, identificados como os conteúdos de conhecimento disciplinar estruturado, indispensáveis, articulados conceptualmente, relevantes e significativos, bem como de capacidades e atitudes a desenvolver obrigatoriamente por todos os alunos em cada área disciplinar ou disciplina, tendo, em regra, por referência o ano de escolaridade ou de formação”. Assim, como finalidades para o 2.º ciclo temos: a) Promover a aquisição e desenvolvimento de conhecimento e experiência em Matemática e a capacidade da sua aplicação em contextos matemáticos e não matemáticos e b) Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de reconhecer e valorizar o papel cultural e social desta ciência. Dando resposta a estas finalidades são elencadas as práticas de aprendizagem que consideradas como essenciais onde podemos perceber que estão presentes as mesmas ideias do documento do NCTM (2007) e do programa de Matemática para o ensino básico de 2007. Deste modo sublinha-se a importâncias de os alunos explorarem, analisarem e interpretar situações de contextos variados desenvolvendo uma aprendizagem matemática com sentido. Também é referida a importância de propor e realizar tarefas de natureza diversificada, o recurso a diferentes materiais e recursos sublinhando uma abordagem baseada na resolução de problemas e em outras tarefas de aprendizagem.

As Aprendizagens Essenciais foram definidas por anos de escolaridade partindo do programa de 2013 (simultaneamente em vigor) onde voltamos a encontrar, tal como em 2007, a referência da importância de explorar os diferentes significados dos números racionais (parte-todo, quociente, medida e operador) em contextos matemáticos e não

matemáticos. Também é sublinhada a importância da exploração e relacionar as diferentes representações dos números racionais (fração, decimal e percentagem, incluindo o numeral misto) e as propriedades das operações, desenvolvendo o cálculo mental, o cálculo algorítmico e estimativas plausíveis. Note-se que os números racionais negativos deixam de ser considerados como aprendizagens fundamentais para o 2.º ciclo.

Segundo Ferreira (2019) ainda que o programa e metas (2013) esteja em vigor, os restantes documentos desafiam os professores que ensinam Matemática a repensar e a concretizar práticas pedagógicas inclusivas. Neste sentido, o Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho, vem conceder às Escolas e aos professores autonomia para, de modo flexível, darem respostas educativas adequadas ao contexto e às necessidades de todos e de cada aluno. Cada equipa pedagógica deve estabelecer prioridades na gestão do currículo e deste modo as Escolas e os professores constituem-se como autores das soluções mais adequadas a contextos que são necessariamente diferentes, nomeadamente quanto aos recursos a mobilizar ou a criar.

Os desafios colocados pelo atual enquadramento legal e a assunção, pelas Escolas e pelos professores, da responsabilidade da gestão curricular têm necessariamente implicações nas práticas pedagógicas de todos os profissionais, a abordar os conteúdos associando-os a situações e problemas presentes no quotidiano; prever a experimentação de técnicas, instrumentos e formas de trabalho diversificados; organizar e desenvolver atividades cooperativas de aprendizagem e promover atividades que permitam ao aluno fazer escolhas, confrontar pontos de vista e resolver problemas (Decreto-Lei n.º 55/2018). Na Matemática, estes desafios implicam o estabelecimento de conexões entre disciplinas e entre as diferentes aprendizagens do espaço disciplinar. Implicam, ainda, a constituição de uma prática centrada nos alunos, onde a diferenciação pedagógica assume um papel preponderante para uma educação inclusiva. Em linha com o preconizado no programa de 2007, de modo à explicitação do que é esperado de cada aluno, importa desenvolver práticas de avaliação integradas e coerentes com a prática letiva, onde se inclui a diversificação de instrumentos de avaliação *de* e *para* as aprendizagens, sendo a natureza formativa da avaliação fundamental (Ferreira, 2019). Assim, o ciclo curricular volta a estar alinhado com as orientações internacionais para o ensino e aprendizagem da Matemática.

Assim, o conhecimento sobre o currículo e o conhecimento sobre a avaliação de aprendizagens podem ser vistos como transversais e integrados no conhecimento sobre

os alunos, as tarefas e a comunicação e ações do professor. Relativamente ao conhecimento sobre o currículo importa que os professores reconheçam as características de determinadas abordagens, identificando quais os princípios do ensino destas e dos documentos curriculares para então professores compreenderem e criticarem os documentos curriculares e terem um papel ativo na sua implementação. O conhecimento sobre o currículo está relacionado com a compreensão que o professor tem sobre a adequação de um determinado documento ou orientação curricular ao ensino e a aprendizagem de temas específicos. No entanto, nem sempre os professores se reveem nas ideias inscritas nos documentos curriculares podendo acontecer três cenários possíveis. Os professores com uma visão alinhada, naturalmente, desenvolvem práticas concordantes com as ideias curriculares. Se não concordarem ou não transformam as suas práticas ou se o fazem, fazem-no parcialmente e porque consideram que são obrigados a fazê-lo. Mesmo quando existem mecanismos de acompanhamento e formação que apoiem o processo de mudança curricular os professores podem ignoraram as ideias sobre *como* e o *que* os alunos devem aprender e os professores ensinar. Por isso na formação inicial e contínua é importante promover o desenvolvimento de ferramentas para o desenvolvimento do conhecimento sobre o currículo considerando que existem docentes que podem estar em diferentes níveis de autonomia relativamente à gestão curricular a realizar na sua prática pedagógica. No que respeita ao conhecimento sobre a avaliação de aprendizagens importa sublinhar que integrada na prática pedagógica deve existir a recolha de informação para interpretar e tomar decisões sobre o processo ensino-aprendizagem a partir da informação analisada. Mais uma vez a visão que o professor tem sobre a prática pedagógica influencia a forma como o professor usa os resultados da avaliação e vice-versa. O processo de avaliar qualquer trabalho só pode ser executada se o professor tiver uma visão ou “modelo de referência” prévio do que pensa fazer e do que espera desenvolver com alunos. Também o sucesso do processo de avaliação depende do ambiente de aprendizagem constituído e do papel do professor no processo de avaliação. No entanto, é incontornável a necessidade de um conhecimento profundo sobre o currículo e avaliação para levar a cabo um processo de avaliação adequado e de qualidade. No entanto os estudos mostram que os professores têm fragilidades no conhecimento sobre avaliação. Ou seja, não conhecem os conceitos relativos à avaliação e têm dificuldade em mobilizar a formação que tiveram para a sua prática. No que respeita às estratégias principais de avaliação podemos considerar o feedback e os mecanismos de autorregulação. Os

processos de autorregulação da aprendizagem estão estreitamente relacionados com o conhecimento sobre os alunos, sobre as tarefas e também com o ambiente de aprendizagem que é promovido. O feedback de qualidade está subjacente à natureza da comunicação e as ações do professor na promoção da aprendizagem para além do conhecimento sobre os alunos.

Analisando quatro abordagens curriculares, uma internacional e três nacionais, podemos concluir que os professores terão que se posicionar essencialmente entre duas abordagens possíveis. As abordagens socioconstrutivistas do NCTM, do programa de Matemática de 2007 e a recente mudança curricular de 2018, onde o aluno é ativo na construção do conhecimento fazendo-o com os seus pares e com o apoio e desafio do professor. Esta abordagem tem como base uma Matemática para todos onde a diferenciação pedagógica através da diversificação de tarefas e a resolução de problemas com contextos próximos dos alunos é central. A segunda abordagem curricular do programa e metas de 2013 está mais próxima das ideias de instrução e onde as regras de cálculo e sua aplicação estruturam a aprendizagem.

2.3.6. O desenvolvimento do conhecimento de futuros professores para a prática pedagógica

A formação inicial tem um papel importante no desenvolvimento do conhecimento para ensinar Matemática pois proporciona oportunidades de aprendizagem que podem promover capacidades autoformativas e reflexivas que permitem que o conhecimento se desenvolva ao longo da profissão. É de extrema complexidade preparar os futuros professores para que compreendam, apreciem, e interiorizem a complexidade da sua prática profissional desenvolvendo uma atitude de constante questionamento, permitindo um desenvolvimento holístico do conhecimento sobre ensinar e ensinar matemática (Chapman, 2012). O desafio é ajudar os professores a integrar no seu conhecimento sobre o conteúdo e processo, sobre as questões relativas aos seus alunos e às orientações curriculares. Ou seja, uma abordagem geral no sentido de a aprender a aprender, envolvendo-os num ciclo de experiência/ exploração, reflexão construindo conhecimento. Além do conhecimento sobre Matemática, sobre o currículo e o conhecimento profissional há que valorizar a pessoa e o profissional em desenvolvimento. Para tal é importante que se considere o futuro professor como uma pessoa, com as suas dimensões profissionais e pessoais, dentro de contextos institucionais, sociais e profissionais num processo de desenvolvimento profissional e

das suas capacidades de reflexão, resolução de problemas e investigação da sua prática (Chapman, 2012).

A formação inicial de professores deve focar-se na sensibilização para princípios e não em induzir futuros professores em determinados métodos que se consideram bons ou maus. Assim, o desafio está em lidar com as ideias que os futuros professores desenvolveram acerca de determinados métodos sem considerá-los de bons ou maus (Ponte & Chapman, 2008). Wilkins (2008) refere a importância de os programas de formação partirem das ideias dos professores e analisarem-nas, de forma a compreender e a desenvolver as suas práticas letivas. Assim, aumentar o nível de conhecimento matemático, sem ajudar a desenvolver as conceções e atitudes relativamente à Matemática, num contexto de ensino-aprendizagem, tem um efeito limitado na aprendizagem do conteúdo pois são “as crenças e atitudes dos professores que em última instância dão forma às práticas letivas, podendo enriquecer e aprimorar, podem não ser conduzidas pelo conhecimento de conteúdo” (Wilkins, 2008, p. 158).

Quando os futuros professores iniciam a sua formação já têm uma extensa experiência enquanto alunos, limitando as suas perspetivas, construindo o seu conhecimento sobre o ensino da Matemática e têm uma determinada perspetiva sobre a natureza da matemática (Ponte & Chapman, 2008). Tais factos implicam desafios aos programas de formação de futuros professores na constituição de oportunidades que permitam a reconstrução do seu conhecimento inicial e a compreensão do ensino da matemática (Ponte & Chapman, 2008). Como resposta a estes desafios propõe-se a reflexão como dispositivo de desenvolvimento do conhecimento. A tendência atual será fazer da reflexão, do conteúdo e pedagogia aspetos-chave para enquadrar experiências de aprendizagem e facilitar o desenvolvimento de conhecimentos futuros professores sobre o ensino da Matemática, apontando para dimensões importantes da prática profissional que os programas de formação de professores devem abordar de forma diversa. Podemos então concluir que a integração de conteúdo e pedagogia, o ensino na formação inicial deve ser coerente com o currículo proposto, e a promoção da reflexão e participação na aprendizagem parecem ser aspetos estabelecidos (Ponte & Chapman, 2008). No sentido da integração do conteúdo e pedagogia e promovendo a reflexão podem ser várias as questões a analisar com os futuros professores desenvolvendo o seu conhecimento para um ensino exploratório. Desde o desenvolvimento de conhecimento sobre determinadas abordagens, a questões relativas à comunicação e dinâmica de sala de aula, muitos são os aspetos a analisar. Neste sentido podemos encontrar vários

estudos que o que têm em comum é o facto de utilizarem ferramentas tecnológicas como meios para aceder à sala de aula, ainda na formação inicial, quer a distância (Alsawaie & Alghazo, 2010; Llinares & Valls, 2009) ou presencialmente (Norton, McCloskey & Hudson, 2011; Scherrer & Stein, 2012), e de se realizar a negociação de significados sobre os acontecimentos nas aulas de Matemática (Llinares & Valls, 2009), desenvolver análise crítica de situações de sala de aula, antecipando e analisando os raciocínios dos alunos (Ferreira, & Ponte, 2014; Norton, McCloskey & Hudson, 2011) e discutindo com base num quadro teórico aspetos da prática (Alsawaie & Alghazo, 2010; Thanheiser, Olanoff, Hillen, Feldman, Tobias & Welder, 2015).

Partindo dos resultados do estudo de Wilkins (2008) e refletindo sobre os estudos já revistos, emerge a importância do papel da universidade na constituição do conhecimento e na transformação de ideias gerais sobre a Matemática e o seu processo de ensino-aprendizagem que podem ser limitados. No processo de formação inicial de professores podem ocorrer vários conflitos entre teoria e prática. Por exemplo, podem surgir conflitos entre aquilo que os futuros professores consideram importante aprender e aquilo que realmente aprendem; entre a realidade descrita na universidade e o contexto escolar; entre as perspetivas dos intervenientes no processo de ensino-aprendizagem e outros atores da sociedade geral (ministros da educação, gestores escolares, encarregados de educação, os media e o público geral) (Ponte & Chapman, 2012). A esta complexidade acresce a problemática de se analisar a formação inicial com ênfase em diferentes aspetos do currículo de Matemática, bem como nas aprendizagens dos futuros professores e as oportunidades que lhes são oferecidas (Ponte & Chapman, 2012; Chapman, 2012).

Porque se dá grande relevância ao papel da universidade na construção do conhecimento para ensinar matemática e existem dificuldades de adoção das práticas advogadas nas universidades, Gainsburg (2012), no seu estudo analisa as questões entre o conhecimento ensinado nas universidades e o conhecimento utilizado na prática letiva. O objetivo do seu estudo era compreender o processo que conduz à aprendizagem de um conceito ou método na universidade e a sua adoção na sala de aula do 12.º ano. Também as razões pelas quais algumas práticas são adotadas e outras não, é alvo da sua atenção. Para tal, tentou, primeiramente, identificar os aspetos dos cursos de formação inicial que podem melhorar as práticas a adotar. Tais práticas têm as características da prática de ensino exploratório advogada pela NCTM mas nem sempre são adotadas pelos professores, independentemente do nível de experiência sendo importante, no

entanto, que a universidade compreenda quais os esforços que deve enveredar de modo a contribuir eficazmente (Gainsburg, 2012). Da revisão de literatura realizada pelo autor, são identificadas três razões para a não adoção das práticas de ensino exploratório: a) limitações nos conhecimentos dos professores; b) as concepções que têm um papel no bloqueio da generalização deste tipo de prática letiva; c) o papel da cultura escolar. O autor afirma que existem poucos estudos que explorem o impacto dos cursos de formação inicial e acompanhem os futuros professores na fase final da sua formação até aos primeiros anos de prática, tentando compreender como, e se, os professores implementam as práticas advogadas pelos cursos de formação (Gainsburg, 2012). Assim, no seu estudo estabelece descritores de uma aula com base na abordagem da NCTM, partindo de um estudo piloto realizado, e partindo do pressuposto que os recém-graduados (na sua maioria) não colocam em prática os aspetos essenciais das práticas trabalhadas na universidade. Parte-se então, do conceito de prática onde se entrelaça a ação com regularidade, perceção e contexto e onde as ferramentas conceptuais (*conceptual and practical tools*) são princípios, quadros teóricos e ideias sobre o ensino e aprendizagem que guiam a prática. Conceptualiza-se, ainda as ferramentas práticas como práticas letivas, estratégias e recursos que não servem um conjunto de conceitos, mas que estão mais ligadas a decisões do momento e de utilidade imediata. Relativamente às concepções dos professores, estas são construídas (ou modificadas) numa relação dialética com a prática, mas os professores apenas mudam as suas crenças depois de mudar a sua prática e ver resultados positivos nos alunos. O autor revê que as concepções estão situadas dentro dos contextos, atividades e culturas em que o professor as constrói e, portanto, diferem entre situações, o que pode explicar aparentes inconsistências. E que por outro lado, as concepções interagem com os contextos de ensino e são produzidas em ações situadas, motivando mudança e objetivos. No caso das concepções descontextualizadas, estas são estáveis (Gainsburg, 2012). Para o autor e numa perspetiva sociocultural a visão de aprender a ensinar a partir de um fenómeno, cognitivo e individual deixa de fazer sentido, sendo entendido como uma transformação na participação numa comunidade de práticas. A universidade e a escola são os principais contextos de aprendizagem da cultura e da organização social do ensino e, portanto, ao moverem-se da universidade para a escola, os futuros professores passam por um processo de re-aculturação, ajustando-se a novas metas e expectativas e tendo que negociar novos papéis (Gainsburg, 2012).

Do estudo de Gainsburg (2012) onde participaram 19 professores tendo-se realizado entrevistas e observado uma aula de cada professor resultaram dados interessantes. Assim, os professores sentiram desconforto no uso de determinadas estratégias que aprenderam na universidade e tiveram dificuldade em adaptar o que aprenderam ao novo contexto, sentido que tinham pouca prática apesar de terem vontade de aplicar. Apesar de terem interiorizado algumas ferramentas conceptuais, naquele momento, ainda não foram capazes de gerar ferramentas práticas para aproveitar os conceitos interiorizados. Para colmatar tais dificuldades os recém-graduados usufruíram de atividades destinadas a difundir ferramentas conceptuais, de modo a apoiar os professores de imediato tendo sido identificadas como atividades bastante positivas. Como aspetos positivos do papel das universidades os professores apontaram como importantes as ferramentas teóricas e práticas que foram disponibilizadas. Estes resultados vão em linha com a trajetória de aprendizagem para professores, onde se começa com o domínio de ferramentas específicas das práticas e rotinas, a partir das quais os professores gradualmente constroem uma ampla compreensão dos conceitos de educação e a capacidade de usá-los para gerar instrução e planos para uma variedade de contextos (Gainsburg, 2012).

Embora este estudo não desafie o valor do ensino de conceitos gerais para os futuros professores, mostra que, sem aplicação prática significativa e com o devido acompanhamento, a sua capacidade de capitalizar os conceitos é severamente limitada. O autor sublinha que a universidade, na ótica dos professores, foi importante porque se formou um forte conhecimento fundamental das práticas, a crença de que essas práticas representam um bom ensino, e o desejo de implementar, pelo menos, algumas das práticas. Também como aspeto positivo foi sublinhado que os participantes não identificam aspetos do curso como inúteis ou inadequados para o ensino atual, sendo que alguns retomaram à universidade para frequentar outros cursos pós-graduados (Gainsburg, 2012). Os resultados indicam que não é necessário revolucionar nem alterar a formação inicial. A universidade e a escola desempenham papéis cruciais, e mudanças em ambas as arenas que facilitam a captação das práticas pretendidas, mas as mudanças de paradigma podem não ser necessárias na ótica dos professores. Os cursos de formação inicial podem constituir uma base sólida e necessária para ensinar mas é insuficiente para a maioria dos diplomados para implementar as práticas no terreno. Os participantes sugerem que os cursos se devem estruturar com mais oportunidades de usar essas práticas (Gainsburg, 2012).

O primeiro momento de transição entre a comunidade escolar da universidade e a comunidade escolar da escola é realizada no momento do estágio e onde o papel do professor cooperante é fundamental na aculturação no seio da nova comunidade escolar. O estágio está entre as oportunidades mais importantes que os futuros professores têm para lidar com a Matemática no contexto da prática docente. Também é uma oportunidade importante para os futuros professores de observarem de perto como o conhecimento matemático é utilizado no ensino pelo professor cooperante. O estágio acompanhado por um professor experiente proporciona uma oportunidade importante para o futuro professor, aumentando a sua compreensão da matemática e do ensino. As interações entre o estagiário e o professor cooperante fornecem um mecanismo óbvio para a aprendizagem ocorrer (Peterson e Williams, 2008).

O estudo de Peterson e Williams (2008) focando-se na experiência de estágio dos futuros professores pretende compreender como se desenvolve o conhecimento para ensinar Matemática através da interação com o professor cooperante. Os autores também discutem que a literatura indica que o momento do estágio é o momento onde ocorrem mais mudanças, mas o porquê e como, ainda não está claro. Assim, considerando as interações com os professores cooperantes como fundamentais para o processo de mudança, os autores consideraram que era nas interações e conversas que têm com os futuros professores que ocorrem mudanças apesar de nestas interações os professores cooperantes tenderem a dominar a discussão. O artigo analisado centra-se em dois pares onde são analisados dois estagiários com perfis idênticos (passado, notas) e dois professores cooperantes também com perfis idênticos, mas com posturas muito diferentes. Os dados foram recolhidos a partir de duas entrevistas a cada um dos participantes antes e depois do estágio e foram audiogravadas todas as conversas entre o estagiário e o professor cooperante. Foi ainda realizado um pequeno questionário de acompanhamento do processo de orientação. Os resultados foram bem diferentes nos dois pares, quer ao nível dos temas centrais de conversação que representavam diferentes abordagens para a Matemática e para o ensino (um mais focados no controle do comportamento dos estudantes e raramente falavam sobre a Matemática para o ensino e o outro par focava-se nos alunos e na sua participação ativa nas aulas e na matemática). Assim, concluíram que as conversas eram conduzidas pelas crenças dos professores cooperantes e as necessidades dos futuros professores. Estas experiências contrastantes sugerem que o estágio pode ter um efeito profundo sobre a compreensão

dos futuros professores de Matemática no e para o ensino (Peterson & Williams, 2008; Ponte & Chapman, 2008).

Assim, a formação inicial tem um papel importante no desenvolvimento do conhecimento dos futuros professores quando proporciona oportunidades de aprendizagem que podem promover capacidades autoformativas e reflexivas que permitem que o conhecimento se desenvolva ao longo da profissão. O desafio é apoiar e desafiar os futuros professores a aprender a aprender, envolvendo-os num ciclo de experiência/ exploração, reflexão construindo conhecimento. A formação inicial de professores deve focar-se na sensibilização para princípios e lidar com as ideias que os futuros professores desenvolveram ao longo da sua vida como alunos e estudantes. Ou seja, importa aumentar o nível de conhecimento matemático e desenvolver ideias e atitudes positivas relativamente à Matemática e alargar as suas perspetivas sobre a natureza da matemática implicando desafios aos programas de formação de futuros professores. Para tal importa reconstruir o seu conhecimento inicial e a compreensão do ensino da matemática integrando conteúdo e pedagogia de modo coerente com o currículo proposto nacional e internacionalmente. O primeiro momento de transição entre a comunidade escolar da universidade e a comunidade escolar da Escola é realizada no momento do estágio e onde o papel do professor cooperante é fundamental na aculturação no seio da nova comunidade escolar. O estágio acompanhado por um professor experiente pode proporcionar uma oportunidade para o futuro professor, aumentando a sua compreensão da Matemática e do ensino. As interações entre o estagiário e o professor cooperante fornecem um mecanismo para a aprendizagem podendo ter focos diversos. Por isso, é importante a articulação entre os contextos para que haja um foco fundamental no processo de ensino-aprendizagem.

Em síntese, nesta seção o foco está no conhecimento didático sobre os números racionais. O conhecimento didático é sustentado, influencia e é influenciado pela visão que o futuro professor tem sobre a Matemática que ensina e como a ensina. Com a sua visão, o futuro professor constitui um repertório de representações sobre a prática pedagógica podendo ter mais ou menos sucesso na sua concretização. As experiências que vai tendo como aluno, antes e durante a formação inicial e na prática de ensino supervisionada pode permitir a (re)construção desta visão. Dimensões fundamentais do conhecimento didático do futuro professor são o conhecimento sobre as tarefas, os alunos e a comunicação e ações na prática pedagógica. Transversalmente e de modo integrado temos as questões relativas ao currículo e avaliação. O conhecimento didático

do futuro professor sobre as tarefas implica ser capaz de analisar, selecionar, desenhar e sequenciar tarefas, estabelecendo um percurso de aprendizagem, reconhecendo as tarefas que influenciam determinadas de aprendizagem. Ao redesenhar as tarefas deve cuidar de não alterar a natureza das tarefas considerando os propósitos definidos. Por fim, deve ser capaz de resolvê-las recorrendo a diferentes estratégias. No ensino-aprendizagem dos números racionais importa que o futuro professor reconheça que este conjunto numérico deve ser trabalhados com problemas com contextos próximos dos alunos de natureza mais aberta e desafiante de modo apoiar a compreensão das regras algorítmicas e o desenvolvimento do sentido de número e de operação neste conjunto numérico. As tarefas devem implicar múltiplas representações e uma variedade de estratégias de cálculo que têm implícitas as propriedades das operações e os factos sobre as quantidades envolvidas. Relativamente ao conhecimento sobre os alunos, os professores devem ser capazes de antecipar e identificar as dificuldades e erros comuns dos alunos, quando ouvem e interpretam os seus pensamentos. O futuro professor deve também saber antecipar as resoluções dos alunos em tarefas específicas e o que estes consideram desafiante e interessante ou confuso. No que respeita às dificuldades recorrentes com o tema dos números racionais, o futuro professor deve ser capaz de prevenir e explorar erros relativos às grandezas envolvidas neste conjunto numérico bem como apresentar, explorar e relacionar diferentes representações e apresentar e explorar situações onde estão envolvidos os diferentes significados dos números racionais na forma de fração e os significados e implicações das operações com números racionais. Também importa uma progressiva formalização da linguagem, naturalização de procedimentos e regras mobilizáveis na resolução de problemas tornando flexível o cálculo com este conjunto numérico. No que respeita à comunicação, entre as ações do professor temos o questionamento que é um aspeto estruturante. Podem ser analisados o tipo de questões que o professor faz e quando faz ou o foco das questões sendo que o futuro professor deve estar atento quer aos propósitos do seu questionamento, quer ao foco que terá nas suas questões. Relativamente às representações exploradas, apresentadas e promovidas importa que estas possam ser vistas como produtos e processos. O processo de prever e explorar diferentes representações na resolução de tarefas é um trabalho desafiante e os futuros professores devem estar alerta para a pertinência do recurso a determinadas representações. No caso dos números racionais estão envolvidas as diferentes representações (ativa, verbal, pictórica e simbólica) mas também as representações

próprias do conjunto numérico (fração, numeral decimal e percentagem) sendo importante o estabelecimento de relações entre todos os tipos de representações. O terceiro aspeto da comunicação são as explicações. Estas importam para clarificar aspetos do pensamento matemático que podem não ser visíveis para os alunos. Assim, importa que o professor tenha um conhecimento matemático de natureza conceptual e seja rigoroso na linguagem usada. No que respeita aos futuros professores, estes devem considerar os conhecimentos dos seus alunos e estar preparados para explicitar as principais ideias matemáticas usando exemplos e representações das ideias e conceitos matemáticos estruturando um discurso claro. Finalmente, para constituir um ambiente de aprendizagem com propósitos claros, o futuro professor deve ter uma visão do ambiente que quer constituir. De modo a promover a construção de ideias e relações matemáticas deve colocar questões que promovam a comunicação, o raciocínio matemático na resolução de problemas e apoie os alunos em dificuldades partindo das evidências para avaliar a sua progressão dos alunos e tomar decisões sobre o ensino. De modo a promover um ambiente de aprendizagem facilitador da interação dos alunos deve estimular que os alunos coloquem questões entre si e aprendam a avaliar as ideias matemáticas. Ou seja, ao resolver problemas, deve promover a discussão de diferentes estratégias em pequeno e grande grupo chegando a conclusões matemáticas comuns. De modo integrado com as restantes dimensões temos o conhecimento sobre o currículo e o conhecimento sobre a avaliação de aprendizagens onde importa que o futuro professor reconheça as características de determinadas abordagens, identificando quais os princípios do ensino destas e dos documentos curriculares de modo a posicionarem-se sobre adequação de um determinado documento ou orientação curricular ao ensino e a aprendizagem de temas específicos. No que respeita ao conhecimento sobre a avaliação de aprendizagens o futuro professor deve ter uma visão clara do que fazer e do que espera desenvolver com alunos. Ou seja, importa que, para além de conhecer os conceitos relativos à avaliação, deve ser capaz de levar a cabo as principais estratégias de avaliação: o feedback e os mecanismos de autorregulação. Para além do conhecimento sobre os alunos e as tarefas, o feedback de qualidade relaciona-se com a comunicação e as ações do professor na promoção da aprendizagem e os processos de autorregulação da aprendizagem estão estreitamente relacionados com o ambiente de aprendizagem que é promovido. Por isso, a formação inicial tem um papel importante no desenvolvimento do conhecimento do futuro professor quando proporciona oportunidades de aprendizagem que podem promover capacidades autoformativas e

reflexivas que permitem que o conhecimento se desenvolva ao longo da profissão. O desafio é apoiar e desafiar o futuro professor a aprender a aprender, envolvendo-o num ciclo de experiência/ exploração, reflexão construindo conhecimento. Para tal, importa reconstruir o seu conhecimento inicial e a compreensão do ensino da matemática integrando conteúdo e pedagogia. No momento do estágio, onde o papel do professor cooperante é fundamental na aculturação à comunidade escolar, é importante que o foco fundamental esteja na reflexão sobre o processo de ensino-aprendizagem discutindo a Matemática, o seu ensino e a sua aprendizagem.

2.4. A prática pedagógica no ensino e aprendizagem dos números racionais

É importante analisar a prática letiva dos professores para compreender como atuam na sala de aula, para além do que são e do que sabem. Na verdade, o professor pode ter muito conhecimento matemático, pedagógico e didático e não mobilizar esse conhecimento. A prática de ensino-aprendizagem pode ser vista como um mediador entre as características do professor e as aprendizagens dos alunos. Ou seja, em vez de analisar as características do professor diretamente, podemos ver como essas características influenciam o modo como o professor ensina e, em correspondência, como os alunos aprendem (Wilkins, 2008). Na mesma linha de pensamento, Ponte e Serrazina (2004), assumindo as práticas profissionais dos professores como um dos fatores que mais influenciam a qualidade do ensino e da aprendizagem dos alunos, organizaram as mesmas em práticas letivas, práticas profissionais na instituição e práticas de formação, estando as práticas letivas relacionadas mais diretamente com a aprendizagem dos alunos, coexistindo com as restantes e relacionando-se. Mais tarde, Ponte, Quaresma e Branco (2012) referem que as práticas letivas na sala de aula são o resultado de uma construção conjunta de professor e alunos, referindo que os elementos estruturantes das práticas letivas em sala de aula são as tarefas exploradas, o discurso desenvolvido e as normas e papéis constituídos no processo de ensino aprendizagem, chamando a atenção para seis aspetos principais no estudo das práticas letivas:

1. Os motivos do professor, o modo como estes originam os objetivos que pretende alcançar e como são concretizados através de diversas ações profissionais;
2. O contexto social e o contexto educativo;
3. O contexto da turma;
4. O conhecimento profissional do professor;
5. O saber-fazer do professor;
6. A capacidade reflexiva do professor. (p.26)

A caracterização da prática docente tem sido alvo de grande atenção por parte da investigação em Educação Matemática, quer em Portugal, quer internacionalmente (Ponte, 2014). Identificando diferentes olhares sobre as práticas, Ponte et al. (2012) salientam as perspetivas cognitiva e sociocultural que apesar de terem aspetos distintos podem ser vistas como conciliáveis. Na perspetiva da Psicologia Cognitiva, procura-se a agenda do professor ou ainda as decisões e ações que toma, tendo por base o seu conhecimento, a sua visão do pretendido e os propósitos de ensino. Também nesta perspetiva a prática do professor pode ser analisada através da caracterização do modo como o professor dá resposta às situações no processo de ensino-aprendizagem. Ou seja, procura-se, por exemplo, caracterizar o tipo de questionamento criando categorias para os tipos de questões elaboradas. Na perspetiva sociocultural o olhar está na atividade desenvolvida pelo professor que pode ser decomposta em ações encadeadas e com um determinado foco. Assim o professor realiza uma tarefa porque tem uma razão ou um conjunto de razões para o fazer (Ponte et al., 2012). Nesta perspetiva, Saxe (1999) define as práticas como um conjunto de atividades rotineiras, ou seja, que acontecem com frequência e reconhecíveis individualmente e socialmente no quotidiano. Neste sentido Ponte e Chapman (2006) defendem o carácter rotineiro das práticas mas consideram relevante considerar as razões das opções incluindo aspetos da perspetiva cognitiva. Corroborando a visão de que é possível combinar a perspetiva cognitiva e sociocultural, Schoenfeld (2000) apresenta um modelo de análise da prática do professor com níveis de análise diferentes. Por um lado procurou identificar as ações dos professores quando planeia as aulas e como as estrutura e, por outro lado procura compreender como e porquê o faz.

Nos últimos anos, a investigação realizada em Portugal tem dado bastante atenção às práticas de ensino em sala de aula, caracterizando-as em dois aspetos fundamentais: as tarefas propostas e a comunicação (Menezes, Tomás Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014; Ponte, 2005; Ponte, Quaresma, & Branco, 2012; Ponte & Serrazina, 2000). Podemos ainda olhar para as diversas ações que ocorrem em diferentes momentos. Estas ações, por sua vez, estão relacionadas com os propósitos de ensino dos professores, ou seja, com o modo como consideram que deve ser desenvolvido o trabalho e as aprendizagens a desenvolver (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2014; Ponte, Mata-Pereira & Quaresma, 2013).

Especial atenção foi dada à prática de ensino-aprendizagem exploratória (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2014; Ponte, 2005) considerando as suas

potencialidades para a aprendizagem dos alunos. O foco de alguns estudos tem estado nas discussões coletivas (Ponte, Mata-Pereira & Quaresma, 2013) mas os restantes momentos da aula, também são determinantes para o sucesso na aprendizagem (Jackson, Garrison, Wilson, Gibbons & Shahan, 2013; Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008; Larsson, 2015). No entanto, no contexto escolar coexistem práticas diferentes, que se situam entre o ensino direto (Ponte, 2005), numa abordagem tradicional, e práticas de ensino-aprendizagem numa abordagem de cunho exploratório. Além disso, a estrutura de uma aula pode variar, com os diferentes momentos de trabalho organizados de diferentes modos, dependendo das características das tarefas, da comunicação constituída e dos papéis vividos por alunos e pelo professor (Ponte, 2005, 2014).

2.4.1. Tarefas matemáticas

Um dos elementos fundamentais na definição das práticas são as tarefas matemáticas (Ponte et al., 2012). Os alunos aprendem fazendo, refletindo e analisando criticamente o que fazem ou fizeram. Para tal importa propor tarefas que envolvam os alunos na atividade de pensar. Neste sentido uma tarefa pode ser proposta pelo professor ou pelo aluno e, pode iniciar o trabalho a realizar ou emergir no decurso da atividade (Bishop & Goffree, 1986; Christiansen & Walther, 1986; Ponte, 2005). Para Stein & Smith (1998)

uma tarefa é definida como um segmento da actividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular. A tarefa pode envolver vários problemas relacionados ou um trabalho prolongado, sobre um único problema complexo, tomando no máximo o período de uma aula (p.1).

Segundo Skovsmose (2000) para que os alunos aceitem o “convite” feito pelo professor e se envolvam na resolução das tarefas, estas devem ser matematicamente válidas, ou seja, importa que tenham características qualitativas que: considerem as experiências e predisposições dos alunos e levem os alunos a apreciar a atividade de *fazer* Matemática (vivenciando a Matemática como uma actividade humana permanente); sejam desafiantes; promovam a compreensão dos tópicos envolvidos; promovam o estabelecimento de conexões entre ideias matemáticas ou entre ideias matemáticas e não matemáticas, estimulem a formulação e resolução de problemas e desenvolvam o raciocínio matemático e a comunicação sobre Matemática (NCTM, 1994, 2007).

Ponte (2005) apresenta, a partir de duas dimensões fundamentais (grau de desafio matemático e o grau de estrutura), um quadro organizador dos diferentes tipos de tarefas e estabelece os fins a que cada tarefa pode dar resposta. Ou seja, consoante a experiência matemática dos alunos as tarefas podem oferecer um grau de desafio matemático maior ou menor e dependendo da diretividade das questões ou condições envolvidas podemos considerá-las mais ou menos abertas. Deste modo, se uma tarefa for fechada e com um nível de desafio reduzido para os alunos, ou seja, o aluno sabe o processo a recorrer para a resolver trata-se de um *exercício*. Se a tarefa continuar fechada mas oferecer um nível de desafio elevado aos alunos então estamos perante um *problema*. No que respeita a tarefas mais abertas podemos estar perante dois tipos de tarefas. As tarefas mais abertas e com um nível reduzido de desafio são *tarefas de exploração* mas se forem mais desafiantes para os alunos então estamos perante *investigações*. Uma outra tarefa a considerar é o jogo. O jogo, é uma tarefa desafiante onde as regras estão bem definidas e cujo objetivo é encontrar uma estratégia que permita ganhar. Finalmente, o autor alerta que, há que cuidar do nível de desafio das tarefas uma vez que, se forem demasiado difíceis, os alunos podem desistir da sua resolução e se forem demasiado acessíveis deixam de dar resposta aos propósitos desejados e passar a definir-se como exercícios.

De modo a caracterizar a tipologia de tarefas também podemos considerar o contexto e a duração das tarefas. Existem tarefas de curta duração como os exercícios e tarefas que necessitam de mais tempo para a sua resolução como as investigações. Entre os exercícios e as investigações temos os problemas e as tarefas exploratórias. Existe ainda uma tarefa próxima das investigações, pelo seu nível de abertura e desafio, mas que tem como característica o tempo de resolução longo – *o projeto*. Os projetos são tarefas normalmente de longa duração, bastante desafiantes e que, sem uma monitorização atenta, podem levar os alunos a perder o foco ou a frustrar e, por vezes, a abandonar a tarefa. Para que tal não aconteça, estas tarefas requerem, do professor, um processo de apoio e orientação atento. A quarta dimensão respeita ao contexto. Todas as tarefas podem ter contexto matemático ou não matemáticos ou mais ou menos próximos/familiares aos alunos. De entre os contextos não matemáticos existem contextos realistas e semirealista. Estes últimos são frequentes nas tarefas propostas em Matemática e apesar de remeterem para situações do real podem ser pouco significativos para os alunos por remeterem para situações que não lhes são próximas e vividas no quotidiano (Ponte, 2005; Skovsmose, 2000).

A pertinência das tarefas depende fundamentalmente dos propósitos de ensino pelo que há que considerar diferentes tipos de tarefas matemáticas. Assim, a diversificação de tarefas é importante porque diferentes tarefas têm diferentes propósitos. As tarefas de natureza mais fechada (exercícios, problemas) são promovem o raciocínio matemático relacionando os dados e resultados. As explorações e os exercícios permitem que todos os alunos vivenciem situações de sucesso ganhando autoconfiança. As investigações e os problemas, por serem mais desafiantes promovem experiências matemáticas ricas. Quanto mais abertas as tarefas mais promovem o desenvolvimento de diferentes capacidades matemáticas e não matemáticas como autonomia, a perseverança e a capacidade de lidar com situações complexas. Quanto à diversificação do tipo de contexto, é importante sublinhar que a Matemática é usada em muitos contextos e que é importante que os alunos tomem consciência disso mesmo. Também é importante que compreendam a sua aplicação e o seu papel na modelação de situações reais. Para desenvolverem atividades próximas dos matemáticos, as tarefas com contextos matemáticos são cruciais.

Outros autores analisam as tarefas matemáticas por uma outra perspectiva. Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel (2008), consideram que existem exercícios e problemas. Os problemas são tarefas que: são desafiantes e não rotineiras, em linha com o pensamento de Ponte (2005); são compreensíveis pelo aluno ainda que a solução não seja imediatamente atingível; são intrinsecamente motivantes e estimulantes; podem ter mais do que um processo de resolução e podem integrar vários temas.

Para identificar diferentes tipos de problemas consideram como características distintivas os enunciado e o processo envolvido na sua resolução. No que respeita ao enunciado importa analisar se este fornece a informação necessária para a sua resolução ou não. A identificação e seleção dos dados torna a resolução das tarefas mais desafiante, uma vez que os alunos devem selecionar dos dados relevantes para a resolução do problema proposto.

No que respeita ao processo consideram três tipos de problemas: problemas de cálculo, problemas de processo e problemas abertos. Os problemas de cálculo implicam a mobilização de regras e procedimentos com os dados facultados e podem subdividir-se em problemas de um passo e problemas de mais passos. Estas tarefas têm como propósito a aplicação de conceitos e destrezas previamente aprendidos mas quando propostos exclusivamente pode levar os alunos a um entendimento superficial dos conceitos e que todos os problemas têm de ter uma solução e resolução única. Tendem,

também a associar determinadas palavras a uma operação. O segundo tipo de problemas são os problemas de processo onde não existe apenas uma operação(ões) apropriada(s). Estes problemas apresentam contextos mais complexos e requerem uma compreensão maior da Matemática, desenvolvem diferentes capacidades e podem ter como propósito introduzir novos conceitos ou a aplicação de conhecimentos e procedimentos matemáticos. Finalmente, os problemas abertos podem ter mais do que uma resolução e solução. O propósito deste tipo de problemas é promover a descoberta de regularidades e formular conjecturas, promovendo o desenvolvimento do raciocínio e a reflexão crítica. Este tipo de tarefas de tarefas não implicam que todos os alunos as desenvolvam com o mesmo nível de profundidade sendo pertinentes para alunos com diferentes tipos de conhecimentos e capacidades (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008).

Numa Escola onde a Matemática é para todos, os perfis dos alunos são diferentes no que respeita às aprendizagens realizadas, no modo de pensar e de aprender, assim como em aspetos culturais, valores e domínios da língua portuguesa. Assim, a diferenciação pedagógica torna-se cada vez mais um imperativo pedagógico. A diferenciação pedagógica através da individualização é importante (trabalhando individualmente dentro ou fora da turma com o aluno). No entanto a diversificação de experiências, onde o aluno aprende em conjunto com outros alunos, pode trazer benefícios maiores para o aluno e tornar a ação do professor mais exequível e produtiva. Deste modo, a diversificação do tipo de tarefas é importante, quer recorrendo a uma diferenciação pedagógica simultânea (diferentes grupos de alunos a realizarem tarefas diferentes, quer recorrendo a diferenciação pedagógica sucessiva (diversificando o tipo de tarefas ao longo do tempo) (Santos, 2008). É no efeito cumulativo da diversificação, quotidianamente, de exploração de diferentes tipos de tarefas que conduz ao desenvolvimento de ideias implícitas nos alunos sobre a natureza da Matemática (Stein & Smith, 1998). Note-se que para além de diversificar é importante que os diferentes tipos de tarefas sejam sequenciadas e que o seu conjunto, defina um percurso de aprendizagem coerente.

No entanto não basta selecionar tarefas válidas, também é importante cuidar no modo como são propostas, como se acompanha a realização da tarefas e como se conduz a discussão das diferentes resoluções resultantes são estes cuidados que podem influenciar o que alunos realmente aprendem. Para isso o professor deve selecionar ou (re)desenhar diferentes tarefas e sequenciar de modo a estabelecer um percurso de aprendizagem e deve também antecipar resoluções e prever a sua ação e a dos alunos

durante os diferentes momentos da aula. Deste modo estará mais preparado para, em sala de aula, tirar o partido definido para cada tarefa (Ponte, 2005; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Stein & Smith (1998) sublinham que as tarefas podem passar por três etapas onde o nível de desafio³ pode ser alterado: na primeira etapa as tarefas são desenhadas em brochuras, manuais ou outros materiais auxiliares do trabalho do professor com um determinado nível de desafio; na segunda etapa, quando o professor propõe as tarefas aos alunos o nível de desafio pode assumir outra natureza e por fim; na terceira etapa, quando os alunos trabalham nas tarefas estas podem ser experienciadas colocando outro nível de desafio. Os mesmos autores, Stein & Smith (1998), sistematizam quer os fatores associados à alteração do nível de desafio das tarefas, a saber: 1) Importa apoiar o raciocínio dos alunos sem que para tal os professores cedam e especificando procedimentos e passos a tomar; 2) São dados aos alunos os meios para avaliar o seu próprio progresso de modo a ser clara e constante a ênfase dos significados, conceitos ou compreensão e o que se espera dos alunos; 3) As tarefas baseiam-se no conhecimento prévio dos alunos sendo adequada para um dado grupo de alunos; 4) É estabelecido e mantido o tempo suficiente para explorar a tarefa – nem de menos nem de mais – permitindo o envolvimento apoiado em atividades de nível cognitivo elevado. 5) Na exploração em pequenos e grande grupo, o professor promove justificações, explicações e significados através de questões, comentários e ainda que sejam são aceites explicações incorretas ou pouco claras é dado feedback levando o aluno a chegar às ideias corretas e a comunicar claramente o pretendido; 6) O professor ou alguns alunos ilustram desempenhos de nível elevado e são estabelecidas conexões conceptuais.

Assim, um dos elementos fundamentais da prática pedagógica são as tarefas matemáticas. Para que as tarefas sejam matematicamente válidas têm que conter características que permitam o envolvimento dos alunos na atividade matemática de modo significativo para a compreensão dos tópicos envolvidos e o estabelecimento de conexões entre ideias, desenvolvendo as capacidades de resolução de problemas, raciocínio e a comunicação matemática. As tarefas podem ser organizadas quanto ao desafio matemático que colocam e quanto ao seu nível de abertura em: exercício, problema, tarefas de exploração, investigação, jogo e projeto. Quanto ao contexto, em

³ Os autores referem níveis de exigência cognitivo mas por uma questão de coerência de linguagem continuo a usar a designação de Ponte (2005)

tarefas com contexto matemático e não matemático e quanto à duração em tarefas de longa duração, duração intermédia e curta duração. As tarefas também podem ser classificadas apenas como exercícios ou problemas (problemas de cálculo, problemas de processo e problemas abertos) consoante o enunciado e os processos envolvidos. Na prática pedagógica o fundamental é a diversificação das tarefas e que estas sejam propostas em função do seu propósito concluindo-se que todas são pertinentes para a aprendizagem matemática numa Escola para todos devendo ser sequenciadas de modo a estabelecer um percurso de aprendizagem. Quando são propostas e exploradas com os alunos importa cuidar que o professor não altere a sua natureza. Para que tal não aconteça o processo de planeamento e antecipação das resoluções pode prevenir estas questões.

2.4.2. Comunicação: questionamento, representações e explicações

A comunicação é um elemento estruturante da prática letiva, próprio do processo de construção do conhecimento (Bishop e Goffree, 1986; Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014; Ponte, Quaresma & Branco, 2012; Yackel e Cobb, 1996). Comunicar é tornar algo em comum podendo-se fazer uso de gestos, representações ativas, pictóricas e simbólicas, explicações e questões. Na sua dimensão discursiva, a linguagem pode ser oral e escrita, incluindo a linguagem e as representações matemáticas (Ponte & Serrazina, 2000). A comunicação é incontornável na sala de aula independentemente do tipo de prática que seja constituída e cabe ao professor promover e gerir a comunicação. No processo de comunicação o professor está necessariamente atento por um lado a encorajar os alunos a partilhar as ideias e a usar essas ideias como base para a discussão prestando atenção a quem quando e o que comunica. Por outro lado, tem que assegurar que a comunicação é eficaz para os seus propósitos, ou seja, que sejam matematicamente produtivas do ponto de vista da profundidade e substância (Sherin, 2002; Martinho, 2007)

A comunicação ocorre em múltiplas direções: do professor para o(s) aluno(s), do aluno para o professor e de aluno para aluno(s). Assim, o discurso que se desenvolve na sala de aula pode ser unívoco, onde um dos intervenientes tem um discurso que prevalece sobre os demais ou dialógico, onde todos os intervenientes estão num nível de relativa igualdade (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008); Brendefur & Frykholm, 2000; Ponte, Quaresma & Branco 2012). De carácter unívoco temos a comunicação unidirecional onde os professores tendem a dominar as discussões,

fazendo perguntas fechadas, e permitindo poucas oportunidades para os alunos comunicarem as suas estratégias e ideias matemáticas (Brendefur & Frykholm, 2000). De caráter dialógico temos a comunicação contributiva, a comunicação reflexiva e a comunicação instrutiva (Brendefur & Frykholm, 2000). De outro modo, Ruthven, Hofmann, e Mercer (2011) consideram que a comunicação de caráter dialógico acontece quando o professor encoraja os alunos participar e considera as ideias apresentadas apoiando o desenvolvimento da compreensão. Por isso, sugerem que um discurso mais tradicional, do tipo IRA (Iniciação-Resposta-Avaliação), onde professor faz a pergunta, o aluno responde e, em seguida, o professor dá um feedback avaliando não é incompatível com a fala dialógica. Para isso, os autores colocam como condição o tipo de feedback que dê apoio e desafie a reflexão e argumentação (Ponte et al., 2012).

Questionamento. Um aspeto importante da comunicação é o questionamento, podendo distinguir-se entre diversos tipos de questões (Ponte & Serrazina, 2000) ou estudar diversos padrões de questionamento (Martinho, 2007; Menezes et al., 2014).

Partindo do trabalho de Love e Mason podemos, dependendo da razão pela qual se questiona, podem identificar-se diferentes tipos de questões: (i) Questões do tipo *inquirição*, quando o professor questiona para procurar que surja uma variedade de respostas legítimas; (ii) Questão do tipo *focalização*, quando o professor questiona para que os alunos deem atenção a um dado ou condição; e (iii) Questões do tipo *confirmação*, quando o professor questiona para obter a resposta conhecida e esperada (Ponte & Serrazina, 2000). Note-se que, complementarmente, pode existir lugar à negociação de significados matemáticos e a processos como redizer para apoiar o desenvolvimento da linguagem dos alunos. Neste sentido Menezes et al. (2014) salientam a importância de considerar aos propósitos dos professores para colocarem determinadas perguntas. Sendo as questões pedidos de informação dirigidos aos alunos, ou servem para conhecer o conhecimento dos alunos, chamadas de perguntas de teste ou de verificação, ou são questões para promover a compreensão e o conhecimento matemático dos alunos. De outro modo, Molinari e Mameli (2010) analisam as questões dos professores considerando outros aspetos. Assim, consideram três tipos de questões: questões autênticas, questões fechadas e questões de avaliação. As questões autênticas são as que o professor faz sem que para tal tenha previsto a resposta e estão subdivididas em questões para organizar, questões promover atividade e questões relativas a aspetos extraescolares. Assim, podem emergir vários tipos de respostas como opiniões, hipóteses, ideias. As questões fechadas são questões elaboradas para obter

uma resposta já esperada sendo divididas em questões sobre factos informações sobre um tópico ou dando dicas. Finalmente, as questões de avaliação dividem-se em questões de clarificação, de gestão do ambiente de aprendizagem (por exemplo, relativas ao tempo para a atividade) e questões para estabelecimento de conexões .

Segundo Boavida, et al. (2008) para promover uma aprendizagem significativa o processo de questionamento não é fácil. Ou seja, é necessário fazer questões que não tenham implícita a respostas e que não tenham por resposta apenas “sim” ou “não”, importa dar tempo aos alunos para pensarem e responderem dando logo a resposta. De modo a promover alguma aprendizagem devem implicar, por parte dos alunos análise, reflexão e a explicação de raciocínios, de modo a que o professor perceba o que o aluno sabe e não sabe. Assim, devem ser tendencialmente de natureza aberta e desencadear, sempre que possível, numa discussão dos conceitos a aprender. Note-se que ainda assim as questões mais fechadas podem ser importantes para focar os alunos no essencial.

Relativamente ao questionamento ainda podemos analisar os padrões de interação. Procurando analisar e comparar as diferentes classificações de existentes padrões de interação e de comunicação, Helena Martinho (2007) apresentou um quadro integrador das diferentes classificações das interações em sala de aula. As perspectivas apresentadas e comparadas, ainda que sublinhem determinados aspetos comuns e apesar de lerem a realidade da sala de aula, fazem-no com perspectivas diferentes (figura 2).

Autores	Padrões comuns na sala de aula e padrões adoptados por defeito		Padrões valorizados como mais apropriados para a sala de aula	
Voigt (1995)	Padrão de eliciação		Padrão de discussão	
Wood (1995, 1998)	Padrão de funil		Padrão de focagem	
Peressini e Knuth (1998)	Univocal		Dialógico	
Brendefur e Frykholm (2000)	Padrão uni-direccional	Padrão contributivo	Padrão reflexivo	Padrão instrutivo
Alrø e Skovsmose (2002)	Aula absolutista		Aula dialógica	
Loska (1998)	Discussão comum (método socrático)		Discussão natural (método neo-socrático)	
Schwarz, Dreyfus, Hadas e Hershkowitz (2004)	Diálogo básico		Diálogo crítico	
	Diálogo prospectivo		Diálogo reflexivo	
	Diálogo conferência			

Figura 2 – Quadro comparativo entre classificações de padrões de interação por Martinho (2007)

Neste quadro a autora procurou classificar as perspetivas dos autores entre padrões comuns na sala de aula, e adotados por defeito em contraponto com padrões valorizados como mais apropriados para a sala de aula. Assim, os padrões mais identificados pelos diferentes autores revistos são menos complexos de constituir e são interações onde o papel do professor é, tendencialmente, mais dominador do discurso. Quando é dado espaço aos alunos é com o objetivo de obter informação ou evidências de aprendizagem. No que respeita aos padrões de interação mais valorizados entre diferentes autores, encontramos características em torno da promoção da aprendizagem significativa, cooperativa, reflexiva e tem como objetivo de ensino uma aprendizagem por compreensão.

Representações. Podemos dizer que uma representação “é uma configuração que está no lugar de algo, de alguma forma” (Goldin, 2008, p. 180). Na literatura podemos encontrar diferentes categorizações das representações usadas por alunos e professores. Para Bruner (1999), as representações ativas estão associadas à ação e manipulação direta de objetos do quotidiano ou estruturados didaticamente ou pela simulação de situações reais; as representações icónicas remetem para uma organização visual, usando figuras, imagens, esquemas, diagramas ou desenhos para ilustrar conceitos, procedimentos ou relações entre eles; as representações simbólicas traduzem em linguagem simbólica situações e objetos, de modo oral ou escrita. Bishop e Goffree (1986) categorizam as representações em símbolos matemáticos, linguagem verbal, figuras e objetos. As figuras, imagens e ícones são muitas vezes designados por representações pictóricas. Assim, podemos considerar as representações pictóricas os desenhos, esquemas ou modelos e representações simbólicas os números e símbolos e algoritmos. Ponte & Serrazina, 2000 alertam para o facto de as representações poderem ser verbais. Nos números racionais, os alunos devem compreender que um número pode ter várias representações: fração, numeral decimal, percentagem, linguagem natural e pictórica.

Representar refere-se tanto ao processo como ao produto (NCTM, 2007; Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008). Importa que os alunos sejam capazes de criar e usar representações de diferente natureza para comunicar as suas ideias matemáticas e de modo a modelar situações do dia-a-dia e a resolver problemas matemáticos, que lhes sejam colocados (NCTM, 2007). As representações podem ser entendidas como ferramentas fundamentais para pensar e compreender conceitos, procedimentos e relações entre eles (NCTM, 2007). É importante que o percurso de

aprendizagem seja constituído estabelecendo ligações entre o significado dos conceitos e a linguagem natural, percorrendo o caminho do informal para o formal (Boavida et al., 2008) e estabelecendo relações entre diferentes representações de uma mesma ideia matemática.

As representações podem ser exploradas em diferentes momentos da prática letiva. Podem ser usadas na fase inicial da resolução de problemas para organizar a informação e, posteriormente, durante a resolução para manipular a informação, de modo a alcançar o objetivo pretendido. No final do trabalho, as representações permitem partilhar estratégias e apreciar novas ideias. O modo como os professores valorizam as representações e o modo como as usam e relacionam, influencia a capacidade dos alunos em comunicar ideias matemáticas através de diferentes representações (Stylianou, 2010). Podem identificar-se diferentes papéis das representações na prática letiva, como são usadas na prática e quando são úteis. Como já foi visto, Stylianou (2010) analisou as conceções de professores sobre o uso de representações como um processo de “fazer Matemática” e o seu papel no processo de ensino e aprendizagem, concluindo que a visão sobre o papel das representações influencia o seu uso no ensino. Velez e Ponte (2015) analisaram as ações dos professores no quadro do ensino e aprendizagem exploratório e identificaram diversas ações no processo de promoção de aprendizagem, nomeadamente ações de promoção da escolha de representações adequadas, sugerindo e apoiando os alunos na construção de determinadas representações e promovendo a conexão entre representações. Para tal o professor deve questionar e desafiar os alunos a comunicar claramente o que querem representar.

Explicações. Longe de se reduzir à simples “transmissão do conteúdo”, explicar é um processo onde estabelecem relações entre ideias matemáticas. Para que a explicação possibilite a transmissão de conhecimentos do professor para os alunos, esta deve ser clara (Boavida et al., 2008). Assim, implica estabelecer relações entre ideias, podendo partir de uma questão seja ela explícita ou implícita (Bishop & Goffree, 1986) e o professor pode recorrer ao conhecimento que os alunos já detêm ou a representações que permitam aos alunos compreender os conceitos e procedimentos (Medeiros & Ponte, 2010). As explicações podem ter diferentes fins e características, focar-se nos procedimentos e/ou em conceitos e ser realizadas em diferentes momentos de uma aula (Charalambous, Hill, & Ball, 2011; Menezes et al., 2014). Podem ser realizadas para introduzir um novo conteúdo, responder a questões dos alunos, ou apoiar os alunos em

dificuldades. Para além de apoiar a aprendizagem dos alunos, uma boa explicação pode eliminar ideias, significados e processos erróneos (Charalambous, Hill, & Ball, 2011).

Leinhardt (1993, 2010) distingue as explicações considerando a quem se destinam e as razões que levaram a dar uma explicação. Assim, apresenta quatro tipos de explicações: comuns, disciplinares, instrucionais e autoexplicações. As *explicações comuns* são respostas a questões simples e diretas existindo naturalmente no quotidiano. As explicações disciplinares dão resposta a questões de um público que não é necessariamente conhecido, não são elaboradas em interação e são formais. As *explicações instrucionais* são as desenvolvidas no processo de ensino-aprendizagem e têm um recetor específico, são menos formais e para que sejam bem sucedida, é necessário que quem a produz conheça a audiência, suportando a explicação no seu conhecimento prévio sobre os conteúdos envolvidos e sobre os alunos a que se destina. Estas explicações podem ser produzidas por uma pessoa ou podem ser construídas em conjunto podendo acontecer durante um momento de discussão. Neste sentido importa que o professor incentive a elaboração de explicações por parte dos alunos.

Assim, o segundo elemento estruturante da prática pedagógica é a comunicação. Comunicar implica ouvir, usar de gestos, questionar, representar e explicar. O professor para além de comunicar deve promover a comunicação e especialmente a comunicação matemática. A comunicação pode, ainda, assumir características diferentes do ponto de vista das interações no processo de ensino-aprendizagem. Assim, pode ser unívoca ou dialógica podendo ser pertinente a coexistência de diferentes tipos de comunicação. O questionamento pode ser determinante na promoção de aprendizagens desde que o seu foco tenha propósitos claros de promoção da aprendizagem. O tipo de questões podem ser mais abertas ou fechadas e podem ser tipificadas quanto à sua função como questões de inquirição, focalização e confirmação ou em questões autênticas, questões fechadas e questões de avaliação. Também podem ser analisados os padrões de interação onde uns são adotados com frequência e onde o professor tem o papel central ou padrões com maior potencial de aprendizagem onde é dado mais espaço aos alunos. O segundo elemento de comunicação são as representações. Estas podem ser classificadas como representações ativas, linguagem verbal, pictóricas e simbólicas. Nos números racionais, temos as representações: fração, numeral decimal, percentagem. As representações devem ser consideradas como fundamentais na prática pedagógica porque podem ser vistas como processos e produtos. As diferentes representações podem ser exploradas em diferentes momentos da prática letiva com diferentes

propósitos. Assim os professores podem desenvolver ações diversas no processo de promoção de aprendizagem como promover a escolha de representações adequadas, sugerindo e apoiando os alunos na construção de determinadas representações e promovendo a conexão entre representações. O terceiro elemento de comunicação são as explicações sendo entendido como um processo onde se estabelecem relações entre ideias matemáticas. Para que a explicação possibilite a transmissão de conhecimentos do professor para os alunos, esta deve ser clara, implicar o estabelecimento de relações entre ideias. As explicações podem ter diferentes fins e características, focar-se nos procedimentos e/ou em conceitos e ser realizadas em diferentes momentos de uma aula. Podem ser realizadas para introduzir um novo conteúdo, responder a questões dos alunos, ou apoiar os alunos em dificuldades. Para além de apoiar a aprendizagem dos alunos, uma boa explicação pode eliminar ideias, significados e processos erróneos. As explicações podem ser classificadas em comuns, disciplinares, instrucionais e autoexplicações dependendo do conteúdo e fins a que se destina.

2.4.3. As ações de promoção e gestão da aprendizagem e do ambiente de aprendizagem

Para caracterizar a prática docente, para além de analisar o tipo de tarefas selecionadas e propostas, bem como a comunicação desenvolvida na sala de aula, podemos atender às diversas ações que ocorrem em diferentes momentos. Estas ações, por sua vez, estão relacionadas com os propósitos de ensino dos professores, ou seja, com o modo como consideram que deve ser desenvolvido o trabalho em determinados temas, tópicos ou capacidades com os seus alunos. Ponte, Quaresma e Branco (2012) consideram a prática do professor como uma sequência de ações que se constitui como uma atividade com um determinado foco. Com o objetivo de classificar as ações do professor durante os momentos de discussão coletiva, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) desenvolveram um quadro de análise das ações do professor na sala de aula, segundo o qual o professor realiza ações de gestão da aprendizagem diretamente relacionadas com os tópicos e processos matemáticos como representar, interpretar, raciocinar e avaliar. Consideram-se quatro tipos de ações do professor relacionadas com tópicos e processos matemáticos: convidar, quando pretende iniciar a discussão; apoiar/guiar, quando conduz diretamente os alunos na resolução da tarefa através de diferentes tipos de questões; informar/sugerir, quando dá informação, argumenta ou

valida as ideias dos alunos; e desafiar, quando incentiva os alunos a uma participação ativa na interpretação das situações, e na explicação das suas ideias, estabelecendo conexões e avaliando o seu trabalho. No estudo de Mata-Pereira (2018) os resultados indicam que a ação de desafiar é central no processo de promoção de processos matemáticos. Esta na sequência de ações de convidar e complementadas por ações de apoiar e de guiar, promovem o surgimento de generalizações e justificações com diferentes níveis de formalidade e complexidade.

Uma das ações que pode levantar mais questões sobre a sua pertinência numa lógica de construção do saber onde o aluno tem um papel ativo é a ação de informar. A literatura tem procurado discutir e salientar que nem sempre o informar retira a possibilidade de desafiar os alunos. Por vezes o informar pode ser importante no processo de construção do conhecimento. Lobato, Clarke e Ellis (2005) sublinham que nem sempre a interação entre os alunos garante uma aprendizagem efetiva e que pode ser importante introduzir informação relevante para os propósitos do ensino-aprendizagem, para potenciar a discussão. Assim, quando o professor propõe a tarefa, pode dar informação para estimular o pensamento dos alunos. Deste modo, como referem estes autores, a mesma ação de *informar* pode ter diferentes funções (Lobato, Clarke & Ellis, 2005). Caracterizaram “dar informação” como o conjunto de ações que também pode servir para estimular o pensamento matemático dos alunos denominando esta ação como *iniciar (initiating)* distinguindo-a de informar que determina o que fazer. Numa perspetiva semelhante, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013), analisando ações dos professores nas discussões coletivas, também prestam atenção ao modo como estas ações se relacionam entre si, identificando *informar/sugerir* como ação de suporte das discussões matemáticas em que o professor introduz informação, proporciona argumentos ou valida respostas de alunos.

Assim, de acordo com Lobato, Clarke e Ellis (2005) e Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013), o professor quando dá informação não tem de induzir necessariamente a sua reprodução acrítica, podendo: (i) indicar factos, definir ou descrever um conceito; (ii) sumariar o trabalho já realizado, introduzindo nova informação; (iii) levar os alunos a testar novas ideias ou confrontar-se com contraexemplos; (iv) confrontar os alunos com as suas ideias, reformulando-as e favorecendo a emergência de hipóteses; (v) partilhar e confrontar várias ideias para depois lhes dar sentido; e (vi) apresentar uma nova representação. Relacionando e conjugando a ação de *informar* com a de *guiar* o professor pode levar os alunos a

compreender a informação, focando e guiando para a construção de um novo conceito.

Num movimento inicial e até natural, os futuros professores tendem a preocupar-se com a gestão do ambiente de sala de aula no que respeita à organização dos alunos e dos tempos de trabalho. Ainda assim, qualquer professor, independentemente do tipo de prática desenvolvida, realiza ações que levam à constituição de um determinado ambiente de aprendizagem, ao indicar como se irão organizar os momentos seguintes da aula e organizar as formas de trabalho (individual, pares, grupo ou turma) e os materiais a utilizar (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2014). Segundo Martinho (2007) o ambiente na sala de aula é determinante para a qualidade das interações ainda que existam salas de aula com um ambiente agradável e onde não existem espaços de aprendizagem críticos e argumentativos.

Para além de ações de promoção e gestão da aprendizagem, Canavarro, Oliveira e Menezes (2014) também procuram identificar ações que permitam a criação de um ambiente de aprendizagem estimulante e produtivo. Os autores, tal como Martinho (2007), sublinham que é importante manter um clima positivo e de genuíno interesse na discussão (discussão que pode acontecer nos diferentes momentos da aula), tentando garantir a participação de todos os alunos. Para tal, referem a importância de estabelecer o tempo para os diferentes momentos da aula, que o professor deve definir os modos de trabalho dos alunos e gerir os recursos a usar. Nos diferentes momentos deve gerir as relações entre os alunos e regular as suas interações, “de modo a que se relacionem produtivamente com o conteúdo matemático e as suas representações” (p.221), quer em pequeno grupo como em grande na discussão das resoluções dos alunos e garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização, procurando institucionalizar ideias ou procedimentos. Também Boavida et al. (2008) destacam a importância, na interação com os outros alunos, de cada aluno expor as suas ideias aprofundando-as e apropriando-se das dos outros alunos. Martinho (2007) neste sentido sublinha que, quer por escrito, quer oralmente ao comunicar os alunos podem refletir sobre as suas próprias compreensões da Matemática, fazendo conexões e personalizando os conceitos.

Também identificando ações de promoção das interações entre os alunos procurando promover um ambiente colaborativo, no estudo de Hoek e Gravemeijer (2011) os autores procuraram compreender as práticas dos alunos e dos professores num processo de transformação de práticas de ensino direto (em inglês, *direct instruction*) para um ensino de natureza exploratória, a partir do envolvido num curso de formação

contínua. Nesta análise os autores identificaram ações dos professores que eram realizadas, rotineiramente, promovendo discussões em pequeno e grande grupo mais centradas nas ideias matemáticas e menos nos alunos *per si*. A partir de tarefas desafiantes e abertas os professores questionavam de modo a desafiar o surgimento de ideias. Eram realizadas discussões coletivas de modo a estabelecer estratégias de resolução das tarefas depois de estimular a discussão de diferentes ideias pedindo explicações e a clarificação das suas afirmações. Os professores evitavam responder a questões individuais enquanto os alunos trabalhavam em pequenos grupos, redirecionando as questões realizadas ao grupo de trabalho. Finalmente, era dado um feedback para apoiar o processo de resolução.

Assim, para caracterizar a prática docente, estruturadas pelos elementos de comunicação temos de analisar as diversas ações que ocorrem em diferentes momentos da prática. Estas ações podem estar relacionadas com os processos promovendo e gerindo aprendizagens e podem ter um foco na promoção e gestão do ambiente de aprendizagem. No que respeita à gestão da aprendizagem relacionadas com tópicos e processos matemáticos: convidar, quando pretende iniciar a discussão; apoiar/guiar. Para promover e gerir o ambiente de aprendizagem podemos ter ações como: organizar, gerindo materiais, o tempo e/ou os modos de trabalho; regular interações e a participação dos alunos, selecionar e sequenciar ideias e diferentes resoluções e orquestrar e corrigir e/ou promover a discussão das apresentações dos alunos. Estas ações da atividade do professor pode acontecer nos diferentes momentos da aula em práticas com características diferentes.

2.4.4. Tipos de prática pedagógica e os momentos que as estruturam

Duas práticas de ensino reconhecíveis em muitos países (nomeadamente em Portugal), são a “exposição” e “resolução de exercícios”. Ponte et al. (2012), da análise dos estudos realizados por Fey, concluem que a prática recorrente nas aulas de Matemática caracterizam-se por num primeiro momento existir uma explicação e questionamento do professor, seguido por trabalho individual do aluno em exercícios de papel e lápis. Para Ponte (2005) e posteriormente Ponte et al. (2012), podemos identificar práticas caracterizadas de modo diferente e com distintos momentos para a concretização dos propósitos de ensino-aprendizagem.

Na prática de ensino direto o professor assume um papel central, fornecendo de informação de modo claro e sistematizado, modelando procedimentos e conceitos com

exemplos e fazendo comentários sobre situações. Assim, a “teoria” está separada da “prática” e onde primeiro “se dá” a teoria para depois praticar. Ao aluno cabe o papel de receber a informação, devendo resolver as tarefas propostas, essencialmente exercícios, mobilizando conceitos e técnicas explicados e exemplificados pelo professor. Na interação com o professor, o aluno deve responder às questões que lhe são postas, colocar dúvidas e ouvir as explicações. Não se espera muita iniciativa da sua parte, devendo fundamentalmente responder em conformidade com a informação transmitida pelo professor. Importa referir que não é necessário que o ambiente seja completamente formal, professor vai fazendo questões e os alunos ajudam participando e contribuindo com exemplos sobre um ou outro aspeto. Para além da resolução de exercícios, são também propostos, pontualmente, problemas, projetos ou investigações. Neste tipo de ensino é recorrente existir a preocupação de propor rotineiramente tarefas do tipo das que são pedidas nas avaliações externas e o manual tem um papel estruturante na gestão do currículo. Brendefur e Frykholm (2000) referem que um professor que segue o padrão de comunicação unidirecional vê a Matemática como um corpo de conhecimento estático, cabendo-lhe interpretar a informação, analisada normalmente em manuais, para depois a transmitir, sendo o professor a autoridade do conhecimento matemático.

Em contrapartida, no ensino-aprendizagem exploratório, os alunos têm um papel central na construção do conhecimento, interagindo com os pares e com o professor. Neste ensino constitui-se um discurso dialógico, cabendo ao professor apoiar e desafiar os alunos na construção do seu saber (Ponte, 2005). As tarefas mais abertas e desafiantes assumem especial relevo. A teoria e a prática estão também presentes, sendo que a atividade prática dos alunos, depois de analisada e discutida dá lugar à construção da teoria que é, deste modo significativa e construída em conjunto. Na comunicação com um padrão contributivo, o professor continua a ter o estatuto de autoridade mas convida os alunos a apresentar novas propostas. Assim, a ênfase é colocada nas atividades de exploração propondo uma grande diversidade de tarefas (investigações, projetos, problemas e exercícios).

Ponte (2005) alerta que a principal característica do ensino direto é a centralidade do papel do professor e que no ensino-aprendizagem exploratório o professor dá aos alunos um papel primordial na descoberta e construção do conhecimento. É importante sublinhar que ainda que estejam a ser caracterizadas duas práticas extremas, existem muitas versões intermédias. O autor também sublinha que existem equívocos sobre como identificar estas duas práticas. Ou seja, ainda que no

ensino direto o discurso esteja centrado no professor existe lugar à participação dos alunos. Apesar de pontualmente poderem ser propostas tarefas desafiantes e abertas, se a tarefa que é proposta com maior frequência e que estabelece o padrão de tipo de tarefa, então o tipo de prática que está a ser constituída é de ensino direto. No mesmo sentido, nas práticas de ensino-aprendizagem exploratório existem momentos fundamentais de exposição, por parte do professor, onde desenvolve explicações clarificando e/ou sistematizando procedimentos, ideias e conceitos. Importa reforçar que neste tipo de abordagem o papel do professor é muito importante sendo que as descobertas dos alunos são monitorizadas pelo professor apoiando e desafiando de modo próximo.

Também no que respeita à estrutura da aula os dois tipos de práticas têm momentos marcantes. No ensino direto distinguem-se os momentos de introdução dos conceitos e procedimentos com uma comunicação centrada no professor, seguida de proposta de tarefas de aplicação desses conceitos e procedimentos, fundamentalmente exercícios de natureza fechada, e de consolidação das aprendizagens, com a correção das tarefas propostas anteriormente. No quadro do ensino-aprendizagem de natureza exploratória é constituída uma comunicação de carácter dialógico, distinguem-se usualmente três momentos fundamentais. No primeiro o professor propõe a tarefa lançando-a, convidando e desafiando os alunos a resolvê-la, num segundo momento, realiza-se a sua exploração por parte dos alunos onde o professor tem , tendo lugar finalmente uma discussão em torno das diferentes resoluções podendo ou não existir uma sistematização do conhecimento constituído (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2014; Larsson, 2015; Ponte, 2005; Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

Em ambas as práticas os momentos fundamentais da aula têm características e desafios que importa analisar com mais detalhe. Quer no ensino direto como no ensino-aprendizagem exploratório identificam-se três momentos estruturantes: Proposta da tarefa, Resolução da tarefa e Apresentação, correção ou discussão da tarefa.

Proposta da tarefa. O momento em que o professor propõe uma tarefa é determinante para o trabalho subsequente e, por consequência, para a construção do conhecimento pelos alunos. O professor, independentemente do tipo de prática desenvolvida, realiza ações que levam à constituição de um determinado ambiente de aprendizagem, ao indicar como se irão organizar os momentos seguintes da aula e organizar as formas de trabalho (individual, pares, grupo ou turma) e os materiais a utilizar (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2014). Na prática de ensino direto, depois do

momento de introdução dos conceitos e procedimentos explicando as ideias matemáticas a aprender e da apresentação de um ou mais exemplos, o professor propõe exercícios de aplicação para depois discutir erros e dificuldades na resolução (Ponte, 2005). Neste momento pode relembrar os procedimentos e conceitos ensinados *informando/ sugerindo* como os alunos os devem usar na resolução das tarefas (Lobato, Clarke & Ellis, 2005).

Na prática de ensino-aprendizagem exploratório, no primeiro momento, o professor propõe a tarefa lançando-a, ou seja, procurando que os alunos a compreendam e se sintam desafiados a aceitar o “convite” que lhes é feito (Skovsmose, 2000). Lampert e Ghouseini (2012) e Jackson et al. (2012, 2013) discutem as ações do professor no momento de proposta de tarefas, numa prática de ensino-aprendizagem exploratória, considerando que este deve procurar que os alunos compreendam por eles próprios a informação relevante para a realização da tarefa *guiando-os*. Segundo Lampert e Ghouseini (2012), no momento em que propõe a tarefa, o professor pode estabelecer conexões entre esta e o que os alunos sabem: (i) recorrendo a uma história ou a um contexto conhecido dos alunos e sublinhando os dados da tarefa; (ii) lendo o problema ou convidando os alunos a fazê-lo em voz alta; (iii) confirmando que os alunos compreendem o problema colocando diversas questões sobre a situação e discutindo o significado de determinadas palavras caso seja necessário; (iv) reforçando a questão principal do problema; e (v) pedindo aos alunos para redizerem o problema com as suas próprias palavras. Num sentido semelhante, e partindo das ideias de Stein et al. (2008), Jackson et al. (2013), considerando que este momento pode contribuir para a qualidade da discussão de uma tarefa e para a construção de conhecimento, apontam que o professor pode discutir aspetos fundamentais do contexto e verificar que os alunos o reconhecem cuidando de não alterar o nível de desafio (Ponte & Quaresma, 2016) que a tarefa coloca aos alunos. Jackson et al. (2013) também referem a ação de relacionar as ideias matemáticas-chave com as características do contexto construindo uma linguagem comum e esclarecendo o vocabulário desconhecido ou confuso. Assim, Larsson (2015), partindo das ideias de Jackson et al. (2013), propõe a reconceptualização do modelo de Stein et al. (2008) e identifica diversas práticas fundamentais na prática de ensino-aprendizagem exploratória. Por isso, inclui a proposta da tarefa como uma prática determinante para a qualidade das discussões coletivas relativas à resolução de tarefas matemáticas. Larsson (2015), alargando as cinco práticas descritas por Stein et al. (2008), inclui a proposta da tarefa como uma

prática fundamental para a qualidade da aprendizagens a promover e que antecede a monitorização, a seleção, a sequenciação e o estabelecimento de conexões e de consensos. O momento de proposta da tarefa coloca desafios específicos aos professores. No caso de tarefas mais desafiantes, a salvaguarda do nível de desafio requer um cuidado especial. Assim, importa explicitar, aos alunos, o trabalho a realizar, sem lhes dizer o que fazer, mas evidenciando o que se espera deles e o que devem produzir (Larsson, 2015). Deste modo, promove-se o aparecimento de uma variedade de resoluções (corretas e incorretas) relevantes para a discussão posterior. A proposta adequada da tarefa também evita que o professor tenha que voltar a esclarecer aspetos fundamentais para a resolução da tarefa no momento seguinte, libertando-o para a monitorização do trabalho dos alunos para o apoio às resoluções, bem como para a sua seleção e sequenciação (Jackson et al., 2013; Larsson, 2015). Neste sentido aquando do planeamento e quando o professor antecipa as ações de alunos e professor é também importante prever questões e ações para este momento.

Resolução da tarefa. O momento em que os alunos resolvem autonomamente as tarefas proposta é também o momento em que o professor desenvolve um conjunto de atividades fundamentais. Stein et al. (2008) denominam este momento como o momento de exploração (em inglês, *explore phase*) sendo o momento em que os alunos, a pares ou em pequenos grupos, exploram a tarefa discutindo com os seus pares a resolução. O professor, durante este momento, circula de modo a monitorizar o trabalho, mas, mais do que perceber se os alunos estão a resolver a tarefa, o seu papel é questionar de modo a apoiar e desafiar os alunos a prepararem as suas explicações sobre as estratégias que desenvolveram com um foco nos conceitos a abordar nessa aula (Jakson et al., 2013; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Para os autores, monitorizar implica observar e ouvir os raciocínios matemáticos dos alunos de modo a identificar as estratégias e representações importantes para a partilha no momento seguinte. O processo de monitorização é desafiante pois o professor pode encontrar resoluções inesperadas. Para além de monitorizar o professor tem ainda que selecionar as resoluções ou alunos para a discussão no momento seguinte. A escolha dos alunos pode ter objetivos pedagógicos ou pode ser numa base de voluntariado. O fundamental é que as resoluções ou representações selecionadas permitam ilustrar, clarificar e promover a compreensão das ideias e conceitos envolvidos. Note-se que o professor também pode introduzir uma resolução que não emergiu dos alunos e que mais tarde na discussão vai ser importante para as conclusões a retirar.

Depois de selecionadas as resoluções o professor ainda tem como tarefa sequenciar as diferentes resoluções prevendo um percurso e conexões entre as diferentes resoluções potenciando os propósitos de ensino-aprendizagem que tem para a discussão seguinte. A ordem pode ter as mais diversas razões como por exemplo começar pela resolução mais usual e em seguida passar para as resoluções mais particulares e que permitem enriquecer a orquestração da discussão. De outro modo, pode sequenciar as resoluções das que têm alguns erros para as mais “poderosas” matematicamente ou sofisticadas. Para minimizar os desafios envolvidos no processo de seleção e sequenciação importa que na fase de planeamento se realize uma antecipação cuidada de possíveis resoluções, assim como, a escolha de quais a selecionar e como sequenciar para uma discussão pertinente para as aprendizagens a desenvolver (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008).

Para Martinho (2007) a interação aluno-aluno/grupo torna-se muito relevante para o crescimento do aluno. O trabalho cooperativo entre alunos é importante na responsabilização pela própria aprendizagem, no desenvolvimento da comunicação matemática aprendendo a ouvir, a confrontar as ideias dos colegas, a partilhar as suas ideias para posteriormente explicar as suas ideias, argumentar e procurar convencer os colegas das suas opiniões. O trabalho em grupo é muito mais rico para as aprendizagens dos alunos que o trabalho individual (Yackel & Cobb, 1996). As interações entre alunos podem provocar discussões matemáticas estimulando-os a novas descobertas e à construção de um conhecimento mais sólido (Martinho, 2007). No entanto, nem sempre a interação é produtiva constituindo num momento de resolução da tarefa e não de discussão de estratégias. Wood (1999) sublinha a importância da exploração de desacordos identificando-os como desafios descrevendo padrão geral que começa com a explicação de uma criança sobre a resolução de uma tarefa. O desafio começa quando um outro aluno afirma estar discordante da resolução justificando ou não. A partir daí inicia-se um processo de desacordo onde em resposta à discordância o aluno inicial justifica a sua explicação, podendo ser aceite ou não pelo discordante, realizando uma explicação adicional ou fundamentação para a sua posição. A discussão pode continuar onde os restantes alunos e o professor contribuem na tentativa de encontrar um consenso. O processo só termina quando o desacordo termina e se chega a uma resolução consensual para todos. Assim, Wood (1999) sublinha o papel dos alunos neste tipo de desafios na construção de significados partilhados e em examinar o raciocínio dos outros, valorizando o processo de justificação. Para o autor o papel do professor é

promover o respeito pela perspectiva de cada um, a importância da escuta ativa. Importa sublinhar que estes processos podem ser vividos em pequenos grupos ou na discussão em grande grupo no momento seguinte.

Apresentação, correção ou Discussão da tarefa. No ensino direto o momento seguinte é de apresentação das resoluções e respetiva correção. Tipicamente, nesse momento, os alunos transcrevem as suas resoluções no quadro e o professor apoia de modo a que fique registada a resolução esperada e respetiva solução correta que é validada publicamente. Na prática de ensino-aprendizagem exploratório, o último momento é o de discussão, que pode ou não terminar numa sistematização das principais ideias (Ponte et al. 2012; Canavarro et al, 2014). A discussão das resoluções estabelecendo conexões entre as ideias e fazendo emergir as ideias fundamentais envolvidas na resolução da tarefa é um momento incontornável (Stein et al., 2008). Em Portugal têm sido realizados bastantes trabalhos de investigação dando uma atenção especial ao papel do professor na condução de discussões coletivas (Ponte, 2017). Neste momento o professor é o gestor/ orquestrador da sequência de apresentações (Stein et al., 2008). Para tal, vai questionando apoiando e desafiando os alunos a explicar e justificar as suas resoluções, procura que os restantes façam uma escuta ativa e apresentem alternativas (Wood, 1999). Neste momento o professor pode aproveitar para clarificar princípios, conceitos e ferramentas ou procedimentos, articulando o pensamento matemático para levar intencionalmente o grande grupo a relacionar esse pensamento a avaliar o valor dos argumentos e a estabelecer conexões dentro e fora da Matemática (Ponte, 2005, Ruthven, Hofmann & Mercer, 2011). No entanto, conduzir discussões é uma tarefa desafiante para os professores sendo complexo apoiar o pensamento dos alunos, sem dar respostas e promover a emergência de ideias matemáticas importantes. Stein et al. (2008) identificam como desafiante lidar com estratégias muito diferentes umas das outras e por vezes imprevisíveis de modo a dar coerência às ideias, construindo o conhecimento matemático curricularmente estabelecido.

Ponte (2017) identifica claramente situações críticas pelas quais os professores passam durante uma discussão matemática. Assim, o professor pode ser confrontado com: (i) alunos que bloqueiam e não conseguem formular uma estratégia, podendo o professor apoiar a compreensão da tarefa em termos globais ou focando o aluno nos dados e condições do enunciado; (ii) dificuldades em representar o seu pensamento, onde o professor sem que resolva a tarefa pode identificar conceitos e procedimentos apoiando a construção de uma estratégia apropriada; (iii) um aluno que introduz um

elemento imprevisto que deve ser avaliado, sem que o professor o tenha antecipado, de modo a decidir se é importante para a discussão enriquecendo-a ou dispersando do foco previsto e (iv) a dificuldade de um aluno se expor publicamente e apresentar o seu raciocínio; e resolução à turma, onde o professor por um lado tem de dar atenção ao aluno, apoiando-o na clarificação do discurso e, por outro, tem de manter a turma envolvida na discussão mantendo o ritmo da atividade. Assim, as intervenções do professor devem servir para promover, apoiar redizer e dinamizar as contribuições dos alunos, bem como para dirigir o curso da discussão (Ponte, 2017, Ruthven, Hofmann & Mercer, 2011). Tal como acontece com os outros momentos da aula, uma antecipação cuidada das ideias a discutir e a previsão do modo como vai apoiar a discussão é condição para que este momento seja produtivo.

Assim, tipificando com características extremas as práticas, identificam-se duas práticas: a prática de ensino direto e a prática de ensino-aprendizagem exploratório. A prática de ensino direto caracteriza-se primeiramente pelo papel central do professor. Separando a teoria da prática, o professor tende a apresentar procedimentos e conceitos e o aluno recebe a informação, resolve as tarefas propostas mobilizando o que lhe foi ensinado essencialmente resolvendo exercícios. O aluno deve responder às questões que lhe são postas, colocar dúvidas e ouvir as explicações. Os momentos típicos do ensino de uma aula de ensino direto começa com a apresentação dos procedimentos e conceitos a aprender para em seguida o professor propor as tarefas de aplicação. No momento seguinte os alunos tendem a resolver as tarefas individualmente e por fim são apresentadas, corrigidas e validadas as resoluções apresentadas pelos alunos com o apoio do professor. Em contraponto, existe a prática de ensino-aprendizagem exploratório, onde os alunos têm um papel central na construção do conhecimento. Nesta prática, o professor apoia e desafia os alunos a construir o seu conhecimento em interação com os seus pares relacionando teoria e prática. As tarefas propostas são tendencialmente mais abertas e desafiantes e onde a aposta está na diversificação do tipo de tarefas. A prática de ensino-aprendizagem exploratória constitui-se em três momentos fundamentais: o momento de proposta da tarefa, a resolução da tarefa e o momento de discussão da tarefa podendo ou não existir um processo final de sistematização das principais ideias matemáticas emergentes. Para que nos diferentes momentos das práticas identificadas o professor concretize os seus propósitos, importa um planeamento cuidadoso das ações do professor e dos alunos tornando os diferentes momentos produtivos e para que se alcancem os propósitos definidos pelo professor.

2.4.5. As fases da prática pedagógica: Planificação, concretização e reflexão

Segundo Ponte e Chapman (2006) e Ponte et al. (2012), a análise das práticas dos professores, numa abordagem combinada entre o cunho cognitivista e sociocultural, considera o contexto institucional e curricular onde acontecem, considerando as orientações curriculares quer oficiais como as da Escola onde o professor trabalha, e ainda considerar como o professor interpreta e se relaciona com essas orientações. O modo e tempo do planeamento da prática, os tipos de tarefas selecionados e as estratégias previstas para o ensino são aspetos fundamentais no que respeita à fase de planificação da prática pedagógica. Na fase de concretização importa considerar o tipo de questionamento, a linguagem e a natureza do discurso, como modelam ou representam situações e ainda a estrutura de aula, as ações dos professores, de modo a promover determinadas aprendizagens e interações entre os alunos e práticas avaliativas. No entanto para discutir a prática dos professores há que incluir o que o professor sabe, nos seus diversos domínios, incluindo a Matemática, o currículo, os processos de aprendizagem, a Didática da Matemática e a sua capacidade de localizar e construir recursos para o ensino-aprendizagem. Finalmente, é fundamental considerar a *capacidade reflexiva do professor*, base da sua aprendizagem.

Planificar. A forma como o professor gere o currículo depende do modo como o interpreta e (re)constrói considerando, simultaneamente, as características dos seus alunos e os recursos disponíveis. Esta gestão pode acontecer a nível macro, como é o caso do planeamento do ano letivo ou de uma unidade didática (processos onde os futuros professores nem sempre são envolvidos), e a um nível “micro”, que corresponde quando prepararam uma aula. A planificação é fundamental para a qualidade do ensino sendo importante analisar o processo de planificação do ensino da Matemática. Superfine (2008) define planificação como o momento em que os professores preparam e definem as atividades a desenvolver com os alunos, considerando uma variedade de questões. De modo geral tem-se uma visão linear do processo, considerando que os professores começam por definir os objetivos de aprendizagem, depois selecionam tarefas que deem resposta aos interesses e capacidades dos alunos, e finalmente definem os procedimentos de avaliação. No entanto, este processo em vez de simples e linear é bastante mais complexo, envolvendo questões relativas à Matemática e ao seu ensino (Superfine, 2008).

Toda a planificação pressupõe explícita ou implicitamente uma estratégia de ensino, onde sobressaem sempre dois elementos, a atividade do professor e a atividade do aluno estabelecendo-se horizonte temporal para a respetiva concretização (Ponte, 2005). No processo de planificação cruzam-se vários aspetos e dão-se vários movimentos. Durante a planificação, muitas vezes, os professores começam por consultar manuais escolares e brochuras com tarefas (*curriculum materials*) para preparar o ensino (Ponte et al, 2012; Superfine, 2008). Os resultados do estudo por questionário realizado a professores do ensino elementar e secundário, de Superfine (2008), indicam que os professores quando planificam uma sequência de aprendizagem começam por ler os documentos curriculares para identificar as principais ideias para o ensino de um conjunto de tópicos, em seguida analisam manuais escolares e outros documentos com sugestões de tarefas, trocam opiniões com colegas recorrendo às suas experiências de ensino e analisam a adequação das tarefas às capacidade dos alunos. No final identificam e sequenciam as tarefas a propor (Sullivan, Clarke & Clarke, 2012). Assim, o processo de planificação os professores têm que tomar decisões sobre diferentes aspetos (Sullivan et al 2013), decisões essas que depende do seu conhecimento, experiências e conceções sobre a Matemática e ensino (Superfine, 2008). Os professores têm que selecionar as tarefas que vão propor identificando o seu potencial, decidir como vão estruturar as aulas e antecipar as ações dos intervenientes quando exploram as tarefas selecionadas (Serrazina, 2012; Sullivan et al., 2012, 2013). As decisões referentes às tarefas são essenciais e estruturantes da prática letiva. No caso dos futuros professores a inexperiência leva a que, em alternativa ao design de tarefas, eles optem por selecionar tarefas desenhadas por outros. Ao tomar decisões, os professores confrontam as tarefas com os tópicos e objetivos definidos nos documentos curriculares ou articulando os propósitos das tarefas como o que esperam que os alunos aprendam. Estudos empíricos mostram que os professores podem focar-se em procedimentos ou na compreensão de conceitos e/ou no desenvolvimento de capacidades da Matemática como a resolução de problemas e o raciocínio matemático (Sullivan et al., 2013; Superfine, 2008). Por vezes estas decisões mostram-se complexas evidenciando-se necessidades de apoio (Sullivan et al., 2013). Há que considerar outras questões no processo de planificação, tais como: a definição do tempo para cada momento da aula ou que atividades se podem desenvolver durante o tempo da aula, como orquestrar as possíveis resoluções dos alunos e que aspetos merecem mais enfoque durante uma aula (Superfine, 2008). A prática letiva é complexa e exige do

professor uma antecipação cuidada e pormenorizada (Ponte, 2005; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). A antecipação da atividade em sala de aula é fundamental, uma vez que o professor tem que transformar o conhecimento, preparando o que vai ensinar, fazendo uso do seu repertório de representações e selecionando as ideias que considera importantes para o ensino do conteúdo adaptando-o às características dos seus alunos (Rowland, 2013; Shulman, 1987). Quando o professor antecipa a atividade na sala de aula tem de prever explicações que possam apoiar as aprendizagens dos alunos (Serrazina, 2012). A antecipação tem um papel fundamental na orquestração de uma discussão matemática (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008), uma vez que o professor deve antecipar as estratégias que os alunos podem usar, relacionando-as com as aprendizagens previstas, referentes a conceitos, representações e procedimentos, e as capacidades a desenvolver. No caso específico dos futuros professores, quando planificam, partem do seu conhecimento fundamental e de natureza teórica uma vez que o seu conhecimento prático é muito limitado. Este conhecimento, muitas vezes é constituído por ideias gerais sobre o ensino da Matemática (Rowland, 2013; Shulman, 1987) que foram trabalhados na formação inicial tais como os propósitos de determinados tipos de tarefas ou principais aprendizagens a promover nos alunos (Ferreira & Ponte, 2014).

No momento de passar a escrito o planificado, a pedido de outros como diretores, coordenadores pedagógicos e, no caso dos futuros professores os supervisores, os professores devem identificar propósitos e objetivos, descrever processos de comunicação antecipando questões e explicações e articular estas descrições com os propósitos das tarefas (Sullivan et al., 2013). Para além das questões referentes às tarefas os docentes devem analisar e antecipar do ponto de vista didático e matemático as principais ideias matemáticas a explorar com os alunos. Devem também antecipar resoluções corretas e incorretas dos alunos evidenciando erros e dificuldades comuns dos alunos de um determinado nível de ensino (Serrazina, 2012).

Nem tudo pode ser antecipado na planificação e nem todo o conhecimento fica evidente a partir da planificação. Por vezes, na sala de aula, quando o professor explora as tarefas com os seus alunos, existem situações onde tem que fazer uso do seu repertório de experiências de modo a dar resposta a imprevistos tomando decisões durante a ação (Rowland, 2013). Ainda assim, existem muitas evidências do conhecimento do professor que se pode analisar das possíveis alterações na planificação

decorrentes de experiências vividas, com reconstrução do conhecimento de partida e constituição de novo conhecimento (Shulman, 1987).

Concretização. No caso dos futuros professores, o que podemos considerar como a fase da realização da prática, constitui-se como uma fase de concretização do planeado com o seu parceiro de prática supervisionada e/ou com os supervisores de estágio. Esta fase é particularmente crítica para os processos de reflexão na ação e sobre a ação (Schön, 1992) na medida em que é a fase em que o futuro professor confronta a visão com a realidade vivida procurando confirmar as hipóteses colocadas no momento da planificação e tendo que resolver problemas, uma vez previstos e muitas vezes imprevistos dada a falta de experiência de lecionação.

Reflexão. Para que estes momentos se configurem como momentos de aprendizagens ou até mesmo de investigação sobre a própria prática com a finalidade de clarificar os problemas da prática e construir soluções (Ponte, 2004) importa uma reflexão sustentada no que respeita às dimensões didática e pedagógica. A reflexão não é um atributo só dos “bons professores”. O próprio ato de ensinar tem em si o processo de reflexão, como já foi referido, sendo elemento essencial e intrínseco (Clarke, 2000). Esta será tão mais produtiva e profunda quanto mais se debruçar nos problemas vividos (Santos & Ponte, 2002). Ou seja, podemos considerar a “prática lectiva como uma atividade de resolução de problemas decorre da própria natureza dessa prática” (p. 31) onde a reflexão passa por processos de questionamento, formulação de problemas, colocação de hipóteses definindo um plano de ação, que depois de concretizada volta a um processo de análise e questionamento (Santos & Ponte, 2002). A reflexão pode ser particularmente produtiva para os professores se tiver em consideração a prática diária e os seus problemas reais e estiver sustentada na teoria (Ponte, 2005). Tal como é importante a reflexão com os pares no caso dos futuros professores promovendo o desenvolvimento do conhecimento sobre as diferentes dimensões do conhecimento didático (Oliveira e Serrazina, 2002; Serrazina, 1999; Quaresma, 2019), para os futuros professores essa reflexão estimulada pela colaboração com os pares e promovida pelos supervisores é determinante no desenvolvimento de conhecimento, capacidades e atitudes fundamentais para a sua formação ao longo da vida. Onde é importante o reconhecimento de um problema e a aceitação da incerteza (Menezes, 2004; Oliveira e Serrazina, 2002; Santos & Ponte, 2002).

Assim, a prática pedagógica é constituída por três fases intercomunicantes: a planificação, a concretização e a reflexão. Combinando a perspetiva cognitivista e

sociocultural, podemos analisar a prática do professor considerando o contexto institucional e curricular, como o professor interpreta e se relaciona com o seu contexto e como perspectiva, concretiza e interpreta a prática que desenvolve. Para isso o conhecimentos nos seus diversos domínios, incluindo a Matemática, a sua Didática e a sua capacidade de localizar e construir recursos para o ensino-aprendizagem são determinantes. Na fase de planificação importa o modo e tempo do planeamento, o tipo de tarefas que seleciona e as estratégias previstas para o ensino e para a aprendizagem. Quando o professor gere o currículo depende do modo como o interpreta e (re)constrói considera os seus alunos e os recursos disponíveis. Para o fazer prepara e definem as atividades a desenvolver com os alunos, considerando uma variedade de questões pressupondo, explícita ou implicitamente, uma estratégia de ensino. Para tal, consulta diversas fontes e documentos curriculares de modo a tomar decisões sobre as tarefas selecionar e sequenciar e estrutura as aulas antecipando as ações dos intervenientes. Por vezes estas decisões mostram-se complexas constituindo-se como problemas sobre a própria prática onde tem que equacionar questões como a definição do tempo e as atividades para cada momento da aula. Por isso é importante uma antecipação cuidada e pormenorizada transformando o conhecimento, fazendo uso do seu repertório de representações, e selecionando as aprendizagens a desenvolver adaptando as suas ações às características dos seus alunos. Para tal antecipa resoluções, prevê explicações e a orquestração de possíveis discussões matemáticas. No caso dos futuros professores, partem do seu conhecimento fundamental e de natureza teórica uma vez que o seu conhecimento prático é muito limitado. Este conhecimento, muitas vezes é constituído por ideias gerais sobre o ensino da Matemática que foram trabalhados na formação inicial. No entanto, nem tudo pode ser antecipado na planificação e nem todo o conhecimento fica evidente a partir da planificação. Na fase de concretização emerge o tipo de questionamento, a linguagem e a natureza do discurso, como modelam ou representam situações e ainda a estrutura de aula, as ações dos professores, de modo a promover determinadas aprendizagens e interações entre os alunos e práticas avaliativas. Esta fase é crítica implicando processos de reflexão na ação e sobre a ação quando confronta a visão com a realidade. Numa perspectiva em que a prática é um contexto rico na resolução de problemas, o professor passa por processos de questionamento, formulação de problemas, colocação de hipóteses definindo um plano de ação, que depois de concretizada volta a um processo de análise e questionamento. A reflexão deve considerar a prática diária e os seus problemas reais procurando na teoria

interpretar os acontecimentos, individualmente ou em conjunto com outros reconstruindo o seu conhecimento e reformulando hipóteses e soluções.

Síntese final

Este capítulo debruça-se sobre o conhecimento matemático e didático do professor sobre os números racionais, onde é central o que o futuro professor ensina, como ensina e porque ensina. Conhecimento e prática são conceitos de grande relevância quando falamos de formação inicial de professores. O conhecimento tem um papel fundamental, uma vez que, se o professor não sabe, não pode exercer com a devida qualidade a sua atividade principal que é ensinar. Por outro lado, a visão que o professor tem sobre a Matemática e o seu ensino é crucial na tradução entre conhecimento e prática. O conhecimento vai-se (re)construindo num processo de desenvolvimento profissional, a partir da reflexão que o futuro professor vai fazendo das experiências que vai vivendo na sua prática. Assim, os conceitos de conhecimento e prática estão estreitamente relacionados e integram-se. O conhecimento do professor é um tema complexo, multidimensional e tem sido alvo de diferentes olhares. Para ensinar Matemática, o professor tem que saber sobre os conteúdos que vai ensinar mas também como se ensinam, implicando uma relação dinâmica entre conhecimento matemático e conhecimento didático. O conhecimento do futuro professor tem uma natureza diferente do professor experiente, em alguns aspetos, decorrente da fase de desenvolvimento profissional e dos contextos onde se desenvolvem os processos de ensino-aprendizagem. No que respeita aos futuros professores, o conhecimento sobre os números racionais estrutura-se no sentido de número racional no que concerne às suas representações e significados e no conhecimento sobre as operações e os seus significados. O conhecimento didático é sustentado, influencia e é influenciado pela visão que o futuro professor tem sobre a Matemática que ensina e como a ensina. As experiências que vai tendo como aluno, antes e durante a formação inicial e na prática de ensino supervisionada pode permitir a (re)construção desta visão. Dimensões fundamentais do conhecimento didático são o conhecimento sobre as tarefas, os alunos e a comunicação e ações do futuro professor na prática pedagógica. Transversalmente e de modo integrado temos as questões relativas ao currículo e avaliação. No ensino-aprendizagem dos números racionais importa que o futuro professor reconheça que este conjunto numérico deve ser trabalhado com problemas com contextos próximos dos

alunos de natureza mais aberta e desafiante de modo apoiar a compreensão das regras algorítmicas e o desenvolvimento do sentido de número e de operação neste conjunto numérico. As tarefas devem implicar múltiplas representações e uma variedade de estratégias de cálculo que têm implícitas as propriedades das operações e os factos sobre as quantidades envolvidas. Relativamente ao conhecimento sobre os alunos, os professores devem ser capazes de antecipar e identificar as dificuldades e erros comuns dos alunos, quando ouvem e interpretam os seus pensamentos. Devem também saber antecipar as resoluções dos alunos em tarefas específicas e o que os alunos consideram desafiante, interessante ou confuso. Sobre a aprendizagem dos números racionais é fundamental que compreendam como prevenir e explorar erros relativos às grandezas envolvidas neste conjunto numérico. Importa também apresentar, explorar e relacionar as diferentes representações e os diferentes significados dos números racionais na forma de fração, assim como os significados das operações com números racionais. No que respeita à comunicação, é fundamental um questionamento constante com um foco na compreensão dos conceitos e procedimentos. Relativamente às representações exploradas, apresentadas e promovidas, importa explorar diferentes representações e os futuros professores devem estar alertados para o papel das representações no processo de ensino-aprendizagem. No caso dos números racionais estão envolvidas as diferentes representações mas também as representações usadas neste conjunto numérico, sendo importante o estabelecimento de relações. Sobre as explicações, devem compreender a importância de clarificar aspetos do pensamento matemático que podem não ser visíveis para os alunos. Finalmente, para constituir um ambiente de aprendizagem com determinados propósitos, o futuro professor deve ter uma visão do ambiente que quer constituir. Este deve ser rico e potenciador da construção de ideias e relações matemáticas o futuro professor deve colocar questões que apoiem e promovam a comunicação e o raciocínio matemático na resolução de problemas O ambiente de aprendizagem é determinante pelo que a promoção da interação dos alunos é determinante e deve ser promovida, selecionando, sequenciando e discutindo diferentes resoluções resultantes da exploração de tarefas, com destaque para tarefas de natureza desafiante e aberta. Ainda que tenham pouca autonomia nas questões relativas ao currículo e avaliação de aprendizagens, importa que os futuros professores reconheçam as características de determinadas abordagens, identificando os seus princípios do ensino e dos documentos curriculares de modo a posicionarem-se sobre adequação dos documentos ao ensino e a aprendizagem de temas específicos. No que respeita à

avaliação de aprendizagens, o futuro professor deve ter uma visão clara do que fazer e do que espera desenvolver com alunos, incluindo desenvolver estratégias como o feedback e os mecanismos de autorregulação. Mas é na prática que o conhecimento toma forma nas suas fases intercomunicantes: a planificação, a concretização e a reflexão. Combinando a perspetiva cognitivista e sociocultural, podemos analisar a prática do professor considerando o contexto institucional e curricular, como o professor interpreta e se relaciona com o seu contexto e como perspetiva, concretiza e interpreta a prática que desenvolve. Para isso, o conhecimento nos seus diversos domínios, incluindo a Matemática, a sua Didática e a sua capacidade de localizar e construir recursos para o ensino-aprendizagem são determinantes. Assim, para caracterizar a prática docente, importa analisar a natureza das tarefas (re)desenhadas, selecionadas e sequenciadas, para os aspetos relativos à comunicação (questionamento, representações e explicações) analisando o quando, o como e o porquê das escolhas realizadas e concretizadas e analisar as diversas ações que ocorrem em diferentes momentos da prática. Estas ações podem estar relacionadas com os processos, promovendo e gerindo aprendizagens e podem ter foco na promoção e gestão do ambiente de aprendizagem. Deste modo, podem constituir-se práticas entre o ensino direto e o ensino-aprendizagem exploratório onde encontramos os diferentes papéis do professor e dos alunos, identificamos tarefas estruturantes da prática com diferente natureza e onde as atividades e ações dos intervenientes nos diferentes momentos se distinguem. No caso dos futuros professores, parte do seu conhecimento fundamental é de natureza teórica, uma vez que o seu conhecimento prático é muito limitado. Este conhecimento, muitas vezes é constituído por ideias gerais sobre o ensino da Matemática que foram trabalhados na formação inicial. A planificação deve ser cuidada e detalhada sobre a atividade matemática do professor e dos alunos. No entanto, nem tudo pode ser previsto na planificação. Numa perspetiva em que a prática é um contexto rico na resolução de problemas, o futuro professor formula problemas, coloca hipóteses, definindo um plano de ação, e concretiza, voltando a um processo de análise e questionamento. A reflexão deve ser considerada uma prática diária, procurando, na teoria, interpretar os acontecimentos, individualmente ou em conjunto com outros, reconstruindo o seu conhecimento e reformulando hipóteses e soluções. Por isso, a formação inicial tem um papel importante no desenvolvimento do conhecimento dos futuros professores quando proporciona oportunidades de aprendizagem que podem promover ferramentas para um desenvolvimento ao longo da profissão. O desafio é apoiar e desafiar os futuros

professores a aprender a aprender, envolvendo-os em ciclos de experiência/exploração/reflexão, construindo conhecimento. Na prática de ensino supervisionada é importante que o foco da reflexão sobre o processo de ensino-aprendizagem seja na Matemática, no seu ensino e na sua aprendizagem.

Capítulo 3

Metodologia de Investigação

Neste capítulo apresento a metodologia de investigação. Para tal, indico, primeiramente, as linhas gerais das opções metodológicas considerando o objetivo e as questões de investigação. Em seguida, descrevo o contexto onde decorreu a recolha de dados e apresento os perfis das participantes justificando as razões da sua escolha. No terceiro ponto, apresento os métodos de recolha de dados, justificando as opções tomadas. No quarto ponto, descrevo o processo de análise dos dados e as decisões tomadas. No final, dou conta dos cuidados éticos considerados ao longo do estudo.

3.1. Opções metodológicas

Esta investigação teve como objetivo compreender o conhecimento didático e a prática de ensino de futuros professores de 2.º ciclo sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais na prática de ensino supervisionada. Para tal, analiso a prática de ensino supervisionada e procuro analisar as questões emergentes e que reconhecem como relevantes, relativamente às tarefas, aos alunos, aos aspetos relativos à comunicação e às suas ações. Assim, pretendo responder às seguintes questões: (i) Qual a visão dos futuros professores sobre o papel do professor e alunos, as tarefas a propor e as dinâmicas a concretizar em sala de aula no que respeita ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática e especificamente dos números racionais? (ii) Como se caracteriza o modo como os futuros professores preparam e concretizam o processo de ensino e aprendizagem dos números racionais? (iii) Que aspetos são alvo de reflexão como resultado das experiências vividas e que desafios se manifestam na prática de ensino supervisionada quando lecionaram números racionais?

A realidade é uma construção social baseada nas experiências dos participantes, num determinado contexto. Neste estudo fica patente a construção intersubjetiva de significados, social e experiencialmente construídos. O papel da investigadora foi compreender o ponto de vista dos participantes, procurando interpretar as construções e reconstruções de significados que as futuras professoras foram fazendo ao longo das suas experiências de ensinar o tema dos números racionais na prática de ensino supervisionada (Lincoln, Lynham & Guba, 2011). Enquadro o estudo no *paradigma interpretativo*, porque procurei compreender a situação do ponto de vista das participantes onde pretendi perspetivar o objeto de estudo globalmente e de uma forma coerente e completa. Considero que é impossível separar a história de vida da investigadora e os seus valores decorrentes do processo de pesquisa, sendo central a reflexão proporcionada, existindo, no entanto, uma subjetividade inerente à interpretação dos comportamentos observados e subsequentes registos de observação (Stake, 1995).

Para Erickson (1986), *a metodologia qualitativa* não é apenas um método alternativo, mas também uma forma diferente de ver questões ligadas à educação. Esta metodologia debruça-se, muito em especial, sobre questões inerentes ao significado e à ação, em contexto, do objeto em estudo, analisando as interações que se realizam no seu quotidiano (Creswell & Creswell, 2018). Stake (1995) identifica três distinções entre a ênfase qualitativa e quantitativa dada a um estudo: *a) a distinção entre explicar e compreender*: a investigação qualitativa pretende compreender as inter-relações complexas entre o que existe; *b) a distinção entre um papel pessoal e impessoal para o investigador*: no estudo qualitativo o papel do investigador é próximo do contexto exigindo que este esteja no campo, observando, analisando, interpretando e procurando padrões de relações imprevistas ou esperadas; e *c) a distinção entre o conhecimento descoberto e o conhecimento construído*: na investigação qualitativa, o investigador constrói uma realidade mais clara, mais sofisticada e em particular onde se constrói uma realidade que possa suportar “um ceticismo disciplinado” (p. 117). Assim, tendo em conta o objetivo e as questões acima referidas, e por entender a realidade em estudo como um fenómeno complexo, optei por usar uma metodologia qualitativa. Sendo um estudo qualitativo, assume as suas características básicas. A investigação decorreu num ambiente natural e os dados foram recolhidos diretamente por mim. Os dados são apresentados de modo descritivo, evidenciando o processo e os significados que as futuras professoras atribuíram ao vivido. A análise dos dados foi realizada

indutivamente, mas, também, partindo da literatura existente como explicarei mais adiante (Garnica, 1999).

Este estudo assume-se, também, com um *carácter particularista*, procurando analisar o objeto definido, servindo para a expansão de teoria e não para generalizar (Ponte, 2006; Yin, 2009). Além disso, “a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo, o investigador, o instrumento principal” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 47). Numa investigação deste tipo torna-se necessário descrever o contexto real onde esta ocorre para, depois, relacionar o fenómeno e o contexto (Yin, 2009). Neste sentido, durante o período de recolha de dados, junto das participantes, intercalei situações de observação da sua prática de ensino supervisionada, com entrevistas apoiadas pelo visionamento dos vídeos das suas aulas. Para que as futuras professoras me sentissem próxima das suas experiências de formação, observei algumas dinâmicas formativas nas Escolas Superiores de Educação acompanhada ou não por elas. Também realizei entrevistas aos supervisores de estágio e professores cooperantes para compreender os contextos e processos de supervisão vividos. Importa reforçar que as observações e entrevistas realizadas não tiveram como objetivo analisar os processos, mas estar mais próxima da realidade dos participantes. Deste modo, poderia compreender o descrito pelas futuras professoras e promover reflexões em torno do vivido, partindo da realidade observada e descrita por outros intervenientes.

O estudo tem um *design* de estudo de caso. Um estudo de caso é sempre bem delimitado e singular, debruçando-se deliberadamente sobre uma situação que se pensa única e procurando os seus aspetos essenciais e característicos, pretendendo contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse (Creswell & Creswell, 2018; Ponte, 2006; Stake, 1995) e a sua escolha depende do objeto a estudar (Stake, 1995). Escolhi este *design* porque pretendia compreender a natureza do conhecimento que as futuras professoras evidenciavam na fase final da sua formação, na última prática de ensino supervisionada.

Uma vez que não é possível explorar todos os ângulos de um fenómeno num tempo razoavelmente limitado (Yin, 2009), analisei três casos, de três futuras professoras, em dois contextos formativos diferentes. Das três futuras professoras, duas eram formandas de uma Escola Superior de Educação (ESE B) e realizaram o seu estágio na mesma Escola, numa turma de 5.º ano de escolaridade. A terceira futura professora era formanda de uma segunda ESE (ESE A) e estagiou sozinha numa turma de 6.º ano, numa das Escolas onde habitualmente a ESE tem núcleo de estágio. O facto

de os contextos serem distintos, ainda que não fosse condição de seleção, trouxe diversidade e particularidade entre os casos, o que foi enriquecedor para este estudo. As futuras professoras foram formadas em instituições de ensino superior diferentes, onde se fizeram determinadas opções metodológicas e se proporcionaram determinadas experiências. Tendo cada uma das participantes uma história de vida, vivenciando experiências de forma diferente e ainda estando a desenvolver a experiência letiva em contextos diferentes, fez emergir aspetos diferentes do objeto estudo mas igualmente significativos, tendo sido importante compreender as razões porque tal aconteceu (Ponte, 2006; Stake, 1995). Assim, a unidade de análise é a futura professora do 2.º ciclo do ensino básico, constituindo-se neste estudo três casos de futuras professoras que estão no último ano do Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º ciclo do Ensino Básico, num contexto de prática supervisionada, a lecionar números racionais.

Como alerta Garnica (1999), importa não esquecer que o conhecimento sobre o caso está em constante processo de construção, envolve uma multiplicidade de dimensões e que a realidade pode ser compreendida sob diversas óticas. Por isso, tive que ter uma atitude aberta e flexível a aspectos novos ou que se foram revelando durante o trabalho de investigação. Porque os casos apresentam uma multiplicidade de dimensões, utilizei uma variedade de fontes de dados, de métodos de recolha de dados, de instrumentos e procedimentos, para evitar interpretações unilaterais ou superficiais. Realizei várias entrevistas semiestruturadas, observação de práticas e análise documental de documentos produzidos pelas futuras professoras. A investigadora, quando parte para a recolha e análise de dados, tem hipóteses criadas a partir da literatura. Em seguida, depois dos dados terem sido completamente transcritos, lidos e interpretados, passo a passo, revelaram-se padrões e nuances comprovando ou não as hipóteses emergentes da literatura. No entanto, a literatura não pode ser limitativa e, por isso, das entrevistas e documentos analisados procurei compreender o objeto, a partir das perspetivas que me foram confiadas, emergindo outras categorias. Ou seja, às categorias trazidas da literatura acrescentei ou adequei as categorias durante o processo de análise (Gibbs, 2012; Goetz & LeCompte, 1984). Note-se que o cronograma do estudo completo pode ser analisado no anexo 1.

Procurei desenvolver uma prática de investigação pautada pelos princípios de ética definidos pela comunidade (AERA, 2011), tendo autorização de todos os envolvidos para a recolha e comunicação dos dados. Também procurei descrever cuidadosamente os eventos, pessoas e situações observadas, transcrevendo totalmente o

observado e ouvido, extratos de documentos e opiniões das participantes. Também procurei ouvir as diferentes perspetivas das envolvidas de modo a confirmar – ou não – as minhas interpretações (Garnica, 1999).

3.2. Contexto do estudo e participantes

O estudo de caso começou com um plano muito aberto, que se foi delineando mais claramente à medida que o estudo avançou. Inicialmente, foi definido o objetivo e as questões de partida, procurando pontos críticos ou hipóteses provisórias. A problemática teve origem nas minhas experiências como docente do 2.º ciclo do ensino básico e na formação inicial e contínua de professores. Para aprofundar as questões, a literatura relacionada com o tema teve um papel fundamental para construir um olhar racional e mais aprofundado. Por fim, a análise de dados e sua discussão entre pares desafiou-me a limitar e focar as questões de investigação e a selecionar os dados mais pertinentes para responder às questões colocadas no estudo (André, 2013). Também a escolha dos participantes passou por várias etapas, começando pelo contato com várias Escolas Superiores de Educação na procura de participantes com o perfil desejado.

3.2.1. Instituições de ensino superior

Numa primeira fase, a escolha das instituições foi realizada por conveniência da investigadora, uma vez que pretendia acompanhar de perto o estágio. Assim, tornou-se necessário que existisse alguma facilidade de mobilidade. Para a escolha, também foi determinante a disponibilidade e a abertura para a presença de uma investigação a decorrer no interior dessas instituições. De modo a encontrar futuros professores elegíveis para o estudo, ao longo do ano letivo, fui tendo contato com professores de Didática da Matemática das diferentes ESE num raio de 150 km de Lisboa. Solicitei, junto dos docentes, a identificação de futuros professores que fossem lecionar o tema dos números racionais durante o 1.º ou o 2.º semestre na prática de ensino supervisionada. No 1.º semestre, foram identificados dois estagiários, na ESE X e dois na ESE Y. O primeiro par, de futuros professores, não se mostrou disponível para a recolha de dados e a professora cooperante não autorizou a recolha de dados na sua turma, no par da ESE Y.

Assim, só no 2.º semestre foi possível encontrar dois pares de futuros professores recetivos à recolha de dados e onde tinha autorização dos professores cooperantes para a

recolha de dados, nas ESE A e B. Para confirmar que se tratavam de perfis diferentes no que respeita ao seu percurso pessoal e na formação inicial, mantive conversas informais com as professoras das unidades curricular-chave sobre as possíveis participantes e sobre o processo formativo nas instituições. Em seguida, contatei com as quatro estagiárias e respetivos professores cooperantes com os objetivos de: (i) conhecer os potenciais casos de estudo e (ii) compreender o processo de lecionação a desenvolver no que respeita ao ensino e à aprendizagem dos números racionais.

3.2.2. Perfil dos casos

Segundo Flyvbjerg (2011), a definição e limitação dos casos em estudo é decisiva. Para a seleção dos casos foram definidos os perfis procurando maximizar o que pretendia compreender – o conhecimento de futuros professores sobre o tópico números racionais quando desenvolvem a sua prática de ensino supervisionada. Procurava, desta forma, identificar futuros professores que pudessem apresentar-se como típicos daquele contexto e casos que nos permitissem iluminar de forma diferente o objeto em estudo (Stake, 1995). Assim, os quatro casos seriam de futuros professores que desejaram ser professores de Matemática. Com este perfil pretendia identificar as razões que levavam os alunos a escolher os cursos de Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico, motivados para a futura profissão, o que poderia levar a uma atitude mais reflexiva sobre o seu conhecimento e a forma como este se constituiu (Gainsburg, 2012; Wilkins, 2008). A característica que diferenciava o segundo e o terceiro casos era o facto de terem frequentado escolas superiores diferentes (ESE A e B) com opções curriculares também diferentes, permitindo cruzar aspetos de natureza pessoal, com aspetos de natureza institucional, reconhecendo-se o papel que a formação inicial de professores pode ter no conhecimento de futuros professores (Sawars, Smith, Smith, & Hart, 2009). Para o quarto caso, importava encontrar um futuro professor que tivesse acedido à ESE pelo regime maiores de 23. Este perfil espelharia uma realidade do ensino superior, a existência de alunos que trazem consigo conhecimentos e experiências diferenciadas dos restantes alunos. Com este perfil, pretendia compreender que conhecimentos foram constituídos no seu percurso de vida e que reconhecia como importantes para o trajeto vivido enquanto aluno de mestrado e futuro professor de Matemática, podendo a sua experiência de vida influenciar no conhecimento manifestado na prática supervisionada. Dadas as dificuldades em encontrar

futuros professores a lecionar números racionais no 2.º ciclo e disponíveis para o estudo a escolha ficou limitada. Felizmente, entre as quatro futuras professoras existiam três perfis diferentes. No entanto, uma das estagiárias, uma semana depois de ter aceite o convite para participar no estudo, adoeceu. Assim, conforme indica o quadro 1, restaram três casos com perfis diferentes no que respeita aos percursos antes e durante a formação inicial e com desempenhos e experiências diferentes nas unidades curriculares na licenciatura em Educação Básica e no mestrado em ensino do 1.º e 2.º ciclo. Mais tarde, constatei que também apresentavam focos de trabalho diferentes durante a sua prática de ensino supervisionada.

Quadro 1. Caracterização das futuras professoras

	Contexto	Frequência de Matemática	Desempenho como formandas
Ana	ESE A – 5.º ano	12.º ano	Bom
Glória	ESE A – 5.º ano	12.º ano/ Experiência de ensino	Muito Bom/Bom
Berta	ESE B – 6.º ano	12.º ano	Muito Bom

As participantes do estudo foram três futuras professoras do 2.º ciclo do ensino básico (com os nomes fictícios de Ana, Glória e Berta), formandas de duas Escolas Superiores de Educação, aqui designadas por ESE A e ESE B, que iriam lecionar números racionais durante a prática de ensino supervisionada do último semestre do mestrado em ensino, em turmas de 5.º e 6.º anos de escolaridade. Feito o cruzamento dos contextos, do percurso enquanto estudantes e do desempenho nas disciplinas de formação matemática e de didática da matemática, as três professoras eram todas diferentes. Note-se que o desempenho tem duas classificações porque, segundo a docente da ESE, Glória tinha melhor desempenho na Matemática do que na Didática da Matemática.

3.3 Recolha de dados

Existem três grandes métodos de recolha de dados nos estudos de caso: (i) fazer perguntas (e ouvir atentamente), (ii) observar eventos (e prestar atenção ao que acontece) e (iii) ler documentos. Todos estes métodos são escolhidos e orientados em função do objetivo e questões do estudo (André, 2013). Procurei a validação do estudo e fazer uma triangulação de dados recolhendo-os de diversas fontes (Schoenfeld, 2002).

Para a compreensão dos casos a estudar, suportei-me, fundamentalmente, em entrevistas semiestruturadas, na observação direta e na análise das planificações e documentos produzidos. No quadro 2 apresento como as questões de investigação foram informadas pelos diferentes métodos de recolha de dados.

Quadro 2. Métodos de recolha de dados utilizados

Métodos	Questão (i)	Questão (ii)	Questão (ii)
Entrevistas	X	X	X
Observação		X	
Documentos	X	X	X

Assim, de modo responder à primeira questão sobre a visão das futuras professoras sobre a Matemática e o seu processo de ensino e aprendizagem, com um maior foco no tema dos números racionais, foram realizadas entrevistas semiestruturadas antes e depois da prática de ensino supervisionada. Também foram analisadas

as reflexões escritas das futuras professoras produzidas durante o processo. Para dar resposta à questão sobre o processo de preparação e concretização da prática, foram recolhidos dados com as diferentes entrevistas, observando, presencialmente e através dos vídeos e respetivas transcrições, e analisados todos os documentos produzidos pelas futuras professoras. Finalmente, para compreender os aspetos alvo de reflexão sobre o vivido, foi importante a análise de todas as entrevistas e reflexões escritas.

3.3.1. Entrevistas semiestruturadas

As entrevistas são das técnicas mais usadas na investigação “cujo principal objectivo é compreender os significados que os entrevistados atribuem a determinadas questões e/ou situações” (Morgado, 2012, p. 72). Segundo Fontana e Frey (1994) as entrevistas semiestruturadas dão uma “visão mais alargada dada a sua natureza qualitativa. São várias as razões que fundamentam a realização de entrevistas semiestruturadas no âmbito de uma investigação qualitativa (Erickson, 1986): a) invisibilidade do dia-a-dia; b) conhecer pormenores concretos da prática; c) procurar dar significado ao contexto; e) necessidade de comparar vários contextos com os seus intervenientes; e f) permitir a comparação da compreensão

de circunstâncias imediatas no contexto. Assim, as entrevistas são um dos processos de obtenção de informação mais diretos, podendo ajudar a traçar um quadro representativo das noções acerca de um determinado fenómeno, uma vez que os entrevistados refletem as suas percepções e interesses. As entrevistas permitem, também, recolher dados descritivos na ótica do participante para que a investigadora possa entender “intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspetos do mundo” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 134). Finalmente, sublinho a importância da interação como forma de permitir a compreensão da perspetiva dos indivíduos e as suas experiências, devendo ser promovidas com bastante frequência e em diversas situações de forma a “apreciar as inconsistências, ambiguidades e contradições dos seus comportamentos, explorar a natureza e dimensão dos seus interesses e compreender as relações” (Woods, 1999, p. 54).

Nas entrevistas o investigador é um “facilitador da reconstrução de múltiplos significados” (Lincoln, Lynham & Guba, 2011, p. 101). Ou seja, pressupõe uma relação entre investigador e participante muito estreita, baseada na confiança (Ludke & André, 1986). Inicialmente, foram elaborados guiões orientadores das entrevistas e da observação a realizar das aulas. Tal como sugere Stake (1995), de modo a refinar os instrumentos elaborados desenvolvi um estudo-piloto com uma das minhas formandas de Didática da Matemática. Esta experiência foi importante para refinar as questões dos guiões e, acima de tudo, para melhorar o processo das entrevistas com base na observação das aulas videogravadas. No estudo-piloto, as aulas foram totalmente observadas, ou no momento seguinte da aula, ou no dia seguinte. Da experiência vivida percebi que teria, durante a observação direta das aulas, de identificar momentos importantes para a observação e reflexão pretendida após a aula. Por outro lado, a observação imediata das aulas nem sempre era produtiva e era muito desgastante para a futura professora. Também percebi que, apesar de ter decidido não recolher dados junto das minhas formandas, para manter a minha investigação separada do processo de avaliação, era importante conhecer os processos formativos vividos pelos futuros professores. Este conhecimento foi importante para o questionamento sobre a visão que a futura professora tinha sobre o ensino e aprendizagem da Matemática e para questionar as fontes a que recorreu e a forma como preparou as aulas.

Nesta investigação, as participantes nunca me tinham visto e depois das devidas apresentações pessoais e do próprio estudo fui, desde logo, criando um ambiente

informal e próximo. Acompanhei as futuras professoras em atividades letivas nas ESE e fui desenvolvendo bastantes conversas informais não gravadas. Ainda assim, antes de cada entrevista explicitarei os respectivos objetivos e recordei que poderiam, posteriormente, ter acesso à respetiva transcrição. As entrevistas realizadas foram pouco estruturadas, com carácter informal, desenvolvidas em profundidade e gravadas em áudio, assumindo o carácter de reflexões conjuntas (Stake, 1995) mantendo-se uma relação amistosa dentro de uma linha previamente definida (Fontana & Frey, 1994).

Para definir a linha condutora foram elaborados guiões (Anexos 2, 3 e 4) com base na literatura revista. Os guiões cobriram todos os pontos previstos para evitar que as questões se desviassem do âmbito da investigação (Yin, 2009). O guião da entrevista inicial (Anexo 2) às futuras professoras emergiu apenas da revisão da literatura e os guiões das restantes entrevistas (Anexos 3 e 4) foram adequados em conformidade com a análise de conteúdo das primeiras entrevistas, das aulas observadas, das planificações analisadas e também da revisão de literatura realizada durante a investigação.

Tal como sugerem Fontana e Frey (1994), de modo a integrar-me no contexto e a compreendê-lo, na primeira fase do estudo tive várias conversas informais com os docentes das Escolas Superiores de Educação envolvidos no processo formativo dos futuros professores e que tinham um papel fundamental na formação relativa ao conhecimento sobre números racionais e sobre seu ensino-aprendizagem. Com estas interações pretendia, não só compreender o processo formativo vivido pelos futuros professores, mas, também, obter dados para triangulação com os dados recolhidos junto dos participantes do estudo (Erickson, 1986; Yin, 2009). No final da recolha de dados, entrevistei os professores cooperantes do estágio e as supervisoras da prática de ensino (Anexo 5), procurando compreender qual o papel que entendiam para si, num contexto de estágio, qual a liberdade de gestão curricular que deram ao estagiário, a sua visão sobre o processo vivido pelas futuras professoras e sobre as aprendizagens que realizaram (Peterson & Willians, 2008; Yin, 2009). Ou seja, “as pessoas que estão no local quando nós estamos no local são provavelmente as melhores fontes de dados . . . aqueles que poderão ajudar da melhor maneira a compreender o caso, quer sejam representativos, ou não” (Stake, 1995, p. 73).

Neste estudo fiz, dependendo dos casos, 10 e 11 entrevistas semiestruturadas aos participantes. Na figura 3 apresento os diferentes momentos de realização das entrevistas realizadas com as três futuras professoras. A cada futura professora foi

realizada uma entrevista inicial (EI) e uma final (EF) no início e no final do semestre. Antes e depois de cada aula foram realizadas entrevistas semiestruturadas (EAAx, EDAx). No final da semana e meia de intervenção foi realizada uma entrevista que denominei de “a meio do processo” (EM).

Momentos de realização das entrevistas									
Glória	EI	EAA1	EAA2	EAA3	EM	(…)	A4	(…)	EF
		T1	T2 T3	T4					
Ana	EI	EDA1	EDA2	EDA3	EAA4	EM	(…)	EF	
		T1	T2 T3	T1 T2					
Berta	EI	EDA1	EDA2	EDA3	EAA4	EM	(…)	EF	
		T1	T1 T2	T2 T3					
		EDA1	EDA2	EDA3	EDA4				

Figura 3. Momentos de realização das entrevistas

Efetuei três entrevistas às futuras professoras em alturas chave do semestre (entrevista inicial, a meio do estágio e no final). Para além disso, realizei outras entrevistas/reflexão, tanto quanto possível antes da aula e logo que possível depois da aula observada. O quadro 3 apresenta a síntese do pretendido com os 5 tipos de entrevistas semiestruturadas que realizei.

Na primeira entrevista (Anexo 2) pretendia conhecer o percurso das futuras professoras antes de ingressarem no ensino superior e quais as perspetivas sobre o vivido na formação inicial e procurei fazer um levantamento de expectativas acerca do trabalho a realizar. A segunda entrevista (Anexo 3) teve como objetivo refletir acerca do trabalho em curso e fazer um levantamento das dificuldades encontradas, das situações mais marcantes para as futuras professoras e ainda das aprendizagens realizadas até essa altura. A terceira entrevista (Anexo 4) serviu para fazer um balanço do processo e do culminar do trabalho, assim como das aprendizagens realizadas, tendo em vista possíveis mudanças no futuro. Procurei, assim, fazer uma revisão do seu percurso ao longo da experiência de ensinar números racionais (Erickson, 1986). Antes da leção de cada uma das quatro aulas, realizei pequenas entrevistas semiestruturadas onde as futuras professoras se debruçaram sobre o que pretendiam realizar na aula com as tarefas que iriam propor, como tinha decorrido o trabalho de preparação e se

antecipavam as ideias dos alunos, as questões a fazer e as suas ações nos diferentes momentos da aula. Quando era possível, essas entrevistas eram alimentadas pela análise das planificações registadas.

Quadro 3. Síntese dos cinco tipos de entrevistas

Entrevista Inicial (EI)	Experiências vividas até ao ensino superior.	Experiências vividas no ensino superior.	Visão sobre a prática letiva	Perspetiva sobre números racionais e sobre o ensino dos números racionais
Entrevista antes da Aula (EAA)	Clareza dos objetivos e propósito de ensino	Opções sobre as tarefas e abordagem	Antecipação de dificuldades e erros dos alunos	Previsão de estratégias, sequenciação da exploração e estabelecimento de conexões na síntese final
Entrevista depois da Aula (EDA)	Balanço da aula: Recurso a esta tarefa, estratégia e representações;	Identificação de episódios crítico	Análise dos desafios colocados	Balanço das ações realizadas pelo professor
Entrevista a Meio do estágio (EM)	Balanço sobre a prática já realizada	O que é que aprendeu sobre números racionais e o seu ensino-aprendizagem	Efeitos nas aprendizagens dos alunos	Aspetos influenciadores das escolhas que realizou
Entrevista Final (EF)	Mobilização de experiências enquanto aluno para a prática letiva.	Experiência vivida enquanto estagiário	Aprendizagens sobre o ensino-aprendizagem	Visão sobre o tema n.º racionais e o seu ensino-aprendizagem

Nas aulas selecionadas, conjuntamente com as futuras professoras, foram realizadas gravações vídeo que, em momento posterior, foram alvo de entrevistas semiestruturas com uma natureza reflexiva. O vídeo de cada aula serviu como base para uma conversa-reflexão sobre o momento vivido pelas futuras professoras (Santos & Ponte, 2002). Deste modo, desenvolvi questões sobre a prática realizada, as opções tomadas e os conhecimentos que foram mobilizados nas opções e ações realizadas. Pretendi, também, compreender as razões das opções (Dinham & Stritter, 1986; Nguyen, McFadden, Tangen & Beutel, 2013). A reflexão/entrevista foi alvo de uma

preparação prévia, tendo sido elaborado um guião muito pouco estruturado (Anexo 6) baseando-me, em parte, noutros estudos (Alsawaie & Alghazo, 2010; Gainsburg, 2012), incluindo apenas algumas ideias centrais de forma a não me desviar dos objetivos da entrevista (Erickson, 1986).

3.3.2. Observação

Uma vez que o estudo é estruturado, a partir das questões de partida, “a observação é necessariamente estruturada na medida em que o seu ponto de partida é sempre um questionamento específico do contexto empírico em causa” (Afonso, 2005, p. 92). Assim, a recolha de dados foi realizada durante o 2.º semestre do ano letivo, sendo que a observação de aulas decorreu apenas durante o período em que as futuras professoras lecionaram o tema dos números racionais.

A observação é muito importante por possibilitar um contacto estreito e pessoal com o fenómeno em estudo, podendo compreender e interpretar melhor a perspetiva dos participantes em relação à situação diariamente vivida (Erickson, 1986; Ludke & André, 1986). Também Stake (1995) salienta a importância da observação para uma “maior compreensão do caso. . . Precisamos de observações pertinentes dos problemas” (p. 23).

Relativamente às observações realizadas nas instituições de ensino superior, foquei-me em aspetos como a dinâmica constituída, capacidades desenvolvidas, conteúdos trabalhados e tarefas propostas. Estes dados permitiram, mais tarde, a compreensão dos discursos dos participantes do estudo relativos à formação inicial (Erickson, 1986), a origem de algum do conhecimento manifestado na prática supervisionada e, ainda a partilha com as participantes da realidade vivida. Para registar os dados recolhidos nas observações naturalistas constituí notas de campo que me permitiram, mais tarde, redefinir guiões de entrevistas.

A observação de quatro aulas de cada participante foi não participante e naturalista, por ser realizada na sala de aula onde ocorreram os fenómenos em estudo, tentando agir o menos possível sobre a realidade observada e interagindo o menos possível com os indivíduos que lá se encontravam. Note-se, contudo, que, apesar de me remeter a um papel de observadora não participante é natural que tenha trazido alguma perturbação ao ambiente vivido. Para a observação da aula, antecipadamente combinada, e quando foi possível, depois de analisada a planificação das aulas, estruturei um guião de

observação (Anexo 7) tendo parte deste sido estruturado com base noutros estudos (Charalambos, Hill, & Ball, 2011; Gainsburg, 2012). Este guião serviu para orientar as observações, evitando a minha dispersão por aspetos secundários para este estudo. No decorrer das aulas, procedi ao registo dos acontecimentos diretamente relacionados com as questões do estudo, realizando uma observação focada num levantamento de tópicos a abordar na posterior entrevista e procurando evidências para a caracterização da prática constituída (Stake, 1995). Na observação direta procurei identificar episódios que considere críticos. Estes episódios podiam ser momentos onde as futuras professoras não foram claras na sua comunicação ou momentos onde, em interação com os alunos, estes evidenciaram dificuldades ou raciocínios inesperados. As futuras professoras também podiam sugerir a análise de episódios específicos. Como refere Afonso (2005, p. 91) “a observação é uma técnica de recolha de dados particularmente útil e fidedigna, na medida em que a informação obtida não se encontra condicionada pelas opiniões e pontos de vista dos sujeitos, como acontece nos questionários”. Para a observação da prática pedagógica recorri a um guião (Anexo 7) onde analisei aspetos relativos à antevisão das aulas e as características da prática letiva, a saber:

A. Antevisão da aula:

- Clareza dos objetivos e propósito de ensino;
- Fundamentação para as opções;
- Antecipação de dificuldades e erros;
- Previsão de estratégias e sequenciação da exploração;
- Previsão de possíveis conexões e síntese final
- Outros aspetos.

B. Aspetos a observar nas aulas videogravadas nos diferentes momentos da aula:

- Natureza das tarefas;
- Ações e comunicação nos diferentes momentos das aulas.

Note-se que, tal como sugere Stake (1995), quando não me foi possível observar algumas aulas por estarem sobrepostas com outras, pedi informações durante as entrevistas às professoras que acompanhavam o estágio que me dessem informações sobre o acontecido. Esses dados não foram usados mas fiquei mais segura de que o tipo de práticas não tinha sofrido alterações por razões circunstanciais. Esta situação aconteceu uma vez, na quinta aula que gostaria de ter observado no caso de Glória.

3.3.3. Recolha e análise documental

A análise documental constitui “uma técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja completando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspetos novos...” (Ludke e André, 1986, p. 38). A análise documental de registos dos participantes constituiu mais um modo de aceder ao objeto a observar, de forma indireta, permitindo intervir o menos possível (Stake, 1995). Foram alvo de recolha e análise dois tipos de documentos: os documentos construídos pelas futuras professoras, durante e depois do período formativo de prática de ensino supervisionada, tais como tarefas propostas, planificações, registos pessoais, reflexões produzidas para os supervisores de estágio (Ludke & André, 1986) e as notas de campo recolhidas das observações e conversas informais (Erickson, 1986; Stake, 1995).

Com o objetivo de aceder ao objeto em estudo e de forma a preparar algumas entrevistas, analisei os documentos escritos de natureza reflexiva (registos pessoais e reflexões semanais (RE) ou quinzenais (RF)) e as tarefas propostas e planificações (P) elaboradas para a preparação das aulas sobre o ensino-aprendizagem dos números racionais. Quando foi possível recolhi as diferentes versões das tarefas e das planificações onde, por vezes, estava registado o feedback dado pelos professores supervisores.

Como forma de registo e organização dos aspetos vividos e observados durante a investigação empírica, constitui um diário de bordo com notas de campo, que me permitiu sistematizar as narrativas que mais tarde foram construídas acerca dos casos e seus contextos. Estes foram também alvo de uma análise durante e após a recolha de dados (Erickson, 1986; Stake, 1995). Estas notas de campo foram particularmente importantes para as entrevistas depois de cada aula, pois fui anotando episódios críticos e aspetos a discutir sobre as ações que os professores foram realizando nos diferentes momentos das aulas.

3.4 Procedimentos e técnicas de análise de dados

3.4.1. Processo de análise de dados

A fase de análise de dados decorreu, inicialmente, em simultâneo com a recolha de dados. Conforme sugere André (2013), comecei por organizar e catalogar todo o

material recolhido segundo a fonte, o tipo de instrumento e por ordem cronológica, por exemplo, no caso de Ana realizei a entrevista inicial (AEI), as entrevistas antes de cada aula (AEAAx) e depois de cada aula (AEDAx), uma entrevista a meio do processo (AEM) e uma no final (AEF). Relativamente aos documentos, analisei os seus registos informais (AR), as planificações (AP) e as reflexões escritas (ARE e ARF).

Em seguida, transcrevi na totalidade todas as entrevistas e aulas videogravadas de forma tão detalhada quanto possível, incluindo sinais de pontuação indicando entoações e, quando era pertinente, expressões faciais (Guther, 2006). Posteriormente realizei uma “leitura flutuante” dos dados transcritos procurando “extrair critérios de classificação dos resultados em categorias de significação” (Rocha & Deusdará, 2005, p. 313)

Uma das principais funções da análise qualitativa é encontrar padrões e explicações. Há duas lógicas de explicação, a dedutiva e a indutiva, que a investigação qualitativa pode utilizar em conjunto. A indução é a generalização e justificação de uma explicação geral baseada na acumulação de muitas circunstâncias particulares, mas similares (partir dos dados). A explicação dedutiva avança em sentido oposto e parte de uma situação particular para explicar por dedução uma ideia geral sobre as circunstâncias (a partir da literatura) (Gibbs, 2012; Goetz & LeCompte, 1984).

A análise qualitativa de texto implica normalmente dois tipos de procedimentos, a saber, identificar o conteúdo pertinente e a sua interpretação (Gibbs, 2012). “Há uma ampla variedade de maneiras de analisar os dados e que os investigadores que realizam análise qualitativa adoptam. . . para realizar essa análise” (Gibbs, 2012, p. 23). A análise e interpretação foram utilizadas simultaneamente. As entrevistas foram codificadas e posteriormente descritas por categorias e interpretadas. As aulas videogravadas e os documentos foram descritos, evidenciando episódios significativos, desenvolvendo em simultâneo o processo interpretativo.

No contexto de uma abordagem interpretativa, a análise dos dados qualitativos centra-se sobretudo na finalidade de produzir uma descrição tão rica quanto possível de como os participantes observam a sua própria realidade. Deste ponto de vista, os procedimentos de análise orientaram-se de modo a descrever situações e acontecimentos, a partir das perspetivas reveladas por aqueles que participaram na investigação (Gibbs, 2012). Na apresentação dos resultados enfatizei os episódios mais significativos respeitando a sequencialidade dos acontecimentos em contexto (Stake, 1995), tendo como principal objetivo compreender cada caso especificamente.

3.4.2. Análise dedutiva e indutiva

Partindo do quadro teórico, que se finalizou durante a recolha de dados, foram definidas categorias que serviram de base para os guiões das entrevistas e observações, conforme foi visto anteriormente. Posteriormente, e para uma triangulação dos dados, foi necessário analisar os dados, categorizando-os, e trabalhando todo o material obtido de forma a compreender e interpretar as situações em estudo (Ludke & André, 1986; Yin, 2005). Para tal, foram integralmente transcritas as entrevistas e os momentos críticos das aulas vídeo gravadas.

O processo de análise qualitativa consiste na codificação temática dos dados (o que dá origem a vários códigos (palavras ou expressões que identificam porções de texto). A partir dos códigos chegamos a unidades temáticas (o que proporciona níveis mais amplos de análise). Segundo Gibbs (2012), codificar é uma maneira de associar porções de texto a diferentes ideias. O início da codificação pressupõe uma “leitura intensiva” (p. 67) e repetida dos dados. O processo de codificação é indutivo e “guiado pelos dados” (p. 71), tendo em conta os objetivos da investigação. Comecei por partir das categorias criadas para a elaboração dos instrumentos de recolha de dados e que foram inspiradas da literatura. Alguns códigos revelaram-se improdutivos e foram abandonados, outros fundiram-se num único código e outros foram separados em dois ou mais códigos. Este processo foi desenvolvido na análise das entrevistas recorrendo ao software Nvivo. A análise da preparação e concretização das aulas de cada caso foi realizada por um processo diferente. Comecei por relatos que apresentavam um estilo informal, narrativo, ilustrado por figuras de linguagem, citações, exemplos e ilustrações. A preocupação foi com a transmissão direta, clara e bem articulada do caso, num estilo que se aproximasse da experiência pessoal do leitor (André, 2013). Entretanto, fui reduzindo os dados mas continuando a assumir um cunho descritivo e interpretativo de modo a caracterizar e compreender as práticas letivas das futuras professoras. Assim, os dados foram analisados dedutivamente partindo do quadro teórico e indutivamente partindo das ações desenvolvidas pelas futuras professoras do estudo (Goetz & LeCompte, 1984). Estabilizada a codificação do material empírico foi possível recuperar todas as unidades de contexto associadas a cada código e juntá-las num único ficheiro, comparando-as. Por outro lado, foi possível associar códigos e elevá-los a categorias mais abstratas e a unidades temáticas. Estes textos orientaram, desde logo, a apresentação dos resultados da análise sobre a visão dos futuros professores e os aspetos

alvo de reflexão antes e depois das suas vivências. Neste processo, sempre com a flexibilidade necessária, fui acomodando novas categorias que emergiam dos dados empíricos, organizando posteriormente e transformando os casos na forma de narrativas “textualizando” os casos (Bardin, 1977). Assim, para a análise do *Conhecimento sobre o Ensino e Aprendizagem de números racionais* recorri a duas categorias: (i) os números racionais e seus propósitos de ensino e (ii) ensino-aprendizagem dos números racionais. Estas por sua vez desdobraram-se em subcategorias e respetivos descritores, conforme anexo 8.

O período de análise foi longo, para que fosse possível ler e reler inúmeras vezes o material, voltar ao referencial teórico, elaborar artigos sobre determinados fenómenos, refazê-los, submetê-los à crítica da comunidade científica e reestruturá-los novamente. Na fase de elaboração do relatório final, após esta construção e posterior análise dos dados descritos, clarificação dos objetivos e questões do estudo, de forma a dar resposta ao problema delineado, os casos foram de novo alvo de uma reorganização “mais fina” (Erickson, 1986) selecionando as observações “mais dignas” (Stake, 1995) evidenciando padrões e roturas. Os casos foram elaborados intercalando os dados e sua interpretação com sínteses que permitiam orientar a síntese final de cada caso dando resposta às questões do estudo caso a caso. Para a elaboração do capítulo da conclusão, foi elaborado um quadro síntese onde foram cruzadas as questões de investigação, as categorias, os autores que as alimentaram e sínteses dos dados dos três casos. Este quadro foi importante numa leitura horizontal por categorias, permitindo retirar conclusões e responder às questões do estudo em confronto com a literatura.

3.5 Questões éticas

Em conformidade com os códigos de ética definidos internacionalmente (AERA, 2011), foram pedidas autorizações a todos os intervenientes, de modo a recolher dados para posterior disseminação dos resultados e do conhecimento que advinha desta investigação (Fontana & Frey, 1994; Stake, 1995). As futuras professoras foram, desde logo, abordadas de modo a serem-lhes explicitados os objetivos do estudo (Anexo 9). Apresentei-me como professora de Matemática e Ciências da Natureza e investigadora, de forma a propiciar um ambiente onde as futuras professoras e outros intervenientes não se sentissem demasiado expostos e vulneráveis (Fontana & Frey, 1994). Assim, conversámos sobre os objetivos da minha investigação, sobre as razões

que me levaram a contactá-los e pedir-lhes a colaboração, sobre a possível abertura para a observação de aulas, as técnicas de recolha de dados que estava a pensar utilizar e as mais-valias que poderiam ter ao envolverem-se neste estudo. Por ainda estarem em processo formativo, foi importante reforçar que não estavam a ser avaliadas em qualquer momento. A garantia do seu anonimato foi reforçada, assim como a possibilidade de lerem os registos das observações e das entrevistas realizadas. Expliquei-lhes ainda que a minha expectativa era que a sua participação neste estudo lhes pudesse proporcionar momentos significativos de reflexão (Yin, 2009). Em seguida, pedi autorização para recolher dados nos contextos, nomeadamente aos professores cooperantes e supervisores e aos diretores das instituições envolvidas que colocaram o pedido à apreciação nos órgãos competentes (Anexo 10). Por fim, foi enviado um pedido de autorização aos encarregados de educação para videogravação das aulas onde estavam presentes os seus educandos (Anexo 11). Todos os procedimentos de recolha de dados foram devidamente apresentados, analisados e autorizados pela comissão de proteção de dados e pela Direção-Geral de Educação.

Durante o processo de recolha de dados, por vezes, fui confrontada com opções e ideias das futuras professoras contrárias às minhas, enquanto docente e formadora de professores. Perante algumas ideias, dificuldades ou erros, durante as entrevistas, foi desafiante não questionar e confrontar as participantes com outras ideias. Nestes momentos, foi importante estar claro para mim que não queria interferir. De modo a proteger os alunos envolvidos fui sugerindo que procurassem os seus supervisores para discutirem as suas propostas. Também é facto que o questionamento inerente ao estudo pôde promover reflexões sobre as ações a levar a cabo. No entanto, tal só aconteceu quando as futuras professoras estavam envolvidas num processo que consideravam passível de ser melhorado. Deste modo, senti-me ética e moralmente mais confortável em relação aos alunos envolvidos e simultaneamente mantive, o mais possível, o meu papel de observadora não participante do processo. Ou seja, procurei desenvolver um papel como outros investigadores que são “interpretativos, holísticos, naturalistas, sem interesse pela causa e, então, por definição, serão investigadores qualitativos” (Stake, 1994, p. 61).

Capítulo 4

Berta

4.1. Apresentação e caracterização

Berta tinha 23 anos e antes de ingressar no ensino superior estudou Matemática 12 anos com desempenho bastante satisfatório. O curso de Educação Básica não foi a sua primeira escolha, mas desde logo se sentiu realizada e deu continuidade por opção. Escolheu o mestrado em ensino do 1.º e 2.º ciclo sem hesitações e as áreas que gostava mais de lecionar eram Matemática e Ciências Naturais. Não se lembrou das suas aulas no 1.º ciclo, mas lembrava-se da sua professora de Matemática de 2.º ciclo com bastante carinho. Para além de se recordar da professora, lembrou-se de algumas tarefas que foram propostas, especialmente dos jogos matemáticos e de tarefas com contextos reais. No ensino secundário, considerou-se uma aluna mediana, que tinha uma “professora muito boa” porque era muito exigente uma vez que “fazia testes que não eram acessíveis”. No entanto, referiu algumas abordagens que hoje critica:

Abordava-se um conceito e não se percebia muito bem de onde é que ele surgia. Os professores tinham que dar aquela matéria e, portanto . . . Nós tínhamos que fazer. Nós não sabíamos como é que se chegava lá... decorávamos aqueles passos, aquelas fórmulas. Acho que nunca foi uma coisa interessante para mim! (BEI)

O gosto pelo ensino da Matemática e das Ciências da Natureza teve diferentes origens. Berta explicou que “até ao 12.º ano a Matemática foi sempre um bocadinho mais complicada e adorava a Biologia. Já aqui na ESE... O que é que aconteceu!... Eu gosto muito de Matemática” (BEI). Na primeira entrevista referiu que as experiências

que viveu a levaram a gostar mais da Matemática porque esta deixou de ser “decorar fórmulas, mas perceber de onde é que vêm . . . Foi o que eu gostei muito! Também gostei muito das didáticas...”. Assim, interessou-se pelo ensino da Matemática depois de ter vivido experiências positivas na ESE e, como resultado de todas as suas experiências negativas e positivas, sublinha a importância de aprender com compreensão.

4.2. Visão sobre o ensino e aprendizagem da Matemática

4.2.1. Experiências na Escola Superior de Educação: Vivências significativas e enriquecedoras

Berta frequentou a licenciatura e o mestrado na ESE A. No âmbito da licenciatura frequentou várias unidades curriculares específicas para a aprendizagem da Matemática e de Didática da Matemática. Tanto na licenciatura como no mestrado considerou-se e foi considerada muito boa aluna. Ao relembra o seu percurso na ESE, mencionou tópicos, abordagens e tarefas que explorou, enquanto aluna, e referiu que as experiências vividas na formação inicial contribuíram para o seu conhecimento da Matemática e da sua didática. Do observado e pelo referido por Berta e pela sua supervisora na ESE, as unidades curriculares de Matemática, quer na licenciatura quer no mestrado, tinham características metodológicas comuns, com o trabalho centrado em tarefas de natureza exploratória. Berta considerou que foi importante explorar as tarefas e compreender as suas potencialidades no trabalho a desenvolver com os alunos. Nestas aulas, quando adequado, eram utilizados materiais manipuláveis e era pedido que os formandos construíssem tarefas matemáticas e/ou materiais para utilizar numa futura prática de ensino. Como resultado das suas experiências, referiu a relevância que se deve dar às “diferentes representações” onde se podem utilizar “tiras de papel” de modo a concretizar os conceitos. Explicou que as experiências vividas na ESE A lhe permitiram realizar aprendizagens sobre o processo de ensino e a aprendizagem e sobre as dificuldades dos alunos do ensino básico. Sobre esta questão referiu:

Não é só o facto de saber os conteúdos bem e irmos um bocadinho mais à frente do que nós temos que abordar com os alunos . . . É perceber o que é que eles não compreendem . . . A ESE preparou-me para não só saber Matemática, porque quando nós estamos em aula, abordamos os conceitos . . . [Mas também] como é que posso abordar isso com os alunos. É esta a relação que se faz... De ser eu a aprender mas também a aprender como é que posso ensinar. O que me ajuda! (BEI)

Na Didática da Matemática do mestrado foram analisados artigos empíricos e teóricos nos diferentes temas matemáticos, foram exploradas tarefas de natureza exploratória do ponto de vista matemático e didático. Estes textos foram significativos para Berta que recorreu a alguns deles para sustentar e refletir sobre a sua prática letiva. Mais adiante analisaremos o recurso a artigos teóricos e empíricos nas suas reflexões sobre a prática letiva. Na sua entrevista inicial, referiu a experiência vivida na Didática da Matemática no âmbito dos números racionais: “estivemos a falar nas várias representações e também com as tiras, tivemos nós próprios a fazer, o Tangram”. Além de tarefas exploratórias para o ensino básico também foram analisados vídeos de práticas letivas de modo a contribuir para a construção de uma representação da prática letiva a levar a cabo na prática de ensino supervisionada. Por isso os futuros professores resolviam as tarefas e discutiam-nas, em seguida, analisavam as resoluções de alunos, analisavam, nos vídeos, as ações do professor nos diferentes momentos da prática e as ideias apresentadas pelos alunos confrontando com as suas próprias ideias. Para a futura professora, estas experiências foram muito importantes para a prática de ensino supervisionada, recorrendo às tarefas exploradas consigo ao longo da licenciatura e mestrado, para preparar as suas aulas. Explicou por que razão o fez:

Os professores conseguem sempre cativar-nos! Normalmente há uma tarefa... Até mesmo para introduzir conceitos... Há sempre uma tarefa inicial. Portanto o que é que eu pensei... Na próxima semana, também vou desenvolver tarefas com os meninos! Quero introduzir tarefas e, portanto, fui pesquisar essas tarefas. Além dos manuais, que eu considero que, pelo menos aqueles a que eu tenho acesso, não têm grandes tarefas, têm exercícios... Não têm problemas! Fui ver [às unidades curriculares] e havia realmente em fundamentos. . . na parte de números e operações e agora nas didáticas e, inclusive, na Didática de Matemática que tenho neste momento.

Berta mostrou preocupação em explorar conceitos com os alunos através da exploração de tarefas com determinada natureza. Confrontando as tarefas que lhe foram propostas nas ESE com as que encontrou nos manuais escolares, percebemos que pretendia propor tarefas de natureza exploratória. Note-se que enumerou diferentes unidades curriculares da componente da formação na área da docência e da didática específica e que, em todas, conseguiu encontrar tarefas com a natureza desejada.

No entanto Berta não se limitou a transportar as experiências vividas na ESE para o processo de estágio. Também trouxe as experiências vividas no estágio para as aulas das diferentes unidades curriculares. Contou como estabeleceu a relação entre o contexto formativo na ESE e o estágio:

Se estamos em estágio e não sabemos muito bem como é que vamos abordar [um tópico] e o que será que os meninos sabem... Porque às vezes nós temos uma ideia quando chegamos à aula que os meninos sabem isto, mas depois, é preciso ir um bocadinho mais atrás... Portanto, levamos as situações de estágio para a sala da ESE e o professor, normalmente, ajuda-nos sempre.... Normalmente há esta partilha de ideias e o professor até nos ajuda a encontrar estratégias.

Considerando o observado e o descrito por Berta e a sua supervisora, as discussões na ESE promovidas pelas experiências vividas no estágio debruçam-se sobre as abordagens para ensinar determinados tópicos e sobre as aprendizagens e dificuldades dos alunos. Apesar de não ter sido explícito no seu discurso percebe-se que são discutidas as propostas dos futuros professores o que pode envolver a seleção e construção de tarefas. Mais adiante verificamos quais os aspetos que foram analisados conjuntamente na preparação da prática letiva.

Assim, Berta sentiu que as experiências vividas na ESE A foram significativas para si e para a sua prática letiva. Estas experiências positivas parecem ter contribuído quer para perceber procedimentos conhecidos, mas nem sempre compreendidos, quer para uma visão de ensino e aprendizagem de natureza exploratória. Evidenciando o valor que deu às experiências vividas, selecionou de entre as várias tarefas exploradas na formação inicial, nas diferentes unidades curriculares as tarefas a explorar no estágio. Para além de recorrer às com que contactou na formação inicial, também recorreu aos artigos teóricos e empíricos estudados para sustentar a sua reflexão, como se verá no final desta secção. Recorreu à experiência que teve na Didática da Matemática com “casos multimédia” para antever o que seria a sua prática letiva e sublinhou, como importante, o espaço dado nas aulas da ESE para trazer problemas da prática de ensino supervisionada e de, em conjunto com os docentes, conseguir encontrar soluções para os seus problemas.

4.2.2. Experiências no estágio: As diferenças do novo contexto

Ao longo da sua formação inicial, Berta teve várias experiências de prática letiva em diferentes anos de escolaridade. Nunca se referiu às experiências vividas na licenciatura e referiu brevemente as experiências de lecionação de tópicos matemáticos durante o 1.º ano do mestrado. Relativamente aos tópicos lecionados no 1.º ciclo com um 4.º ano, lembrou as poucas experiências de lecionação que teve com números racionais e que passaram por “trabalhar a noção [de número racional] principalmente com a representação decimal, mas também não fiz nada de especial” (BEF).

Até ao momento do estágio de Matemática e Ciências Naturais e nos vários contextos onde lecionou, Berta considerou que teve uma boa relação com os professores cooperantes com quem trabalhou. Em conversas informais referiu que as experiências anteriores foram diferentes das vividas no estágio de Matemática e Ciências Naturais. O apoio facultado pelo professor cooperante foi surpreendente pela positiva e, pela descrição que fez do que esperava, podemos perceber algumas ideias prévias sobre o processo supervisoivo:

Pensava que não me iria apoiar no processo de planificação e que iria sugerir bastantes alterações ao trabalho que propus ou que daria indicações sobre como deveria lecionar os diferentes tópicos. No final de cada aula apontaria as falhas e reiniciava-se o processo . . . [Porquê] É assim, pelos estágios que eu tenho tido . . . Estava à espera que o professor dissesse pode fazer isto ou isto... [Ou] mesmo de um professor que não me ajudasse a fazer planificações... Ou seja, nós queremos fazer sempre as planificações sozinhas, mas gostamos que os professores no fim nos deem o feedback antes de iniciarmos a aula. O que eu estava à espera era de encontrar um professor que, mais ou menos como os outros professores que tenho tido . . . E que no final da aula que dissesse: “Isto está mal, devias ter feito de outra forma”. Quando deveria ter feito isso antes para eu poder pensar sobre o assunto!

A futura professora descreveu processos supervisoivos vividos anteriormente, onde sentiu que viveu processos impositivos sobre o que ensinar e como ensinar e onde o feedback final era focado nos aspetos menos conseguidos, sem que existisse oportunidade de reconstrução da planificação da aula a lecionar. Reforçou esta descrição, criticando os processos anteriores, pelo confronto com a relação que estabeleceu

com o professor cooperante no estágio de 2.º ciclo em Matemática e nas Ciências Naturais.

Ao longo do mestrado Berta sempre teve como parceira de estágio a mesma colega. A relação era muito boa e trabalhavam sempre em conjunto discutindo abordagens, tarefas a propor e as planificações a discutir com os supervisores. No entanto, a meio do estágio de Matemática e Ciências Naturais a sua parceira adoeceu e a futura professora viveu o resto do processo sozinha.

4.2.3. Perspetivas sobre o ensino-aprendizagem da Matemática: Foco na co-construção do conhecimento e na compreensão

Berta refere que a ESE teve um papel importante na construção da sua visão da Matemática, do seu ensino e aprendizagem. Para sustentar esta ideia referiu unidades curriculares, onde lhe foram apresentados episódios da história da Matemática, e

identificou atividades desenvolvidas. A futura professora parecia ter um discurso bastante próximo da mensagem transmitida na formação inicial. Identificou a Matemática como ciência, como ferramenta para o quotidiano e como forma de pensamento. Considerou a Matemática uma ciência porque:

[A Matemática] é inventada [descoberta] porque há um percurso, há uma evolução. [Aprendi] aqui na ESE! . . . Há matemáticos, principalmente, que inventam, mas é por descoberta . . . É uma descoberta também, não é uma invenção que vem do nada... Vai-se fazendo e vai-se descobrindo, mas é uma criação. (BEF)

Quando questionada sobre a atividade de “fazer matemática” remeteu para a ideia do aluno como matemático, em linha com a ideia da redescoberta guiada, e para um determinado tipo de abordagem ao ensino e aprendizagem da Matemática. Berta respondeu à pergunta sobre o que é ser matemático dizendo:

Ser matemático... Somos todos um bocadinho! . . . Acho que nós todos podemos ser um bocadinho matemáticos porque eu consigo com um problema, por exemplo... Sabe... Eu gosto muito da resolução de problemas! Eu também consigo criar a minha Matemática e cada um dos alunos cria à sua maneira. Portanto, eu acho que é um bocadinho a criação de todos... Ser matemático... somos todos um bocadinho... [A Matemática] é inventada porque há um percurso, há uma evolução . . . Para aí no século XVII a Matemática começou a ter essa evolução e a partir do século XVIII começou a ser mais arrumadinha. (BEF)

Para além desta visão da Matemática enquanto ciência, Berta também identificou a Matemática como ferramenta para o quotidiano uma vez que considerou que tem um corpo de conhecimentos úteis para o quotidiano futuro dos alunos. Na entrevista final explicou:

Nós precisamos da Matemática todos os nossos dias... Ou porque vamos ao supermercado, ou porque trabalhamos com dinheiro, porque falamos em temperatura . . . E porque eu no meu quotidiano não estou sempre a trabalhar apenas com fórmulas, e nós sabemos que nem sempre as fórmulas conseguem resolver o problema [reforçando a importância da capacidade de Resolução de Problemas para a vida futura]. (BEF)

Assim, a utilidade da Matemática não se cinge aos procedimentos, mas também à forma de pensamento e à capacidade de resolver problemas. Esta capacidade na Matemática foi referida por Berta como essencial para a vida futura dos alunos. Estas ideias, construídas na ESE, parecem ter sido determinantes na escolha das tarefas a trabalhar com os alunos, como veremos mais adiante.

Na última entrevista concluiu que a Matemática está relacionada com o modo como pensamos recorrendo a uma linguagem mais ou menos formal, onde para

comunicar as ideias os alunos podem recorrer a diferentes representações, e onde a resolução de problemas e a compreensão dos conceitos são aspetos centrais. Para concretizar recorreu ao tema dos números:

Está muito ligada ao pensamento... [no trabalho com] os números . . . A maior parte dos professores trabalha muito a nível do cálculo formal [o que não concordo] É também [importante], porque eles têm que aprender fórmulas, têm que aprender a fazer as contas em pé, têm que aprender todas essas questões mas é também o pensamento que está por trás daquilo que os alunos estão a fazer, o pensamento sobre a resolução deles. E por isso é que eu também tento um bocadinho dizer-lhes: “Olha, façam esquemas, façam desenhos...”, porque para mim isso também é Matemática!

Berta parecia ter ideias estruturadas sobre o que é para si a Matemática e conectadas com ideias relativas ao papel do aluno, do professor e de como se aprende e ensina Matemática. Relativamente ao ensino da Matemática acreditava num ensino-aprendizagem por compreensão porque queria fazer diferente dos professores que teve no ensino secundário que a fizeram perder o gosto pela disciplina. Mais uma vez, partiu das experiências da ESE para sustentar as suas ideias sobre como se deve aprender em Matemática. Para a futura professora, era importante colocar em comum as ideias dos alunos ao discutir diferentes estratégias:

Na ESE é que eu fiquei satisfeita porque comecei a perceber alguns conceitos que eu não percebia! . . . O bom ensino não é o dar a estratégia. É fazer com que os alunos [a percebam]... Por isso gosto que eles estejam no quadro, e que cada um apresente a sua estratégia, se forem estratégias diferentes, porque nós também aprendemos com os outros . . . Ou seja, se tiver uma tarefa, eu até sou ajudada a fazer aquela tarefa, mas quando eu vou para a tarefa seguinte, consigo fazê-la porque entendi o que é que era para fazer e não a fórmula . . . De todo o meu percurso de Matemática, o mais difícil foi o do secundário, foi aquele que eu não gostei porque era decorar fórmulas...(BEI)

Partindo das suas experiências como aluna, menos positivas, e como formanda, Berta, no futuro, enquanto professora, esperava não esquecer esta perspetiva tentando “perceber as dificuldades deles [alunos] e que eles compreendam... E que gostem um bocadinho mais de Matemática...” (BEI). Na sala de aula esperava construir um bom ambiente com os seus alunos sendo “acessível” para que possam participar e expor as suas ideias, mas sem perder a autoridade. A gestão de comportamentos era importante para Berta e considerava que “Tem que haver tempo para tudo!”.

Berta considerava que um bom professor tem que possuir conhecimento de Matemática e domínio de aspetos didáticos:

Nós não conhecemos o programa de cor . . . [temos que reconhecer os] objetivos que os alunos estão a atingir... O que é que falta . . . Como é que eu vou abordar? Que é sempre o meu problema! Como é que eles vão perceber, o que é que eu vou dar? . . . Quais é que são as questões que eu faço para que eles cheguem ao pensamento mais correto? Ou que estratégias?... Ou que alunos é que eu levo ao quadro a fazer a correção da tarefa para que os outros também compreendam que aquele erro também é um erro comum e que... O que é que nós temos que ter em atenção? (BEI)

Os aspetos referidos remetem-nos para um conhecimento sobre o que os alunos devem aprender, como aprendem, que erros e dificuldades podem surgir e como apoiar os alunos a aprender. Berta também referiu que um bom professor devia ter domínio do conteúdo, dos aspetos essenciais do currículo como os objetivos, as abordagens a seguir. A gestão das aprendizagens era o aspeto que a mais preocupava e onde se sentia mais insegura. Este aspeto estava relacionado com as aprendizagens a realizar pelos alunos e as dificuldades que têm em determinados tópicos. Também estava preocupada com o questionamento, a seleção e sequenciação das estratégias a discutir e ainda o trabalho de exploração dos erros para a construção de conhecimento. Ou seja, apresentava, logo na primeira entrevista, uma visão clara sobre o processo de ensino-aprendizagem da Matemática que pretendia levar a cabo. Quando, na última entrevista, lhe foi pedido que descrevesse uma aula de Matemática, começou por identificar as tarefas propostas como “São colocados desafios que os alunos têm que . . . Tentar resolver com aquilo que já sabem” e colocou a ênfase na construção e mobilização do conhecimento: “Tentar chegar a pequenas conclusões e a partir daí . . . Utilizar essas conclusões ou esses conhecimentos no seu dia-a-dia e também em tarefas que serão fornecidas posteriormente”. Considerou que esta aula é “mais difícil” de conseguir, mas “mais gratificante”, concluindo:

E por isso é que eu não gostava nada de ir para uma escola em que tivesse de fazer ensino tradicional. Entretanto eu posso mudar..., é verdade, toda a gente diz “ah! És assim porque és estagiária, porque tens muitos sonhos...”, logo se vê...(BEF)

Os alunos de Berta ainda estavam a aprender o programa de Matemática que foi publicado em 2007 e ainda não tinha analisado e pensado sobre o programa que estava a ser trabalhado no 5.º ano, de 2013. Na última entrevista, porque estava a lecionar no 6.º ano, ano de Exame Nacional, e comentando sobre a pressão dos exames e o cumprimento de programas, considerava que o importante era o que os alunos compreendessem. Assim referiu:

[O importante é] eles compreenderem o máximo, portanto aqueles objetivos que estão, supostamente, têm que ser desenvolvidos . . . se nas aulas dermos esses dez objetivos, não quer dizer que eles, desses dez, tenham compreendido, portanto [o que importa é] ter oito objetivos que eles realmente saibam..., que tenham feito uma aprendizagem, mesmo aprendizagem. Para mim isso é cumprir um currículo!

Para Berta, o seu foco era na qualidade do seu ensino e das aprendizagens dos alunos. Considerou que o professor deve cuidar da “linguagem matemática” em sala e da qualidade da comunicação desenvolvida. Para tal, na sua reflexão escrita, remeteu para o programa de 2007: “os alunos devem ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático” (p. 5).

No que respeita ao trabalho com os números racionais, na sua reflexão escrita, sustentada pelo programa em vigor desde 2007, sublinhou a importância do trabalho com diferentes representações dos números racionais interligando o que aprender como aprender: “O docente deve valorizar a leitura dos números, as representações e as relações entre si. É essencial, ainda, que existam discussões na turma ou em pequenos grupos.” (BRE). Também refere que importava estar atenta à “mudança concetual quando se passa do estudo com números inteiros para com números racionais. . . [e] estabelecerem-se ligações entre os procedimentos e os conceitos, para que os alunos, além de saberem operar com símbolos, compreendem os conceitos” sustentando as suas ideias em autores disponibilizados na Escola citando Monteiro e Pinto (2006).

Em síntese, Berta refere que a ESE teve um papel importante na construção da sua visão da Matemática, do seu ensino e aprendizagem e sustentava as suas ideias com as experiências vividas quer como aluna, quer como formanda na formação inicial para professora. As ideias resultaram de conhecimento transmitido na ESE sublinhando as ideias de Matemática enquanto ciência e com um corpo de conhecimentos úteis para o quotidiano futuro dos alunos. Também sublinha que nesta disciplina importa desenvolver uma forma de pensamento relacionada com a capacidade de resolver problemas admitindo o recurso a uma linguagem mais ou menos formal e onde importa que, para comunicar ideias matemáticas, os alunos possam recorrer a diferentes representações. Para Berta, a compreensão dos conceitos e a resolução de problemas são aspetos centrais. Assim, no ensino-aprendizagem por compreensão os alunos fazem “como um matemático”, constroem e mobilizam conhecimento e devem ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático. Para que tal aconteça de modo produtivo os alunos devem

colocar em comum as ideias discutindo diferentes estratégias na resolução dos problemas propostos. Para tal, o professor deve saber a Matemática que ensina e como se ensina Matemática. Ou seja, o que os alunos devem aprender, como aprendem, que erros e dificuldades podem surgir e como apoiar os alunos a aprender de modo a conseguir perceber quais as dificuldades dos seus alunos e poder apoiá-los e desafiá-los na aprendizagem através das tarefas propostas. Neste sentido, para Berta a gestão das aprendizagens era o aspeto que a mais preocupava e onde se sentia mais insegura. Relativamente ao ensino-aprendizagem dos números racionais, para a futura professora, importava explorar as diferentes representações dos números racionais relacionando-as sustentando as suas ideias, nas entrevistas, nas suas experiências como aluna e na reflexão escrita no programa de Matemática (ME, 2007) e nas ideias de autores dados a conhecer na ESE.

4.3. A Prática de ensino supervisionada de Matemática no 2.º ciclo

4.3.1. Estágio: Um contexto colaborativo

4.3.1.1. Escola e a turma

A escola onde decorreu o estágio situava-se numa cidade pequena relativamente perto da cidade onde a ESE tinha as suas instalações. A escola era recente e tinha boas condições de trabalho. Todas as salas tinham quadro branco e computador com projetor. Existia material manipulável disponível aos estagiários e as salas permitiam a organização dos alunos em grupo.

A turma onde Berta estagiou em Matemática e Ciências Naturais no 2.º ciclo era do 6.º ano. Era uma turma com 20 alunos considerada pelo professor cooperante como mediana no que diz respeito ao aproveitamento e comportamento, mas a futura professora referiu situações de conflito e alguma dispersão. Segundo Berta

Há alunos interessados na Matemática, mesmo nos desafios, ficam muito contentes com os desafios, mas, por outro lado, aquela turma tem um problema..., têm uma coisa boa são poucos alunos, mas por outro lado são muito conversadores e têm aquela questão de terem muitos conflitos . . . E depois, são muitos rapazes... Depois brigam por causa de todas as situações que vêm do recreio... Portanto eu gosto da turma, mas não quer dizer que seja uma turma fácil. (BEI)

Os alunos nunca tinham trabalhado em grupo e o professor cooperante, que era professor da turma apenas naquele ano, tinha trabalhado a pares algumas vezes. Os seus

alunos de Matemática eram do 6.º ano e estando a estagiar durante o 3.º período existia a questão de os preparar para o exame nacional. Berta queria que os alunos obtivessem sucesso e para tal pretendia trabalhar com tarefas exploratórias porque

Apesar de a tarefa ser completamente diferente [do trabalho realizado] eles vão conseguir desenvolver bem a tarefa. Até se podem recordar de . . . tarefas que já fizeram..., eu resolvi aquela tarefa daquela maneira, se calhar até vai ajudar aqui..., o mesmo pensamento, a mesma linha...(BEI)

Relativamente à turma de estágio, os alunos eram considerados como alunos medianos no que respeita ao desempenho na disciplina de Matemática. Nas aulas, segundo Berta, os alunos apreciavam os desafios matemáticos que lhes eram colocados, apesar de nem sempre terem um comportamento adequado conversando e dispersando relativamente ao trabalho pedido. Eram alunos que não tinham hábitos de trabalho em grupo e naquele ano letivo, no contexto da Matemática, só tinham trabalhado a pares. Nas Ciências Naturais já tinham começado a trabalhar em grupo, mas, Berta queria começar com o trabalho na Matemática a pares e mais tarde passariam ao trabalho em grupo, como veremos mais adiante. Assim, explicou que não avançou para o trabalho em grupo não por falta de condições, mas porque os alunos tinham pouca experiência.

4.3.1.2. Expetativas em relação ao estágio

Berta iniciou o processo de estágio com alguma ansiedade. Apesar de considerar que “até podia ter os conhecimentos matemáticos todos, até poderia me preparar muito bem... Ando sempre a ler tudo o que há de livros e o que os professores da ESE me dão...” (BEI), continuava com algum receio de como iria comunicar com os alunos e em iniciar novos tópicos. Berta reforçou esta ideia logo na entrevista inicial:

Tenho sempre medo que eles não me entendam, por exemplo, estava a explicar um conceito matemático e eles não entenderam e tive que ir por outras palavras e fizemos um exercício... Eles compreenderam, mas o meu receio é sempre esse. . . Podem já não conseguir avançar mais. . . Passo as aulas todas a perguntar se há dúvidas!

Assim, de modo a reduzir a sua ansiedade relativamente ao processo de ensino, Berta reviu os seus conhecimentos dos conteúdos a ensinar procurando a informação necessária nos materiais disponibilizados e experiências vividas na ESE. Essa pesquisa de informação pareceu dar segurança relativamente ao que ensinar e ao como ensinar. No entanto pareceu persistir o receio de na fase de concretização do planeado não conseguir corresponder às necessidades dos alunos quando sentissem dúvidas. O foco

do seu receio estava no como comunicar adequadamente com os alunos de modo a que aprendessem.

4.3.1.3. Contexto supervisivo

Na primeira fase do estágio Berta teve uma parceira e em conjunto prepararam e lecionaram números inteiros relativos. Nas semanas seguintes, sozinha, mas muito apoiada pelo professor cooperante e pela professora supervisora da ESE teria que preparar os alunos para o exame nacional.

Com o professor cooperante analisou a planificação anual e a médio prazo e este informou sobre o que já tinha sido trabalhado e como. Em seguida, Berta preparou a semana de leção. Na sua perspetiva, o professor cooperante mostrou-se bastante flexível dando “algumas sugestões, mas... Acho que primeiro dá-nos liberdade...” (BEI). No início do processo de planificação, Berta começou por tentar perceber o que os alunos sabiam ou não. Assim, começou por

No manual de 6.º ano tive de ir ver o que é que eles já fizeram... Depois tenho sempre livros de Matemática, ando sempre com um na mala . . . Ando sempre a ver o que é que eu posso fazer, [escolhi este livro] porque está muito detalhado e é uma linguagem simples, acessível . . . Depois vou sempre aos meus apontamentos da ESE . . . Tenho por exemplo tarefas em que uma parte me fala do ponto de vista matemático e a seguir como é que eu posso ensinar aquilo, o que é que aquilo pretende, qual o objetivo ...

Para além de reconstruir o trabalho realizado pelos seus alunos, Berta reviu os conteúdos matemáticos a lecionar e como os lecionar. Ainda assim, quando se sentia mais insegura recorreu à sua professora supervisora e professora de Didática, que esta correspondia sempre às suas necessidades. Sentia que podia contar tanto com a supervisora como com o professor cooperante em diferentes momentos da planificação:

Pedimos para falar com ela, marcar reunião com ela... Mesmo depois quando se enviam as planificações a professora dá o feedback e, portanto, mesmo que haja alguma questão nós também temos possibilidade disso e portanto é uma maneira de eu me preparar. Com o professor cooperante, quando temos alguma dúvida, perguntamos e, como o professor conhece melhor a turma do que nós, muito melhor..., perguntamos “professor, o que é que acha disto?” Acha que devemos fazer de outra forma... Também é uma preparação porque diz: “olha, podes fazer como tu quiseses mas acho que vai correr melhor de uma forma do que da outra...” (BEI)

Assim, o contexto supervisivo de Berta caracterizava-se por ser de bastante proximidade e permitia-lhe discutir e analisar com diferentes intervenientes, com perfis e conhecimentos diferentes, as suas opções. Na sua reflexão escrita podemos ler a

importância da dinâmica supervisiva que foi constituída: “Foram indicadas algumas sugestões para melhorar a planificação, assim como os materiais. Estas sugestões e questões fizeram-me pensar e questionar o meu próprio trabalho dentro da aula e, deste modo, procedi às alterações.” (BRE). A futura professora sinalizava como importante o processo de reflexão promovido pela dinâmica supervisiva considerando que o foco passou pela análise da descrição e antevisão das aulas a lecionar assim como pelas tarefas a propor aos alunos.

4.3.2. Processo de planificação: Preparação conjunta de uma experiência de ensino

No processo de planificação, Berta consultou o programa em vigor (PMEB, 2007) para perceber os tópicos e a abordagem a usar. Em seguida, selecionou e sequenciou um conjunto de tarefas exploradas em diferentes unidades curriculares da licenciatura e mestrado. Sustentou assim a sua opção:

Por considerar que são importantes para o desenvolvimento dos conhecimentos dos alunos, decidi apresentá-las para serem discutidas, pois os alunos apresentam muitas dificuldades na compreensão do sentido do número, no que se refere ao trabalho com números racionais. Estas dificuldades prendiam-se, principalmente, com o relacionar das diferentes representações. (BRE)

Em contraponto, Berta explicou porque não recorreu ao manual escolar dos alunos para o trabalho com números racionais. No trabalho com números inteiros usou o manual escolar, que considerava como um recurso útil e ao qual já recorreu, selecionando algumas tarefas ou redesenhando outras. No entanto, para a semana de preparação para o exame de Matemática, considerou outros materiais e explicou:

Queremos aproveitar os livros, os manuais. . . Por um lado, os pais compraram e gastaram dinheiro. . . por outro lado para terem algumas coisas feitas do manual e porque até há tarefas que achamos interessantes, outras que até não! Já chegámos a modificar porque a pergunta, por exemplo, não era compreensível. . . E aproveitámos a restante tarefa...(BEI)

As tarefas das duas primeiras aulas foram exploradas matematicamente em unidades curriculares de Matemática da licenciatura. Segundo referiu, a terceira foi explorada na Didática da Matemática do mestrado através da análise de um caso onde teve acesso às planificações e ao vídeo de uma aula onde se explora a tarefa. A futura professora parecia não ter tido muitas dúvidas na escolha de duas das tarefas: “Eu escolhi, foi assim: aquela tarefa da gasolina escolhi automaticamente [tarefa analisada na Didática], assim como a da segunda aula, da herança do rei” (BEF). Justificou do

seguinte modo as suas opções: “Escolhi determinadas tarefas porque tinham sido apresentadas na ESE, porque eu achei que seriam boas, ou tinham boa qualidade para os alunos compreenderem. . . o que desenvolver ou que não havia uma regra” (BEF). Ou seja, a futura professora escolheu tarefas que permitissem aos alunos compreender os conceitos que considerava estruturantes. Para Berta, a qualidade das tarefas dependia dos objetivos de aprendizagem, mas, também, que permitissem que os alunos pudessem resolvê-las recorrendo a várias “opções de resolução, de várias estratégias...” (BEF).

Na ESE são dadas orientações sobre os aspetos essenciais a incluir nos planos de aula. Na tabela onde apresentou a sua planificação formal, observamos que identificou o tema matemático, os tópicos, atividades/estratégias, recursos e aspetos a avaliar. Para preencher as colunas referentes aos tópicos e objetivos, Berta consultou o programa de 2007, copiando o que está enunciado no documento, mas fazendo algumas adaptações nos descritores, de modo a constituir os objetivos para as diferentes tarefas propostas. Note-se que não estabeleceu uma relação direta entre cada objetivo e determinada tarefa/aula uma vez que constituiu uma grelha única que apresentava as três aulas previstas inicialmente e onde não existia leitura horizontal imediata. No entanto percebe-se que a ordem com que aparecem os objetivos é a mesma das tarefas a propor (Anexos 12 e 13). Segundo Berta, os objetivos da planificação teriam que considerar “um pouquinho de todos os objetivos que estão contemplados no programa” (BEI), uns transcritos na íntegra e outros alterados para se ajustarem ao pretendido com as tarefas. Um exemplo desta situação surge na planificação onde podemos ler que o objetivo era “Identificar e dar exemplos de frações equivalentes a uma dada fração e escrever uma fração na sua forma irredutível” (BP) e no programa de 2007 tínhamos que “identificar e dar exemplos de frações equivalentes a uma dada fração e reconhecer relações entre números representados por frações”. Como já foi visto, Berta procurou tarefas que considerava que permitiam alcançar o seu propósito de desenvolver o sentido de número racional, relacionando diferentes representações e que simultaneamente permitiam “[privilegiar] a metodologia de resolução de problemas e a comunicação matemática” (BRE). Na mesma reflexão escrita, a futura professora enfatiza a importância das “discussões [matemáticas] na turma ou em pequenos grupos”. As discussões em grupo e coletivas colocavam-lhe desafios e, de modo a preparar estes momentos, nas suas planificações, previu as questões a colocar aos alunos, assim como o modo de propor as tarefas e como sintetizar o conhecimento construído. Assim, podemos verificar na sua planificação que na coluna das atividades/ estratégias descreveu a ação do professor nos

diferentes momentos de cada aula para além de prever questões a fazer aos alunos e identificar algumas dificuldades que os alunos poderiam sentir relativamente às tarefas propostas (Anexos 12 e 13). Paralelamente, resolveu as tarefas antecipando respostas possíveis às diferentes questões colocadas, como veremos em detalhe adiante (Anexo 14).

Em síntese, no contexto de estágio Berta lecionou numa escola que tinha boas condições e a futura professora tinha os recursos disponíveis para desenvolver a prática que desejasse. A sua turma era de 6.º ano e era considerada mediana no que diz respeito ao aproveitamento e comportamento. A futura professora queria que os alunos trabalhassem em pequeno grupo, mas os alunos não tinham vivido essa experiência na Matemática pelo que decidiu que iriam começar com o trabalho a pares e mais tarde passariam ao trabalho em grupo. Tinha uma parceira de estágio com quem tinha uma relação muito estreita mas que, a meio do estágio, adoeceu e por isso preparou o trabalho relativo aos números racionais, com apoio do professor cooperante e da supervisora de estágio. O contexto supervisivo permitiu-lhe pudesse discutir e analisar as suas opções com os dois supervisores sendo que quando se sentia mais insegura recorria à supervisora da ESE. Em função dos seus propósitos para a intervenção, sendo estes a compreensão de conceitos e o desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas e da comunicação matemática, selecionou tarefas que considerou de qualidade do ponto de vista do desafio cognitivo e do nível de abertura procurando tarefas trabalhadas na ESE em diferentes unidades curriculares com objetivos diferentes. Para planificar as aulas, recorreu à estrutura prevista pela ESE onde incluiu o tema matemático, os tópicos, atividades/estratégias, recursos e aspetos a avaliar. Definiu os objetivos a partir do programa de 2007 adaptando-os ao pretendido com as tarefas propostas. Na planificação, tal como era solicitado na ESE, descreveu a ação do professor nos diferentes momentos de cada aula, previu questões a fazer aos alunos nos diferentes momentos e identificou algumas possíveis dificuldades dos alunos. Também resolveu as tarefas propostas antevendo diferentes resoluções. Tal como previsto no processo de ensino supervisionado, discutiu as suas planificações e respetivos recursos, quer com o professor cooperante quer com a professora supervisora.

4.4. Prática pedagógica e conhecimento didático: Estabelecimento de relações entre representações dos números racionais

Berta lecionou quatro aulas sobre números racionais, retomando tópicos que considerou importantes para preparar os seus alunos para o exame nacional. Decidiu propor três tarefas que chamou de tarefas exploratórias onde abordou a representação fracionária, o estabelecimento de relações entre as diversas representações dos números racionais e o conceito de percentagem. Inicialmente previu três aulas de 90 minutos, mas na primeira aula (tarefa 1) os momentos de trabalho autónomo e de discussão tomaram mais 45 minutos do que o esperado. Por isso, o trabalho com as tarefas seguintes (tarefas 2 e 3), apesar de realizadas no tempo previsto, ficaram repartidas em dias diferentes. Apresento as fases de planificação, concretização e reflexão relativas a duas tarefas (T2 e T3). Nos diferentes momentos das aulas, procuro caracterizar questões relativas à comunicação (porquê, quando e como recorreu às diferentes representações, questões e as suas explicações) e as ações de promoção e gestão da aprendizagem e do ambiente de aprendizagem.

4.4.1. Antevisão das aulas

4.4.1.1. Propósito das aulas: Exploração dos conceitos e desenvolvimento de capacidades matemáticas

Na primeira aula, Berta explorou o conceito de fração com significado parte-todo propondo uma situação de partilha equitativa (Tarefa1). Durante a aula deparou-se com algumas resistências, por parte dos alunos, ao trabalho conjunto e na fase da resolução em trabalho autónomo e discussão das resoluções precisou de mais tempo do que esperava. No balanço da primeira aula e na preparação da segunda considerou que foi positivo “levar bem pensado o que é que queria fazer e também o facto de ter escolhido os grupos” que iriam apresentar as resoluções e qual a ordem das apresentações. No momento de discussão das diferentes questões da tarefa, nem sempre os alunos evidenciaram compreender as relações entre quantidades e tiveram dificuldade em compreender o efeito que a unidade de referência no resultado. Um outro aspeto que considerou positivo foi o questionamento realizado levando os alunos a pensar sobre as suas estratégias: “Podem pensar sobre as questões e muitas vezes pensam, “se a professora me está a dizer isto é porque posso mudar aqui alguma coisa”” (BEDA1)

Ainda assim, no final da aula, o processo de discussão sobre a unidade de referência foi confuso e Berta sentiu-se perdida com as questões dos alunos:

[A parte da aula mais difícil] foi o final da aula, porque eles começaram a questionar e eu queria questionar também. E, depois, até eu estava a ficar baralhada com as respostas que eles me estavam a dar e tinha que pensar no que eu estava a pensar, queria pensar, mas também a pensar no que eles me estavam a dizer e tentar chegar lá. Acho que foi mesmo a parte difícil!

Assim, na sua primeira aula, Berta explorou o conceito de fração propondo a tarefa 1. Na fase de discussão das resoluções, teve dificuldade em explorar com os alunos resoluções, que consideravam unidades de referência diferentes das que tinha antecipado. Este aspeto teve implicações no cuidado que passou a ter com a explicitação da unidade de referência na resolução de tarefas com números racionais nas suas diferentes representações, quer na fase de antevisão da aula, quer na fase da concretização, como veremos adiante.

Na segunda aula, com a proposta da Tarefa 2, Berta definiu como propósito de ensino o estabelecimento de relações entre diferentes representações de números racionais. Berta explicitou o seu propósito inicial quando fez o balanço do processo na sua reflexão escrita: “Os alunos desenvolveram os seus conhecimentos, principalmente, no que se refere ao sentido de número racional e das relações entre as diversas representações, assim como considero que compreenderam a noção de percentagem”. Entretanto, apontou um novo aspeto que se revelou importante da primeira aula para a segunda: “É notório que os alunos ainda apresentam alguma dificuldade na comunicação matemática, daí a minha preocupação em fazer com que cada par discutisse ideias e registasse o processo” (BRE). Ou seja, para além de pretender que os alunos estabelecessem relações entre diferentes representações de números racionais também pretendia que os alunos desenvolvessem a comunicação matemática promovendo, para tal, a discussão das resoluções e o seu registo. Na terceira aula, Berta decidiu que era momento de se focar no conceito de percentagem sublinhando a importância da unidade de referência: “Vamos trabalhar com a mesma percentagem para valores diferentes para que percebam que [apesar de] estarmos a falar da mesma percentagem o valor em que ela incide, acaba por influenciar!” (BEA3).

4.4.1.2. Preparação, seleção, desenho e sequenciação da tarefa: Um processo de aprendizagem

Como já foi referido na secção anterior, para preparar as suas aulas, Berta consultou os “apontamentos da ESE” e selecionou as tarefas. A Tarefa 2 foi selecionada porque “como aluna também fiz esta tarefa..., achei-a muito interessante”. Com esta “ia começar a misturar as representações”. A tarefa 1 tinha sido redesenhada para adequar aos seus alunos, mas a Tarefa 2 manteve-se igual à tarefa que lhe foi proposta na ESE, quer no conteúdo como na estrutura. Uma vez que os alunos eram de 6.º ano e estavam a visitar os conceitos envolvidos, a tarefa podia ser menos desafiante, mas a futura professora considerava que era interessante por permitir estabelecer a relação entre várias representações de números racionais. A tarefa tinha várias questões divididas em duas partes (Anexo 14) e debruçava-se na herança de um rei. A futura professora considerou-a como “mais exploratória” e que podia ser significativa para os seus alunos porque “É verdade que nós já não falamos em pesos reais, mas há sempre as heranças, e eles até percebem o significado de herança, e achei muito interessante...” (BEAA2) e considerou que tinha bastantes potencialidades porque permitia a discussão de diferentes resoluções uma vez que “podem fazer de diversas formas, podem utilizar vários cálculos, podem fazer desenhos, podem fazer esquemas, podem fazer aquilo que eles quiserem.” (BEAA2). Segundo Berta, nesta tarefa os alunos tinham que: reconhecer frações que representam metade, a quarta parte e calcular a diferença entre números racionais; calcular que parte da herança cabe a cada filho usando frações ou percentagens. Ainda podiam explorar a “noção de percentagem”. Para a sua terceira aula, Berta selecionou a tarefa “Petrolex Lda” que permitia discutir especificamente o conceito de percentagem. Tal como na Tarefa 2, a Tarefa 3 manteve-se igual à que lhe foi proposta na ESE.

Berta explicou que contactou com a tarefa escolhida (Figura 4) numa aula de Didática e considerou que “Por este motivo, ao planificar senti que seria uma segurança para mim, pois já tinha alguns conhecimentos acerca da tarefa” (BRE).

Como já deves ter dado conta, os preços dos combustíveis variam, com muita frequência, consoante o preço do barril de petróleo.

As bombas de combustível Petrolex Lda aumentaram o preço da gasolina em 10%, o que fez com que os automobilistas protestassem imenso. Perante isto, o Diretor da Petrolex Lda mandou voltar a baixar o preço da gasolina em 10%.

Será que a gasolina voltou ao preço anterior? Justifica a tua resposta.

Figura 4. Tarefa 3

Relativamente à experiência vivida como formanda também explicou como viveu o processo de resolução projetando-o para os seus alunos:

A professora apresentou-nos a tarefa e, automaticamente, ao olhar para o enunciado pensei... Vai voltar ao mesmo valor! Mas depois pensei... não pode ser ... [Mais tarde] percebi que estando a falar de percentagem tinha que haver aqui uma influência tendo em conta o preço. Achei interessante [porque] considero que os alunos acabam por ter esta dificuldade. E, tenho quase a certeza que, a grande maioria me vai dizer que vai voltar ao mesmo valor. E é também daqui que eu quero partir ... Do erro deles. E que experimentem também algum valor para que percebam... Esta implicação da percentagem sobre o valor. (BEAA3)

Depois de selecionar as tarefas, de preparar os materiais e de planificar uma primeira versão das aulas, tal como era usual, Berta enviou tudo à sua supervisora da ESE. Entretanto, continuou a trabalhar e depois de ter enviado uma primeira versão da planificação, no processo de resolução das tarefas, pensou alterar a ordem pela qual as iria propor as tarefas:

Fiz as planificações e organizei as tarefas e enviei aos professores. Só depois é que eu fui resolver as tarefas porque eu sabia como é que elas se resolviam porque tinha os meus materiais, mas, depois fui resolver consoante as estratégias que os alunos me iam apresentar ... Quando eu fui fazer a resolução, eu percebi que as tarefas que eu tinha para o último dia, principalmente a equivalência de frações, que eram boas, mas era para o início.

Ou seja, para Berta foi importante resolver as tarefas para compreender a melhor sequência para a semana de trabalho. Depois de ter planificado as suas três aulas sobre números racionais não negativos, Berta analisou-as tanto com o professor cooperante como com a supervisora de estágio da ESE. Adaptou as tarefas para os alunos em conjunto com a professora supervisora. Este processo será analisado nas secções seguintes.

Assim, para as suas aulas, Berta decidiu propor tarefas de cunho exploratório que conhecia das aulas da ESE. A Tarefa 2, constituída por várias questões, tinha um

contexto que a futura professora considerou próximo dos alunos e onde podiam resolver as questões recorrendo a diferentes estratégias e estabelecer a relação entre várias representações de números racionais. A Tarefa 3, por ter tido um contato mais profundo, foi uma escolha imediata. Com a experiência vivida como aluna, percebeu as dificuldades que os alunos podiam ter relativa a unidades de referência diferentes. Por outro lado, sentiu-se mais preparada para a planificação e concretização da aula porque teve contato com o vídeo da aula onde pôde observar as ações da docente e dos alunos, analisar a planificação e as resoluções discutidas no vídeo.

4.4.1.3. Antecipação da resolução das tarefas: Preparar a representação das situações

Berta, como conclusão do vivido na Tarefa 1 e perspetivando a segunda aula, referiu que apesar de ter antecipado a possível resolução da tarefa, não previu “todas as estratégias” o que depois a levou a “ter influenciado os alunos na divisão das fatias” (BEDA1). A dificuldade na identificação da unidade de referência, aspetos que não terá ficado claro na primeira aula, acompanhou Berta ao longo do trabalho das restantes aulas e passou a ser uma preocupação constante.

A antecipação que Berta fez da resolução das diferentes questões da Tarefa 2 e 3 previa várias resoluções, estratégias e identificou as principais ideias a emergir apesar de não ter antecipado resoluções erradas. Berta, também, antecipou o que os alunos poderiam pensar ao longo da resolução das tarefas. A primeira preocupação foi antecipar as ideias principais que os alunos deveriam retirar das condições dadas. No caso da Tarefa 2 identificou algumas conversões existentes entre as diversas representações, da parte que cabe a cada filho do rei, e registou uma representação que poderia apoiar a compreensão das condições (Figura 5).

Metade é para o filho mais velho							
				$\frac{1}{4}$ – filho mais novo			
						Filho 2	Filho 3

Figura 5. Representação pictórica das condições da Tarefa 2

Berta, comentando algumas questões da tarefa 2, na entrevista antes da aula, defendeu que esta tinha um nível de complexidade maior que a Tarefa 1, identificando dificuldades e possíveis resoluções dos alunos, e explicou o porquê remetendo para a reconstrução da unidade de referência:

Eu tenho aqui a dizer que o valor da herança do filho mais velho, que é de 50%, é de 4.500 pesos reais. Eles aqui podem fazer de diversas maneiras, porque podem ir primeiro, por exemplo, saber que 9000 é a herança total e depois, então fazem os cálculos...

Remeteu, também, para as conversões nos racionais referindo que

Aqui também, acabamos por trabalhar [as conversões]... portanto, neste caso o filho mais velho receberia 5 décimos da fortuna, portanto, eles aqui para perceberem... vão ter de ter em conta as frações porque vão ter que escolher qual é a opção correta [na questão 1.1.]

e para as frações de referência quando:

Depois aqui já no outro formato, o filho mais novo receberia, sempre, a quarta parte..., eles aqui têm sempre muita dificuldade em perceber a quarta parte, a quinta parte..., portanto, e depois diz que os restantes filhos recebiam, igualmente, a restante fortuna, portanto... eles perceberem que, daquela parte que sobrava, tem que ser metade para cada um... (BEAA2)

Na antecipação da última questão (Figura 6), Berta construiu um esquema elucidativo do raciocínio que os alunos podiam fazer e em comentário colocou a questão “Quantos anéis havia no total?” (BAA2), antecipando a dificuldade decorrente da não explicitação do número total de anéis da herança e que, mais uma vez, os alunos teriam que reconstruir a unidade.

Se a cada filho corresponde 20% dos anéis e se essa percentagem diz respeito a 5 anéis, então Filho 1 – 20% - 5 anéis Filho 2 – 20% - 5 anéis Filho 3 – 20% - 5 anéis Filha - 20% - 5 anéis e ainda 20% - 5 anéis, logo a filha tem 10 anéis.

Figura 6. Esquema da resolução da última questão da Tarefa 2

Analisando as diferentes resoluções da Tarefa 2 podemos perceber que Berta compreendeu as relações a estabelecer e que, preocupada em torná-las claras para os seus alunos, recorreu a uma representação pictórica das condições indicadas. Também usou linguagem natural e a representação fracionária percebendo-se que fez conversões intencionalmente. Em seguida apresentou um esquema relacionando a percentagem com a quantidade de anéis, usando também linguagem natural. Note-se que não antecipou quaisquer procedimentos talvez por considerar de menor importância ou por não sentir necessidade de os registar na antecipação de possíveis resoluções. Ainda assim, Berta, momentos antes da aula, tentou identificar os desafios que esta tarefa colocava, do ponto de vista do seu papel em sala de aula, referiu o facto de poderem aparecer “estratégias que eu não esteja a entender” e “como é que vamos fazer essa organização, como vou escolher... Qual é que vai ser a melhor resolução [a apresentar]. Porque, se houver muitas, vai haver ali um impasse sobre o que vou fazer! (BEAA2). Deste modo mostrou alguma insegurança no modo como iria gerir as diferentes resoluções que pudessem surgir.

Na Tarefa 3, tal como anteriormente, Berta, estava atenta ao conceito envolvido, resolveu a tarefa de forma geral e testou com diferentes valores (1€, 1,5 € e 2€) recorrendo sempre a resoluções aritmeticamente corretas com a representação decimal dos racionais (Anexo 15). Resolveu inicialmente com linguagem natural uma resolução algébrica da tarefa e em seguida apresentou uma resolução de natureza processual convertendo a representação em percentagem na representação decimal sem explicitar os cálculos realizados.

Assim, Berta antecipou várias resoluções, estratégias e identificou as principais ideias a emergir, tais como: as ideias principais que os alunos deveriam retirar das condições identificando; a reconstrução da unidade de referência, as conversões nos racionais e as frações de referência e; antecipou a dificuldade decorrente da não explicitação do número total de anéis da herança na Tarefa 2. Com os esquemas que constituiu sobre as situações colocadas, a futura professora evidenciou compreender as relações a estabelecer e a preocupação em torná-las claras para os seus alunos. A futura professora não registou possíveis resoluções erradas e procedimentos de cálculo.

4.4.1.4. Momentos das aulas: Três níveis de descrição

Na planificação do trabalho a desenvolver, Berta, explicitou os seus objetivos e o que pretendia concretizar. Para cada momento da aula, antecipou as ideias dos alunos, as

suas ações e questões que poderia colocar. Para a futura professora, o questionamento era o processo mais complicado e, por isso, preparou-o com cuidado:

Eu acho que o grande desafio vai ser, eu própria, colocar as questões. . . Tentar que eles desconstruam esta ideia [testando] . . . As questões, também vão ser importantes. Tenho algumas preparadas, mas vamos ver se consigo... Com que eles sigam o que eu pretendo. (BEAA3)

Como era usual, depois de selecionar a tarefa, de a resolver, de preparar todos os materiais e de planificar registando o previsto, Berta enviou o que fez aos seus supervisores. De seguida, reuniu com o professor cooperante para discutir a adequação da sua proposta, incluindo questões relativas à gestão curricular, tendo concordado com a planificação.

Para o momento de proposta da tarefa descreveu ações como promover “uma pequena discussão sobre a temática” e registou questões a colocar, tais como: “O que sabemos? Quais são as condições? O que queremos saber? Que conceitos matemáticos podem ser úteis?”. Este questionamento era igual em todas as tarefas e, portanto, muito geral, sem definir questões próximas dos conceitos a explorar ou às dificuldades dos alunos. Na tarefa 3 repetia a questão da própria tarefa. Para o momento de exploração da tarefa previu monitorizar o trabalho dos alunos e caso tivessem dificuldades apoiar formulando questões, na Tarefa 2 eram perguntas gerais, a saber: “O que sabemos? Quais são as condições? O que queremos saber? Que conceitos matemáticos podem ser úteis?”. Na entrevista, sublinhou que os alunos “podem desenhar, podem usar palavras, material que queiram” (BEAA1). As questões eram distantes de possíveis resoluções erradas ou dificuldades dos alunos.

No final do trabalho, enviou uma versão à supervisora da ESE. Berta previu a exploração das tarefas com alguns detalhes, mas, ainda assim, a sua supervisora considerou que a futura professora podia ir um pouco mais longe, colocando vários comentários de modo a apoiar Berta na explicitação do que previa realizar. As sugestões da supervisora remetiam para a antecipação das dificuldades dos alunos, questionando Berta sobre o conceito envolvido e chamando a atenção para aspetos relativos às representações a usar pelos alunos. Em resposta, Berta, na versão final da planificação, na Tarefa 2, acrescentou a frase: “Os alunos poderão ter mais dificuldades em saber o valor da herança total, para perceberem que parte da herança cabe a cada um dos filhos.” identificando a dificuldade em definir a unidade de referência. Note-se que apesar de a professora supervisora ter sugerido a explicitação das questões que faria, no

caso de os alunos terem dúvidas, Berta não previu mais questões acrescentando apenas que devia “ter atenção às diferentes representações por parte dos alunos”. Na Tarefa 3 as questões eram mais específicas e procuravam apoiar e guiar os alunos (Figura 7).

Na primeira versão da planificação da tarefa 3, verificamos que no primeiro parágrafo Berta descreveu ações gerais.

Neste momento, os alunos começam a trabalhar com os seus grupos, tentando responder à questão: Será que a gasolina voltou ao preço anterior?. O professor dá algum tempo para que os alunos possam discutir ideias e estratégias, mas, de seguida, deve passar por todos os grupos. Caso os alunos não consigam iniciar a tarefa ou se estiverem a pensar numa estratégia errada, o professor deve voltar a questioná-los. Poderão ter dificuldade em perceber a tarefa, pois não há referência ao preço da gasolina. Além disso, estão tentados a responder que a gasolina volta ao mesmo preço, pelo que o docente deve perguntar: O preço da gasolina é o mesmo em todos os locais de venda? E se supuserem um preço aceitável? Por que é que isto acontece?	Comment: Qual pode ser a dificuldade inicial? Não ter um valor para o preço da gasolina? Comment: Incentivar a que realizem os cálculos com um valor se não estiverem a conseguir avançar! Comment: Envolvendo o quê nessa estratégia? Ter também atenção à utilização de diferentes representações, por parte dos alunos: frações, decimais,...

Figura 7. Antevisão da prática letiva e respetivos comentários da supervisora

No segundo parágrafo antecipou dificuldades dos alunos na compreensão do conceito, antecipou a resposta errada e formulou algumas questões, focando-se na questão da razoabilidade do preço. Depois das sugestões da supervisora, Berta, fez alguns avanços (Figura 7). No primeiro parágrafo, Berta passou a definir questões mais próximas dos conceitos que queria trabalhar, como as possíveis dificuldades que os alunos poderiam ter na interpretação do enunciado. O foco das questões estava nos processos de resolução de problemas e no conceito de percentagem.

Neste momento, os alunos começam a trabalhar com os seus grupos, tentando responder à questão: Será que a gasolina voltou ao preço anterior?. O professor dá algum tempo para que os alunos possam discutir ideias e estratégias, mas, de seguida, deve passar por todos os grupos. São colocadas questões como: O que sabemos? Quais são as condições? O que queremos saber? Que conceitos matemáticos podem ser úteis? O que significa ter um aumento de 10%?

Caso os alunos não consigam iniciar a tarefa ou se estiverem a pensar numa estratégia errada, o professor deve voltar a questioná-los. Poderão ter dificuldade em perceber a tarefa, pois não há referência ao preço da gasolina. Além disso, estão tentados a responder que a gasolina volta ao mesmo preço, pelo que o docente deve perguntar: O preço da gasolina é o mesmo em todos os locais de venda? E se supuserem um preço aceitável? Por que é que isto acontece? O docente deve incentivar os alunos a realizem cálculos com um valor, se não estiverem a conseguir avançar.

Figura 8: Antevisão de questões nas planificações antes e depois das sugestões da supervisora

No segundo parágrafo não ampliou o tipo de questões, mas acrescentou a sugestão dada pela supervisora relativamente à importância de testar vários valores de modo a que os alunos compreendessem o efeito do aumento e descida do preço da gasolina. As questões diversificaram-se e incluiu questões de natureza mais desafiante (final do último parágrafo da figura 8). Podia ter antecipado algumas questões para apoiar os alunos na resolução da tarefa recorrendo a outras representações (fracionária ou pictórica). Tal pode ter acontecido porque a professora estagiária não antecipou diferentes resoluções corretas com diferentes representações. Ainda na antevisão do momento de trabalho autónomo dos alunos, Berta, previu selecionar diferentes resoluções e, depois da sua supervisora ter chamado a atenção sobre a necessidade de mais informação sobre a sequenciação das resoluções, antecipou os critérios de quais as estratégias que iria privilegiar decidindo que escolheria a estratégia mais clara para a compreensão dos conceitos e no caso de existirem várias hipóteses pretendia organizá-las da mais “simples” para a que tinha a “melhor conclusão”.

Relativamente à fase de discussão da tarefa em grande grupo previu a apresentação das resoluções, e mais uma vez Berta previu questionar os alunos, mas sem especificar que questões. O trabalho relativo à tarefa da gasolina ficou dividido em duas aulas. Na primeira aula, a tarefa foi apresentada aos alunos e estes resolveram-na autonomamente, a pares. Na segunda aula, a tarefa foi discutida. Berta foi alertada, pela supervisora, para a importância da análise das resoluções antes de avançar para a sua exploração. Assim, analisou as resoluções dos alunos e previu a discussão em grande

grupo. Depois de analisar as resoluções, explicou como as pretendia sequenciar. Escolheu apenas duas resoluções diferentes e explicou porquê:

Um que explica porque é que ele primeiro pensou que o preço da gasolina voltaria ao preço inicial e faz um esquema onde explica. . . Fez o esquema para explicar como tinha pensado e em seguida, deu um valor à gasolina. . . O outro aluno, escolhi porque fez uma comunicação matemática mais correta do que todos os outros. Explicou bem, apesar de na folha de registo ter desorganizado um pouco os cálculos, mas consegui perceber qual era a ordem e vou pedir que ele registe por ordem. (BEAA3)

Na figura 8 vemos que Berta pretendia explorar o erro que tinha previsto inicialmente, de modo a levar os alunos a compreender o conceito de percentagem. Estava, também, preocupada em reorganizar as resoluções dos alunos de modo a que fossem mais eficientes do ponto de vista da comunicação matemática escrita.

Um dos elementos do par, escolhido pelo professor, faz a apresentação oral e escrita no quadro. O docente solicita muita atenção por parte dos colegas de turma, para que consigam colocar questões. O professor também deve colocar questões como: Por que escolheram este preço para a gasolina? Esse preço é razoável? Os resultados seriam diferentes se escolhessem outro preço? Por que razão os preços não voltam ao preço inicial, independentemente do valor escolhido? O que é que isso tem a ver com as percentagens? O valor do aumento e da descida alguma vez seriam iguais? Porquê? É importante que os alunos percebam o conceito de percentagem e que o relacionem com o de unidade, para entenderem que duas percentagens iguais, que incidem sobre unidades diferentes, não podem dar resultados iguais. Para isso, o professor utiliza cartolinas (uma tira é a unidade; outra tira que é a unidade e mais 10%; outra tira que é a nova unidade e se retira 10%). Os alunos devem fazer o seguinte registo: Se a um dado valor A acrescentarmos 10% desse valor, obtemos um novo valor B, superior a A. Se, em seguida, ao valor B, retirarmos 10% desse valor, obtemos um terceiro valor C. O valor de C é menor do que o valor de A (inicial). O valor dos 10% de A é inferior ao valor dos 10% de B.

Figura 9. Antecipação da segunda parte da aula da tarefa 3

Na planificação de Berta, observamos que previu questões a realizar de modo a explorar as diferentes resoluções e a interligá-las. O questionamento previsto é mais diversificado e focado no confronto entre diferentes resoluções com valores diferentes. No segundo parágrafo, identificou o propósito principal da tarefa remetendo para a questão da unidade de referência e a sua relação com o conceito de percentagem. No entanto, quando se trabalha com percentagens (ou frações como operadores), expressões como “e mais 10%” e “se retira 10%”, sem identificar a unidade de referência, podem deixar pouco claro o raciocínio multiplicativo envolvido. No terceiro parágrafo esta ideia já foi evidenciada. Berta preparou com bastante cuidado o momento da síntese

final. Apesar de não o ter previsto na sua primeira planificação escrita, fê-lo na segunda planificação (Figura 9). A sua ideia era recorrer a uma representação da situação construída em cartolina, tal como viu no vídeo na sua aula de Didática:

[No vídeo] a professora utiliza um pedaço de cartolina que vai recortando na aula . . . A professora não faz com 10%, acho que faz com 50%. . . Eu queria já trazer os 10% cortados e juntar, no quadro, para depois apresentar a nova unidade. [Farei assim] porque. . . Não ia demorar tanto tempo. . . [Queria que] eles percebessem que aqueles 10% cabem 10 vezes na unidade que tinha, do preço inicial. Foi por isso não que não fiz da forma da professora. (BEAA4)

Berta observou o vídeo onde é usada uma representação que pode iluminar o conceito de percentagem, e decidiu fazer alterações. Assim, sem ter tido tempo para consultar os supervisores, decidiu fazer algumas modificações na estratégia observada. O objetivo principal era ganhar tempo e sentir-se mais segura. Quando terminou de construir a cartolina sentiu que esta podia dificultar a visualização da diferença entre o valor inicial e o valor final, mas já era muito tarde para reconstruir o material.

Assim, Berta preparou os diferentes momentos das aulas. Previu começar por conversar com os alunos sobre o contexto das tarefas e, nos diferentes momentos, realizar questões que pudessem desafiar e apoiar os alunos a resolver a tarefa. Este questionamento era muito geral sem definir questões próximas dos conceitos a trabalhar ou às dificuldades dos alunos. Com feedback da supervisora, especificou algumas questões. Partindo das suas experiências enquanto estudante da ESE, Berta antecipou a resolução dos seus alunos e a ideia errada relativa à resposta à tarefa. Previu seleccionar as diferentes resoluções e explorá-las da mais simples para mais clara, mas não como iria relacionar as diferentes resoluções. A supervisora sinalizou a necessidade de o fazer, mas Berta não tomou em consideração a sugestão. O facto de não ter antecipado todas as representações possíveis nem a sua exploração pode ter dificultado a sua preparação para apoiar os alunos nas suas dificuldades. Note-se que na tarefa 3, depois de ter tido acesso às diferentes resoluções, previu questões para explorar as diferentes resoluções e a interligá-las. O questionamento previsto é mais diversificado e focado no confronto entre diferentes resoluções com valores diferentes. Relativamente à preparação das sínteses, recorreu à sua experiência como estudante na ESE e formulou as representações que modelavam as respostas. Importa sublinhar que não reproduz de modo exato o que observou, introduzindo alterações que considerou pertinentes.

Em síntese final, o processo de planificação de Berta foi vivido numa fase única. Inicialmente, fez várias leituras, reviu os aspetos matemáticos a considerar e pesquisou tarefas em várias fontes tendo optado por tarefas propostas na ESE. As tarefas selecionadas tinham um contexto significativo e próximo dos alunos, tinha como propósito principal estabelecer a relação entre várias representações de números racionais, na tarefa 3 dar uma atenção especial ao conceito de percentagem, e desenvolver a capacidade de resolução de problemas e a comunicação matemática dos seus alunos. Para a futura professora, as tarefas eram de cunho exploratório permitindo que os alunos, revisitando conceitos já trabalhados, resolvessem várias questões de formas diferentes. Não alterou as tarefas propostas na ESE e apenas acrescentou em comentário, para si própria, alertas para a necessidade de definir a unidade envolvida. Para preparar o trabalho resolveu as tarefas, antecipando várias resoluções e estratégias, identificou as principais ideias a emergir. Na tarefa 2, antecipou a dificuldade decorrente da não explicitação do número total de anéis da herança. Na tarefa 3, a dificuldade de os alunos compreenderem o efeito da unidade de referência no cálculo do valor final da gasolina. Construiu esquemas sobre as situações colocadas e evidenciou compreender as relações a estabelecer e a preocupação em torná-las claras para os seus alunos, mas não registou possíveis resoluções erradas e procedimentos de cálculo. No caso da tarefa 3, modelou a situação de modo diferente da professora do vídeo por uma economia de tempo e para se sentir mais segura. Na sua planificação, descreveu os diferentes momentos de trabalho da aula: proposta da tarefa, exploração da tarefa, discussão em grande grupo culminando na síntese. Assim, previu propor a tarefa começando por conversar com os alunos sobre o contexto das tarefas e formulou questões, de modo geral, que pudessem apoiar os alunos a resolver a tarefa. Previu a exploração da tarefa, quer em pequenos grupos, quer depois em grande grupo, identificando questões muito gerais a colocar aos alunos para os apoiar na resolução da tarefa e identificando a dificuldade dos alunos em definir a unidade de referência. A futura professora previu selecionar diferentes resoluções e explorá-las usando como critério começar pelas resoluções mais “simples”, que podemos entender menos formais, e deixando para último as resoluções que no seu entender permitiam compreender os conceitos envolvidos. Com as sugestões da supervisora acrescentou questões mais específicas para cada tarefa e quando teve acesso às resoluções dos alunos sequenciou com novos critérios as diferentes resoluções.

4.4.2. Concretização das aulas

As duas primeiras tarefas propostas por Berta (tarefa 1 e 2) eram constituídas por várias questões e mostraram-se longas para aulas de 90 minutos. Optou por discutir as diferentes questões por partes. Na tarefa 2, a futura professora propôs parte das questões numa aula e, na aula seguinte, restabelecendo o trabalho, relançou as restantes questões. Na terceira aula, Berta explorou uma tarefa que envolvia o conceito de percentagem de modo a aprofundar o conhecimento dos alunos sobre este conceito. A aula também ficou dividida em duas partes, onde numa primeira foi proposta a tarefa e os alunos a resolveram em 45 minutos e uma segunda parte, no dia seguinte, também em 45 minutos, onde esta foi discutida culminando numa síntese preparada previamente.

4.4.2.1. Aula 2: Proposta da tarefa 2

Na segunda aula, quando *iniciou* o trabalho com a “tarefa do rei” informou que seriam necessárias duas aulas para este trabalho e convidou os alunos para a sua resolução, focando a atenção no contexto. Sublinhou o número de filhos do rei e que a situação era de partilha equitativa. Berta leu a situação colocada e a primeira questão, que tinha uma natureza fechada (Figura 10):

- O filho mais velho receberia sempre $\frac{5}{10}$ da fortuna;
- O filho mais novo receberia sempre a quarta parte da fortuna;
- Os restantes filhos receberiam igualmente a restante fortuna.

1.1. Qual das seguintes representações corresponde à distribuição da fortuna pelos quatro filhos? Porquê?

Figura 10. Questão 1.1. da tarefa 2

José: Era injusto!

Berta: Calma. O filho mais novo receberia sempre a quarta parte da fortuna e os restantes, portanto dois filhos, iam receber, apenas, a restante, portanto era a dividir pelos dois... “Primeiro o que é que vamos querer saber? Que parte da herança recebeu cada um dos filhos?” Portanto, quanto é que recebeu o filho mais velho, que parte recebeu o mais novo e os outros dois?

Ana: Como é que fazemos? Fazemos uma bola?

Berta: Fazem como vocês acharem que é melhor, para [qual a melhor opção] . . . O que é que eu quero que façam primeiro, que discutam entre vocês que parte da fortuna é que ficou para cada um dos filhos, está bem?! Na 1.2 diz o seguinte . . . Portanto nós sabemos um dos valores de um dos filhos, o filho

mais velho. Quanto é que será que receberam os outros? Vocês aqui têm que dizer tanto para o mais novo como para os do meio.

Para além de convidar os alunos para a resolução da tarefa, Berta leu-a e sublinhou dados importantes, como a parte que caberia ao filho mais novo e questões-chave a ter em conta, ou seja, na parte que cabia ao filho mais velho, ao mais novo e aos restantes – *informando* os alunos e *iniciando* a discussão. *Guiou* os alunos envolvendo-os, e estruturou um caminho de resolução, recorrendo a questões de focalização. Quando os alunos questionaram o que deveriam fazer, a professora explicitou o esperado e o modo de trabalho pretendido, indicando que deveriam discutir a tarefa chegando a um acordo e a uma resposta. Na interação com os alunos, com questões e *sugestões*, estruturou a resolução – primeiro verificarem que parte da herança coube ao filho mais velho e ao mais novo e posteriormente calcularem que parte coube aos outros dois filhos de forma equitativa - mas, ao fazê-lo, baixou o nível de desafio da tarefa que, na primeira questão, que já assumia uma natureza fechada. No dia seguinte Berta relançou a tarefa. Propôs outras duas das questões da tarefa 2 lendo-as, focando os alunos nas soluções já obtidas, para estabelecer uma ligação com o trabalho já realizado. Por fim, resumiu as principais ideias, mas, ao fazê-lo, acabou por informar aos alunos os processos para as resolver.

4.4.2.2. Exploração da Tarefa 2

Berta circulou pelos pares *monitorizando* o trabalho para perceber se os alunos tinham compreendido o que era pedido na tarefa. A questão 1.1. apresentava 3 representações possíveis das condições dadas. Perante as dúvidas que foram surgindo, *focou* os alunos nos $\frac{5}{10}$ como equivalente a metade e o seu significado na herança. Para que os alunos estabelecessem relações entre as várias representações repetiu a questão da tarefa focando no contexto e no estabelecimento da relação pretendida. Perante a dificuldade dos alunos a futura professora insistiu:

Berta: Não podes ajudar [Para o outro aluno]! [O aluno recorreu à calculadora] Ai a calculadora! Mas o que quer dizer 5/10? Pensa lá!

Aluno: É... no testamento é metade!

Berta: Então, o filho mais velho vai receber quanto?

Aluno: Metade? (revelando alguma insegurança)

Berta: Metade do quê?

Aluno: Do testamento da herança.

De modo a *focar* a atenção na unidade de referência, questão que passou a ter total atenção por parte de Berta, salientou a ideia de que a fração é referente a uma unidade

específica – a herança. Quando o aluno chegou à ideia de metade da unidade (herança), Berta sugeriu que os alunos representassem as suas ideias sem indicar a forma de o fazer. Quando os alunos recorreram às representações da tarefa voltaram a questionar a unidade, uma vez que não sabiam qual o seu valor. Berta remeteu para as experiências vividas na tarefa 1, na qual não existia um valor. Um dos alunos conjecturou: “Eu estava a dizer: ‘Se achássemos a outra metade e depois dividíamos por 3’ [Encaminhando-se para a terceira representação]”.

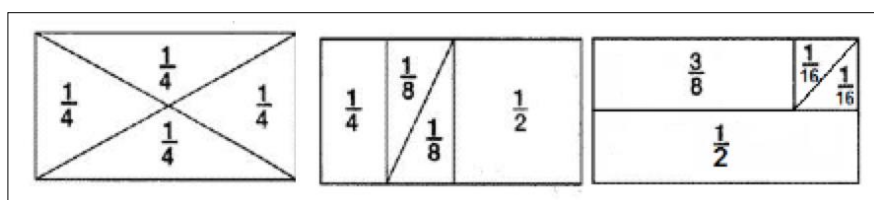


Figura 11. Representações da Questão 1.1. da tarefa 2

Ou seja, que teriam de dividir a parte sobrança pelos outros três filhos de forma equitativa. Para *guiar* os alunos na resolução, a futura professora *focou* nas representações da tarefa e nas condições dadas *informando-os*:

Berta: Olha que é metade que precisas. . . Nós queremos saber como é que a herança foi dividida, se é esta forma, esta ou esta! [Apontando para as três hipóteses]

Aluno: É esta [A terceira].

(Sem ter ouvido a resposta anterior, Berta continua intervenção)

Berta: Aqui, na primeira parte, diz que o filho mais velho recebeu metade, portanto, se calhar já podemos excluir alguma delas.

Aluno: É esta [A primeira].

Berta: Essa já não pode ser. Então o filho mais novo recebia a quarta parte da fortuna. Então o que é que temos que fazer?

Os alunos sugeriram que se dividia por 4 e a futura professora redisse a informação formulando a questão de inquirição: “Então o que quer dizer a quarta parte?” Os alunos responderam que seria o mesmo que dividir por quatro e Berta reforçou focalizando os alunos na parte que cabia a cada filho: “E eles receberiam quantas partes dessas 4?” O diálogo continuou até ao momento em que os alunos, *guiados* pela futura professora, identificaram a quarta parte representada por $\frac{1}{4}$. Chegados à identificação da parte que cabia ao filho mais novo, Berta partiu para a identificação da parte da herança que coube aos restantes filhos. Os alunos responderam corretamente mas a futura professora questionou-os de modo a confirmar se estes

tinham compreendido que tinham obtido metade da quarta parte e por isso selecionado a representação correta, ou seja, $\frac{1}{8}$: “Então a parte que restava tem que ser dividida por quantas partes, por quantos filhos?” A discussão da primeira questão da tarefa 2 ainda se iniciou na mesma aula, mas, entretanto, tocou para a saída e não se chegou à conclusão.

No dia seguinte, em plenário, restabeleceu o trabalho iniciado, lançou as outras questões da tarefa e para estabelecer um ponto de ligação com o trabalho já realizado, relembrou os alunos das soluções que já tinham obtido na questão 1.1. No final deixou a questão 2 em suspenso e estabeleceu o tempo para a resolução da tarefa.

A questão 2 não foi introduzida em grande grupo e os alunos foram avançando na sua resolução. A tarefa introduzia novos dados e condições e quando Berta *monitorizou* o trabalho dos alunos deu-se conta que não eram claros no enunciado (Figura 12).

A distribuição dos anéis reais foi diferente. O Rei pegou na sua coleção de anéis de ouro e deu à sua única filha 40% dos anéis. Os outros filhos (homens) receberam em igual quantidade a restante parte da coleção de anéis. Um deles recebeu 5 anéis.

2.1. Que percentagem da herança coube a cada filho (homem)?

2.2. Assinala (X) que frações correspondem à parte da coleção de anéis que a filha recebeu?

$\frac{4}{10}$ ☐	$\frac{4}{25}$ ☐
$\frac{2}{5}$ ☐	$\frac{1}{5}$ ☐

2.3. Quantos anéis recebeu a filha?

Figura 12. Questão 2 da tarefa 2

Assim, a dada altura parou a aula e clarificou os dados e condições da questão:

Berta: Quero toda a gente com atenção . . . Em relação à segunda parte vocês estão a errar porque não estão a compreender o enunciado porque... Não está realmente bem. Vocês lembram-se que o rei tinha 4 filhos, correto?

Alunos: 4 ou 5

Berta: Não, o rei tem 4 filhos. Não diz, dos quais, quantos são mulheres e quantos são homens, tem 4 filhos. Só na 2ª parte do enunciado é que diz que uma é que é filha, os outros 3 são homens. Está bem?

Berta relembrou as condições iniciais, *informando-os*, que o rei tinha 4 filhos, para depois acrescentar que um deles era uma mulher. Com esta informação os alunos *foram apoiados* a avançar com mais clareza e o trabalho foi restabelecido. Entretanto, voltou ao par com quem estava a trabalhar e questionou os alunos, novamente, de modo a compreender se tinham percebido as condições da questão. Ainda assim os alunos não tinham compreendido e a futura professora repetiu as condições, reforçando a ideia. Em seguida *convidou* os alunos a resolver a questão e focou-os, novamente, nos 60% que os filhos homens receberiam. Quando percebeu que os alunos estavam a realizar a estratégia adequada afastou-se. Depois de circular pelos restantes pares, *monitorizando*, percebeu que a turma estava pronta para a discussão das resoluções às diferentes questões da tarefa 2.

Assim, no momento de exploração da tarefa, Berta monitorizou o trabalho nas diferentes alíneas da questão 1 e 2 da tarefa 2 conjugando diferentes ações de modo a apoiar os alunos no momento de trabalho autónomo. Circulou e observou o trabalho dos vários pares e foi apoiando os alunos com mais dificuldades. Na questão 1.1., esteve atenta ao estabelecimento de relações entre as várias representações e à identificação da unidade de referência. De modo *a apoiar e guiar* na resolução da tarefa pediu que representassem as suas ideias sem indicar a forma de o fazer. Ainda assim, a tarefa propunha três representações, mas apenas uma era a adequada. A professora foi guiando os alunos a com base nas representações disponíveis relacionando-as com as condições dadas. Finalmente na Questão 2, talvez por não ter explorado antes a situação colocada, quando os alunos iniciarem o seu trabalho, percebeu que existia uma dificuldade generalizada com a compreensão do que era pedido e, em grande grupo, *informou* sobre os dados e condições do enunciado.

4.4.2.3. Discussão da Tarefa 2

Berta começou a discussão da tarefa 2 revendo o que tinha sido discutido na questão 1.1., interagindo com a representação (Figura 13): “Portanto aqui era $\frac{1}{2}$ que era metade, depois dividia ao meio e ficava $\frac{1}{4}$, e $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{8}$. Concordam com esta opção?”

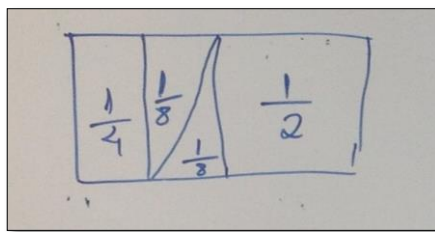


Figura 13. Representação da resposta correta à questão 1.1

Os alunos acenaram afirmativamente e, partindo da representação, Berta estabeleceu a relação entre as frações e as porcentagens. O estabelecimento de relações entre representações *iniciou-se* quando um aluno sugeriu que $\frac{1}{2}$ era o mesmo que 0,5 e a futura professora aproveitou a relação estabelecida e questionou sobre o 50% e, posteriormente, sobre o significado de $\frac{1}{4}$ e a quarta parte de uma unidade. Berta *guiou* os alunos sobre a restante resolução da questão 1.1 *combinando informações com questões* de focalização que remetiam para o significado das frações apresentadas no enunciado.

Berta: É uma dessas quatro partes que o rei dividiu a herança, certo. Depois sabíamos que a restante herança era dividida então por os outros dois filhos. E que herança é que nós tínhamos?

Aluno: $\frac{1}{8}$

Berta: O que é que isso significa? Temos ali $\frac{1}{8}$ mas nós sabíamos que deste total, o todo, nós tínhamos metade que era para o filho mais velho, tínhamos $\frac{1}{4}$ para o filho mais novo, e o que é que nos sobrava aqui?

Aluno: Os restantes filhos.

Berta: Os restantes filhos. $\frac{1}{8}$ para cada filho. O que é $[\frac{1}{8}]$ em relação a $\frac{1}{4}$?

Guiando os alunos, Berta estabeleceu a parte que cabia aos filhos do meio ($\frac{1}{8}$) e estabeleceu a relação de metade com $\frac{1}{4}$. Entretanto passou para a correção da questão 1.2 onde era perguntado o valor, em pesos reais, que cada filho do rei receberia, considerando que o filho mais velho recebeu 4500. Pediu a um dos alunos para explicar as suas ideias no quadro. O aluno registou a sua resposta e apesar da professora ter interpelado os restantes alunos, acabou por apresentar a resposta. Logo em seguida, com o recurso à representação inicial, registada no quadro, a futura professora foi *apoando* os diferentes alunos na sua apresentação e foi *sugerindo* as representações simbólicas que foram sendo discutidas. Note-se que a figura 14 é o resultado da discussão e que as representações sob a forma de percentagem foram registadas a preto.

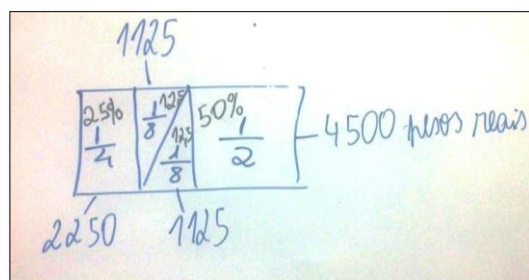


Figura 14. Representação da resposta à questão 1.2

Começou por focar a atenção sobre o enunciado da questão relacionando o valor inicial, com a parte que coube a cada filho e com a representação em percentagem. Em seguida *guiou* os alunos na compreensão do valor que cada fração representava:

André: Eu vi que a fortuna era 9000 e também vi que isto era a metade por isso vi logo que o mais velho recebeu 4500.

Berta: O que é que dizia lá no enunciado?

André: Que o mais velho recebeu metade da fortuna.

Berta foi *apoando* a explicação das ideias dos alunos *guiou-os* na compreensão da relação das partes da herança com seu o valor em pesos reais, por exemplo quando perguntou: “Esta parte é do filho mais novo, mas o que é que é em relação a esta parte que aqui temos [parte correspondente aos filhos do meio]?”. Depois de estabelecida a relação entre as frações e os valores que couberam a cada filho, Berta decidiu avançar para a correção da questão 1.3. Optou por registar as explicações dos alunos.

Assim, começou a discussão das diferentes alíneas da questão 1 retomando o trabalho realizado. Berta *iniciou* com o estabelecimento de relações entre frações de referência e respetivas percentagens *guiando* os alunos combinando informações com questões. Perante as dificuldades acabou por apresentar a ideia. Em seguida, recorrendo à representação da tarefa foi *apoando* os alunos na sua apresentação e foi *sugerindo* as representações simbólicas discutindo-as. De modo a *apoiar* a explicação dos alunos *guiou-os* na identificação da unidade de referência. Na correção da questão 1.3., como o previsto, os alunos consideraram que a distribuição deveria ser equitativa e que caberia 25% ou 2500 pesos reais, a cada filho do rei. A questão podia ter sido problematizada, mas Berta decidiu avançar para a questão seguinte.

A futura professora iniciou a discussão da questão 2 da Tarefa 2, mas esta tomou a forma de correção das respetivas alíneas (Figura 15).

A distribuição dos anéis reais foi diferente. O Rei pegou na sua coleção de anéis de ouro e deu à sua única filha 40% dos anéis. Os outros filhos (homens) receberam em igual quantidade a restante parte da coleção de anéis. Um deles recebeu 5 anéis.

2.1. Que percentagem da herança coube a cada filho (homem)?

Figura 15. Enunciado e questão 2.1

Berta, *informou os alunos* sobre as novas condições e dados lendo o enunciado e acompanhando com comentários complementares da informação quando acrescentou que dos 4 filhos 3 eram homens: “Portanto diz que cada um dos filhos recebeu 5 anéis. Que percentagem da herança coube a cada filho? . . . Nós tínhamos visto que a filha ia receber que percentagem?”. Ou seja, *guiou* os alunos na resolução das alíneas da questão 2. Os alunos identificaram de imediato o valor que coube à filha (40%) e o par interpelado indicou quanto coube aos três filhos homens (60%) explicando que tinham calculado a diferença entre 100% e 40%. Depois do registo no quadro, feito por um dos alunos do par, um outro aluno explicou os procedimentos. Berta, depois de redizer as ideias do aluno, orientou a explicação para a relação entre a percentagem e o número total de anéis: “Mas agora aqueles 20% dizem respeito a que quantidade de anéis, Ricardo?” ao que o aluno respondeu que 20% correspondia a 5 anéis. Deste modo ficou estabelecida a quantidade de anéis que cabia a cada um dos filhos do rei.

Para a discussão da alínea 2.2., Berta chamou Diana que estabeleceu relações entre frações. Berta convidou todos os alunos a pensar sobre a questão (Figura 16).

2.2. Assinala (X) que frações correspondem à parte da coleção de anéis que a filha recebeu?

$$\frac{4}{10} \quad \square$$

$$\frac{4}{25} \quad \square$$

$$\frac{2}{5} \quad \square$$

$$\frac{1}{5} \quad \square$$

Figura 16. Questão 2.2. da tarefa 2

Berta começou por perguntar: “Aqui nós temos que saber como é que podemos representar a parte da coleção que ficou para a filha. . . Diana, porque é que tu disseste que essa fração correspondia aos anéis que ficava para a filha?”. A aluna selecionou a

resposta correta, $\frac{4}{10}$ e leu quatro décimas. No entanto, Berta parecia estar interessada em estabelecer que 0,4 (quatro décimas) é igual a 0,40 (quarenta centésimas) e que representam a mesma quantidade, ou seja os 40% que cabiam à filha do rei. Esta relação era importante porque não havendo essa opção na questão, houve alunos que chegaram à resposta 0,40. Assim Berta terminou o diálogo dizendo: “E foi o que os teus colegas fizeram. Só que fizeram em forma de fração, eles viram que era 40% e escreveram $\frac{40}{100}$ ”.

Em seguida *desafiou* os alunos a pensarem noutras frações equivalentes: “Tinham-me dito que havia aqui uma fração equivalente. Tinham dito que esta fração era equivalente [apontando para $\frac{2}{5}$]”. No entanto os alunos foram mais além e quiseram apresentar frações equivalentes para as outras frações apresentadas na questão. A futura professora explicou que não iriam explorar as outras frações e focou os alunos na questão. Berta ainda foi interpelada por uma aluna dizendo que tinha uma resolução alternativa. A aluna apresentou a sua ideia onde fazia corresponder 5 anéis a 20% da herança, afirmando: “No enunciado estava aqui a dizer que cada filho homem ia receber 5 anéis. Depois, na 2.1 nós fomos ver que percentagem é que eles iam receber 20%, ou seja 20% corresponde a 5 anéis”. Ou seja, remeteu a sua explicação para a informação dada pelo enunciado onde informava a quantidade que cada filho recebia relacionando-a com a solução obtida noutra alínea. Em seguida Berta foi guiando a aluna de modo a sublinhar a percentagem que cabia à filha do rei e registou o cálculo da percentagem que coube aos filhos homens e à filha mulher dizendo: “Estes 40% correspondiam ao que a filha recebeu de anéis, certo?” E a aluna retorquiu com a percentagem que coube aos 3 filhos homens (60%). Estabelecidas as diferenças entre as percentagens para cada filho, Berta optou por fazer uma síntese da situação e explicou a questão 2.3. recorrendo a um esquema, que tenha sido preparado anteriormente, tal como explicou na sua reflexão escrita. Para isso, utilizou uma representação com elementos pictóricos e simbólicos (Figura 17) e elaborou uma explicação em torno da representação retangular:

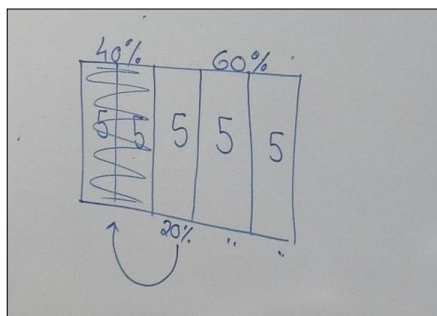


Figura 17. Resolução da questão 2.3. da tarefa 2

Berta: Exatamente, o que nós começámos a fazer na outra parte foi dividir os 60% em três partes igual e sabíamos que cada um deles correspondia a 20%. Sabemos também porque dão-nos a informação no enunciado que cada um dos filhos recebe quantos anéis? [Os alunos vão dando palpites: 20, 5, 10]. No enunciado está escrito que cada um dos filhos vai receber 5 anéis. Portanto o outro recebe 5 e o outro também [identificando com ...]. Sabemos que se aqui é 20%, 20% e 20% e que aqui é o dobro, foi o que a Diana fez. Esta parte aqui é o dobro de uma destas partes.

António: [Então] é 10.

(...)

Berta: Exatamente, vamos pintar aqui estas partes, e ela vai receber estas duas partes. Ela recebeu 10 anéis. Toda a gente compreendeu? Ricardo tu compreendeste qual é que foi o teu erro, compreendeste?

Berta iniciou a sua explicação relembando os dados já calculados, ou seja, a percentagem que cabia a cada filho (Q2.2), assim como o número de anéis que cabia a cada filho homem. Em seguida estabeleceu a relação entre as percentagens e o número de anéis para que os alunos compreendessem que à filha do rei cabia o dobro ou seja 10 anéis (Q2.3). Note-se que toda a explicação foi realizada com o apoio da representação que foi sendo elaborada e registada, clarificando as relações existentes. No final confirmou que os alunos com mais dificuldades tinham compreendido o explicado.

Assim, Berta iniciou a discussão da questão 2 da tarefa 2 sem que tenha realizado a proposta da tarefa em grande grupo. Em alternativa no momento de discussão convidou os alunos e *informou-os* sobre as novas condições e dados lendo o enunciado. *Guiando* os alunos, Berta desafiou-os sobre a percentagem da herança que coube à filha do rei. Para a discussão da alínea 2.2 Berta chamou uma das alunas para registar a sua resposta no quadro e convidou os restantes alunos a pensar sobre a questão. Na análise da questão o foco de Berta esteve na leitura de frações de modo a dar significado às quantidades envolvidas e ao estabelecimento da relação entre a representação fracionária e decimal. A futura professora também analisou a possibilidade de existirem

outras frações equivalentes para além da proposta na questão, mas rapidamente retomou a questão em análise. Berta, ainda, *guiou* a explicação de uma aluna questionando sobre a percentagem que coube à filha do rei e dos restantes filhos. Por fim, como tinha previsto, para dar sentido à discussão, sintetizou as principais ideias da questão 2.2 e estabeleceu a ligação com a questão 2.3, construindo a representação da situação.

4.4.2.4. Aula 3: Proposta da tarefa 3

Na terceira aula, Berta propôs o problema “Petrolex Lda” (Tarefa 3), tal como fez na tarefa 2, discutiu a temática, neste caso, dos combustíveis e as variações de preço, chamou a atenção para os dados principais do problema e para a questão colocada. Ou seja, *iniciou* o trabalho levando os alunos a compreender a tarefa, *informando* sobre o que era pedido. Enquanto clarificava a situação colocada foi *guiando* os alunos, inquirindo-os sobre a questão central e confrontando-os com as diferentes respostas que foram surgindo. Para iniciar o trabalho, a futura professora deu indicações sobre o modo de os alunos se organizarem e reforçou a importância dos registos escritos das estratégias para a discussão posterior. Explicitou as ações dos alunos quando deu indicações sobre o que esperava que eles fizessem e referiu o que faria enquanto os alunos trabalhassem em conjunto na resolução autónoma da tarefa. Alguns aspetos não foram discutidos em grande grupo e como resultado, Berta acabou por ter de esclarecer muitas dúvidas dos alunos no momento seguinte.

4.4.2.5. Exploração da tarefa 3

Na fase de proposta da tarefa alguns aspetos não foram discutidos em grande grupo. Tais aspetos foram esclarecidos por Berta enquanto monitorizou e apoiou os alunos. Assim, foi esclarecendo os alunos e foi sugerindo que registassem a sua hipótese e a testassem com um valor. No entanto nem sempre os alunos escolheram valores aceitáveis, tal como Berta antecipou. Perante a situação, questionou os alunos:

Aluno 1: Isto é uma rasteira!

Berta: Porquê? Eu não digo nada... Pergunto se volta ao preço inicial?

Aluno 2: Volta ao preço inicial!

Berta: E se vocês experimentassem uma forma de ver isso?

Aluno 2: Cálculos!

Berta: Podes fazer!

Aluno 2: Posso inventar um preço?

Berta: Podes inventar um preço! Mas vejam bem qual é o preço...

Aluno 1: 60 euros

Berta: Vocês não têm que dizer um preço real mas achas que esse preço é...

Aluno 2: Não... Na bomba é 1 ponto trinta e nove, 1 ponto vinte e tal...

Berta: Estão a trabalhar a pares e podem conversar e inventar um preço...

Neste diálogo, Berta, introduzindo a tarefa, começou por convidar os alunos a pensar na questão proposta. Em seguida, *sugeriu* que testassem a sua conjectura (o preço volta ao valor inicial). Na sua quarta intervenção, *redisse* a frase do aluno sugerindo que pensasse um preço e *guiou* os alunos a escolherem um preço usando valores concretos e “razoáveis”. Quando percebeu que os alunos estavam no bom caminho incentivou o trabalho entre pares, aconselhando a discussão de ideias e reforçou a necessidade de registarem o seu raciocínio. Até ao final da aula, circulou pela sala iniciando diálogos deste tipo e apoiando os alunos a verificar cálculos. Assim, foi esclarecendo as dúvidas dos alunos e foi *sugerindo* que registassem a sua hipótese e a testassem com um valor. No entanto, nem sempre os alunos escolheram valores aceitáveis e a futura professora sugeriu que testassem a sua conjectura (o preço volta ao valor inicial). Por vezes *guiou-os* a escolherem um preço usando valores concretos e “razoáveis”. Quando percebeu que os alunos estavam no bom caminho incentivou a discussão de ideias e reforçou a necessidade de registarem o seu raciocínio. Entretanto, a aula terminou e o momento de discussão e síntese ficou para o dia seguinte.

4.4.2.6. Discussão da tarefa 3

Berta, em casa, analisou as resoluções dos alunos e sequenciou-as. A professora sabia que tinha que pedir aos alunos que registassem as suas resoluções. Na quarta aula, Berta dirigiu a discussão, *guiando* os alunos na apresentação das suas resoluções, *inquirindo e focalizando* a atenção para ideias importantes a aprender, repetindo algumas ideias. A ideia mais sublinhada foi o facto de os preços subirem e descerem em função da unidade de referência. Depois do registo no quadro, iniciou a discussão:

Berta: A maior parte de vocês considerou que o preço da gasolina vai voltar ao preço inicial. Depois do aumento e depois de baixar! O vosso colega vai começar por explicar a primeira parte. Porque é que achaste que o preço volta a ser o mesmo? . . . Não copiem nada, primeiro vamos ver!

(...)

Tomás: Eu fiz... (registrando no quadro a figura 18). Era eu mais um amigo... E eu emprestei as canetas e voltei a pedir de volta e por isso o preço volta ao mesmo!

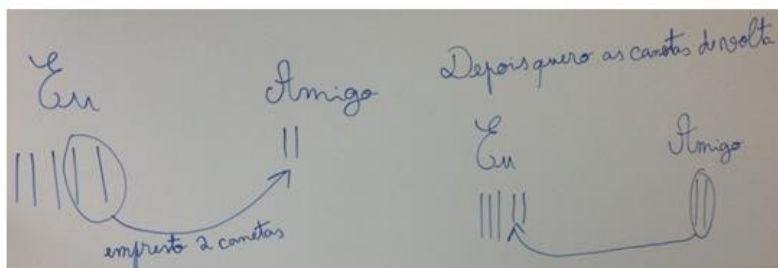


Figura 18. Resolução inicial do primeiro par da tarefa 3

De modo a perceber-se o caminho realizado pelo par, Berta pediu que os alunos que explicassem a sua primeira estratégia de resolução, que estava incorreta. Focou a atenção no facto do valor envolvido não ser absoluto, mas sim relativo a uma determinada unidade. Em seguida, pediu aos mesmos alunos para apresentar a resolução final, (Figura 19), apesar de considerar que o valor não era o mais ajustado à realidade:

$$\begin{aligned}
 &10\text{€} \quad 10\% \text{ de } 10 = 1\text{€} \\
 &10 + 1 = 11\text{€} \quad (\text{depois as pessoas protestaram}) \\
 &10\% \text{ de } 11\text{€} = 1,10\text{€} \\
 &11 - 1,10 = 9,90\text{€}
 \end{aligned}$$

Figura 19. Segunda parte da resolução do primeiro par à tarefa 3

Berta: Depois foste tentar dar um preço à gasolina... de 10 euros e foste ver se dava o mesmo valor!

Tomás: A gasolina custava 10 euros e 10% de 10 euros é 1 euro.

Berta: E isso era para nós sabermos ... Porque é que fizeste 10% de 10!

Tomás: Para sabermos quanto é o valor que temos que somar aos 10 euros.

Berta: Exatamente! E depois?

Tomás: Depois somei 1 euro a 10 e deu 11 euros. E depois as pessoas protestaram...

Berta: Calma! Então esses 11 euros eram Portanto tu tinhas dito que o preço da gasolina era 10 euros, 10% desses 10 euros era 1 euro, que ele foi aumentar. Quanto foi o aumento do valor do combustível? Passou para quanto?

(...)

Pedro: Porque estávamos a errar porque 10 % de 10... Já tínhamos feito! E ficava o mesmo preço! E se fizermos 10% de 11 ficava melhor porque ...

Berta: Porque nós tínhamos que ir ver os 10% do valor que tínhamos de novo!
 Certo? Então o valor do desconto foi de 1 euro e 10. Certo? Portanto o combustível ficou a 9 euros e 90. Se tu fosses automobilista preferias que isto acontecesse ou não?

Berta apoiou um par a apresentar a sua resolução permitindo que os outros alunos a compreendessem. Note-se que a primeira parte da resolução não foi antecipada pela futura professora e que a segunda parte foi antecipada, mas não com números naturais. Podemos ver que *convidou* os alunos a identificarem-se com a resolução alertando que este par, tal como a maioria dos colegas, conjecturou que o preço voltava ao valor inicial. Em seguida, avançou para o teste da conjectura com um valor pouco “razoável”. Na fase do cálculo da percentagem, questionou o aluno de modo a clarificar a intenção do cálculo e redisse os passos de modo a apoiar a transição para a fase seguinte. Neste diálogo, confrontou os alunos com a diferença entre calcular 10% de 10 e 10% de 11 euros. Em seguida, a futura professora, tal como antecipou, pediu a outro par de alunos que apresentassem a sua resolução. Este par resolveu a tarefa com registos desorganizados. Berta, antes da apresentação reorganizou a resolução com o par e pediu para apresentar com a organização estabelecida. Depois do aluno registar a resolução, Berta apoiou-o na apresentação começando por esclarecer que estes valores eram aceitáveis. Em seguida, Berta pediu a Manuel para explicar a sua resolução (Figura 19):

Handwritten mathematical work showing three steps of a calculation:

- ① $10\% \text{ de } 1,50$
 $\frac{1,50 \times 10}{100} = 0,15 - \text{valor do aumento}$
 $1,50 + 0,15 = 1,65$
 Resultado do preço inicial com o aumento do preço
- ② $1,65$
 $\times 10$
 $\frac{1,65}{10} = 0,165$
 Voltamos a descontar 10%
- ③ $1,65$
 $- 0,165$
 $\frac{1,65}{1,485} = 1,48\text{€}$
 Resultado do preço com o desconto

Figura 20. Resolução do segundo par à tarefa 3

Manuel: Imaginei 1,50€ e depois fui fazer o desconto de 10% e depois fiz este cálculo! (primeiro cálculo da figura 20)

Berta: Então, calma. O Miguel calculou os 10% de 1,50€ para saber o valor de aumento?

Manuel: 0.15€. . . e deu-me 1,65€ e depois fui descontar o desconto ao resultado e depois retirei 0,16€ e depois ...

Berta: Com calma. O valor do aumento que nós tínhamos tido ali (passo 1) passou para 1,65€/litro, o Miguel foi calcular os 10% do desconto, portanto que dão aqui (passo 2), ele retirou o desconto de 165 milésimas e, portanto, temos aqui o novo resultado. O quê que aconteceu, tu tens aí 1,48€ (passo 3). O quê que isso significa?

Manuel: Isto foi o resultado com o desconto.

Mais adiante, Berta, sabendo que os alunos tinham realizado os cálculos na calculadora, questionou o aluno de modo a alertar para a importância do rigor na linguagem matemática escrita:

Berta: Agora só faço uma questão (apontando para o símbolo de % na operação). Miguel, que conta fizeste aqui?

Manuel: Fui descontar!

Berta: Eu sei, mas qual é que foi o cálculo que fizeste? O que é que tu lá escreveste na calculadora?

Manuel: Dividir.

Berta: Dividir? Quando nós temos “de” ...

Manuel: Ah! É [uma conta] de vezes!

Assim, percebemos que a transformação errónea da representação na calculadora para a representação em algoritmo foi alvo de análise, tendo a futura professora focado os alunos na utilização da simbologia adequada.

Berta sequenciou as resoluções como tinha antecipado e apoiou a discussão, *guiando* os alunos na apresentação, inquirindo e focalizando a atenção para ideias importantes a aprender, repetindo algumas ideias. Durante a apresentação das diferentes resoluções incorretas e corretas estabeleceu conexões entre ideias, comparando resoluções e discutindo diferenças *guiou* para a resolução matematicamente eficiente. A futura professora focou-se mais nas questões relativas ao conceito de percentagens em detrimento das questões processuais e de cálculo algorítmico. Talvez por esta razão tenha deixado cair questões que poderiam ser interessantes para o desenvolvimento do sentido de número.

4.4.2.7. Síntese da discussão da tarefa 3

O final da discussão foi um momento de institucionalização das aprendizagens. Na sua síntese, Berta previu, tal como viu no vídeo, rever o conceito de percentagem. Para tal preparou uma representação retangular, em cartolina, da situação (Figura 201).

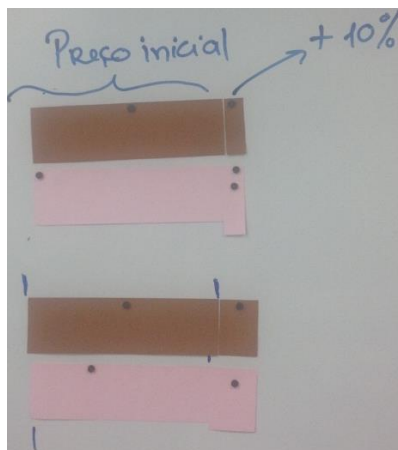


Figura 21. Representação da situação da tarefa 3

Berta começou a sua explicação por retomar ao enunciado remetendo para a primeira unidade de referência, ou seja, o preço inicial (cartolina castanha), exemplificando com um dos valores atribuídos por um dos alunos (1,50€). Em seguida, sinalizou que o preço aumentou em 10% do preço inicial, registrando “+ 10%”. Em seguida apresentou com uma nova cartolina castanha a nova unidade (valor pós aumento, segunda unidade de referência) e mostrou que a parte mais pequena cabe dez vezes no retângulo castanho grande. Onde os alunos concluíram que em relação ao preço inicial a segunda unidade era 10% maior:

Berta: . . . Este bocadinho aqui é os 10% (cor de rosa). Então o que é que aconteceu, eu fiquei com uma nova quê?

Aluno: Um novo preço.

Berta: Tenho agora uma nova unidade. Quando o Miguel foi retirar à nova unidade o que é que ele foi retirar? Os 10%, certo?

(...)

Berta: Então, se tinha uma unidade que agora aumentei em 10%, a unidade que eu tenho agora é a mesma?

Aluno: Não.

Berta: Vai ser maior. Porque eu aumentei em 10%. Então agora a minha unidade é esta cor-de-rosa. Correto?

Em seguida, Berta remeteu para o enunciado e questionou o que aconteceu posteriormente. Os alunos responderam que iriam calcular novamente 10% mas agora de uma nova unidade:

Berta: Portanto, vou retirar 10%.

Aluno: Então, vai dar o valor inicial.

Berta: Se calhar vai. Os 10% desta unidade (rosa) é esta aqui (acrescentada na castanha). É igual?

Aluno: É... Não!

...

Berta: Nós tínhamos visto que tínhamos um preço inicial, acrescentamos 10% que neste caso era 0,15€, ficamos com um novo preço, certo? Portanto esta é a minha unidade (rosa) e a esta unidade vou retirar 10%. Mas os 10% que retiro desta unidade (rosa) não são os mesmo daquela, pois não?

...

Aluna: Porque o preço inicial mais os 10% ficou maior e como os 10% que nós tiramos vai ser o preço sobreposto ao segundo...

Berta: Exatamente! O que é que isso quer dizer?... Que os 10%, agora, vão incidir sobre outra unidade que já não é a mesma. . . estes 10% são maiores que aqueles (comparando as duas cartolinas).

Durante a discussão alguns alunos conseguiram acompanhar e completar as frases que a professora foi dizendo, mas outros tiveram mais dificuldades em compreender a representação da situação. Neste tipo de discussão, Berta enfatizou o cálculo de 10% de unidades diferentes. Perante a dificuldade de alguns alunos em compreenderem a explicação, Berta verbalizou que talvez outras percentagens permitissem “ver melhor”, passando para a situação com 20% tornando mais evidente o impacto do aumento e diminuição no preço final.

Assim, para o momento da síntese final, Berta preparou uma cartolina de modo a modelar a situação do problema. Ao contrário do que tinha visto no vídeo, da ESE, a futura professora decidiu não usar a percentagem de 50%, mas sim 10% e 20%. Durante a discussão foi confirmando que esta representação, apesar de modelar “corretamente” do ponto de vista matemático a situação, não iluminava completamente a ideia inicial. Apesar de existirem alunos que foram acompanhando a explicação, outros tiveram alguma dificuldade em visualizar a diferença entre o valor inicial e o valor final (Figura 20). Durante a síntese, Berta foi remetendo para o enunciado, foi relacionando a sua representação com a resolução processual de um par de alunos e note-se, que foi retomando aspetos essenciais como a razoabilidade dos valores e a variação do valor em causa dependente da unidade de referência. Optou por concretizar a ideia central da professora do vídeo, mas podia ter diversificado o tipo de representações usadas. Deste modo podia ter representado a situação com unidades discretas e podia ter explorado o raciocínio multiplicativo.

Em síntese, conforme quadro 4, na prática de ensino supervisionada, Berta propôs a tarefa 2 e 3 que tinham características diferentes. A tarefa 2 tinha duas questões principais e várias alíneas cada. As alíneas tinham diferentes níveis de desafio e abertura e estavam todas interligadas através de um contexto não matemático a que os alunos

parecem ter dado significado. Na globalidade, considerou a tarefa como exploratória, constituída por itens que eram exercícios e problemas. Acrescentou que se tratava de uma tarefa apresentada a alunos que já conheciam os procedimentos a adotar, apesar das suas dificuldades em compreender os conceitos envolvidos e em estabelecer relações entre representações de números racionais. Nem sempre a futura professora manteve o nível de desafio quando discutiu a tarefa com os alunos, informando-os e guiando-os para as respostas antecipadas. Durante a concretização, acabou por baixar o nível de desafio e abertura (exercícios). Para terminar o trabalho com os números racionais propôs uma tarefa, com um contexto não matemático próximo dos alunos, com uma questão que se pode considerar como um problema tendo em conta as resoluções discutidas e o desafio que ofereceu.

Quadro 4. Quadro sobre a natureza das questões e respetivas alíneas da tarefa 2

Estabelecimento de relações entre representações		
Tarefa 2: Questão 1	Tarefa 2: Questão 2	Tarefa 3
Q1.1. Exercício	Q2.1. Exercício	
Q1.2. Problema → Exercício	Q2.2. Exercício	
Q1.3. Exercício	Q2.3. Problema → Exercício	Problema
Q1.4. Exercício		

As aulas de Berta eram estruturadas de modo idêntico. Na tarefa 2, estavam previstos três momentos distintos e sequenciais – proposta, exploração e discussão das questões da tarefa 2. No entanto, por limitações de tempo, durante a aula, decidiu separar o trabalho a realizar por questões. O que pretendia era propor, explorar e discutir a questão 1 da tarefa 2, numa fase, e repetir o trabalho com a questão 2. No final, o que acabou por ser concretizado foi diferente, tanto do planificado, como do decidido em aula, uma vez que os alunos apresentaram ritmos de trabalho distintos. Na tarefa 3, tal como o previsto, existiram 4 momentos distintos, existindo uma separação explícita entre a discussão e a síntese final. Na tabela 1 apresentam-se os três momentos de modo sequencial por uma questão de organização das ideias fundamentais a apresentar.

Tabela 1. Ações do professor nos momentos de trabalho com as tarefas

Momentos de trabalho	Estabelecimento de relações entre representações		
Proposta da tarefa	Organiza os alunos e disponibiliza material individual		
	Informa, sublinhando o contexto, dados importantes e questões-chave (Q1).	Informa, discute o contexto e guia partindo de diferentes respostas que foram surgindo (T3).	
	Guia, questionando os alunos e estrutura a resolução (Q1).		
	Sugere processos matemáticos (Q1 e T3) e reforça a importância dos registos escritos (T3). Saltou em Q2		
Exploração da tarefa	Monitoriza circulando e observando		
	Desafia os alunos focando-os na questão central (Q2; T3).		
	Apoia os alunos com dificuldades guiando (Q1).	Sugere o teste das conjecturas e guia redizendo afirmações (T3).	
	Em grande grupo, informa sobre dados e condições (Q2). Saltou em Q2.1.		
Discussão da tarefa e síntese final	Explica a resolução (Q1; Q2.1; Q2.3).	Apoia a apresentação do aluno estabelecendo relações entre representações (Q2.2).	Apoia a apresentação das diferentes estratégias guiando os alunos para a resolução matematicamente mais eficiente e estabelece conexões entre ideias, resoluções e salienta diferenças. (T3)
	E/ ou		
	Sugere representações e guia com questões de confirmação/redizendo ideias dos alunos (Q1).		
	Parte das resoluções dos alunos e explica relacionando representações constituindo-se uma representação final da situação da tarefa (Q2.2 e Q2.3)		Explica, a representação da situação e relaciona-a com as resoluções dos alunos. (T3)

Na promoção de aprendizagem, Berta recorreu a diferentes ações que tinham funções diferentes. No primeiro momento, propôs a questão 1 e 2 em conjunto, apresentando o contexto, *informando*, e iniciou a discussão *guiando* os alunos. Neste

processo acabou por *sugerir* a resolução e baixou o nível de desafio da tarefa. Em alternativa, resumiu as principais ideias das questões e ao fazê-lo acabou por informar os processos. Na tarefa 3, *iniciou* o trabalho levando os alunos a compreender a tarefa, *informando* sobre o que era pedido. Discutiu o contexto da tarefa *guiando* os alunos, inquirindo-os sobre a questão central e confrontando-os com as diferentes respostas que foram surgindo. Na questão 2 da tarefa 2 saltou este momento. No momento de exploração da tarefa pelos alunos e para monitorizar circulava e observava. Enquanto circulava *desafiava* os alunos a focar-se na questão central da pergunta da tarefa proposta. Na tarefa 2, quando interagiu com os alunos inquirindo e focalizando, apoiou no estabelecimento de relações entre representações e na identificação da unidade de referência, para tal: (i) *Guiava* os alunos e por vezes *sugeria* a resolução da tarefa, e (ii) Em grande grupo, clarificava condições dando informação complementar, para depois, focar na questão colocada. Note-se que as combinações que foi realizando das diferentes ações foram dependendo das dificuldades expressas pelos alunos. Na tarefa 3, *sugeriu* que testassem a sua conjectura, redisse a frase de um aluno e, tal como na tarefa 2, *guiou* os alunos, neste caso, a escolherem um preço usando valores concretos e “razoáveis”. De modo a agilizar a discussão da tarefa no momento seguinte. Promoveu o registo e organização das resoluções e seleccionou resoluções variadas, sequenciando-as para o momento da discussão. Na questão 2.1 saltou este momento. No momento de discussão das questões da Tarefa 2 usou dois processos diferentes: (a) Na questão 1 propôs a tarefa, em momento próprio e: (i) *Explicou* a resolução, combinando informações com questões de focalização, terminando com a ideia fundamental reforçando a resolução registada dos alunos no quadro; (ii) Ou *sugeriu* que representassem pictoricamente a situação para depois apoiar os alunos *guiando* com questões de confirmação e redizendo ideias dos alunos. (b) Na questão 2, iniciou o momento *informando* sobre as condições, lendo o enunciado, e sublinhou as relações entre conceitos. A apresentação da resolução foi realizada por uma aluna com o apoio da futura professora *guiando* a explicação. No final da questão 2 optou por retomar as questões já resolvidas e elaborou uma síntese partindo das resoluções dos alunos e explicando as relações existentes partindo da representação da tarefa e constituindo-se uma representação final da situação, onde relacionou as diferentes representações dos números racionais. Na discussão da tarefa 3, apoiou a discussão, *guiando* os alunos na apresentação das suas resoluções, incorretas e corretas, *inquirindo e focalizando* nas ideias importantes a aprender, clarificando aspeto da comunicação matemática dos

alunos. Estabeleceu conexões, comparando resoluções e discutindo diferenças *guiou* para a resolução matematicamente eficiente. Para a síntese final, preparou uma representação de modo a modelar a situação do problema. Durante a discussão foi constatando que esta representação, apesar de modelar a situação, não clarificava completamente a ideia inicial. Remetendo para o enunciado, estabeleceu conexões, relacionou a sua representação com a resolução simbólica dos alunos e foi retomando aspectos essenciais como a razoabilidade dos valores e a variação da unidade.

4.4.3. Reflexão sobre as aulas e sobre a prática de ensino supervisionada

O processo de reflexão sobre a prática de ensino supervisionada foi realizado na sua reflexão escrita e na última entrevista. Na reflexão escrita focou-se na aula observada pela sua supervisora, onde foram propostas as tarefas 2 e 3. Para sustentar a abordagem seguida, os seu propósito e preocupações recorreu ao programa de Matemática de 2007 e a autores do campo da Didática da Matemática que lhe foram propostos na ESE. Ao longo do texto a futura professora foi descrevendo os diferentes momentos da aula onde incluía o questionamento realizado e as ideias matemáticas emergentes. A sua reflexão escrita partia ou era sustentada em produtos dos alunos recorrendo apenas a imagens dos produtos dos alunos e a fotografias do quadro. A reflexão era descritiva e por vezes perspectivava alterações no futuro (Tarefa 3). Na reflexão realizada na entrevista final Berta debruçou-se: (i) no processo de ensino-aprendizagem; (ii) nas tarefas selecionadas, propostas e exploradas pelos alunos; (iii) na comunicação constituída focada no questionamento; (iv) nas suas ações de gestão da aprendizagem; (v) e nas suas ações de promoção de um ambiente de aprendizagem.

4.4.3.1. Reflexão sobre os propósitos das aulas: Um processo de melhoria

Berta, no final ou no momento de antevisão de cada aula, fez o balanço dos seus propósitos. A futura professora pretendia aprofundar o conhecimento dos seus alunos sobre os números racionais, com um foco no estabelecimento de relações entre representações. Simultaneamente, pretendia desenvolver as suas capacidades de resolução de problemas e a comunicação matemática. Terminou a aula sobre a tarefa 1, das pizzas e do muro das frações, com alguma insegurança e não fez um balanço positivo. A futura professora justificou que a aula se estendeu porque os alunos demoraram mais tempo do que o esperado para resolver a tarefa, revelando algumas dúvidas, e porque a discussão em grande grupo demorou muito tempo: “Não estava à

espera que houvesse tanta discussão e . . . demorávamos tanto tempo. O facto de eles terem algumas dúvidas, que achei importante valorizar durante a aula [fez com que a aula demorasse mais tempo]” (BEDA1). A Tarefa 2 esteve sempre prevista para a segunda aula da semana, mas, como a aula anterior levou mais tempo, Berta teve que tomar decisões em plena aula. Depois de sistematizar as ideias matemáticas em torno da Tarefa 1, optou por avançar para a tarefa do rei dando menos tempo para a resolução das diferentes questões e passando para a discussão de algumas questões da tarefa 2: “Se calhar não foi [uma boa opção] mas..., como estava um bocadinho atrapalhada a nível de tempo, tentei, pelo menos, iniciar a tarefa. . . Achei que eles não estavam concentrados...” (BEDA2). Berta fez um balanço positivo sobre a aula da tarefa 2, uma vez que conseguiu concretizar tudo o que tinha planificado. Ou seja, a futura professora sentiu que cumpriu os objetivos, uma vez que se estabeleceram relações entre representações e ainda conseguiu resolver algumas questões menos bem conseguidas nas aulas anteriores, tais como: “frações equivalentes, a leitura de números racionais e diferentes formas de representação” (BRE). O previsto para o trabalho com a tarefa 3 ficou também ficou repartido entre dois dias de aulas. Da terceira para a quarta aula, Berta teve oportunidade de analisar o trabalho já realizado pelos alunos e de preparar com algum detalhe a segunda parte do trabalho a concretizar. No final das aulas, Berta considerou que a aula foi proveitosa, cumprindo os objetivos a que se tinha proposto. Assim, considerou que “os alunos desenvolveram. . . sentido de número racional e das relações entre as diversas representações. . . compreenderam a noção de percentagem, para além que terem a necessidade de usar e calcular percentagens” (BRF). Considerou que teve um papel “de orientador, questionando os alunos, [para] fazer pensar” (BRE).

Assim, o propósito de Berta era estabelecer relações entre as várias representações dos números racionais. Ou seja, na importância do estabelecimento de conversões e tratamentos de números racionais de modo a desenvolverem o seu sentido de número e a compreenderam os conceitos envolvidos. No final do trabalho com a tarefa 2 sentiu que os objetivos foram cumpridos uma vez que os alunos evidenciaram a compreensão do que são frações equivalentes e leram e representaram os números racionais envolvidos com diferentes representações. Com a tarefa 3 conseguiu explorar o significado de percentagem e consolidar os procedimentos de cálculo com percentagens envolvendo apenas a representação decimal.

4.4.3.2. Reflexão sobre as tarefas exploradas: Promover de resoluções diversas

Berta selecionou diferentes tarefas que considerava pertinentes e enriquecedoras para as aprendizagens dos alunos. Fez um balanço positivo da aula com a Tarefa 2, mostrando-se atenta ao nível de desafio para os seus alunos, remeteu várias vezes para o contexto e para as condições apresentadas, tanto no momento de proposta da tarefa como ao longo da sua exploração. Sentiu que a questão que mais contribuiu para as aprendizagens dos alunos, no que se refere à relação entre as várias representações dos números racionais, foi a última questão “devido à diversidade de estratégias encontradas pelos alunos” (RE). Note-se que a diversidade de estratégias podia permitir uma maior discussão entre os alunos, dando resposta à necessidade de desenvolver a comunicação matemática no trabalho conjunto entre alunos. Relativamente à tarefa 3, na entrevista depois da aula 3, considerou que foi uma boa escolha porque fazia parte do “nosso dia-a-dia, nós também os utilizamos” e porque promovia a “compreensão por parte dos alunos” do “conceito de percentagem e que o relacionem com o de unidade” (BEDA3). Ou seja, confirmou a sua ideia de que era motivante e fazia emergir o conhecimento do quotidiano, tendo alguns alunos mostrado conhecimento empírico sobre a razoabilidade dos preços da gasolina. Nesta aula, a futura professora sentiu-se mais segura, apesar das resoluções dos seus alunos terem sido ligeiramente diferentes do esperado. Na aula não se lembrou do vídeo, mas a análise realizada em torno do caso multimédia deu-lhe confiança: “socorri-me ao vídeo e das planificações e tudo isso... Porque mentalmente já o conheço, e consigo-me recordar disso, mas não [no momento da ação]” (BEDA). A reflexão em torno do caso multimédia foi significativa e deu-lhe segurança relativamente às potencialidades da tarefa sendo que se confirmaram as expectativas. Por um lado, mostrou-se potenciadora de diferentes resoluções, ou seja, permitia que os alunos pudessem “pensar de maneiras muito diferentes”. Por outro lado, permitiu a discussão em torno das questões específicas do conceito de percentagem e a constituição do ambiente de aprendizagem que pretendia:

Acabou por se fazer um trabalho a pares, mas, realmente o que eu queria ter feito era um trabalho de grupo. Estava muito empolgada porque eu queria perceber se eles chegavam... Se eles arranjavam um valor para começarem a desenvolver a tarefa ou se era preciso ajudar. E realmente tive situações em que foi preciso [ajudar] mas também tive outras em que [os alunos avançaram sem problemas] (BEDA3)

Assim, relativamente às tarefas selecionadas e propostas considerou que foi mais segura para a terceira aula do que para as restantes e identificou diferentes níveis de

conhecimento sobre as tarefas que propôs. Berta considerou que as tarefas permitiram não só para as aprendizagens dos alunos, como também, para o surgimento de diferentes estratégias de resolução das questões colocadas. O facto de os alunos resolverem a tarefa com diferentes estratégias e representações permitiu a sua discussão, quer na fase de trabalho autónomo, quer em grande grupo.

4.4.3.3. Reflexão sobre as aprendizagens dos alunos: Uma aprendizagem contínua

Durante a primeira aula, na resolução da tarefa das pizzas, os alunos mostraram-se confusos relativamente à unidade de referência. Berta tentou explicar de diferentes modos, mas com pouco sucesso. Na tarefa 2 parecia estar mais alerta para o nível de desafio da tarefa que propôs, e por isso preparou com cuidado a apresentação da tarefa e sublinhou que a natureza das unidades nas duas partes da tarefa 2 eram diferentes. Na questão T2Q2 tinha “quantidades discretas, diferenciando assim da parte I que respeita a quantidades contínuas”.

Durante a exploração da segunda parte da tarefa existiram algumas dúvidas relativamente ao número de filhos do rei, Berta referiu que depois de vários alunos a interpelarem nesse sentido sentiu necessidade de clarificar a questão do enunciado da tarefa, Berta, na reflexão escrita explicou:

Quando as dúvidas eram comuns a alguns pares de trabalho, decidi explicar para toda a turma, pois outros alunos poderiam ter a mesma questão. Isto aconteceu, por exemplo, em relação à compreensão do enunciado, pois diz que o rei “deu à sua única filha 40% dos anéis. Os outros filhos (homens) receberam em igual quantidade”. Como na primeira parte era indicado que o rei tinha 4 filhos, os alunos não sabiam se deveriam considerar que o rei tinha 4 filhos do sexo masculino ou 4 filhos, sendo um do sexo feminino.

Ou seja, mais uma vez foi importante clarificar a unidade de referência. Esta questão foi-se repetindo em todas as aulas e Berta, relativamente às aprendizagens dos alunos, sentiu que estava atenta para questões que em aulas anteriores não estava. As principais questões que foram sublinhadas foi a leitura dos números, promovendo a compreensão da quantidade envolvida e o estabelecimento de relações entre as várias representações dos racionais. Note-se que em relação a esta tarefa parecia estar atenta à natureza das unidades envolvidas (discreta e contínua) e para as possíveis dificuldades dos alunos com unidades discretas. A futura professora justificou que tentou mobilizar aprendizagens conseguidas a partir de alguns episódios vividos nas aulas anteriores e referiu: “o que eu fiz foi cada vez que tinha alguma situação que me lembrasse uma

situação que se tivesse passado nas aulas anteriores, tentei ter sempre uma abordagem ao que nós tínhamos falado de forma a melhorar a prática!” (BEDA3).

Assim, estando mais alertada para o nível de desafio das tarefas que propôs, também pela natureza das unidades envolvidas (contínuas e discretas), Berta cuidou do modo como as propôs, alertando para as condições das questões e para a identificação da unidade de referência. Na tarefa 2, Berta considerou que os alunos puderam rever a leitura dos números, a compreensão da quantidade envolvida e o estabelecimento de relações entre as várias representações dos racionais. Na tarefa 3, Berta referiu algumas ideias fundamentais, sustentadas em literatura, sobre a aprendizagem dos números racionais e que considerava importante estar atenta quando preparava e concretizava as suas aulas, a saber: i) uma “grande mudança conceptual quando se passa do estudo com números inteiros para o estudo com números racionais”; ii) a importância em estabelecer “ligações entre os procedimentos e os conceitos” de modo a “além de saberem operar com símbolos, compreendem os conceitos”; iii) a importância em “valorizar a leitura dos números, as representações e as relações entre si”.

Fazendo um balanço final de todo o processo e comparando a sua capacidade de análise nas últimas aulas relativamente às outras aulas, referiu que nestas conseguiu ter maior espírito crítico relativamente ao conseguido e às aprendizagens dos seus alunos. Resultado da experiência de analisar o caso multimédia e apesar de ter tido “resoluções completamente diferentes... Elas são iguais, no sentido em que eles dão um valor mas os valores são diferentes, a comunicação matemática também é diferente” (BEDA3). Relativamente aos seus alunos e à experiência vivida referiu que: (i) houve alunos que não conseguiram iniciar a tarefa; (ii) a “maioria dos alunos disse-me que o preço do combustível voltava ao preço inicial”; (iii) alguns “alunos que afirmaram que com a percentagem é diferente” e portanto “perceberam que, quando se trabalha com percentagens, o valor sobre o qual a percentagem incide tem influência”; (iv) houve alunos que usaram “estratégias erradas, tentei orientá-los . . . Tentei partir dos seus erros [realizando] questões”; (v) para os alunos que apresentaram mais dificuldades “também compreendessem, utilizei um modelo em cartolina”. Ou seja, os alunos tiveram reações diversas mas expectáveis relativamente ao proposto e a futura professora reconheceu as aprendizagens previstas com a tarefa proposta.

Ao longo da sua prática supervisionada Berta foi constatando que os seus alunos tinham dificuldades em comunicar matematicamente, por escrito e oralmente, os seus raciocínio, resoluções e ideias matemáticas. De modo a promover a capacidade de

comunicação matemática dos alunos, Berta decidiu que insistir com os alunos na “necessidade de comunicarem com clareza, expondo e justificando as suas ideias. . . Poucos são os elementos que apresentam o registo escrito de forma compreensível” (BRE). Berta queria que essa comunicação fosse correta no que respeita à linguagem matemática e à apresentação dos seus raciocínios. Um dos aspetos referidos dizia respeito à dificuldade de os alunos apresentarem os cálculos, existindo um uso abusivo do sinal de igual. Um dos alunos na aula apresentou o cálculo “ $8 \times 3 = 24 : 8 = 3$ ” e a futura professora, na aula, explorou a situação e na entrevista pós-aula explicou porquê:

Primeiro, já não é a primeira vez que são apresentados assim os cálculos e, inclusivamente, já no primeiro ciclo tinha-me acontecido. . . O que eu tentei fazer foi... Não lhe disse que estava errado. Tentei perguntar se a primeira parte que ele tinha escrito, porque ele tinha o sinal de igual, se era igual à segunda parte”

Ou seja, Berta estava atenta a dificuldades recorrentes de alunos deste nível de ensino e que, através do questionamento, quis levar o aluno a compreender a importância da comunicação escrita, simbólica e a respeitar os significados dos símbolos. Assim, ao refletir sobre as aprendizagens dos alunos, Berta, sublinhou que foi fazendo um processo de aprendizagem contínuo. Uma questão fundamental no trabalho com números racionais foi a identificação da unidade de referência, por parte dos alunos, implicando uma transição conceptual entre o conjunto dos inteiros e os racionais. O estabelecimento entre diferentes representações simbólicas e entre estas e as pictóricas também foi referida. A futura professora ainda identificou nos alunos diferentes desempenhos na resolução da tarefa 3 e descreveu como apoiou os alunos que mostraram mais dificuldades na resolução. Um outro aspeto importante foi o desenvolvimento da comunicação matemática, por escrito e oralmente. Assim, questionou os alunos sobre o registo dos seus raciocínio, resoluções e ideias matemáticas com correção, como foi o caso do significado de igual.

4.4.3.4. Reflexão sobre a comunicação: Cuidados a ter com a comunicação

Berta nas entrevistas após as duas primeiras aulas foi refletindo sobre os diferentes aspetos relativos à comunicação em sala de aula (representações, questionamento de explicações).

Representações. O aspeto que desde logo foi importante para Berta foi recorrer e promover que os alunos recorressem a representações pictóricas das situações colocadas. De modo a levar os alunos a justificarem as suas resoluções, Berta foi solicitando aos alunos que explicassem os seus raciocínios recorrendo a representações

pictóricas. Assim, esperava que os alunos compreendessem o significado dos resultados obtidos. Berta valorizou o recurso a diferentes representações na resolução das tarefas:

Queria é que ele fizesse, pelo menos, um desenho, qualquer coisa, só para que ele compreendesse o que é que não fez. . . Ele explicou por escrito... explicou bem, compreendeu o porquê daquela forma não estar tão bem, mas não chegou a fazer bem (BEP1).

Para além de ter preparado representações para apoiar as suas explicações, Berta também teve que interagir com as representações propostas na tarefa ou construídas pelos seus alunos, onde perante representações incompletas completou-as de modo a estabelecer a relação entre as várias representações dos números racionais. Berta, na sua reflexão escrita, mostrou-se satisfeita com o seu trabalho na tarefa 2, quando completou a representação da tarefa com ideias que foram emergindo, estabelecendo uma relação entre quantidades. Para Berta a figura desenhada, no quadro, “evidencia as várias representações: percentagens, frações e fração com o significado de operador” (BRE).

Assim, Berta considerava o recurso a representações pictóricas importante para a compreensão das situações colocadas. Por isso, recorreu, quer na Tarefa 2, quer na síntese final que preparava (T2 e T3), a representações pictóricas. Também incentivou os seus alunos a recorrerem a representações pictóricas de modo a darem significado aos resultados. Também interagiu com as representações incompletas construídas pelos seus alunos estabelecendo a relação entre as representações dos números racionais.

Questionamento. De modo a acompanhar o trabalho dos seus alunos, Berta, sentiu que teve um papel orientador. Para tal, na sua reflexão escrita, referiu que foi “questionando os alunos, no sentido de os fazer pensar sobre a tarefa”. Nos casos em que os alunos não conseguiram iniciar a tarefa ou em que não pensaram numa estratégia correta, Berta referiu que teve que “fazer novas questões e dar algumas pistas”. Um dos momentos críticos alvo de reflexão escrita, foi quando “alguns alunos estavam a considerar 4500 pesos o total da herança”. Berta referiu que para apoiar e guiar os alunos “eu respondia fazendo, também, uma questão”. Na sua reflexão escrita Berta remeteu para as questões antecipadas na sua planificação escrita, mas não discutiu a pertinência de as reformular de modo a torná-las mais específicas para a tarefa em análise. Relativamente ao questionamento que foi realizando ao longo da aula da Tarefa 2 considerou que “faço questões e depois podem pensar sobre as questões e muitas vezes pensam, ‘Se a professora me está a dizer, isto é, porque posso mudar aqui alguma coisa!’”. Na terceira aula, apesar da previsão ter sido a mais descritiva, com questões

mais próximas dos conceitos a trabalhar, Berta continuava a considerar o processo de questionamento como um desafio:

Eu acho que o grande desafio vai ser, eu própria, colocar as questões porque, acho que eles primeiro vão dizer que o preço vai voltar ao inicial e, portanto, tentar que eles desconstruam esta ideia, tentar levá-los a dar um valor [aceitável] à gasolina . . . As questões, também vão ser importantes. Tenho algumas preparadas, mas vamos ver se consigo... (BEAA3)

Ou seja, a futura professora sentia que ainda existiam desafios a ultrapassar relativamente ao questionamento sem descer o nível de complexidade das tarefas:

Como posso questionar... E o que é que eu posso fazer para os levar a pensar de outra forma se eles não estão a pensar da melhor maneira . . . Houve pares que não me disseram que tinham de pensar num valor e, portanto, tive de dizer. Não era o que eu queria, mas, tentei de outra forma, não consegui. Noutros pares consegui! (BEDA3)

Assim, Berta considerou o questionamento importante para apoiar e guiar os alunos na resolução da tarefa, mas sendo importante não dar a resposta pretendida. Tal, nem sempre aconteceu e, por isso, sentia que fazer um questionamento que apoiasse os alunos sem descer o nível de desafio da tarefa era um processo complexo.

Explicações. Relativamente às explicações dadas, considerou que os alunos as compreenderam e que era importante fazê-las no final da discussão de modo a sistematizar e a clarificar as ideias matemáticas que emergiam, ou seja: “Tento voltar a dizer de uma outra forma para ver se eles conseguem compreender” (EPA2B). Na tarefa das pizzas Berta recorreu a uma representação pictórica para apoiar a síntese final que acabou por se revelar um pouco confusa (Figura 22). No entanto, para apoiar as explicações dadas, ao longo das suas aulas manteve a mesma estratégia. Na tarefa do rei a representação trazida por Berta teve um papel positivo no desenvolvimento do trabalho. Na sua reflexão escrita referiu que era importante para clarificar as condições dadas e que recorreu a este tipo de representação para explicar a resolução da tarefa: “No final, fiz uma síntese desta última situação, pois considerei que nem todos os alunos tinham entendido a estratégia de resolução do colega. Deste modo, utilizei uma representação pictórica para fazer uma nova abordagem”.

40 % (filha)		60 % (três filhos)		
40 % - porque é o dobro		20 %	20 %	20 %
5 anéis	5 anéis	5 anéis	5 anéis	5 anéis

Figura 22. Reprodução de Berta da representação pictórica utilizada na aula da tarefa do rei

Na tarefa 3 recorreu à representação usada pela professora do vídeo depois de algumas alterações para poupar algum tempo. Na sua reflexão escrita fez o balanço: “Foi uma boa estratégia para explicar o que acontece quando há a implicação de uma percentagem, mas nem todos os alunos compreenderam desta forma, daí a minha preocupação em comparar a representação pictórica com a representação formal”. Assim, Berta, para os alunos compreenderem o fundamental, no final da discussão, sistematizou e clarificou as ideias matemáticas que emergiam. Para que as explicações fossem claras recorreu a esquemas concebidos por si. Estes permitiram clarificar as condições dadas e estabelecer a relação entre diferentes resoluções.

Em síntese, nas entrevistas após as duas primeiras aulas, Berta foi refletindo sobre os diferentes aspetos relativos à comunicação em sala de aula que foram emergindo da sua prática. As representações pictóricas dos números racionais foi o aspeto mais importante, mas também acabou por se debruçar sobre o seu questionamento e explicações. Relativamente às representações, Berta, considerava que as representações pictóricas tinham um papel importante na clarificação das ideias matemáticas a comunicar. Recorreu a representações pictóricas na instrução das tarefas, na discussão das resoluções explorando as representações dos alunos completando-as quando necessário e na síntese final onde relacionou as representações pictóricas com as representações simbólicas. No que diz respeito ao questionamento, considerando que é um processo complexo, refletiu sobre o modo de apoiar e guiar os alunos nas suas resoluções de modo a não descer o nível de desafio das tarefas. No que respeita às explicações sublinhou a importância de acompanhar as suas explicações com esquemas o que permitia clarificar as condições dadas e explicar a resolução da tarefa.

4.4.3.5. Reflexão sobre as ações de gestão do ambiente de aprendizagem: Promover interações e comunicar matematicamente

De modo a estabelecer um ritmo de trabalho e organizando, desde logo, os diferentes tempos das aulas, Berta, quando propunha as tarefas, informava sobre o tempo que tinham para concluir a tarefa e organizava os alunos em pares. Em seguida, explorava o contexto das tarefas e questionava o grande grupo sobre o enunciado, de forma a clarificá-lo. Berta, na sua reflexão escrita explicou que importava dar “algum tempo para que pudessem discutir ideias e estratégias de resolução” e ver “esclarecidas dúvidas, no que se refere aos termos e conceitos abordados no enunciado” (BRE).

Na fase de trabalho autónomo dos alunos, Berta estava bastante focada no desenvolvimento da comunicação matemática e na promoção de discussões matemáticas entre os alunos. Ao longo das aulas promoveu o trabalho conjunto, de modo a que os alunos discutissem as suas ideias. Como a turma não tinha hábitos de trabalho de grupo, ficou decidido que começariam por colocar os alunos a trabalhar a pares. A sua reflexão andou em torno do trabalho entre alunos e a sua evolução. Na primeira aula com a Tarefa 1, no trabalho a pares, nem sempre os alunos trocavam ideias. Para a futura professora era importante o trabalho conjunto entre alunos, pois deste modo podiam ter acesso a um “colega, que está ao lado, que até pode ter pensado de outra forma. Então, ele pode ajudar!” . . . Com a explicação de um colega pode compreender melhor do que [connosco]”. Assim, era muito importante que os alunos discutissem as tarefas. Para tal “Tentámos colocar um aluno que tivesse mais facilidade e outro com mais dificuldade e o que se está a ver é que o aluno que tem mais facilidade avança na tarefa e vai deixando o outro para trás” (BEPA1).

Deste modo, Berta na primeira aula não estava muito satisfeita com o modo como o trabalho conjunto decorreu e realizou algumas alterações na constituição dos pares. Para além disso, tomou decisões sobre as suas ações. Concretizou ações focadas na melhoria do trabalho entre alunos e verificou algumas alterações:

Um elemento do par que até estava a conseguir e a perceber e que até poderia ajudar o outro e que não é necessariamente, o que nós tínhamos pensado do suposto melhor, ajudar o mais fraquinho. Às vezes acontece o contrário, principalmente quando eles desenham. Porque os melhores alunos, geralmente, vão mais ao cálculo... (BEPA2)

Por isso, a futura professora mostrou-se satisfeita com a evolução do trabalho conjunto entre alunos podendo, logo na segunda aula, verificar que no trabalho conjunto

e com a tarefa 2, existiu uma alteração de dinâmicas entre os alunos e que nem sempre eram os alunos com melhores notas que apoiavam os restantes alunos. Por vezes, Berta lançava uma questão e pedia para pensarem em conjunto ou solicitava a um aluno do par que comunicasse as suas ideias, procurando que os alunos se entreasudassem. Quando os alunos solicitavam ajuda, não dava explicações e optava por devolver questões. Para além de promover a discussão, quando abordava um par, desafiava os alunos a explicitar o que já tinham feito e discutido:

Quis que eles me explicassem como é que um tinha feito. Porque eles não tinham feito os dois da mesma forma e deviam. Ou pelo menos, deviam de ter discutido e ter apresentado as duas estratégias. . . Tento que um me explique, o que o outro poderá ter pensado, porque é que poderá ter feito daquela forma e não de outra . . . Gosto que quem fez, também consiga explicar (BEDA2).

Berta, no dia seguinte ficou satisfeita com o modo como promoveu as interações entre os alunos:

[Comparativamente com o dia anterior] hoje já vi que eles trabalharam em conjunto . . . Foi a segunda vez . . . [hoje] já correu melhor e isso e provavelmente, na minha opinião, vai melhorar porque eles já perceberam o que é que é pretendido! (BEP2)

Ou seja, relativamente às estratégias que usou no sentido de promover a discussão das resoluções entre alunos, está satisfeita com a sua evolução e referiu que o seu questionamento em resposta às dúvidas dos alunos (apoando-os e convidando-os para a troca de ideias) resultou. Considerou que os alunos começaram a discutir as questões entre si. No final das quatro aulas, Berta sentiu-se “feliz” porque notou uma evolução positiva na discussão, entre os pares, de ideias e estratégias. Assim, os alunos tornaram-se mais autónomos e compreenderam as mais valias da discussão entre pares e, por isso, “não pedem tantas vezes auxílio, pois num primeiro momento recorrem ao colega de grupo” (BRE). Além disso, percebeu que “alguns pares de trabalho tentaram juntar-se num grupo constituído por dois pares” (BRE). Para a discussão seguinte, enquanto monitorizava o trabalho dos alunos, também selecionou diferentes resoluções que seriam registadas e apresentadas. Decidiu que chamaria os alunos que “tinham feito um registo com maior qualidade, com maior organização e que me tinham feito uma boa explicação de como pensaram. Assim, privilegiei uma estratégia que considere que pudesse ajudar na compreensão dos colegas e na sistematização de conceitos” (BRE).

Berta, queria promover a discussão das diferentes resoluções e para tal foi chamando os alunos segundo o seu critério. Sentiu que a discussão

da tarefa do rei correu muito bem e apontou alguns aspetos como as decisões sobre quem iria apresentar as resoluções e a gestão do tempo como aspetos positivos na sua prática. Berta contou que: “O facto de já saber quem quero levar ao quadro e quem é que não. . . acaba por estar a ser um processo mais fácil porque já estou à espera daquilo mesmo que eu quero que eles façam...” BEDA3. Relativamente à gestão do tempo, tomou diversas decisões: (i) considerou que “algumas alíneas da tarefa que não eram tão relevantes. . . Decidi fazer o registo no quadro. . . Outras que achei que seria importante serem os alunos a registar” (BEPA3); (ii) definiu tempos para cada fase do trabalho mas dando “algum tempo para que pudessem discutir ideias e estratégias de resolução”(BEPA3); (iii) fez “alguns registos escritos no quadro, apesar de serem os alunos a ditarem e construírem uma conclusão”(BRE), desde que tivessem algo de novo a acrescentar, “poupando” tempo mas mantendo o seu objetivo que era que “me expliquem como é que pensaram, até para que os outros, mesmo que não estejam a perceber a resolução, cheguem lá mais facilmente” (BEPA3). Na sua reflexão escrita apontou aspetos a melhorar na gestão do tempo e como o poderia ter feito para melhorar esse aspeto considerando que deveria usar um “registo num acetato. . . [ou] a digitalização do registo do aluno”.

No que respeita às suas ações na promoção da comunicação matemática em registo escrito referiu que, durante o momento de exploração da tarefa teve “de orientar os alunos [para melhorar a comunicação escrita]” e identificou ações específicas na sua prática: “Por isso é que eu fui pedindo que . . . Deixassem a primeira resposta... E que não apagassem, mesmo para ver a evolução” (BEDA4). Com um par optou por apoiar os alunos na ordenação passos de modo a ordenar a sua futura apresentação:

Queria que eles registassem... De outra forma... [A resolução] do Miguel, não estava [organizada], tanto que quando fiz a correção registei os passos, por ordem e coloquei a indicação dos números e depois pedi que ele no quadro o fizesse [pela ordem] que ele realmente tinha pensado . . . Principalmente para que os colegas o percebessem. (BEDA4)

Ou seja, no final, Berta tinha como preocupação a melhoria da qualidade das interações entre os alunos, promovendo a discussão das suas ideias e apoiando os alunos a ultrapassar as dificuldades de organização escrita e oral das resoluções.

Assim, Berta desenvolveu diferentes ações de gestão do ambiente de trabalho nos diferentes momentos da aula. No momento em que propôs as tarefas questionou os alunos sobre o contexto, de forma a clarificá-lo no que se refere aos termos e conceitos.

No momento de exploração da tarefa, Berta monitorizou o trabalho dos alunos para, por um lado, apoiar e guiar as suas resoluções, promover as interações dos alunos e por fim a seleccionar as resoluções a discutir no momento seguinte. Também concretizou ações de desenvolvimento da comunicação matemática. Através do questionamento pretendia que os alunos discutissem e comunicassem entre si as suas ideias procurando que os alunos se entreasudassem. Em situações de dificuldade optou por não dar explicações devolvendo questões. Para além de promover a discussão, quando abordava um par, desafiava os alunos a explicitar o que já tinham feito e discutido. A dinâmica de trabalho entre alunos evoluiu entre a primeira aula e a última aula. Na primeira aula, no trabalho a pares, nem sempre os alunos trocavam ideias, mas nas tarefas seguintes o trabalho conjunto foi-se intensificando. A futura professora sublinhou que nem sempre foram os alunos com melhores notas que apoiaram os restantes. Este facto parece ter deixado Berta satisfeita com o trabalho realizado. Também neste momento seleccionou as resoluções que pretendia ver discutidas em grande grupo. Optou pelas resoluções corretas, organizadas e onde existia uma explicitação da estratégia usada. Para preparar o momento da discussão em grande grupo, apoiou a organização das resoluções a apresentar pelos alunos e cuidou de diferentes aspetos que considerou importantes para uma discussão clarificadora e num curto espaço de tempo.

Síntese do caso de Berta

A prática de Berta realizou-se no 2.º semestre e, durante uma semana e meia lecionou os aspetos que considerou fundamentais para a preparação do exame de 6.º ano do ensino básico. Lecionou quatro aulas onde explorou três tarefas diferentes com objetivos diferentes: explorar a representação fracionária, explorar a relação entre as diferentes representações dos números racionais e abordar o conceito de percentagem.

Visão sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais

Como aluna no ensino básico e secundário, Berta sentiu algumas dificuldades na aprendizagem da Matemática e fez depender estas dificuldades das práticas dos seus professores. Só gostou da disciplina quando começou a compreender os processos envolvidos. Tanto na licenciatura como no mestrado considerou-se e foi considerada muito boa aluna. A ESE A teve um papel importante na construção da sua visão da Matemática, do seu ensino e aprendizagem, sustentando as suas ideias com as

experiências vividas quer como aluna, quer como formanda da ESE. Por isso, tinha um discurso próximo da mensagem transmitida na formação inicial e identificou a Matemática como ciência, como ferramenta para o quotidiano e como forma de pensamento. Referiu unidades curriculares onde lhe foram apresentados episódios da história da Matemática e identificou atividades desenvolvidas. As tarefas que lhe foram mais significativas foram as que trouxe para a prática de ensino supervisionada. Nunca se referiu às experiências de estágio vividas na licenciatura e referiu brevemente as experiências de lecionação do mestrado, onde sentiu que viveu processos impositivos sobre o que ensinar e como ensinar e onde o feedback final era focado nos aspetos menos conseguidos. Para Berta, o papel do professor passa por reconhecer as dificuldades dos seus alunos e apoiá-los e desafiá-los na aprendizagem através das tarefas que propõe. Por isso, deve saber sobre a Matemática que ensina e sobre o que os alunos aprendem, deve conhecer erros e dificuldades que possam surgir e como apoiar os alunos a aprender. Neste sentido, a gestão das aprendizagens era o aspeto que mais a preocupava e onde se sentia mais insegura. Para a futura professora, a compreensão dos conceitos e a resolução de problemas são aspetos centrais e, por isso, no processo de ensino-aprendizagem por compreensão os alunos fazem “como um matemático”, constroem e mobilizam conhecimento e devem ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático. Para que tal aconteça de modo produtivo os alunos devem colocar em comum as ideias discutindo diferentes estratégias na resolução dos problemas propostos. Para sustentar as suas opções de prática e definir objetivos de aprendizagem recorreu aos documentos curriculares.

Preparação e concretização do processo de ensino-aprendizagem dos números racionais

Na planificação das aulas, Berta preparou o trabalho relativo aos números racionais, numa única fase, exceto na última aula onde se realizou a discussão da tarefa 3 e que preparou depois de ter acesso às resoluções dos alunos. Preparou as suas aulas com apoio do professor cooperante e da supervisora de estágio e pôde discutir e analisar as suas opções com os dois supervisores. Decidiram propor aos alunos três tarefas a explorar em três aulas, mas foi necessária uma aula extra de 45 minutos. A sequenciação das tarefas também foi realizada com o apoio dos supervisores onde desenhou um percurso que começava pela exploração do conceito de fração, passava

pelo estabelecimento de representações e terminava com o conceito de percentagem. Em função dos seus propósitos para a intervenção, a compreensão de conceitos e o desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas e da comunicação matemática, Berta selecionou tarefas que considerou de qualidade do ponto de vista do desafio cognitivo e do nível de abertura. Procurou tarefas trabalhadas na ESE em diferentes unidades curriculares com objetivos diferentes e não fez alterações nas propostas. Planificou o trabalho em torno de três tarefas com contextos significativos e próximos dos alunos. As duas primeiras tarefas, de natureza exploratória, tinham várias questões e a terceira tarefa era um problema com uma única questão. Na fase de concretização da tarefa 2 as alíneas que tinham um maior nível de desafio para os alunos, dadas as ações de apoiar e sugerir de Berta, acabaram por assumir um baixo nível de desafio. Para planificar as aulas, recorreu à estrutura prevista pela ESE e descreveu a ação do professor nos diferentes momentos de cada aula, previu questões a fazer aos alunos nos diferentes momentos e identificou algumas possíveis dificuldades dos alunos. Também resolveu as tarefas propostas antevendo diferentes resoluções corretas. Previu selecionar diferentes resoluções e explorá-las usando como critério começar pelas resoluções mais “simples”, que podemos entender menos formais, e deixando para último as resoluções que no seu entender permitiam compreender os conceitos envolvidos. No entanto, não ficou evidente como iria relacionar as diferentes resoluções e concluir o processo de discussão. Na tarefa 3, quando teve acesso às resoluções dos alunos preparou com mais detalhe o *feedback* a dar às resoluções e sequenciou as apresentações. Para Berta, as representações pictóricas eram importantes para a compreensão dos conceitos e, por isso, promoveu o recurso a diferentes representações sublinhando as representações pictóricas. Numa tarefa foram sugeridas representações pictóricas e Berta completou-as e estabeleceu relações com representações simbólicas. Para o final das discussões das tarefas construiu esquemas sobre as situações colocadas estabelecendo relações entre as ideias apresentadas sistematizando as principais ideias. Para tal, desenvolvia explicações onde, combinava informações sobre os principais termos e conceitos com questões e terminava apresentando a ideia fundamental. Na tarefa 2, a representação construída partiu da representação facultada na própria tarefa e não foi prevista antecipadamente. Também estabeleceu uma representação preparada previamente. Na tarefa 3, partiu do exemplo visionando no vídeo de uma aula com a mesma tarefa onde se modelava a situação colocada e preparou a representação previamente. Para Berta, o questionamento era um

processo complexo, uma vez que queria apoiar os alunos nas suas dificuldades sem descer o nível de desafio das tarefas. As questões previstas nem sempre eram específicas para os conceitos a explorar, mas a supervisora apoiou a futura professora na melhoria da sua previsão do questionamento. No momento de concretização, na proposta e na exploração da tarefa, Berta recorreu a questões de *inquirição e focalização*. Por vezes, *redizia* as suas afirmações de modo a guiar os alunos na resolução das tarefas. Na apresentação e discussão das tarefas, começava por desafiar e, para apoiar os alunos, tentando promover a discussão, recorreu a questões do tipo *confirmação e redizer* de modo a guiar. Durante as suas explicações, recorreu a questões de *focalização*. Previu organizar aulas em três momentos: proposta, exploração e discussão das tarefas. Estes momentos não foram sequenciais no caso da tarefa 2, intercalando-se na transição da tarefa de um dia para o outro. Tal como o previsto, no momento de proposta da tarefa, a futura professora começava por apresentar o contexto, *informando* e *guiando* os alunos e confrontando-os com as diferentes respostas que foram surgindo. Quando os alunos tinham dificuldades acabou por *sugerir* a resolução e baixou o nível de desafio da tarefa. Quando estava pressionada com o tempo, resumiu as principais ideias da tarefa e, ao fazê-lo, acabou por informar os processos. Na questão 2 da tarefa 2 saltou este momento. No momento de exploração da tarefa pelos alunos, autonomamente, e de monitorização, circulava e observava, apoiando os alunos de três modos diferentes: (i) *Desafiava* a focarem-se na questão central da tarefa; (ii) *Guiava* os alunos e *sugeria* a resolução da tarefa ou processo matemáticos; e (iii) quando os alunos exprimiam mais dificuldades, em grande grupo, clarificava condições dando informação complementar para depois, com os alunos já em pares, focar a questão colocada. Note-se que as combinações que foi realizando das diferentes ações foram dependendo das dificuldades expressas pelos alunos. De modo a agilizar a discussão da tarefa 2, no momento seguinte, promoveu o registo e organização das resoluções e selecionou resoluções variadas, *sequenciando-as* para o momento da discussão. Na questão 2.1 saltou este momento. No momento de discussão das tarefas usou três processos diferentes que determinaram que não existisse uma discussão mas sim uma sequência de apresentações mais ou menos interligadas: (i) *Explicou* a resolução, combinando informações com questões de focalização, terminando com a ideia fundamental reforçando a resolução registada pelos alunos; (ii) *Sugeriu* que representassem pictoricamente a situação para depois apoiar o contributo dos alunos *guiando* com questões de confirmação e redizendo ideias dos alunos; e (iii) *Informou* sobre as

condições, lendo o enunciado, e sublinhou as relações entre conceitos. A apresentação foi realizada por alunos com o apoio da futura professora *guiando* a apresentação das suas resoluções. Na tarefa 3 também foram apresentadas resoluções incorretas e estabeleceu conexões entre ideias, comparando resoluções e discutindo diferenças apesar de não se constituir um discurso dialógico. No final da discussão, no caso da tarefa 2 questão 2, num contínuo ou, como na tarefa 3, estabelecendo um novo momento, retomava as questões já resolvidas. Elaborou sínteses de dois modos diferentes: (i) partiu das resoluções dos alunos e estabeleceu relações partindo da representação da tarefa e constituindo-se uma representação da situação; e (ii) preparou e explicou a situação do problema com uma representação preparada previamente. Nestas explicações estabeleceu conexões entre resoluções e relacionou representações pictóricas e simbólicas. Tal como o previsto, de modo a promover um ambiente de aprendizagem produtivo e onde os alunos interagiam e discutiam as suas ideias matemáticas, Berta organizou tempos e momentos distintos, onde promoveu as aprendizagens apoiando os alunos e valorizava as ideias dos alunos e estimulava a colaboração entre os pares.

Reflexão como resultado das experiências vividas

Berta refletiu por escrito em textos realizados para os supervisores e nas entrevistas realizadas. Na reflexão escrita para sustentar as suas ideias recorreu ao programa de Matemática de 2007 e a autores do campo da Didática da Matemática. A sua reflexão escrita partia ou era sustentada em produtos dos alunos recorrendo a imagens. A reflexão era descritiva e por vezes perspectivava alterações para o futuro. Relativamente aos principais propósitos, o seu foco estava no estabelecimento de relações entre as várias representações dos números racionais e explorar o significado de percentagem, evidenciou satisfação com o conseguido. Para tal, propôs diferentes tarefas que considerou que, para além de contribuíram para as aprendizagens dos alunos, também promoveram o surgimento de diferentes estratégias de resolução das questões colocadas. O facto de os alunos resolverem a tarefa com diferentes estratégias e representações permitiu a sua discussão, quer na fase de trabalho autónomo, quer em grande grupo. Sobre as aprendizagens dos alunos nos números racionais, considerou que os alunos puderam rever a leitura dos números, a compreensão da quantidade envolvida e o estabelecimento de relações entre as várias representações dos racionais. Ainda acrescentou que os alunos melhoraram a sua comunicação matemática e as suas

interações tornaram-se mais intensas e produtivas. Um outro aspeto importante foi a questão de tornar claro para os seus alunos a importância de comunicar corretamente quando recorreram a representações simbólicas. No que respeita à comunicação, ficou satisfeita com a exploração de diferentes representações, quer na própria tarefa, quer na síntese final que preparava. Nem sempre estas representações clarificaram as ideias que pretendia e, por isso, foi estando mais atenta na fase de preparação. No entanto, percebeu que nem todas as representações clarificam as resoluções e ideias a sistematizar, tal como aconteceu na tarefa 3. A futura professora salientou grandes preocupações sobre a natureza do questionamento que, na sua perspetiva, deveria apoiar e guiar os alunos na construção do conhecimento desafiando-os a pensar sobre as suas resoluções. Previu as questões a colocar aos alunos, mas ainda assim continuava a considerar o processo de questionamento como um desafio em não descer o nível de desafio das tarefas. Considerava importante que no final da discussão existissem explicações de modo clarificar as condições dadas e o processo de resolução da tarefa. Fazendo o balanço sobre o conseguido ficou satisfeita e estava atenta para a importância de preparar este momento. Berta desenvolveu diferentes ações de gestão do ambiente de trabalho nos diferentes momentos da aula. O seu foco era a promoção das interações entre os alunos e no registo organizado das resoluções de modo a tornar a discussão das tarefas mais clara. Tinha como preocupação a melhoria da qualidade das interações entre os alunos e em situações de dificuldade optou por não dar explicações e devolvia questões. Para além de promover a discussão, quando abordava um par, desafiava os alunos a explicitar o que já tinham feito e discutido. Berta ficou satisfeita com o conseguido uma vez que a dinâmica de trabalho entre alunos evoluiu ao longo das aulas começando por nem sempre trocarem ideias e evoluindo para momentos de discussão de ideias. A futura professora sublinhou que nem sempre foram os alunos com melhores notas que apoiaram os restantes. Cuidou de diferentes aspetos que considerou importantes para uma discussão que pretendia clarificadora e num curto espaço de tempo. Assim, solicitou o registo no quadro das apresentações que considerou interessantes para discussão em grande grupo e completou com ideias dos restantes alunos. Quando fez os registos no quadro, pediu o contributo dos alunos, quando tinham algo a acrescentar. Considerou que se sentiu mais segura na tarefa 3 identificando diferentes níveis de conhecimento sobre as tarefas que propôs.

Em síntese, a visão de Berta sobre o ensino e aprendizagem da Matemática foi influenciada por experiências significativas e enriquecedoras que teve ESE. As

experiências anteriores de estágio nem sempre foram como as que viveu no contexto colaborativo do estágio de Matemática do 2.º ciclo. Neste contexto pôde concretizar a sua perspetiva sobre o ensino-aprendizagem da Matemática, onde importava a co-construção do conhecimento para a compreensão das ideias matemáticas a aprender. A futura professora, de modo a explorar os conceitos e a desenvolver a resolução de problemas e a comunicação matemática, selecionou tarefas anteriormente exploradas na ESE. Para se preparar, antecipou a resolução dos alunos e preparou a representação das situações de modo a, no final da discussão, clarificar as ideias matemáticas emergentes. Quanto mais experiência tinha com as diferentes tarefas, mais previa a sua comunicação e as ações a desenvolver para desafiar e apoiar os alunos na sua resolução. A futura professora considerou que as tarefas selecionadas eram de natureza exploratória e promoviam o surgimento de diferentes resoluções a serem discutidas entre os alunos. A concretização das aulas estruturava-se em três momentos: proposta e exploração da tarefa e discussão e síntese das resoluções. Ao refletir sobre o processo de ensino-aprendizagem, considerou que desenvolveu um percurso de constante aprendizagem. Sentiu que melhorou a sua comunicação e ações, assumindo-se como mais capaz de promover a interação entre os alunos, apoiar nas suas dificuldades e de promover uma comunicação matemática adequada.

Capítulo 5

Glória

5.1. Apresentação e caracterização

No momento da realização do estudo, Glória tinha 47 anos e 30 de experiência a ensinar. Quando terminou a licenciatura em Geografia, lecionou no ensino secundário durante seis anos, sem concluir a profissionalização. Depois de exercer diferentes profissões, em diferentes países, regressou a Portugal e voltou a dar explicações. Para voltar a lecionar constatou que era necessário fazer uma nova licenciatura para obter a profissionalização. Candidatou-se à licenciatura em Educação Básica na ESE B, a Escola Superior de Educação, em regime de *b-learning*. Na entrevista inicial, Glória afirmou não ter especial interesse em nenhuma das disciplinas em que viria a ser profissionalizada, mas que tinha larga experiência como explicadora de Matemática, pelo que se sentia muito segura no seu ensino. Posteriormente, escolheu o mestrado em 1.º e 2.º ciclos do ensino básico porque queria lecionar no 2.º ciclo mas “não vejo problemas em lecionar no 1.º ciclo” (GEI). Excluiu à partida o pré-escolar porque “gosto muito de crianças mas não propriamente no sentido institucional” (GEI).

Na primeira entrevista recordou vivências, enquanto aluna do ensino básico e secundário, e foi refletindo sobre os processos vividos. Relativamente ao 1.º ciclo, relembrou o trabalho que se fazia e que considerava normal e necessário, ou seja:

É aquilo que se faz! Era um trabalho expositivo. . . Tínhamos um livro normal de Matemática e portanto era os problemas e os exercícios que lá viessem para fazer. Todos! Eram corrigidos no quadro, ela por acaso até apelava bastante aos alunos

porque eram os alunos que sempre corrigiam . . . E de resto mandava muito TPC... E repetições até à exaustão!. . . Enquanto o assunto não ficasse esgotado!. . . Não se ligava nada nem a artes nem a outras áreas, assim, mais marginais do currículo . . . Acho um modismo... Uns anos posteriores... fazia-se muitas coisinhas no 1.º ciclo. No meu tempo não era usual! (GEI)

Segundo Glória, as experiências vividas nos restantes ciclos não foram muito diferentes, dizendo “Não havia atividades de exploração, de investigação, aquilo basicamente era exercícios.” No seu discurso, parece não discordar destas abordagens e considerava-as necessárias. Como aluna, Glória recordava-se de não gostar da Matemática porque a considerava pouco aplicada às necessidades do quotidiano mas “gostava muito de cálculo mental e se eles [os meus alunos] puderem fazer...” (GEI). Apesar de não apreciar, Glória, aprendeu “a Matemática que era fundamental” (GEI), e considerou que foi sempre bem-sucedida.

5.2. Visão sobre o ensino-aprendizagem da Matemática

5.2.1. Experiências na ESE: O percurso necessário para obter a certificação

Durante a licenciatura, que frequentou em regime de *b-learning*, nas várias entrevistas, Glória referiu não ter tido dificuldades nas diferentes unidades curriculares tendo obtido classificações bastante satisfatórias. No mestrado frequentou o regime presencial que era o único oferecido pela ESE. Embora a futura professora fosse considerada, pelos docentes e pela parceira de estágio, uma boa aluna nas várias unidades curriculares da Matemática, tal não aconteceu na Didática da Matemática, segundo a supervisora da ESE. Glória referiu diferentes unidades curriculares da licenciatura onde se debruçaram sobre tópicos matemáticos, que teria de lecionar no ensino básico, incluindo os números racionais. Na sua perspetiva, as unidades curriculares de Matemática proporcionaram experiências interessantes facultando

Alguns vídeos . . . Dão algumas sugestões de bibliografia . . . Depois dão um conjunto de tarefas . . . Todo o tipo de tarefas, tarefas de exploração, realmente de investigação, pequenas coisas como é evidente. [O docente] tentou que os alunos criassem problemas . . . [E para identificar] as estratégias de resolução adequadas ao 1.º ciclo. (GEI)

Nas Didáticas da Matemática da licenciatura e mestrado, considerando o observado e o que foi descrito pela docente da ESE, para além de discutirem textos, de modo a enquadrar teoricamente o trabalho, as formandas resolviam e analisavam

tarefas, tanto do ponto de vista do conteúdo, como do ponto de vista didático. No 2.º ano, também construíam tarefas de modo a explorar conceitos estruturantes do ensino no 2.º ciclo. Sobre as suas experiências nas unidades curriculares de Didática da Matemática, Glória, indicou que na licenciatura, sem referir autores específicos, analisou “textos que estão por detrás disto [ensinar e aprender], o que é que já se fez, o que é que se investigou” (GEI) e no mestrado

Foi mais direcionada para o processo de sala de aula . . . E estivemos a trabalhar basicamente brochuras. . . Alguns estudos que foram feitos . . . Cheguei a uma altura que pensei assim: “OK! Então isto foi o que se fez, mas nós queremos saber o que é que se faz agora [em estágio], o que nós vamos fazer? Se calhar é mais proveitoso para nós também dizer o que nós vamos fazer. E discutimos se isto estava bem ou se não estava bem, se havia outra maneira, se era viável ou não. (GEI)

Entretanto, referiu que os estudos apresentados eram “Estudos de caso” (GEI) e que eram “experiências feitas em escolas, o que é sempre interessante... Como é que as pessoas implementam determinadas tarefas em escolas, como é que funciona naquela escola em particular...”(GEI). Mais tarde, em várias entrevistas Glória foi referindo que lia diferentes textos de diferentes autores. Quando questionada sobre textos e autores de referência que a tinham marcado respondeu:

Não construo em função disso a minha perspetiva seja do que for, da matéria . . . [Para mim] é meramente informativo . . . Penso que todos estes estudos são muito redutores, aplicam-se para aquele universo, se calhar funciona bem ali. . . Acho que a parte didática, cada um constrói consoante o seu entendimento que realmente tem do próprio processo. (GEDA2)

O discurso de Glória, sugeria que as dinâmicas na ESE B, no âmbito da Didática da Matemática, e o conhecimento obtido com a análise de estudos empíricos, não foram importantes para a sua futura prática pedagógica. A futura professora não via a literatura, que lhe foi sugerida, dada a ler ou pesquisada por si, sobre uma determinada área do saber, como produto de uma atividade científica. O conhecimento apresentado nos textos que foi lendo tinha um estatuto igual ao conhecimento construído pela sua própria experiência, que construiu a partir das perceções do que foi vivendo. Nas entrevistas, durante a prática de ensino supervisionada, esta perspetiva foi-se clarificando e mostrou ter consequências no impacto que as diferentes disciplinas poderiam ter tido nas suas aprendizagens. No final da primeira fase do estágio, afirmou:

Eu não sinto que esteja a aprender muito nas disciplinas de didática . . . Querem passar a sua interpretação pessoal e fazer com que nós engulamos [estas ideias] . . .

Acho importante ter acesso a determinados autores. . . Mas não é bom impor-nos um caminho . . . Quero descobrir outros. E o outro pode ser melhor, atenção! . . . (GEM)

Ou seja, a futura professora sentiu que o trabalho realizado nas disciplinas de Didática era prescritivo e que não considerava a sua experiência: “Não posso escolher o meu caminho didático? Devia poder fazê-lo, e acho que faça sentido para os alunos que eu o possa fazer.” E Glória concluiu: “É este precisamente o *background* que eu tenho, que eu também usei para as minhas aulas. Eu já dou explicações desde... Ainda não tinha saído do liceu!” (GEDA3). Deste modo, a futura professora afirmou que o conhecimento para ensinar que lhe é mais significativo é o que advém da experiência como explicadora.

Assim, Glória não sentiu dificuldades nas diferentes unidades curriculares da licenciatura e mestrado e as experiências vividas na ESE B não foram significativas para si e para a sua prática letiva. Identificou várias tarefas propostas nas unidades curriculares de Matemática e aquela que mais gostou foi a que implicava a conceção de problemas. Relativamente às experiências vividas nas Didáticas da Matemática, sentiu que precisava de discutir mais as suas ideias sobre o ensino e aprendizagem, em detrimento da análise de textos teóricos e empíricos. Nestes eram apresentadas práticas bem sucedidas e não considerava replicar. Considerou que os textos no campo da Didática da Matemática, não eram produto de um trabalho científico acumulado, mas sim descrições de casos. Estes tinham tanta importância como o seu conhecimento oriundo da sua experiência como explicadora.

5.2.2. Experiências de estágio: A importância do aprendido no 1.º ciclo

Ao longo da sua formação inicial, Glória teve diferentes experiências de prática pedagógica supervisionada, quer na educação pré-escolar, quer no 1.º ciclo do ensino básico e, no semestre anterior de 2.º ciclo, nas disciplinas de Português e História e Geografia de Portugal. A futura professora não descreveu muitas situações relativas a outras experiências de estágio, mas referiu a sua professora cooperante do estágio no 1.º ciclo, como sendo alguém que respeitava bastante. Indicou que era uma das autoras de

um conjunto de tarefas que foi aqui abordado na ESE . . . Realmente, às vezes, é interessante... Principalmente se tivermos este privilégio, como eu tive de depois... Foi interessante . . . [ser-me dado a conhecer] os trâmites para organizar uma sequência de tarefas . . . Começar a explorar o tema, naquilo que se deve fazer. (GEM)

Ou seja, a futura professora, como se viu no ponto anterior, considerava os textos lidos como teóricos e menos significativos que a sua experiência mas, simultaneamente, considerava interessante trabalhar com uma docente que realizou o trabalho descrito nos textos, dando atenção e importância ao que a professora lhe descreveu e ensinou da sua prática. Para além da professora cooperante do 1.º ciclo, Glória também referiu, apesar de pontualmente, a sua experiência de ensinar a alunos mais novos no 1.º ciclo, afirmando que “não estava tão habituada”. Descobriu que existem limitações: “Até porque podemos fazer [algumas tarefas] como desafio mas temos que . . . fazer descer o nível . . . Tenho que reduzir no fundo o tipo de exemplos que vou apresentar” (GEM). Por isso, a futura professora sentiu que com crianças mais novas tinha que adequar as expectativas sobre o que os alunos eram capazes de fazer, eventualmente baixar o nível de desafio das tarefas e apresentar exemplos simples para as ideias matemáticas a transmitir. Considerava que existia uma diferença significativa na abordagem necessária para ensinar alunos do 1.º ciclo e do 2.º ciclo. Sobre a sua abordagem de ensino da Matemática no 5.º ano afirmou: “Eu realmente gosto de partir da abstração, se o puder fazer. Se não puder fazer, tudo bem! No 1.º ciclo era exatamente ao contrário” (GEDA3). Ou seja, Glória entendia que a experiência no 1.º ciclo a alertou para os níveis de “maturidade” dos alunos, mas que no 2.º ciclo era diferente podendo desenvolver uma abordagem partindo de situações onde a Matemática é apresentada de modo formal e abstrato.

Assim, ao longo do seu percurso no ensino superior, Glória foi tendo diversas experiências de prática de ensino supervisionada nos diferentes níveis de ensino. No entanto, não estava habituada a ensinar a crianças mais novas. Relativamente ao estágio do 1.º ciclo, mostrou-se muito satisfeita por o ter realizado com uma docente autora de um dos textos estudados na ESE e de usufruir da sua experiência e da oportunidade de lhe relatar pessoalmente os processos vividos quando desenhou tarefas, concretizou e analisou aulas com o objetivo de promover determinadas aprendizagens. Ou seja, para Glória importava o conhecimento prático da professora cooperante a sua narrativa oral, quando viveu um processo de investigação sobre a própria prática. No entanto, os textos sobre os mesmos episódios não lhe eram significativos. Um outro aspeto que emergiu das experiências vividas no 1.º ciclo foi a constatação de que os alunos deste nível de ensino necessitam de partir de situações concretas para depois formalizar as ideias matemáticas e que os alunos do 2.º ciclo já não necessitam de fazer esse percurso.

5.2.3. Perspetivas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática: Foco nos procedimentos

Segundo Glória, as experiências vividas na ESE B não contribuíram para o seu conhecimento sobre a Matemática e o seu ensino e aprendizagem. Por isso, considerou que esse conhecimento foi construído como aluna e explicadora.

A futura professora circunscreveu as suas ideias sobre a Matemática à Matemática escolar e defendeu que, pela sua natureza instrumental, era um campo de saber “fundamental” mas que, simultaneamente, existiam alunos que tinham necessidades específicas a quem tinha que se dar atenção. Considerou que existia um grupo de alunos, mais restrito, em quem se revia, que apreciava a Matemática enquanto ciência das regularidades e que tinha uma predisposição para raciocinar matematicamente. Ou seja, “eles podem gostar de Matemática, terem um gosto mais intelectual, saberem regularidades, enfim... Há coisas que eu também gosto “olha dá este resultado, porquê?” Ou ver, como curiosidade, qualquer coisa...” (GEDA2). Os alunos também podiam ter um gosto pelo desafio: “Chegares ao fim e dizes “Eu consegui resolver isto”, e aquilo não tem interesse nenhum... É um desafio e dá-te uma satisfação intelectual, não é? Isto é algo que os alunos poderão sentir, dependendo do gosto e do perfil” (GEDA2). No entanto, desconsiderando o seu papel no desenvolvimento do gosto pelos processos matemáticos e por tarefas mais desafiantes, considerava que esse trabalho nem sempre podia ser desenvolvido porque tinha que dar resposta ao grande grupo de alunos que tinham “outro perfil”. Existia uma realidade que se impunha: “Há coisas que eu não posso mudar, e para o mundo que nós vivemos, eles [os outros] alunos podem não gostar nada desta ideia [conhecimentos não instrumentais para o futuro]!” Assim, o facto de achar que existiam alunos que só queriam aprender a Matemática para o seu futuro quotidiano, sustentou as suas opções e prioridades que passaram por ensinar os conhecimentos que achou incontornáveis:

[As aprendizagens realizadas na disciplina de Matemática] são uma ferramenta para a vida... Se não houver outro proveito para além deste, isto para mim já é espetacular... Eles vão chegar e dizer “contraí ou não um crédito porque fiz contas em casa. . . E com isto estamos a trabalhar com racionais..., e o adulto tem de ter esta perceção... (GEDA2)

Ou seja, Glória considerou fundamental garantir o conhecimento matemático instrumental para o quotidiano dos alunos recorrendo a exemplos de situações onde se mobilizava conhecimento aritmético como o cálculo e, num outro momento, a

importância de saber Estatística. Não descartou a ideia de explorar situações matemáticas que promovessem o desenvolvimento das capacidades matemáticas, mas, esta finalidade não era prioritária, destinava-se apenas a alguns alunos com um “perfil” específico que existia *a priori*. De modo a dar resposta a todos os alunos defendeu a diversificação de estratégias. Para ilustrar a sua visão remeteu para a prática que estava a começar a concretizar: “Não vou fazer sempre jogos! Há pessoas que acham muito giro... 5.^a feira fiz um jogo, mas foi um dia da semana e tiveram um [outro] dia só a fazer exercícios, percebe?” (GEI). Na sequência desta descrição foi questionada sobre a hipótese de propor tarefas mais desafiantes e de natureza exploratória e respondeu:

Há alunos que correspondem muito bem a uma determinada forma de ensinar e de aprender e há outros de todo, não vão reagir a isso. Portanto não acredito num modelo, nem acredito num modelo só interativo em que os alunos fazem tudo.... Acho isso maravilhoso [em tom irónico]!...

Ou seja, Glória relacionou exclusivamente um tipo de tarefas com determinadas abordagens de ensino defendendo que nem todos os alunos gostam de aulas de natureza exploratória e acrescentou: “Há alunos que se dão perfeitamente com aulas expositivas, descritivas e que seja só síntese, que seja só batalhar, porque é a única forma que conhecem de aprender” (GEI). Ainda sobre as tarefas de natureza mais aberta também relacionou a sua natureza com a duração da sua exploração e explicou que “a maior parte dos alunos não são perseverantes! . . . Há uns que reagem a tudo. Felizmente, graças a Deus!”(GEI). Ou seja, por um lado, pretendia diversificar as tarefas, mas, por outro, relacionava determinadas tarefas com um tipo de abordagem de ensino-aprendizagem e sublinhou que existiam alunos que não gostavam de todos os tipos de aulas e que gostavam apenas de aulas expositivas e onde se resolviam exercícios. Acrescentou ainda que tarefas que se prolongassem no tempo não eram adequadas porque muitos alunos que não eram perseverantes.

No que respeita ao papel do professor e dos alunos nas aulas de Matemática, Glória defendeu que o ideal era que o professor fosse um “mediador e não ser tão interventor”. No entanto, os seus alunos ainda não eram autónomos. Assim, no momento em que estava a concretizar a prática supervisionada ainda sentiu que tinha que ser ela a solicitar a participação. Mais tarde, gostaria que participassem mais livremente. No entanto fez a ressalva: “Quando eles conseguirem achar o que é válido apresentar!” (GEI). Além disso, considerava que os seus alunos ainda não eram capazes de interagir de modo a constituírem-se discussões produtivas e organizadas.

Questionada diretamente sobre qual o papel dos alunos nas aulas de Matemática, Glória foi rápida na sua resposta:

Agora vou dizer uma coisa mesmo à antiga!... O papel dos alunos é aprender! Se eles não aprendem aquilo que eu quero que eles aprendam, isso é que já não sei! . . . Eu acho que o aluno é responsável por aquilo que quer aprender e quando quer aprender. Eu [sobre] isso não posso fazer nada. É como eu aqui nas aulas, se eu não quiser aprender ninguém me vai ensinar. (GEI)

Ou seja, mais uma vez, Glória fez depender a aprendizagem muito mais de razões extrínsecas a si e dependentes das aptidões e opções dos alunos. No entanto, questionada sobre o que era para si um bom ensino oscilou entre as necessidades do professor, colocando a tónica em si, e as necessidades dos diversos alunos que podem existir. Na sua perspetiva, um bom ensino era:

Um bom ensino será aquele que deixe a pessoa mais satisfeita! Ou seja, que satisfaz as minhas necessidades também. . . Não faço uma coisa na qual não me reveja! Mas principalmente que satisfaz as necessidades dos alunos. Não são todas as mesmas, no mesmo tempo. Por isso é que acredito na diversidade. É como lhe digo, também tive muitos professores muitos positivos, muito aborrecidos, seja o que for! Eu acho que a gente aprende seja com quem for... Se quisermos aprender, a motivação é igual!

Assim, um bom ensino era caracterizado por Glória como uma prática que fosse coerente com a visão do professor e que desse resposta às necessidades dos alunos e voltou a referir a importância da diversidade de estratégias. Mas, mais uma vez, terminou a sua ideia colocando o foco nas características dos alunos, lembrando as suas experiências como aluna.

No que respeita especificamente ao ensino e aprendizagem dos números racionais, a Glória considerou, na entrevista depois da segunda aula, que aprender este tópico era importante uma vez que: (i) permitia desenvolver um pensamento abstrato, ou seja “Permite pensar naquilo que não existe... Sobre aquilo que só existe na minha cabeça mas que poderá vir a existir...”; (ii) era fundamental para mobilizar no futuro como cidadãos, por exemplo “Fundamental para perceber os políticos . . . E este pensamento crítico é importante”; e (iii) era estruturante para futuras aprendizagens na Matemática nos ciclos seguintes, explicando: “O ensino dos. . . racionais no 5.º e 6.º ano, é fundamental porque é estruturante para todos os outros conhecimentos matemáticos e não só...” (GEDA2).

Decorrente da sua visão da disciplina de Matemática e da necessidade que identificava nos alunos de aprenderem ideias matemáticas em torno do conjunto dos

números racionais, Glória, sentia que se devia melhorar o ensino dos números racionais. Considerava que o ensino concretizado nas escolas é “espartilhado, é dado em pequenos bochechos” e muito rápido, ou seja, considerava que os professores queriam “introduzir tantos conceitos, tanta coisa, realmente nova, que chega a uma altura que o aluno dissocia” (GEI). Como resultado destas práticas de ensino, referiu a falta de aprendizagens, que considerava estruturantes, dos alunos do ensino secundário a quem dava explicações:

Isto custa-me um bocadinho, confesso. Nem sequer têm o conceito... Estamos a falar do conceito mais básico, da divisão... Eles nem sequer sabem o algoritmo! Esta ideia é assustadora! Porquê? Eles sabem muitas outras coisas de Matemática, mas isto já não sabem! Dá-lhes um resultado perfeitamente absurdo e eles acham perfeitamente natural porque se introduziu na máquina de calcular [o resultado]... (GEI).

Glória identificou a falta de “conhecimentos fundamentais” tais como: o cálculo do algoritmo da divisão e o facto dos alunos não reconhecerem a plausibilidade dos resultados obtidos na calculadora. De modo a prevenir as dificuldades nos anos de escolaridade subsequentes, Glória defendeu como importante que os alunos do 2.º ciclo compreendessem os conceitos abordados, mas referiu que, primeiro, tinham de ser eficientes nos procedimentos memorizando-os. Na última entrevista explicou porquê: “Quem não percebe nem procedimentos, nem regras, nem aplicação, nem domina as operações vai ter imensa dificuldade [no futuro] em coisas que nunca iria ter. [Assim optei] por “pecar por excesso”!” Considerou que a alternativa à sua opção não era benéfica uma vez que teria que apostar na compreensão, mas que ficaria a consolidação por fazer, afirmando: “Vou apostar só na compreensão... Eles até já perceberam, eu estou toda contente porque eles já perceberam” e depois não treino nada e deixo-os ir assim.” Ou seja, considerava existirem duas opções: uma abordagem com foco nos procedimentos e uma abordagem com foco na compreensão, negligenciando o treino de procedimentos.

Colocando em contraponto a memorização de procedimentos, criticou a abordagem de iniciar a aprendizagem do tópico dos números racionais com situações concretas colocadas sob a forma de problemas: “Porque o concreto é difícilimo, qual é o meu problema com o concreto, por vezes... Eu não me conseguirei lembrar. . . O enunciado do problema... Agora o que tu fizeste com os números fica para toda a vida!” (GEI).

Assim, Glória considerou que partir de situações não matemáticas era um processo mais difícil para os alunos pois não permitia memorizar números e cálculos. Em alternativa propôs apresentar os procedimentos de cálculo e analisar “Qual é o efeito que as operações têm sobre os números, o que é que eu posso vir a fazer ou não fazer com eles”. Depois dos alunos dominarem os procedimentos e as questões em torno dos cálculos num conjunto numérico, estavam aptos a começar a aplicar estes conhecimentos a situações concretas. Ou seja, o 2.º ciclo era o momento para trabalhar os números em tarefas com contextos matemáticos começando pelos procedimentos, memorizando-os, em seguida explorando os efeitos das operações nos números e finalmente aplicar:

A partir daí depois posso aplicar! Penso que se eles realmente, nesta altura, que é uma altura em que conseguem estar a libertar-se, a ter um nível de abstração que é já... Os miúdos com esta idade são fantásticos, é uma idade em que conseguem ter uma capacidade de memorização que nunca mais volta na vida... (GEI)

Glória tinha lido os documentos curriculares em vigor no momento da sua prática supervisionada. Estavam em vigor dois programas de Matemática. A iniciar a implementação nos anos iniciais de ciclo, o programa e metas para o ensino básico (2013) mas ainda existia, em implementação, o programa anterior (de 2007) nos restantes anos de escolaridade. Afirmou que tinha lido, e que conhecia bem, o programa de 2007, mas já não recorria a esse documento uma vez que tinha sido revogado. Sobre o novo programa a iniciar a implementação, aprovado em 2013, e que seria a base para a preparação da sua prática tinha uma opinião muito positiva. Na entrevista inicial, considerou-o um bom documento porque era claro no que era pretendido, uma vez que “o que interessa ali é onde é que está a meta” e que era sua obrigação implementar porque “Quem o fez, fez, e eu tenho é que tentar!” Questionada sobre a mudança de documentos curriculares e se essa mudança foi positiva foi assertiva:

Se mudou para melhor?! Sinceramente, acho que sim! . . . Por acaso acho giro porque quase toda a gente que eu conheço que está no terreno ou que tem responsabilidade nessa área, foi muito contra as metas. Isto não tem problema nenhum as metas, as metas é algo que tenho que atingir . . . Acho que é objetivo, acho que é claro, não deixa ali grandes coisas para as pessoas imaginarem, ou para preencherem espaços. Aquilo é o que é! . . . Como é que eu chego à meta, ninguém lá me diz.” (GEI)

Para além de considerar um documento claro e objetivo, Glória mostrou-se surpreendida com as posições dos diferentes intervenientes com quem contactou e acrescentou que gostou do facto de, na sua opinião, não dar indicações sobre o modo de

ensinar. Esta interpretação sobre o conteúdo das metas pode ter sido discutida em algum fórum que não referiu, mas de facto sentiu necessidade de reforçar que era

a forma como leio aquilo não diz [o como]. Eles dizem o que é que querem que o aluno [aprenda]... Ou seja, qual é o perfil de saída do aluno, não diz o que é que eu tenho que fazer para ele atingir esse perfil de saída.

Ainda sobre o programa de 2013, logo na entrevista inicial, Glória mostrou estar em discordância com quem criticou a sua implementação e considerou que só com experiências junto de alunos se podia concluir sobre o grau de desafio cognitivo e de abstração que estavam envolvidos no documento curricular: “Aquilo só vendo e experimentando é que a gente vê! . . . Só porque são muito novinhos... Sei lá se eles não têm ou não têm [capacidade]!”

Assim, Glória leu os documentos curriculares em vigor e considerou o programa de 2013 um bom documento porque era claro no que era esperado ensinar e não dava indicações sobre o modo de ensinar, aspeto que não sentiu necessidade de estar definido. Sentiu que era sua obrigação implementar o pretendido e que só era possível avaliar a sua adequação depois de experimentar a sua lecionação. Mais uma vez o conhecimento experiencial era mais significativo para a futura professora do que os pareceres de professores do 2.º ciclo e dos seus professores da didática.

Em síntese, Glória não considerou que a ESE tivesse um papel importante na construção da sua visão da Matemática, do seu ensino e aprendizagem e sustentou as suas ideias com as experiências vividas, quer como aluna, quer como explicadora. A sua visão sobre a Matemática era circunscrita à Matemática Escolar e sublinhou a importância do seu papel instrumental, deixando a ressalva de poder ter um papel de desafio e de desenvolvimento de capacidades, possibilidade que apenas estava ao alcance de alunos que tinham aptidões naturais. No ensino e aprendizagem da Matemática importava apostar na memorização dos procedimentos porque a aposta na compreensão deixava de fora a consolidação dos processos e procedimentos necessários para o futuro escolar dos alunos. No que respeita ao tipo de tarefas estabeleceu uma relação restrita entre o tipo de tarefas e as abordagens de ensino-aprendizagem. Salvaguardando os alunos que preferiam aulas expositivas e onde se resolvem exercícios exaustivamente, considerou que se deviam diversificar tarefas. No entanto, tinha-se que acautelar a sua duração para não frustrarem os alunos pouco perseverantes. Relativamente ao papel do professor e do alunos considerou que o ideal era o professor ser um mediador e os alunos interventivos no processo de aprendizagem. No caso dos

seus alunos, as condições ainda não estavam reunidas, uma vez que estes eram pouco autónomos na participação e não sabiam escolher as ideias adequadas para a discussão das tarefas. As suas experiências como aluna mostraram que, independentemente do tipo de docentes, é possível manter o nível de motivação e ser bem-sucedida. Por isso, o sucesso dos alunos na Matemática depende fundamentalmente do seu perfil. Relativamente ao ensino dos números racionais, Glória considerou um tema importante porque desenvolve um pensamento abstrato, fundamental para usar no futuro em sociedade e que era estruturante para futuras aprendizagens. Considerou que o ensino concretizado nas escolas era rápido, segmentado e que não permitia aos alunos consolidar conhecimentos e relacionar ideias. Como explicadora de alunos do secundário, identificava a falta de aprendizagens fundamentais e estruturantes dando como exemplo os procedimentos do cálculo do algoritmo da divisão e o facto dos alunos não reconhecerem a plausibilidade dos resultados obtidos. Para prevenir as dificuldades e falta de conhecimentos nos seus alunos, defendeu que deveriam dominar os procedimentos e, posteriormente, caso houvesse possibilidade, a compreensão dos conceitos. Para a futura professora, existiam duas abordagens: uma com foco nos procedimentos e outra com foco na compreensão, negligenciando o treino de procedimentos. Por isso, optava por uma prática com foco nos procedimentos, sustentando que foi bom para si. No tópico dos números racionais recorrer situações concretas, pode ser um processo mais difícil para os alunos pois não permitia memorizar os procedimentos. No que respeita aos documentos curriculares, sobre o novo programa aprovado em 2013, considerou-o um bom documento porque era claro no que era esperado ensinar e não dava indicações sobre o modo de ensinar. Sentiu que era sua obrigação implementar o pretendido e que só era possível avaliar a sua adequação depois de experimentar a sua leção.

5.3. A prática de ensino supervisionada de Matemática no 2.º ciclo

5.3.1. Estágio: Um contexto de tensão entre visões

5.3.1.1. Escola e turma

A escola onde decorreu o estágio situava-se numa pequena cidade relativamente perto da ESE. Segundo a professora cooperante, a escola tinha bom equipamento tecnológico e cada sala, que era espaçosa, tinha um computador, projetor e, por vezes,

quadro interativo. Além disso, a escola possuía material manipulável. Ainda assim, a professora cooperante descreveu dificuldades no trabalho dos alunos em grupo dadas as condições da sala. Glória descreveu as condições físicas da escola, e indicou que estas, por vezes, a obrigavam a repetir o discurso dos alunos: “Há uma necessidade maior do professor repetir, reformulando ou não, as ideias que os alunos apresentam. [As salas de aula] são más pois têm uma péssima acústica (as salas comunicam por um corredor interior sem porta)” (GRE).

A turma onde estagiou em Matemática e Ciências Naturais no 2.º ciclo era do 5.º ano. Era uma turma calma de 20 alunos e que a professora cooperante descreveu como tendo muitas capacidades. Glória concordou com esta avaliação, retirando ilações do trabalho realizado no 1.º ciclo: “Foi produzido trabalho [no 1.º ciclo]. Notamos pelas pequenas coisas que fizeram um percurso perfeitamente normal de 1.º ciclo e que não deveriam ter, com certeza, muitas dificuldades. Portanto, não temos de voltar a procedimentos muito básicos”. Esta opinião de Glória resultou do diagnóstico realizado e explicou: “Fiz três ou quatro experiências e os alunos sabiam dividir! Com os números racionais, que lidam muito com o conceito de divisão, para eles foi uma mais-valia por perceberem o que estavam a fazer. É excelente!” (GEF).

Assim, depois de ter proposto tarefas que implicavam o cálculo de divisões percebeu que os alunos sabiam usar o respetivo algoritmo, Glória considerou que estavam cumpridas as aprendizagens estruturantes para o trabalho a realizar com os números racionais. Esta constatação mostrou que estava muito focada no significado de quociente da fração.

5.3.1.2. Expectativas em relação ao estágio

Na primeira entrevista, Glória evidenciou muita segurança relativamente ao estágio de Matemática no 2.º ciclo sustentando que já tinha experiência de lecionação e que não esperava fazer muitas aprendizagens. Para ela, o estágio não era um desafio. No que respeita ao trabalho a realizar com os seus alunos, na entrevista inicial, anteviu algumas dificuldades dos alunos sobre o tópico dos números racionais e por isso iria recorrer a duas estratégias fundamentais. Pretendia preparar um pequeno resumo das ideias principais sobre números racionais e distribuir aos alunos. Nesse material, os alunos iriam encontrar

Uma recapitulação de algumas regras operatórias e de alguns conceitos relacionados com isto... Tem lá as definições, com uma linguagem muito básica . .

. Têm um exemplo, para que seja uma referência . . . Eles olharem para o exemplo... Ok, agora já sabemos como fazemos isto!

Durante as aulas, quando surgissem dificuldades, pretendia focar os alunos naquilo que era pedido nos exercícios e reiniciar o processo de explicação da resolução:

Como é que se pode fazer..., é realmente voltando ao início. Quer dizer, ao início de cada um dos procedimentos e ver o que é que tinha de ser feito de uma forma e o que é que tinha de ser feito de outra. Ou seja, tinha que arranjar um [outro] exemplo...

Ou seja, Glória estava bastante segura sobre o que tinha que fazer no estágio e antecipando que os seus alunos teriam dificuldades com o tópico dos números racionais, estruturou materiais e estratégias de apoio. Por um lado, iria disponibilizar um resumo com as principais definições sobre determinados aspetos relativos aos números racionais e explicações sobre o cálculo de operações com estes números (intenção que não foi concretizada ou não foi dada a conhecer). Por outro lado, nas aulas, caso os alunos não compreendessem como resolver as tarefas propostas, iria explicar novamente os procedimentos, dando, se necessário, mais exemplos de situações idênticas e mostrando a sua resolução.

5.3.1.3. Contexto supervisivo

Glória iniciou o seu estágio observando, durante 15 dias, a prática da professora cooperante. Contou que foi informada dos conteúdos a lecionar a partir da estrutura definida pelo manual e que este era o recurso que “orientava” o que concretizar. Uma vez que iria lecionar 5.º ano de escolaridade foi seguido o Programa e Metas de Matemática de 2013 (PMMEB). Na entrevista a meio do processo de estágio, depois de lecionar três aulas, justificando as suas opções, Glória defendeu que os estagiários deveriam ter autonomia para tomar algumas decisões. Considerou que também tinha uma palavra a dizer uma vez que “de certa forma o estagiário também tem uma convicção daquilo que acha que é o melhor para todos” ainda que tenha de lecionar “aquilo que nos for pedido”. Sublinhou que “temos algumas pequenas decisões que podemos tomar. . . Se as pessoas acharem que o trabalho está num caminho mais ou menos correto acabam por se deixar cativar pela ideia (GEM).

Da sua professora cooperante, no estágio de Matemática, esperava “que me deixe trabalhar” e que quando necessário, fosse “aquela que me vai manter um pouco os pés na terra”. Apesar dos seus 30 anos experiência de ensinar, considerou que “não tenho prática deste nível de ensino, portanto eu espero que ela me diga, de vez em quando...

Espero que o faça, que me critique! (GEDA1)”. Ou seja, desejava autonomia de decisão na gestão do ensino e gostava que, nos momentos em que a professora cooperante lhe apontava aspetos a melhorar, lhe explicasse o porquê de se considerar que estava a cometer erros. Esta posição faz notar alguma insatisfação face ao processo supervisiivo:

Digam mesmo assim: “Isto não deve fazer porque isto...” Só! Não me digam só: “Isto não se deve fazer”. Para mim isso não serve de aprendizagem . . . Que de certa forma me diga assim: “Olha estes não porque eles se calhar, na prática deles, que isto é muito rápido ou muito lento”. (GEDA1)

A expectativa era que a professora cooperante fosse uma observadora externa que a informasse sobre como melhorar a sua prática sustentando as suas ideias com conhecimentos sobre os processos de ensino-aprendizagem e sobre como aqueles alunos, especificamente, aprendiam melhor.

No que respeita à supervisora da ESE, Glória esperava que tivesse um papel idêntico ao da professora cooperante, mas com ligeiras diferenças, resultantes das circunstâncias no processo de observação. Por um lado, os momentos de reflexão teriam fundamentalmente um papel de balanço do processo, de modo a “de certa forma a fazermos um ponto da situação. Porque está lá [no local do estágio] pontualmente!”. Relativamente à prática letiva, considerava que o *feedback* teria de se limitar a aspetos observados pontualmente. Deixou sublinhada esta especificidade: “Claro que tem acesso às planificações e tudo isso... Mas de qualquer forma vai lá e diz assim: “Olha não gostei porque, ou eventualmente poderá dizer na mesma lógica do cooperante, mas vai-se cingir efetivamente à observação que fez” (GEDA1).

Quando questionada sobre se esperava que a supervisora da ESE pudesse apoiar na preparação das aulas rejeitou de imediato a ideia afirmando que

Numa me aconteceu, mas pronto!. . . E muito sinceramente mal será se estiver à espera disso! Não me parece que seja esse o papel que o supervisor tenha que fazer . . . Eu não estou à espera de aprender com o cooperante [supervisor]. Estou à espera de aprender comigo . . . Porque acho que um professor quando estiver a dar aulas, não precisa que ninguém lhe venha dizer que a sua aula foi uma chatice . . . O supervisor vai tentar sempre criar um modelo baseado na ideia que tem de uma aula. (GEDA1)

Glória não negava que poderia ter dúvidas, mas previa que quando tal acontecesse que iria “recorrer àquilo que eu [ia] estudar, provavelmente. . . Se eu conseguir realmente chegar a uma conclusão que me pareça válida posso eventualmente procurar [confirmação junto da supervisora]” (GEDA1).

A sua relação com as professoras cooperantes, noutros estágios, nem sempre foi fácil. Segundo Glória “inicialmente é sempre difícil. . . [mas] “estranha-se e depois entranha-se”, estás a perceber? (GEDA2). Tal como nos outros contextos, o processo supervisivo que viveu nem sempre foi tranquilo. Nas conversas com a professora cooperante as discussões passavam pouco por questões de natureza matemática e quando acontecia a futura professora identificava como “questões de linguagem . . . Foi um bico-de-obra porque realmente prendeu-se com questões que do meu ponto de vista não estão incorretas, a forma como se escreve ou como se representa...”. Grande parte das conversas passavam por questões relativas à necessidade de existir uma planificação entregue atempadamente para análise conjunta e que esta “fosse mais descritiva . . . Mais explorado o que efetivamente, todo o conteúdo da aula para ela ter uma perceção melhor [de como se iria desenrolar a aula]”. Glória não correspondeu ao pedido pela professora cooperante e sentia que o que lhe era pedido não era importante:

Mostrou-me uma planificação que tinha . . . que não tem nada a ver com a minha planificação, nem a estrutura, nem a forma, nem como é que pensava . . . O que me chamou à atenção é que tinha uma série de páginas de orientação vertical com uma série de espaços que eu não percebo muito bem qual é o interesse. (GEM)

Glória não identificou que tivesse havido discussões com a professora cooperante sobre as diferentes abordagens e focos no processo de ensino-aprendizagens dos tópicos a lecionar. Comentando a prática da parceira de estágio sobre as alterações que foi fazendo na sua prática, como resultado de conversas com a professora cooperante, assumiu que tinha ideias diferentes da supervisora da ESE, da professora cooperante e, numa segunda fase, da prática da sua parceira de estágio: “As abordagens são distintas, como digo, e ainda bem que são porque acho que cada pessoa deve confirmar aquilo com que realmente se sente à vontade. . .” (GEM).

5.3.2. O processo de planificação: Preparar para outros anteverem

De modo a organizar o trabalho a realizar no primeiro mês de intervenção, Glória, a professora cooperante e a parceira de estágio reuniram para distribuir os períodos de intervenção e decidir os tópicos que cada uma iria lecionar. Para se preparar, pesquisou e analisou diferentes tarefas “apesar de não [as] tencionar utilizar”. Um dos recursos consultado e utilizado foi o manual “apesar de eu não o usar completamente”. Ou seja, considerou que não era a sua “principal fonte” e nos “quinze dias usei-o duas vezes ou três no máximo, por aí. De qualquer forma acho que é importante de vez em quando

retomar o manual, ele está lá, está sempre disponível. É algo com que nós podemos contar...” Acrescentou que para preparar o trabalho analisava o manual para verificar se o trabalho que estava a pensar era distinto do proposto pelo manual, ou seja, “têm uma tarefa semelhante ou com o mesmo tipo de estratégia na página tal do manual”, de modo a incluir no percurso de trabalho. Finalmente, era importante conhecer o manual de modo enviar “para trabalho de casa ou nos minutos finais de aula, que é onde eventualmente dizemos “agora vamos para o manual”, para realmente dar-lhe uso e que eles percebam que ele também tem [utilidade] e que está disponível” (GEM). Para além de analisar as tarefas do manual, Glória também analisou tarefas noutros manuais, brochuras e noutros documentos disponíveis na Web. Num primeiro momento tentava criar as suas tarefas. Questionada sobre se as tarefas que preparou e propôs foram criadas por si, acabou por admitir que

Nada se cria do nada! Isto não é uma coisa que se cria de repente, de qualquer forma algumas tarefas sem eu saber muito bem qual foi o autor, mas que faziam perfeitamente sentido [acabaram por] inspirar-me. (GEM)

Ou seja, ainda que Glória não identificasse especificamente a origem das tarefas analisadas e não nomeasse as fontes que serviram de base para a definição das tarefas que propôs aos alunos, sublinhou que estas eram desenhadas partindo de outras tarefas pesquisadas.

Questionada se tinha feito leituras para se preparar disse que “não fui ler nada de específico de racionais. Não fui por aí...”. Não sentiu necessidade porque: “Ora bem, literatura já li muita antes, já li muita antes da minha formação. Como deves imaginar, portanto a questão foi outra, portanto alguns temas relacionados com assuntos dos racionais já tinha lido...” (GEM). Assim, Glória não sentiu necessidade de fazer leituras especificamente para preparar a leção dos tópicos relativos à multiplicação de números racionais.

Para além de consultar o manual, também foi “rever quer o programa quer as metas. Já os conhecia antes, portanto não foi propriamente algo que demorasse muito tempo . . . Fui ver especificamente em que ponto é que estaria. As metas são algo que é relativamente recente, acho muito simples, muito acessível...” (GEM). Para além de tentar perceber que conteúdos iria lecionar também sentiu necessidade de analisar os respetivos descritores de desempenho ainda que “podem não ser os únicos objetivos que tenho, nem os únicos descritores de desempenho mas limito-me a cumprir aquilo que

realmente lá está, porque eu também quero que aqueles sejam cumpridos” (GEM). Ou seja, para ela importava fundamentalmente cumprir o programa e as metas definidas.

Glória recebeu da ESE orientações específicas sobre a natureza e organização da planificação. Estas orientações remetiam para a previsão de diferentes resoluções das tarefas propostas, previsão de erros e dificuldades dos alunos em determinadas tarefas e, finalmente, a discussão de diferentes estratégias. Segundo os professores supervisores, na ESE eram dadas orientações no que diz respeito aos aspetos essenciais a incluir nos planos de aula, mas não existia uma estrutura definida. Na tabela onde apresentou a sua planificação formal observamos que inclui o sumário e o tempo da aula, “domínios de referência, objetivos e descritores de desempenho”, a “descrição da atividade/estratégias/experiências de aprendizagem, recursos e avaliação”. Para identificar os domínios e descritores de desempenho, consultou o programa e metas de 2013, copiando o que está enunciado nos documentos. Assim, apesar de nas entrevistas ter referido que podia definir outros objetivos para cada aula, analisando os documentos entregues à professora cooperante, verifica-se só existem objetivos definidos com os descritores das metas curriculares. Um exemplo desta situação surge na planificação da aula sobre propriedades da multiplicação onde se podia ler a transcrição completa da meta referente ao trabalho a realizar: “Reconhecer as propriedades associativa e comutativa da multiplicação e as propriedades distributivas da multiplicação relativamente à adição e à subtração e representá-las algebricamente” (GP). Na coluna referente à “descrição da atividade” registava o que iria propor aos alunos num dado momento, por exemplo: “Realização de uma ficha formativa sobre expressões numéricas. Projeção do exercício e correção das atividades no quadro pelos alunos” (GP).

Confrontando o pedido pela ESE com o apresentado nas suas planificações escritas, percebemos que Glória não deu resposta ao solicitado. Do seu discurso notamos que estava alerta para questões relativas às suas ações na exploração dos materiais e que na planificação deveria antecipar resoluções dos alunos e preparar as questões que estes pudessem colocar. Sobre estas indicações considerou:

Por vezes pedem determinados pormenores . . . Pedir para numa planificação aparecer que tipo de questões é que são colocadas aos alunos, acho isto surreal. Porque um individuo se não sabe um conjunto de questões para colocar na sala de aula não sei muito bem o que é que lá está a fazer. . . Só para ter uma ideia de qual será a abordagem que vai ser feita, em relação ao questionamento. (GEI)

Glória considerava que era desnecessário registar na planificação formal as questões a colocar aos alunos, como forma de preparação da prática. Para ela eram óbvias e qualquer professor saberia fazê-las no momento da ação. A pertinência deste processo estava na possibilidade, para quem lesse, de antever a abordagem a desenvolver. Para a futura professora a planificação formal tinha uma função para quem vai lecionar:

A planificação é um instrumento de guia de quem realmente lá está. Não será para o outro se meter na sua pele. . . . Eu antecipar dificuldades!... Sei que vão surgir dificuldade. . . Muitos são os erros que podem aparecer mas eles podem nem surgir. (GEI)

Glória, por um lado, não valorizava, para a antevisão da sua aula, a antecipação das resoluções dos alunos, porque considerava que existia uma grande variedade de respostas possíveis e que tinham que ser geridas no momento. Ainda assim, tentando cumprir o pedido inúmeras vezes, foi entregando as suas planificações depois do prazo e, por vezes, de forma incompleta. Sobre as planificações que entregou à professora cooperante, acabou por assumir que estas “não foram exatamente aquelas que depois corresponderam à segunda semana de aulas” uma vez que foram entregues antes do momento da intervenção tendo havido ajustes aula a aula. Este facto determinou que não fosse possível discutir antecipadamente o que foi acontecendo nas aulas e, por isso, impossibilitou o possível enriquecimento da antevisão das aulas, resultante de uma reflexão conjunta com a professora cooperante. Ainda assim, considerou que a professora cooperante concordou com o realizado e “que [as aulas] acabaram por lhe fazer sentido” (GEM). Ou seja, Glória não tinha uma rotina de registo daquilo que pretendia realizar nas aulas. Na preparação das aulas, as decisões finais eram realizadas na véspera de cada aula como resultado do trabalho realizado na aula anterior e podia passar pela seleção de novas tarefas a realizar pelos alunos. Note-se que, mais adiante, descreveu um processo que revelou uma antevisão do trabalho a realizar durante uma semana, mas o definido nunca foi discutido com a professora cooperante.

Em síntese, o contexto de estágio decorreu numa escola que tinha boas condições físicas e bom equipamento em cada sala, mas nem sempre a acústica era adequada o que trazia dificuldades na comunicação. A turma era um 5.º ano com 20 alunos, bem preparados, com muitas capacidades e sem problemas de indisciplina. Relativamente ao processo de prática supervisionada evidenciou muita segurança. Antevia algumas dificuldades dos alunos sobre o tópico dos números racionais e, por isso, iria recorrer a

duas estratégias fundamentais: preparar um pequeno resumo e pretendia reforçar nas aulas, junto dos alunos que precisassem, reiniciando o processo de explicação. Não viu o contexto supervisoivo como uma oportunidade de aprendizagem. A sua expectativa relativamente ao papel dos seus supervisores era que estes fossem observadores críticos em aspetos específicos. Para ela, o professor cooperante devia ser um observador externo que a informasse sobre como deveria melhorar os processos de ensino-aprendizagem para os alunos onde era titular da turma. No que respeita à supervisora da ESE, esperava que esta promovesse um balanço do processo de estágio e rejeitou a ideia de ter um papel de apoio na preparação das aulas pois, se necessário procuraria sozinha as soluções para as suas dúvidas. Ao longo do processo notaram-se algumas tensões. A futura professora sentiu que lhe era dada pouca autonomia sendo apenas informada dos conteúdos a lecionar. Com insatisfação relatou que a sequência a dar aos tópicos era orientada em função do manual. Um terceiro fator que provocou tensão no processo supervisoivo foi o facto da futura professora não estar de acordo com a abordagem defendida pelos supervisores. Estes consideravam importante apostar em tarefas contextualizadas e desafiantes. Para Glória o processo de planificação formal não era pertinente pois sentia-se segura, científica e didaticamente. Assim, nem sempre entregava as planificações das aulas atempadamente. Para se preparar pesquisou e analisou tarefas no manual dos alunos e noutros manuais, brochuras e noutros documentos disponíveis na Web porque importava estar ciente se existiam tarefas que podia incluir no percurso de trabalho. Também consultou o programa e metas em vigor para perceber que conteúdos tinha de cumprir. Desenhou as tarefas propostas partindo de outras que pesquisou, mas não identificou as suas fontes. Não tinha uma rotina de registo daquilo que pretendia realizar nas aulas. Para organizar a sua planificação formal recebeu da ESE orientações específicas sobre a natureza e organização da planificação, mas não as seguiu completamente. Na sua planificação formal os objetivos eram os descritores das metas copiados do documento curricular. Estava alerta para a importância de antecipar resoluções dos alunos e preparar as questões a fazer, mas considerava estes processos de antevisão desnecessários. Considerava que existia uma grande variedade de respostas possíveis que tinham que ser geridas no momento. Na preparação das aulas, as decisões finais eram realizadas na véspera de cada aula o que determinou que não fosse possível discutir e enriquecer a antevisão das aulas.

5.4. Prática pedagógica e conhecimento didático: Multiplicação de números racionais sob a forma de fração e suas propriedades

Glória lecionou 6 aulas sobre a multiplicação de números racionais sob a forma de fração e suas propriedades. Das quais, três foram destinadas à consolidação e preparação para o teste. Posteriormente, foi trabalhado o conceito de percentagem em três aulas sobre as quais a professora cooperante considerou que Glória fez as mesmas opções. Nas três aulas analisadas, decidiu propor 4 tarefas com características diferentes. Para introduzir o algoritmo da multiplicação de frações partiu de um conjunto de expressões numéricas, para aplicar o procedimento de cálculo, apresentou uma tarefa com contexto matemático (tarefa 1) e duas tarefas com contextos não matemáticos (tarefas 2 e 3). Em seguida, reviu as propriedades das operações, já conhecidas para os números inteiros positivos, levando os alunos a constatar que se aplicavam ao conjunto dos números racionais positivos. Finalmente, terminou o trabalho com um jogo (*quizz*) (tarefa 4), onde os alunos realizavam cálculos e selecionavam as respostas corretas. Por norma, as aulas começavam com a correção de exercícios enviados para resolver em casa ou pela correção de exercícios propostos em aulas anteriores. Assim, nesta seção, apresento o seu trabalho de preparação, concretização e reflexão quando explorou a multiplicação de números racionais e suas propriedades, em 4 tarefas de natureza diferente. Nos diferentes momentos das aulas, procuro caracterizar questões relativas à comunicação (porquê, quando e como recorreu às diferentes representações, questões e as suas explicações) e as ações de promoção e gestão da aprendizagem e do ambiente de aprendizagem.

5.4.1. Antevisão das aulas

5.4.1.1. Propósito das aulas: Fluidez no uso de procedimentos de cálculo

Glória considerou as aprendizagens relativas aos números racionais como muito importantes. Para a futura professora este tema “vai ser fundamental para quase todas as áreas da Matemática. Ora, quem não percebe nem procedimentos, nem regras, nem aplicação [não consegue progredir]” (GEF). Na sua reflexão final focou-se em questões relativas à linguagem formal referindo a importância do trabalho com diferentes representações. Assim, “procurei que os alunos se familiarizassem com as diversas representações [formais] destes números e pudessem enriquecer o seu léxico matemático” (GRE). Para tal, a futura professora, pretendia concretizar uma primeira

“aula que vai cair muito no exercício. Perceber a mecânica, aplicar, dois ou três exercícios” (GEAA1). Importava conseguir que os alunos conseguissem “estar concentrados um período significativo de tempo” (GEAA1) e “formatá-los um bocadinho para aquilo que é preciso. . . Eles vão ter que despachar-se mais um bocadinho! . . . Torna-se assim um bocadinho massacrante! Mas depois volta a produzir frutos na próxima aula” (GEM). Ou seja, para Glória o trabalho começava pelo domínio dos procedimentos e com rapidez. Nas aulas seguintes pretendia

[D]ar um problema [com contexto não matemático]. . . Aquela ideia de enunciado. De $\frac{3}{8}$ de qualquer coisa, sei lá... Eventualmente de um valor qualquer, de qualquer coisa...!. . . Vou também fazer um exercício [com contexto matemático] daqueles para ver se conseguimos chegar àquela regra. (GEAA2)

Assim, nas aulas seguintes, o propósito era que os alunos conhecessem os procedimentos de cálculo, quer na multiplicação de números racionais na representação fracionária. Através da repetição da aplicação dos procedimentos pretendia que os alunos adquirissem fluidez no cálculo algorítmico para posteriormente “passarem para as propriedades”.

Na entrevista antes da segunda aula, perante a hipótese de iniciar o trabalho com tarefas com contextos não matemáticos considerou que o “contexto pode criar problemas” (GEAA2) fazendo dispersar a atenção do pretendido. Quando na entrevista depois da terceira aula, refletiu sobre a necessidade de os alunos compreenderem os procedimentos e o efeito das operações sobre os números, Glória identificou dois tipos de alunos com capacidades e necessidades diferentes. Por um lado, existiam alunos “para quem é tudo imediato . . . Faz logo sentido e conseguem logo exteriorizar e ver como é que vão aplicar”. Por outro lado, existiam alunos que importa “começar pelo menos a aplicar os exercícios. Se souberem isso já não é mau” e, por isso, o seu objetivo é que “pelo menos decorem o procedimento”. Para a futura professora “não interessa como é que eles lá chegam, interessa é que lá chegam!”. Para Glória, os alunos teriam “mais oportunidades” ao longo da escolaridade para compreender o porquê de determinados factos e procedimentos matemáticos e, por isso, não era necessário que “toda a gente tenha que atingir tudo ou tenha que esmiuçar tudo” (GEDA3). Assim, independentemente das capacidades e dificuldades dos seus alunos, Glória defendia que o que importa é a fluidez de cálculo dos procedimentos na multiplicação de números racionais na forma de fração. Entendia que a compreensão seria conseguida ao longo da escolaridade.

5.4.1.2. Preparação, seleção, desenho e sequenciação das tarefas: Tarefas diferentes e com o mesmo foco

Como vimos anteriormente, Glória começou a preparação das aulas pela consulta do programa e metas e, em seguida, analisou a proposta do manual. Partindo daí pensou “um plano de unidade . . . Tu tens que ter uma linha contínua e depois vais planificando... Nunca planifico só uma aula, é difícil...” (GEM). Nesta fase do trabalho, a futura professora não fazia registos, mas procurou conceber uma sequência de trabalho articulando os diferentes conteúdos: “Penso na unidade, naquilo que para mim é um bloco lógico. . . [Depois vou] distribuir quantas aulas eu vou precisar para aquilo!” (GEM). O estabelecimento da sequência implicou a seleção ou desenho de tarefas, uma vez que Glória gostava de levar todos os recursos prontos, em todas as aulas, de modo a que “se a aula também for mais rápida do que era suposto. . . eu não me importo nada com isso. . . porque os materiais já lá estão” (GEM).

A futura professora preferiu desenhar as tarefas que iria propor e os materiais a utilizar. Sobre as tarefas a propor, Glória explicou que raramente recorria a tarefas de outros porque “não construir para mim às vezes é um perigo” pois podia ter dificuldades em explorar as tarefas, tal como o previsto por quem desenhou, ou seja, “se a pessoa realmente não pensou a tarefa, não sabe se a está a interpretar da mesma maneira que a pessoa que a idealizou ou fez”, deixando em aberto a possibilidade, e as potencialidades, de cada professor reinterpretar tarefas já construídas. Na entrevista depois do processo de ensino da multiplicação de racionais, clarificou as suas ideias: “Na altura, quando nós construímos qualquer coisa de raiz pensamos ali numa série de coisas. . . E depois realmente reformulamos porque achamos que aquilo não vai responder [aos nossos objetivos]” (GEM). Ou seja, para Glória o processo de desenhar as tarefas implicava pensar sobre o que pretendia alcançar, que quantidades envolver porque: “Tenho que ver se os números batem certo, se não vão dar resultados muito estranhos. . . Números muito grandes ou muito estranhos [os alunos rejeitam]!” (GEM). Assim, ao desenhar as tarefas, Glória passava por um processo que podia passar por uma reelaboração até chegar ao produto pretendido. Considerou que assim “Eu aprendo muito mais a fazer do que realmente a aplicar isto!” No entanto, ainda era necessário equacionar a reação dos alunos ao proposto, como explorar as tarefas e equacionar o nível de desafio colocado aos alunos culminando, eventualmente, com uma fase de seleção das tarefas mais adequadas ao pretendido, entre as já desenhadas, ou seja:

À medida que estamos a construir estamos a pensar como é que a vamos explorar como é que a vamos apresentar. . . [Tomo decisões sobre] esta deixo ficar porque oferece um desafio..., ou aquela se calhar é demasiado difícil é capaz de não ser boa para introduzir, portanto equacionamos isso tudo. (GEM)

No que respeita à sequência estabelecida no trabalho com a multiplicação de números racionais, Glória contou que “inventei as tarefas, boas ou más, não importa” e definiu diferentes tipos de tarefas. No caso dos exercícios tinha-se “inspirado nalgum lado, em algumas coisas, quando se remete mais para coisas do tipo exercício. De resto, não!” (GEM). Para preparar a aula das propriedades da multiplicação com números racionais, explicou que para o que era necessário não foi preciso muita “imaginação” e explicou que “foram aquelas porque escrevi, mas podiam ser outros números quaisquer”. Para ela, o que era importante era que os alunos chegassem à regra e que, por isso, era “uma abordagem extremamente simples, em vez de dizer “a propriedade é esta”, vamos ver, resolver com um processo, até ao resultado. Até é uma generalização relativamente óbvia!” (GEM). Ou seja, partindo dos casos dados os alunos definiam a regra. De outro modo “tinha que estar ali a investigar, tinha que dar muitos mais exemplos, tinha que perder muito mais tempo” (GEM). No caso da multiplicação de frações, utilizou a mesma estratégia e, por isso, recorreu a um conjunto de expressões que os alunos, ao resolverem, apoiados com representações pictóricas, iriam concluir o procedimento a adotar na multiplicação de frações (Figura 23).

3. Completa o quadro.

$\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$ Dois quintos de 	$\frac{2}{5} \times \text{[bar with 3 segments, 1st shaded green]} = \text{[bar with 15 segments, 2nd shaded green]} = \frac{2}{15}$ $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$
O produto de dois números representados por frações é uma fração em que o numerador é o produto dos _____ e o denominador é o _____ dos denominadores.	

Figura 23. Expressão apresentada com o procedimento de cálculo da multiplicação

Gostava de recorrer a ferramentas digitais para produzir alguns recursos porque “eu gosto imenso de tecnologias, mexo imenso com elas” e, por isso, preparou vídeos e jogos para consolidar os conteúdos de modo mais apelativo. Para terminar a

apresentação do conteúdo, Glória recorreu à apresentação de um vídeo que repetia a regra de cálculo já estabilizada (Figura 24). Perante a hipótese de o vídeo repetir o mesmo trabalho, mas envolvendo apenas outros números, explicou o seu objetivo: “Foi precisamente por isso que não escolhi [na definição] numeradores e denominadores, porque não é isso que me interessa!”.

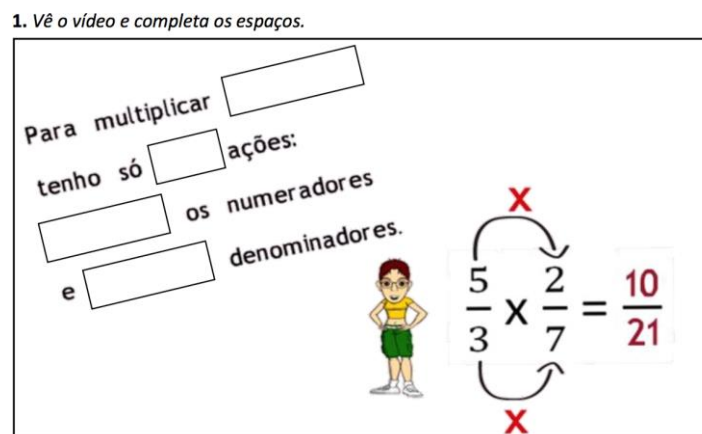


Figura 24. Vídeo para apresentar o procedimento de cálculo da multiplicação

Considerou que esta repetição da informação era importante para prevenir o erro comum na multiplicação de frações

O maior erro que é apontado quando se faz a multiplicação de racionais. . . Determinar o mínimo múltiplo comum, para depois reduzir ao mesmo denominador e fazer a adição. Portanto um procedimento da adição na multiplicação. Ora, se eu não quero que isso aconteça tenho que destacar ou enfatizar que é multiplicar, multiplicar... Dizes assim “isso é simplista”, é sim senhora! Mas é precisamente o que eu quero!. . . Se a ideia vai ficar ou não..., se for repetido 30 vezes, se calhar fica, pronto! (GEDA2).

Assim, Glória apontou as mais valias de projetar o vídeo e posteriormente enviar aos alunos, era “ser apelativo” e poderem “mostrar à mãe ou ao pai, ou ao vizinho” ou, “ver outra vez” (GEDA2). Ou seja, as tecnologias serviam pelo seu efeito novidade que tornaria a informação mais apelativa e repetível exaustivamente. Para ela, a repetição da informação garantia que os aprendiam memorizando os procedimentos a adotar.

Na etapa seguinte do trabalho era proposto o que Glória considerou de exercícios e problemas para consolidar os conteúdos. Todos os problemas propostos tinham a mesma personagem “a Marta. . . Ou os amigos da Marta ou outra coisa qualquer. . . . Acho que faz alguma sequência. . .” (GEDA2). Ainda assim, considerou os problemas

que definiu como “um bocadinho artificiais. [Ninguém] vai cortar morangos aos quartos”. Ainda que não estivesse totalmente satisfeita com o conseguido, propôs as tarefas porque o objetivo era a partir das

Representações [que aparecem] era para fazer o cálculo. Queria que eles percebessem que às vezes [os cálculos a realizar] aparecem em forma de problema. . . Ou seja, desde que tenha “de”, neste caso a proposição vai introduzir o conceito de multiplicação. Esta associação tem que ficar na cabeça deles!” (GEAA1)

Por isso, as tarefas que Glória considerou como problemas consistiam em exercícios de aplicação dos procedimentos, mas apresentados em situações descritas em linguagem natural. De modo a apoiar os alunos na identificação da operação a realizar a instrução da tarefa tinha as palavras “de” e, de modo a que os alunos identificassem que o produto fosse apresentado sob a forma de fração, “surge a palavra “fração. . . Vem precisamente do entendimento que nós temos do número que pode ser efetivamente representado”. Sobre a questão de incluir a palavra fração em substituição da expressão “a parte de”, respondeu recorrendo ao sentido de fração como parte-todo: “Uma fração é uma parte de alguma coisa. A “fração” não é muito habitual, pelo menos nos [problemas] que eu tenho visto. . . Mas esta palavra existe. . . representa, efetivamente, parte ou fração” (GEAA3). Para Glória, a forma como a instrução do problema estava escrita permitia que os alunos compreendessem rapidamente o que lhes era pedido, do ponto de vista da operação e das representações esperadas na resposta final. A estratégia era “treinar” os alunos para a resolução eficaz deste tipo de tarefas

[Esta questão e] a associação entre esta proposição [de] é quase uma pista. É como o xarope, uma pessoa chega ali, chega às pistas e o que é que é lógico “de”, “parte de”, então é isto. O “de” remete para uma multiplicação de frações e é a isso que eu quero que eles cheguem!. . . Descubro onde estão os números e com os número opero aquela operação e pronto, já está! (GEAA3)

Para terminar o trabalho sobre multiplicação de números racionais sob a forma de fração construiu e propôs um jogo. Segundo Glória, o jogo “apela muito ao cálculo mental, procedimentos básicos, a raciocínio à pressa e a fazer operações” (GEDA3). Para ela era um momento importante “para eles continuarem a trabalhar Matemática, mas num ambiente um pouco mais descomprimido, poderem colaborar. . . interagir uns com os outros”. O jogo tinha um segundo objetivo e que era “premiar” a turma por ter “saberem estar” (GEDA3).

Em síntese, a preparação das aulas começou pela consulta do programa e metas e análise da proposta do manual. Glória não fez registos do que foi pensando e explicou

que procurou conceber uma sequência de trabalho articulando os diferentes conteúdos. Este trabalho implicou o desenho de tarefas, recorrendo por vezes, a ferramentas digitais, e preparou exercícios, vídeos, problemas e jogos. Não recorreu a tarefas de outros pois podia ter dificuldades em explorá-las tal como o previsto por quem as desenhou. No processo de definição das tarefas começou a resolver o que tinha concebido para aferir o nível de desafio a propor aos alunos. Este processo, no seu entender, podia levar a uma reelaboração até chegar ao produto pretendido. Depois de definidas as tarefas, selecionou as que considerou mais pertinentes e sequenciou-as. Assim, decidiu começar por apresentar um conjunto de situações, recorrendo a diferentes representações, de modo a que os alunos definissem a regra operatória. Numa outra aula optou por um conjunto de expressões que os alunos ao resolverem, apoiados com representações pictóricas, iriam concluir o procedimento a adotar na multiplicação de frações. Em seguida, apresentou um vídeo que repetia a regra de cálculo já conhecida. Recorreu às tecnologias para tornar a informação mais apelativa e repetível. Na fase seguinte, propôs exercícios e problemas. Na instrução dos problemas, que consistiam em exercícios de aplicação dos procedimentos, eram apresentadas em situações descritas em linguagem natural e onde surgiam palavras que eram indicativas da operação (“de”) e da representação a usar (“fração”) na resolução da tarefa. Ou seja, segundo a futura professora, o problema estava escrito para que os alunos compreendessem rapidamente o que lhes era pedido, do ponto de vista da operação e das representações esperadas na resposta final. O jogo final de consolidação permitia proporcionar um ambiente mais descomprimido e colaborativo e servia para premiar os alunos.

5.4.1.3. Antecipação da resolução das tarefas: Um processo pouco pertinente

Como já vimos anteriormente, Glória considerava que o processo de antecipação das resoluções dos alunos das tarefas propostas era desnecessário e que limitava prática do professor em sala de aula o que o poderia levar a “de certa forma deixam-se cair coisas que às vezes os alunos dizem... que podiam ser exploradas e depois não são . . . Quando estamos demasiado obcecados com um plano, tornamo-nos um bocadinho surdos à turma” (GEM). Acrescentou ainda que “não podemos prever todas as reações que eles têm nem as pequenas estratégias que eles às vezes arranjam” e que era na aula que o professor tinha “algum poder de decisão sobre aquelas que realmente aproveitamos e aquelas de deixamos cair porque, por exemplo não trazem mais-valia”.

Sobre a hipótese de pesquisar fontes e autores ou documentos de apoio para apoiar a elaboração da planificação considerava que, apesar de gostar de “saber o que outros faziam dentro de um tema”,

Não gosto de me condicionar a pensar que vai ser isto, aquilo ou aqueloutro . . .
Um professor sem querer vai conduzir para aquilo que espera . . . Porque ele já antecipa e às vezes até vai colocar a questão [provocando a situação]. (GEI)

Assim, para Glória parecia não fazer sentido incluir na planificação a antecipação de respostas dos alunos/erros ou dificuldades, uma vez que não era positivo e poderia fazer emergir erros. No entanto, simultaneamente, antecipar os resultados já fazia sentido, pois disse que “devo estar preparada com um leque de soluções!” (GEI). Para ela o importante era analisar a tarefa e “[ver] que a tarefa tem potencial!” (GEI).

No entanto, ao longo das entrevistas previu que os alunos frequentemente generalizam os procedimentos de cálculo da divisão de frações na multiplicação, como vimos anteriormente.

Ou seja, a antecipação de resoluções, pedida na ESE, era tida por Glória como um processo desnecessário, limitador da ação do professor em sala de aula, podendo eventualmente levá-lo a provocar situações desnecessárias. Apesar de considerar que não era possível prever estratégias, previu que os alunos podiam generalizar os procedimentos de cálculo da adição de frações na multiplicação e, por isso, previu tarefas que entendia que podiam prevenir este tipo de estratégias que considerou erradas. Note-se que considerava a possível consulta de literatura sobre erros e dificuldades de alunos em determinados tópicos como limitadora da sua ação.

5.4.1.4. Momentos das aulas: Uma estrutura, diferentes tarefas, um foco

As aulas de Glória estavam pensadas e organizadas com um padrão idêntico, conforme anexo 16, apresentando sumariamente os diferentes momentos da aula. Caso existisse algum trabalho para corrigir da aula anterior ou de casa, isso era feito e, em seguida, introduzia o conteúdo novo (Figura 25).

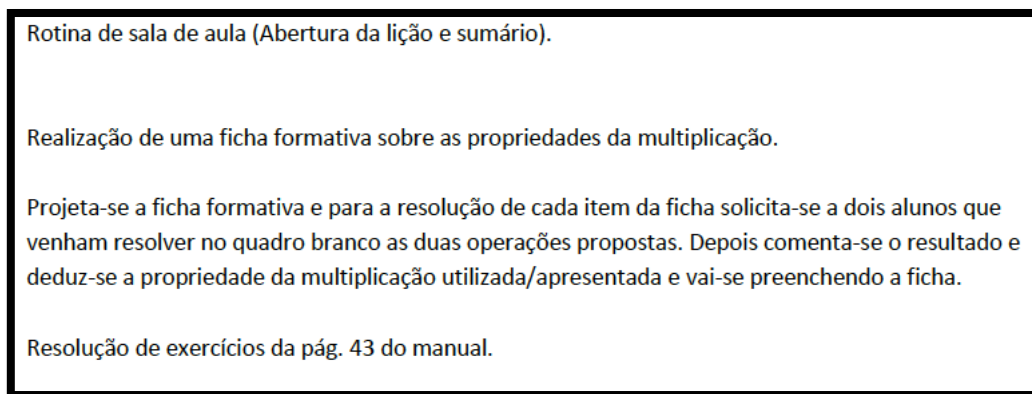


Figura 25. Planificação de Glória: Aula sobre propriedades da multiplicação

Complementando a informação da planificação formal, Glória explicou que começava por apresentar um conjunto de situações simples, que se iam repetindo, e chamava “pares de alunos e vão resolver [no quadro], independentemente, um e outro, e vamos ver, aqui neste caso, o que é que acontece”. No final, esperava que os alunos chegassem “ao mesmo resultado quer de uma forma quer de outra. E aqui vamos perguntar o que é que aconteceu” (GEAA2) de modo a chegar à regra ou procedimento de cálculo. Deduzido o procedimento, facto ou regra partia para a resolução de exercícios.

Sobre a previsão do questionamento a fazer, considerava que “faz parte do património intelectual de cada professor. Muito mal seria se o professor realmente não sabe o que vai perguntar aos alunos” (GEM). Para ela, o questionamento dependia das “circunstâncias. . . Todos os professores terão um manancial de questões ou de estratégias” (GEM), mas, nem nas entrevistas, nem na planificação entregou enunciou exemplos. Segundo disse, “podia ter previsto 20 questões. . . quando estive a construir materiais, o que é que podem perguntar o que é que poderão ter de dúvidas, o que é que eles me poderão responder...” mas em nenhum momento registou porque “as pessoas ficam presas” àquilo que andaram a escrever. Considerou isso um trabalho desnecessário.

O terceiro momento da aula passava pela presença de um aluno no quadro a corrigir as tarefas propostas. Os restantes alunos, nos seus lugares, tinham a possibilidade de apresentar as suas ideias. A comunicação neste momento da aula passava por um aluno “tentar dizer ‘eu pensei desta forma’, e há sempre uma grande parte da turma que está a ouvir como é que ele pensou...” O professor iria acompanhando a apresentação do aluno “E nós, às vezes, até ajudamos em termos de

linguagem e reformulamos um bocadinho aquilo que ele disse para tornarmos mais claro” (GEM).

Assim, na planificação formal, Glória previa sumariamente os diferentes momentos da aula. Cruzando esta planificação com as entrevistas constatamos que previa começar por apresentar situações simples de modo a deduzir o procedimento, facto ou regra e, em seguida, partia para a resolução de exercícios. No momento de resolução pelos alunos em modo autónomo, previa circular respondendo a dúvidas e fazendo questões. Note-se que não previu quaisquer aspetos relativos à comunicação que iria desenvolver. Esta iria depender do que iria acontecer ao longo da aula, nomeadamente quando e quais as representações a apresentar ou explorar, quando e quais as questões a colocadas, que explicações/ sínteses apresentar aos alunos. O último momento previsto era a correção das tarefas propostas onde definiu que chamaria um aluno para apresentar a resolução e onde ela iria acompanhando a apresentação de modo a completar as ideias apresentadas.

Em síntese final, o processo de planificação foi vivido sem que Glória fizesse registos das etapas pensadas com detalhe. A sua planificação formal era uma síntese do que previa que acontecesse nos diferentes momentos das aulas. Independentemente das capacidades e dificuldades dos seus alunos, defendeu que o que importava era a fluidez de cálculo dos procedimentos. A preparação das aulas implicou o desenho de tarefas como exercícios, vídeos, problemas e jogos. No processo de definição das tarefas começou por resolver o que tinha concebido para aferir o nível de desafio a propor aos alunos. Depois de desenhadas as tarefas, selecionou as que considerou mais pertinentes e sequenciou-as. Para introduzir o tópico começou por apresentar um conjunto de situações, recorrendo a diferentes representações (pictóricas e simbólicas), de onde se deduzia o procedimento a adotar na multiplicação de frações. O vídeo, os exercícios e os problemas consistiam em exercícios de aplicação dos procedimentos, ainda que alguns fossem apresentados com um contexto matemático ou não matemático. Nos contextos não matemáticos eram dadas indicações, recorrendo a palavras-chave, sobre os procedimentos e representações a adotar. Não antecipou resoluções corretas ou incorretas, mas nas entrevistas explicitou que esperava prevenir o erro de generalizar o algoritmo da adição na multiplicação. A sua descrição dos diferentes momentos era sucinta e apresentava três momentos fundamentais: apresentação de situações de onde se deduzia o algoritmo e respetivo reforço da informação; resolução das tarefas

propostas de modo autónomo; e correção das tarefas propostas onde um aluno apresentava a resolução e o professor completava as ideias.

5.4.2. Concretização das aulas

A primeira aula observada, com duração de 90 minutos, começou pela correção de exercícios sobre números racionais representados por numerais mistos. Os exercícios eram todos idênticos e foram resolvidos no quadro, por alunos chamados um a um, e corrigidos em detalhe pela professora. A correção de todos os exercícios foi resolvida com o mesmo procedimento de conversão de numeral misto para fração imprópria recorrendo à estratégia formal (e.g., $2\frac{1}{3} = 2 \times 3 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$). Na segunda metade da aula passou-se à multiplicação de racionais representados por frações.

5.4.2.1. Aula 1: Introdução da multiplicação de números racionais a partir de exemplos

De modo a organizar o ambiente de aprendizagem, Glória introduziu a multiplicação de frações começando por distribuir as folhas com uma tarefa com três questões e manteve a organização individual dos alunos (Anexo 17). A sua preocupação era existirem condições de acesso à informação no quadro e registo escrito: “Toda a gente consegue ver o quadro? Vocês também têm a folha à frente?”

Projetou a primeira questão no quadro (Figura 25), onde recorreu a representações pictóricas de modo a ilustrar as operações envolvidas. As representações simbólicas eram usadas para representar as quantidades. Estabeleceu o assunto a tratar na aula: “Então vamos olhar para isto que temos aqui à frente. É daquelas que não engana nada, diz logo no cabeçalho: multiplicação de racionais”.

3×4 O triplo de quatro	$3 \times \square\square\square\square = \square\square\square\square\square\square\square\square\square\square = 12$
1. De acordo com o exemplo acima, pinta os espaços correspondentes nas figuras de modo a representarem as expressões numéricas indicadas.	
$3 \times 0,4$ O triplo de quatro décimas	$3 \times \begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = 1,2$
$3 \times \frac{1}{4}$ O triplo de um quarto	$3 \times \begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \frac{3}{4}$

Figura 26. Exemplo 1 apresentado por Glória na multiplicação de números racionais

O início da aula começou pela apresentação de um exemplo com três expressões ilustradas com representações pictóricas que os alunos deveriam pintar em conformidade com o que era apresentado simbolicamente. A primeira expressão apareceu no quadro já pintada, ou seja, já “resolvida” como exemplo a seguir. Na interação com os alunos, Glória *focalizou* na ideia de triplo e *guiou os alunos* para a leitura das expressões, considerando o sentido de adição sucessiva da multiplicação. Para corrigir a terceira expressão onde estava envolvido o triplo de $\frac{1}{4}$ chamou um aluno ao quadro (Figura 27). Este seguiu os exemplos anteriores e pintou a quarta parte do primeiro retângulo de modo a representar a expressão $3 \times \frac{1}{4}$. A apresentação da resolução teve dois passos. No primeiro, o aluno explicou que pintou “1 quadrado em 4 quadrados” e Glória *redisse* a frase explicitando a relação parte–todo envolvida no fator representado pictoricamente, dizendo: “Portanto, isto é uma unidade e está dividida em quatro partes e pintaste uma parte. Isso é $\frac{1}{4}$, é?”

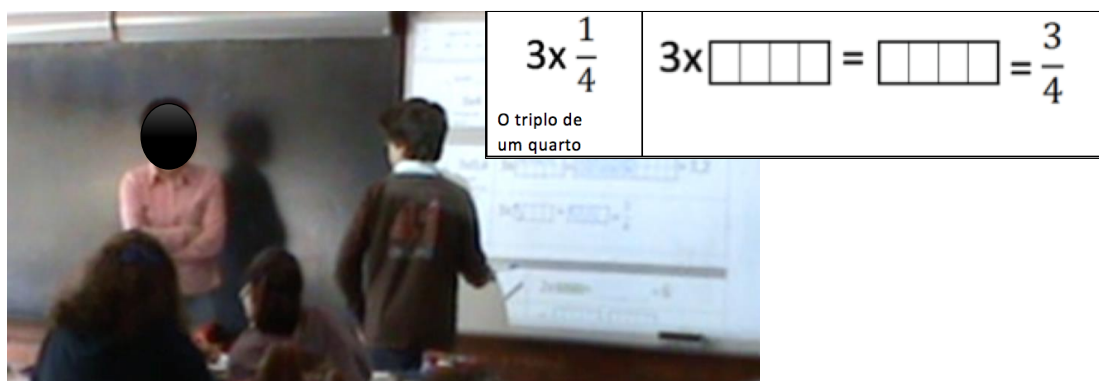


Figura 27. Exemplo 1 apresentado e resolvido da multiplicação de números racionais

Em seguida, era necessário representar a operação realizada, mas, como apenas era sugerido um retângulo dividido em quatro partes, o aluno pintou o produto. Ou seja, as representações *sugeridas* na situação não permitiram representar a multiplicação envolvida. O exemplo proposto por Glória *guiou os alunos* para a representação das quantidades envolvidas e, por isso, o segundo retângulo foi pintado representando $\frac{3}{4}$, o produto da multiplicação. A futura professora mostrou-se satisfeita com a resolução ainda que quando *redisse* a resolução do aluno atribuindo-lhe o significado de adição sucessiva.

5.4.2.2. Resolução da expressão “ $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$ ”

Em seguida, Glória apresentou aos alunos uma expressão e respetiva representação pictórica como um exemplo onde se multiplicam duas frações (Figura 28).

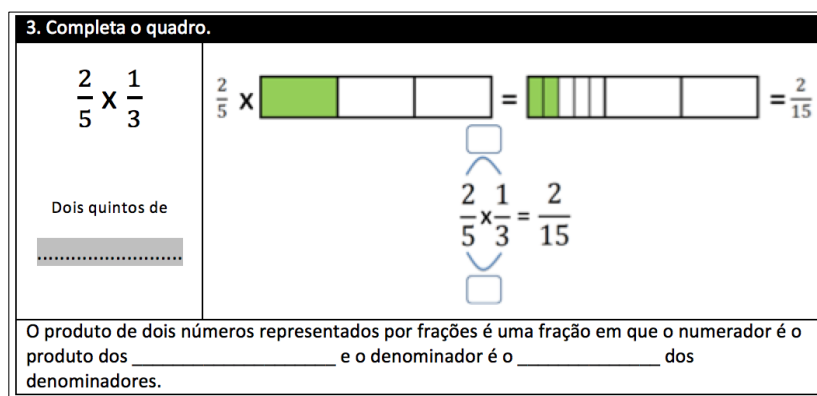


Figura 28. Expressão 3 do exemplo 1 na multiplicação de números racionais

No momento seguinte discutiu-se coletivamente a resolução, uma vez que vários alunos tiveram dúvidas. Estas dúvidas eram naturais, uma vez que os alunos ainda não tinham tido contato com este tipo de operações. Na primeira fase, *focalizou* na relação entre a figura e a quantidade envolvida. Glória *guiou* os alunos no estabelecimento da unidade de referência. Em seguida *desafiou* os alunos a pensar na figura seguinte procurando que estes explicassem porque estavam pintadas 2 partes das cinco que dividiam um terço (Figura 29). Glória, perante diferentes resoluções, optou por solicitar a participação de uma aluna e *focou-se* no procedimento formal da multiplicação de frações, operando com os numeradores e denominadores. Quando Glória voltou à *representação pictórica* de dois quintos de um terço um dos alunos mostrou-se confuso com o retângulo dividido em partes desiguais. Depois de uma primeira tentativa, por parte de Glória, de o questionar de modo a fazer entender a representação decidiu explicar:



Figura 29. Representação de $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$

Glória: Quanto é que representava aqui [representação de $\frac{1}{3}$]?

Alunos: $\frac{1}{3}$.

Glória: $\frac{1}{3}$. Aqui também representava $\frac{1}{3}$ [aponta para a primeira parte de três do segundo retângulo]. E agora, disseste que foi aqui dividiste isto em 5 partes, não foi? E dessas 5 partes representaste só...

Bernardo: Duas.

Glória: Duas. E então aqui seria os $\frac{2}{5}$ deste $\frac{1}{3}$. Ora se nós agora continuássemos a fazer as divisórias todas iguais, quantas divisórias é que colocávamos?

(...)

Alunos: 15.

Glória: 15. E quantas é que eu tenho pintadas?

Alunos: Duas.

Glória: Duas. Então, já percebeu de onde é que vem? São duas partes de 15. Nós havemos de retomar isto, foi só uma abordagem.

Glória, de modo a *explicar o processo passo-a-passo* da operação representada, retomou a ideia inicial de que existe uma unidade de referência definida $\left(\frac{1}{3}\right)$ e que depois era tomada uma parte da unidade estabelecida $\left(\frac{2}{5} \times\right)$, *definindo os principais termos e mostrando como cada passo no procedimento é modelado com a representação pictórica*. Deste modo, procurou que os alunos compreendessem que a unidade ficou dividida em 15 partes iguais, dividiu as terças partes em cinco e só depois estabeleceu a relação parte – todo entre 2 e 15, *esclarecendo a questão em análise e chegando à resposta pretendida*.

Depois de clarificada a representação de $\frac{2}{15}$, Glória avançou para a ideia central da aula e retomou o procedimento de cálculo da multiplicação de frações. Nessa altura, chamou a atenção de que este procedimento é diferente dos da adição e subtração. No final do processo, coletivamente, os alunos completaram a frase com lacunas, em baixo, sobre o procedimento de cálculo na multiplicação de frações.

Assim, o processo de introdução da multiplicação de números racionais na representação fracionária começou com a criação de um ambiente para a apresentação de uma nova ideia. Aos alunos foi entregue uma folha com os exemplos a explorar para que todos ficassem com a informação. Importava que cada aluno visse bem a informação projetada no quadro. Para ilustrar as operações apresentadas, recorreu a representações pictóricas e simbólicas mas analisando-as ficam claras as quantidades operadas e o produto obtido. Recorrendo a questões de focalização e confirmação, *guiou* os alunos na leitura das expressões. Nas expressões envolvendo frações sugeriu a representação, mais uma vez, e *guiou e informou* os alunos recorrendo ao processo de

redizer para introduzir a ideia de que a multiplicação resultava de uma adição sucessiva. Na terceira etapa de exploração dos exemplos, procurando que os alunos deduzissem os procedimentos de cálculo começou por iniciar a discussão *guiando e desafiando* os alunos mas acabou por os focar nos procedimentos de cálculo a realizar. Perante as dificuldades de compreensão *terminou o processo elaborando a explicação completa*. Durante a explicação explicitou o processo passo-a-passo, definiu os principais termos e mostrou como cada passo foi modelado pelas representações pictóricas. No final esclareceu a questão chegando à resposta pretendida. De modo a não restarem dúvidas, e porque sabia que os alunos, por vezes, confundem procedimentos entre operações, alertou para a diferença entre os procedimentos na adição e multiplicação de frações.

5.4.2.3. Aula 2: Recapitular o aprendido e proposta e correção da Tarefa 1

Na segunda aula, de 45 minutos, para “recapitular” o aprendido, Glória projetou um vídeo sobre o procedimento de cálculo da multiplicação de frações e pediu aos alunos para preencherem uma frase com lacunas, muito próxima da preenchida na aula anterior. Glória utilizou o vídeo para recordar o procedimento a adotar multiplicando os respetivos numeradores e denominadores. Depois do visionamento, pediu para uma aluna repetir o enunciado e voltou a repetir a informação. Em seguida, propôs um “exercício de consolidação”:

Glória: Isto foi o que nós concluímos ontem. Portanto neste caso estamos a multiplicar racionais e especificamente frações. Só temos que fazer o quê? Qual é a única operação que nós temos que fazer?

Alunos: Multiplicação.

Glória: Multiplicação. Não há mais nenhuma, correto? Multiplicamos quer neste caso os numeradores quer depois os denominadores que é aquilo que se vê aqui. Correto? . . . Ninguém tem dúvidas. Ninguém confunde isto com uma operação qualquer. Pois não? Pronto. Então agora que já pensámos nisto, vamos inventar! O que é que vos peço na questão 2? (Figura 30)

Alunos: Inventar?

Glória: Inventar frações. Peço-vos para inventar. Só não se inventa no teste. Aqui podem inventar à vontade. Portanto vocês inventem, eu vou passar pelos vossos lugares. Vou ver primeiro, vocês inventam duas frações que vão multiplicar porque é aquilo que é pedido e depois vamos ver se vocês fizeram os cálculos corretamente.

2. Inventa frações e efetua as multiplicações.

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \times \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{} \times \boxed{}} = \boxed{}$$

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \times \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{} \times \boxed{}} = \boxed{}$$

Figura 30. Tarefa 1 proposta por Glória na multiplicação de frações

Depois de procurar certificar-se que todos os alunos tinham compreendido o procedimento a seguir na multiplicação de frações, Glória propôs a Tarefa 1 *focando* a atenção na palavra inventar. Pretendia que os alunos escolhessem diferentes números para aplicar o procedimento definido. Importa referir que, tal como vimos na segunda intervenção do diálogo anterior, no momento em que propôs a tarefa, sublinhou mais uma vez a importância de não se usar o procedimento da adição na multiplicação e vice-versa. Parecia querer garantir que o erro frequente da generalização de procedimentos entre operações não ocorresse, apesar de não terem ainda surgido situações dessa natureza. O resto da aula desenrolou-se em torno da resolução dos exercícios inventados pelos alunos e que envolviam numerais com diferentes relações.

Na fase de resolução autónoma, Glória foi circulando, observou as resoluções dos alunos, manteve o ambiente calmo e silencioso, interagindo pouco com os alunos. Este momento durou 2 minutos e rapidamente, a futura professora passou para o seu lugar no quadro para que os alunos fossem apresentando do seu lugar as suas propostas. Durante a apresentação das resoluções *focou* os alunos no pretendido, indicando: “Multiplicas só o numerador e o denominador. É exatamente isso!” Num dos episódios clarificou a questão das frações equivalentes a 1, e *guiou* os alunos à ideia de que: “Porque 4 a dividir por 4 é 1. Portanto qualquer fração, sempre que o numerador e denominador são o mesmo, nós ficamos sempre com o que nós representamos por 1.” Note-se que nesta explicação atribuiu o significado de quociente às frações. Num outro momento, *informou* os alunos que deviam apresentar os produtos obtidos na forma irredutível e, questionando continuamente, *guiou-os* para o cálculo de frações equivalentes na forma irredutível. Perante a discordância de dois alunos sobre se $\left(\frac{8}{16}\right)$ era irredutível, Glória chamou outra aluna para o diálogo e esta, com o seu apoio, foi simplificando a fração. Como era hábito a última intervenção foi sua:

Então o que ela fez, a Alice. Nem sempre nos lembramos imediatamente para tornar uma fração neste caso simplificar para uma fração irredutível. Ela aqui fez parcelarmente, ou seja fez, dois passos. Isto se vos acontecer, ok. . . Temos é que chegar à irredutível. Se nos for pedido isso.

Os diálogos, em torno das expressões propostas pelos alunos, foram-se sucedendo até ao momento em que Glória decidiu passar para as tarefas seguintes.

Assim, depois de informar o procedimento de cálculo da multiplicação de frações através de um vídeo, Glória propôs a tarefa 1 (Anexo 18). A tarefa tinha um nível de desafio baixo, uma vez que se tratava de aplicar os procedimentos acabados de estabelecer, e permitia uma grande variedade de respostas uma vez que os alunos poderiam definir os números envolvidos, assumindo uma natureza mais exploratória. Depois de um breve momento de trabalho autónomo, passou-se para a correção das resoluções propostas pelos alunos onde começou por desafiar os alunos a pensar diferentes operações mas que posteriormente guiou e informou na apresentação das resoluções. Alertou para diferentes cuidados a ter na resolução destes exercícios. Uma das questões foi a importância de estabelecer a solução com uma fração irredutível e a existência das frações unitárias, recorrendo ao significado das frações como quociente.

5.4.2.4. Proposta e resolução das tarefas 2 e 3

Ainda na segunda aula, importava mobilizar os procedimentos noutra tipo de tarefas. Glória passou para as tarefas de consolidação que considerou serem problemas. No momento de proposta das tarefas focou os alunos no enunciado e tornou explícito que iria circular para garantir que seguiam o indicado no enunciado e que aplicavam o procedimento corretamente. Propôs duas tarefas com um contexto do quotidiano. Na tarefa 2, com duas questões, os alunos teriam de multiplicar um número inteiro por uma fração e depois subtrair e, na tarefa 3, teriam de multiplicar duas frações. Referiu que a tarefa 3 (Figura 31 à direita, em baixo) era um problema e, por isso, era para “pensar”:

Glória: Pronto. Vamos passar para o exercício seguinte. Isto é, um problema e vamos pensar nele.

Aluno: Podemos fazer?

Glória: Podem fazer, pensar nele e tal. O Bruno já está a pensar nele. Eu, entretanto, vou vendo as vossas operações.



3. A Marta comprou, a prestações, uma prancha de surf nova por 246€. Ela já pagou $\frac{2}{3}$ do total.

3.1. Quanto terá pago até agora?

3.2. Quanto dinheiro lhe falta entregar?

4. A Marta tinha imensos TPC para fazer no fim de semana. Os de Matemática eram $\frac{1}{4}$ dos TPC e a Marta conseguiu acabar apenas $\frac{2}{3}$.

Descobre que fração dos TPC conseguiu a Marta concluir.



Figura 31. Tarefas 2 e 3 de aplicação de procedimentos na multiplicação de frações

Glória propôs as tarefas dando indicação que eram mais desafiantes. Não fez qualquer referência ou pergunta sobre o contexto e os dados envolvidos. Pretendia que os alunos resolvessem as operações aplicando os procedimentos anteriormente retomados. Em seguida, no momento de trabalho autónomo, começou a circular pela sala (Figura 32), observando as resoluções, aluno a aluno, e fazendo pequenos comentários de diferentes tipos, em voz alta, mas dirigidos a um aluno específico. Uns, recorrendo por vezes à ironia, indicavam se o aluno estaria a resolver corretamente, ou não: “Se fosse só isso estava a resposta no enunciado” e “Aquilo que fizeste até agora não corresponde à multiplicação” ou “Está bem feita! Tudo bem.”. Outros comentários indicavam que ainda faltavam passos para terminar a resolução: “Também não é irreduzível”.



Figura 32. Glória a monitorizar as Tarefas 2 e 3 da multiplicação de frações.

No final deste momento da aula, uma das alunas solicitou apoio. Glória, depois de observar a resolução, percebeu que o que estava em questão era tornar a fração

irredutível. Sem que aluna tivesse especificado a sua dúvida, foi fazendo várias questões de focalização encadeadas, *guiando* a aluna na resolução: “Dá de certeza para dividir! Quais são os critérios de divisibilidade que tens? O 3? O 5?” Ele termina em quê?”. Assim, os momentos de proposta e resolução das tarefas foram curtos e Glória durante os dois momentos foi focando os alunos na resolução das tarefas e nos procedimentos a adotar, foi verificando se os alunos estavam a usar os procedimentos ensinados ou guiando a resolução recorrendo a questões de focalização encadeadas. Perante as resoluções dos alunos, deu importância à aplicação dos procedimentos.

5.4.2.5. Apresentação da resolução e correção da tarefa 2

Depois de observar o trabalho de todos os alunos, Glória comentou em voz alta “Primeiro vamos ver... Já há dois colegas que já tentaram resolver”. Em seguida, um aluno, Tiago, declarou que já tinha terminado as duas tarefas. Glória chamou-o e iniciou o processo de apresentação à turma, quatro minutos depois de ter proposto a tarefa. O aluno transcreveu a sua resolução para o quadro e explicou a sua resolução (Figura 33):

Figura 33. Resolução da tarefa 2 de Tiago.

Tiago: Bem, já que $\frac{2}{3}$ foram pagos, era já $\frac{1}{3}$ para multiplicar. Portanto $\frac{1}{3}$ depois a multiplicar e fiz a divisão e deu-me 82 euros.

Gui: E agora vai multiplicar.

Glória: E ele agora vai multiplicar por quanto, Gui? O que é que achas que ele vai fazer agora.

Gui: Vai multiplicar por 2.

Glória: Ele fez $\frac{1}{3}$ e agora $\frac{2}{3}$. . . E depois vamos ver se temos.... Deu 164. Tens aqui. E deste a resposta também. Podes sentar.

Entretanto, outro aluno, Jorge, informou que tinha realizado a tarefa com outra estratégia, ainda que tivesse dado o mesmo resultado. Glória, depois de verificar a resolução, explicou à turma, sem recorrer a um novo registo:

Glória: Ah! OK! Pronto já agora podemos também discutir a estratégia do Jorge. Calculastes $\frac{1}{3}$ dividindo também, não foi? O que o Jorge fez diferente em relação a esta resolução foi que o Tiago chegou ao fim e dá $\frac{1}{3}$ e depois $\frac{2}{3}$, duas vezes $\frac{1}{3}$, igual 82 vezes 2 dá 164 euros. O Jorge pensou... Se $\frac{1}{3}$ são 82 euros, então foi retirar ao total 82 euros. Foi isso que tens aí? . . . Vocês perceberam a diferença entre o raciocínio do Jorge e do Tiago? Vai dar exatamente ao mesmo, só que a ideia é esta. Neste caso até aqui é igual, porque eles pensaram em dar $\frac{1}{3}$. Então vamos lá ver a ideia será $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$, dá quanto Gabriel?

Gabriel: $\frac{3}{3}$

Glória: $\frac{3}{3}$ que é igual a quê?

Gabriel: A 1.

Na primeira questão, o aluno que terminou primeiro registou a sua resolução no quadro e apresentou, com a intervenção de Glória a sua resolução. Quando um aluno propôs uma estratégia alternativa, a futura professora analisou-a e apresentou à turma, comparando as duas estratégias. A segunda estratégia não ficou registada no quadro.

Na aula seguinte foi retomada a tarefa 2 onde Glória reviu os cálculos da primeira questão. Em seguida, indicou como deveriam interpretar os enunciados:

Então a expressão “de”... Vou só aqui escrever para nos entendermos. . . Vai significar que operação? [pergunta retórica] Vai significar uma multiplicação. Nós temos que ter muito cuidado, porque os enunciados em Matemática servem-nos para obtermos aquilo que pretendemos. Correto? Isto é uma regra... Leio o enunciado... um terço de, vai-se traduzir [reforçando a entoação no “de”]... Um terço de nove euros... Imaginemos que diz um terço de nove euros... Isto traduzido matematicamente o que é que vai dar? [ouvem-se algumas tentativas de respostas de alguns alunos e Glória continua] vai dar três euros. Eu se fizer a expressão um terço de nove euros, neste caso devo indicá-la assim [Glória regista no quadro $\frac{1}{3} \times 9$]. Que dá 3 . . . Quando lemos um enunciado conseguimos ver isto!

Assim, também os momentos de apresentação e correção da tarefa 2 foram curtos. No dia seguinte, para terminar a correção da segunda questão e preparar a proposta da tarefa 3, a futura professora indicou junto dos alunos como deveriam interpretar os enunciados dos problemas estando atentos à expressão “de” que permitia identificar a operação a realizar.

5.4.2.6. Explicação da resolução da tarefa 3

Depois de referir que num enunciado “de” indicava que era preciso realizar uma multiplicação, Glória passou para a proposta da tarefa 3: “Agora, vamos tentar,

pensando nisto, resolver o que nos falta. . .” (Figura 34). Quase de imediato passou para a correção da tarefa e pediu para o aluno passar a sua resolução e explicá-la.

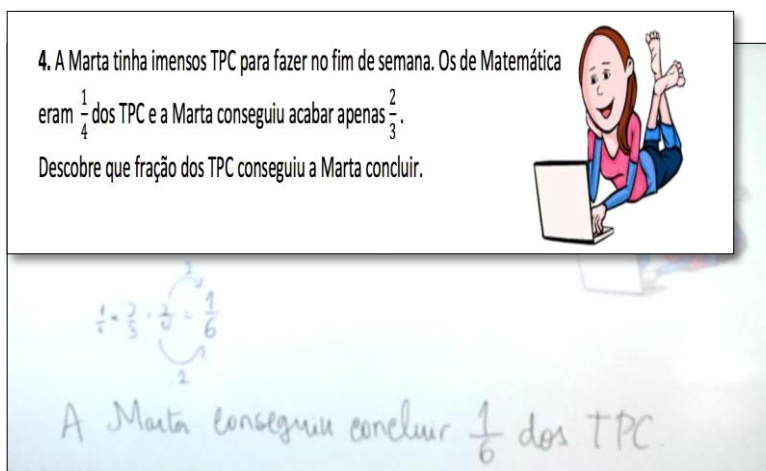


Figura 34. Tarefa 3 e respetiva registada no quadro

O aluno mostrou dificuldade em explicar e, rapidamente, Glória explicou:

Glória: Estão a ver aqui o enunciado [apontando para a projeção no quadro], dois terços de um quarto, logo vai-se exprimir assim em termos de expressões numéricas. Ele multiplicou. Esta fração, já agora, é irredutível ou não? Nós que estamos habituados a que não conseguimos simplificar... Ou obter frações irredutíveis... Obtiveste um fração irredutível ou não?

Aluno no quadro: Obtive.

Glória: Obtiveste? Dois e doze, não há nenhuma relação entre eles?

Vários alunos: sim.

Leandro: Um sexto.

Glória: Um sexto. Porquê?

[Aluno no quadro tenta explicar e é interrompido por Glória]

Glória: Deixa o Leandro explicar.

Leandro [aluno sentado]: Dividi por dois.

Glória: dividiste por....dois...Sim, mas por dois o quê?

(...)

Bernardo: Fiz o máximo divisor comum.

Glória: O máximo divisor comum entre estes dois... O máximo divisor comum... Entre o numerador e o denominador...E então qual é o máximo divisor comum aqui? Aqui dividimos por quanto? Foi divisão, não foi? Aqui divides por quanto? Foi por dois, não foi? Nós sabemos que quando queremos simplificar temos que fazer exatamente a mesma operação [no numerador e denominador]... E aqui também que tem que ser por dois. Percebeste?

Assim, Glória, com o contributo de vários alunos, construiu uma explicação. Começou por definir os principais termos e a operação a realizar, em seguida sublinhou os passos a tomar recorrendo à resolução simbólica que o aluno já tinha registado e esclareceu como se podem converter frações equivalentes na forma irredutível.

Terminada a explicação da resolução da tarefa 3 alertou para que todos registassem a resolução e certificou-se de tal, circulando pela sala.

5.4.2.7. Aula 3: Proposta, resolução e correção das questões da Tarefa 4

Nesse mesmo dia, Glória passou para o assunto seguinte, distribuindo uma nova ficha que foi de imediato resolvida no quadro (Anexo 19). As diferentes propriedades da multiplicação de números racionais foram sendo revistas partindo de exemplos dados, recorrendo apenas a representações simbólicas. Quando foi analisada a existência de um elemento absorvente um aluno representou o produto com $\frac{0}{0}$ e Glória decidiu analisar a ideia em grande grupo. De modo a que os alunos compreendessem o erro contextualizou a situação e pediu aos alunos para efetuarem mentalmente sucessivamente 373×0 , 3×0 , 5×0 e 4×0 . No final os alunos pareceram compreender o erro. A aula desenrolou-se com os alunos a serem chamados ao quadro para preencherem os numerais em falta e os produtos obtidos. No final nomeou as propriedades da multiplicação e relembrou as regras de prioridade da resolução de expressões numéricas.

Para fechar o processo, no final do trabalho com a multiplicação de números racionais, com foco nos procedimentos de cálculo, Glória propôs um jogo para uma aula de 45 minutos. As diferentes questões tinham temporizador para responder e eram apresentadas com pontuações diferentes correspondendo a tarefas que considerava terem diferente nível de desafio para os alunos. As tarefas eram de dois tipos: com expressões ou situações contextualizadas muito próximas das propostas em aulas anteriores (Figura 35), sendo assim introduzidas:

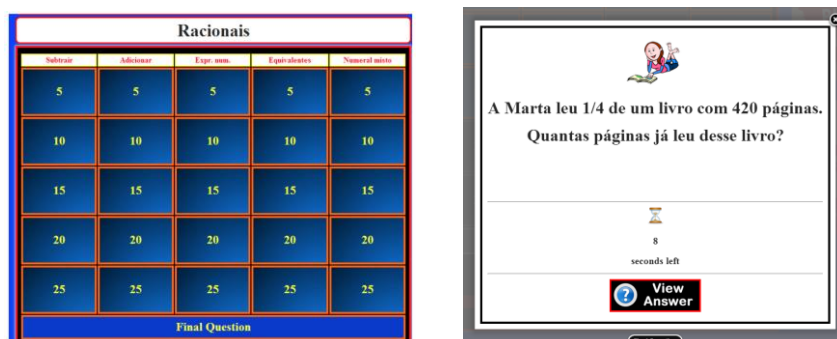


Figura 35. Tarefa 4: jogo sobre multiplicação de números racionais

Bem, vou tirar então isto e vamos passar para o jogo, os pares são os mesmos [de outras aulas]. [Burburinho e alegria quando os alunos veem o jogo] Clara, se não te importas passas para ali para aquele lado... [organiza os alunos com alguma confusão] É melhor deixarem uma folha ou um caderno em cima. Basicamente por equipas vão respondendo a questões que valem determinados pontos... Chiu! Respondem à questão dentro do tempo que é colocado têm que registar todos os cálculos necessários. Aqui! [mostra a folha plastificada para colocar os registos]

Glória começou o trabalho indicando o tipo de tarefa, organizou os alunos em pares e, porque uma das alunas tinha faltado anteriormente, explicou-lhe o modo de trabalho. Informou que os alunos deviam registar as suas respostas e cálculos efetuados em folhas próprias e estabeleceu as regras para ganhar pontuação. Apesar de se tratarem de expressões simples, indicava aos alunos que deveriam “registar todos os cálculos necessários”. Considerando o trabalho realizado anteriormente, compreende-se que pretendia que os alunos resolvessem as expressões recorrendo a procedimentos, registando as resoluções ou soluções, para depois confrontar com a resposta dada nas soluções. Esta ideia é visível no feedback dado a uma aluna como se vê de seguida. Começou por realizar uma jogada, para que os alunos compreendessem o que deviam fazer:

Glória: Então, esta pergunta não conta para ninguém, a não ser para a Ivone para ela perceber. Ivone, vamos lá. [Projetou $3/5 \times 7/9$] O que é que tu fazias?

Ivone: 3 vezes 7 e 5 vezes 9.

Glória: Bom, indicavam a resposta e depois tu mostravas dentro do tempo. [A colega de estágio, junto do computador, clica na resposta e o jogo indica a resposta esperada] Percebes a ideia?

Na demonstração do jogo, Glória *informou* os alunos sobre os conhecimentos a usar e sobre as regras do jogo estabelecendo o que pretendia que eles fizessem. Uma vez que existiam itens que envolviam as operações de adição e subtração, começou por *focar* os alunos no conteúdo a mobilizar, *informando* que a principal operação envolvida era a multiplicação. Em seguida, tornou explícito que o nível de desafio era reduzido e estabeleceu o tipo de trabalho pretendido (cooperativo), responsabilizando todos os alunos pela resposta. A expressão numérica envolvia números que não se adequam a cálculo mental e a aluna evidenciou dominar o procedimento de cálculo do algoritmo da multiplicação. A jogada terminava com a obtenção da resposta. Ao longo do jogo foram propostas diversas tarefas. Glória foi tentando gerir o burburinho, cada vez maior ao longo da aula, e simultaneamente dinamizar o jogo. Quando a questão surgia, os alunos tinham um tempo limitado para obter a resposta. Ia chamando a atenção para esse facto e estimulava o surgimento de resultados: “Olhem o

tempo está ali a correr . . . Estão a conseguir? Estão os colegas a tentar fazer no caderno, não?

Acabou o tempo. Resposta?” Por vezes, a questão era muito simples (nível 1) e a futura professora limitava-se a ouvir o grupo mais rápido a obter o resultado. Quando a resposta não era corretamente verbalizada, completava depois de observar o registo escrito de modo a que os restantes grupos pudessem compreender o resultado e comparar com o seu. Em questões mais complexas, desenvolvia pequenas explicações: “Se 1 hora são 60 minutos então temos que calcular $\frac{5}{4}$ de 60. Daria 75 minutos. 1 hora e 15 minutos. A vossa resposta foi 75 minutos? Correto!”. A terceira e última aula sobre a multiplicação de racionais terminou em confusão sem o jogo terminar.

Assim, tal como nas outras aulas, as tarefas propostas, tinham um foco na mobilização dos procedimentos de cálculo. Inicialmente, Glória organizou os alunos em pares e explicou-lhe o modo de trabalho. Informou-os que deviam registar as suas respostas e cálculos efetuados em folhas próprias e estabeleceu as regras para ganhar pontuação. Depois dos alunos proporem os resultados, dava um feedback de validação ou explicava novamente a resolução da tarefa. A última intervenção em cada correção era sempre da futura professora.

Em síntese, na prática de ensino supervisionada, e como observamos no quadro 5, Glória propôs tarefas diferentes, com contexto matemático (T1) e sem contexto matemático (T2 e T3). Note-se que as tarefas 2 e 3 tinham contextos próximos dos alunos e a futura professora considerou-as mais desafiantes.

Quadro 5. Natureza das tarefas e respetivas questões

Multiplicação de números racionais e suas propriedades

Aula 1			Aula 2		Aula 3	
Exemplos			Vídeo		Exemplos	
Tarefa 1			Tarefas 2 e 3		Tarefa 4	
Exploração	→	Exercício	Problema	→	Exercício	Jogo com tarefas idênticas a T1, T2 e T3

A prática de Glória caracterizava-se por diferentes tarefas de curta duração que eram propostas, resolvidas e corrigidas uma a uma. As tarefas eram antecedidas com momentos de (re)introdução de ideias, factos ou procedimentos, independentemente da sua natureza inicial, com foco nos procedimentos estabelecidos. Quando propunha as tarefas, baixava o nível de desafio para os alunos, indicando desde logo o pretendido. Indicando a estratégia de resolução pretendida e ao explicar as resoluções, as tarefas tornavam-se menos desafiantes e mais fechadas. Ou seja, apesar de ter previsto tarefas com características diferentes, como o foco era o domínio dos procedimentos, levou os alunos à aplicação dos procedimentos. Deste modo, as tarefas propostas assumiram as características de exercícios.

O quadro 6 mostra que, com as diferentes tarefas, Glória organizou e geriu o ambiente de aprendizagem em quatro momentos fundamentais. No primeiro, eram introduzidas as ideias, regras ou procedimento novo. No segundo momento era proposta a tarefa, ainda que de modo muito breve, como aconteceu nas tarefas 3 e 4, podendo por vezes fundir-se com o momento da exploração. No quarto momento, em que pretendia a apresentação da resolução da tarefa, por vezes, ocorria uma correção da resolução ou uma explicação por parte de Glória.

Quadro 6. Ações do professor nos momentos de trabalho com as tarefas

Momentos de trabalho	Multiplicação de números racionais	
Introdução das ideias matemáticas	Organiza os alunos de modo a que todos os alunos acedam à informação no quadro e na folha individual Induz os procedimentos ou as propriedades partindo de exemplos recorrendo a representações simbólicas ou relacionando-as com a pictórica (Aula 1 e 3)	Explica, com o contributo dos alunos e indica o procedimento ou propriedade (Aula 2)
Proposta da tarefa	Define as representações e o tipo de estratégia a adotar (T1, T2, T3, T4)	
Exploração da tarefa	Observa, questiona pouco ou sugere/ enuncia e valida o modo de resolução da tarefa (T1, T2, T4)	Observa, questiona pouco e guia os alunos (T2, T4)
Aluno regista a sua resolução		
Apresentação e correção da resolução	Guia a apresentação dos alunos (T1, T2, T4)	Explica a identificação da operação e com o apoio dos alunos a resolução (T3)
Registo da resolução nos cadernos e circula para confirmar a informação		

Na promoção de aprendizagem, Glória recorreu a diferentes ações que tinham funções diferentes. No trabalho com a multiplicação de números racionais, começou por introduzir os procedimentos de cálculo, *guiando* os alunos, partindo de exemplos *com representações pictóricas para ilustrar* procedimentos representados simbolicamente, e deduzir as regras ou procedimentos. Na aula das propriedades da multiplicação recorreu apenas a *representações simbólicas*. Recorrendo ao processo de redizer, introduziu a ideia de que a multiplicação resultava de uma adição sucessiva. Para apresentar um procedimento novo, começou por *guiar e desafiar* os alunos mas acabou por focá-los nos procedimentos de cálculo e explicitou-os. Perante as dificuldades de compreensão terminou o processo elaborando a explicação completa. Durante a *explicação* estabeleceu o processo passo-a-passo, definiu os principais termos e mostrou como cada passo foi modelado pelas representações pictóricas. No final esclareceu a questão chegando à resposta pretendida.

A futura professora propunha a tarefa, *indicando* as estratégias e procedimentos que esperava que os alunos adotassem. No caso das tarefas com contexto não

matemático não fez qualquer referência ou pergunta sobre o contexto e os dados envolvidos. Projetava as questões dando início ao trabalho a realizar e explicitava o nível de desafio maior ou menor das tarefas. Era um momento de curta duração.

No momento de exploração das tarefas, pediu silêncio e solicitou que, caso os alunos tivessem alguma dúvida, deveriam colocar o dedo no ar de modo a que se deslocasse aos seus lugares e falasse com eles. Assim, circulou, observou as resoluções e reforçou o pedido. Interagiu pouco com os alunos, mas também se expunha menos, limitando os episódios onde *sugeriu* as resoluções previstas. Na tarefa 2 *focou e guiou* os alunos nos procedimentos a adotar com questões de focalização encadeadas e *validou* as respostas. Era um momento de curta duração.

No momento de apresentação e correção das tarefas, em coletivo, Glória solicitou a um aluno que apresentasse a sua resolução correta onde *apoiou e guiou* a apresentação. No final da apresentação alertava para diferentes cuidados a ter na resolução destes exercícios (T1). Após a apresentação das resoluções, aconteceram duas situações: *explicou* os procedimentos envolvidos na tarefa e *validou* a resolução apresentada. Quando um aluno propôs uma estratégia alternativa, analisou-a e apresentou à turma comparando as duas estratégias (T2). Na tarefa 3, antes da apresentação da resolução *indicou* junto dos alunos como deveriam interpretar os enunciados dos problemas estando atentos à expressão “de” que permitia identificar a operação a realizar e *explicou*, com o contributo de vários alunos, a resolução.

5.4.3. Reflexão sobre as aulas e sobre a prática de ensino supervisionada

Para além das reflexões nas entrevistas, em torno das aulas que lecionou, Glória também realizou reflexões escritas sobre a prática de ensino supervisionada. Elaborou duas reflexões escritas: uma sobre o ensino-aprendizagem dos números racionais e uma reflexão final sobre todo o processo de estágio. Na primeira, começou por descrever a sua prática letiva recorrendo a excertos de diálogos na sala de aula e a imagens das tarefas propostas. Posteriormente, debruçou-se sobre aspetos considerados pela professora cooperante como menos positivos e que Glória sentiu necessidade de refutar e justificar. Debruçou-se sobre duas questões: “Devo dizer números representados por frações, números fracionários ou frações? Posso escrever frações usando a notação a/b ou $\frac{a}{b}$?” Para tal, citou vários artigos de autores de referência na Educação Matemática para mostrar que recorriam à mesma linguagem quando escreveram os seus artigos, sem

que fizesse a ressalva da diferença entre comunicar com alunos do 2.º ciclo e a linguagem utilizada em artigos científicos.

Na reflexão escrita, argumentou e sustentou as suas opções, quer no que respeita ao processo de ensino-aprendizagem sobre a multiplicação de números racionais. Para sustentar e contra-argumentar algumas críticas que lhe foram feitas pelas supervisoras, citou literatura específica, descreveu as dinâmicas constituídas, ilustrando com excertos de diálogos e a imagens das tarefas. Fazendo um balanço sobre a sua prática, começou por congratular-se pelos bons resultados dos alunos “É factual que os alunos tiveram resultados muito bons no teste de avaliação em que a média da turma ascendeu aos 72%”. Note-se que o teste incluiu exercícios sobre números racionais e suas operações e sobre Estatística. No final, tal como em diferentes momentos de reflexão nas entrevistas, Glória sublinhou a sua experiência profissional ainda que, por escrito, se tenha referido ao conhecimento constituído na sua formação na ESE. Sentiu necessidade de deixar escrito que existiam opiniões dissonantes entre a sua perspetiva de ensino e a da sua cooperante mas que ambas tinham a mesma finalidade:

A minha visão é alicerçada na minha experiência pessoal e profissional e no conhecimento científico e didático que adquiri decorrente da minha formação e tem como foco principal as aprendizagens dos alunos. Este foco, aliás, é comum para os professores envolvidos: a professora cooperante partilha este propósito ainda que tenha tido, por vezes, dificuldade em compreender o percurso eivado de trabalho árduo e ficasse enquistada nas suas conceções gnosiológicas. (GREF)

No entanto, na entrevista final disse que “não fiz aprendizagens de fundo, fiz aprendizagens para aquela turma, se calhar não fiz aprendizagens que me possam ser tão válidas quanto isto para turmas diferentes” (GEF). Desta forma, as aprendizagens que considerou realizadas no estágio não poderiam ser generalizadas a outros alunos. Por um lado, as dificuldades que os alunos tiveram, já conhecia e também eram “aquelas que a literatura nos traz e que nós já conhecemos e estamos à espera” mas por outro lado existiram “dificuldades que nenhuma literatura algum dia disse... E, agora, resta-me saber se algum dia tiver oportunidade de trabalhar com estes anos..., se é por serem aqueles alunos específicos ou se realmente é algo que possa generalizar” (GEF).

Assim, nos momentos de reflexão, Glória argumentou e sustentou as suas opções, quer no que respeita ao propósito de ensino-aprendizagem sobre a multiplicação de números racionais, quer relativamente às tarefas e dinâmicas. Nas reflexões descreveu a sua prática letiva recorrendo a excertos de diálogos e a imagens das tarefas propostas e citando literatura específica. A sua intenção era clarificar situações e aspetos

considerados pela professora cooperante como menos positivos, argumentando que com a sua prática de ensino tinha promovido aprendizagens que permitiram os alunos terem bons resultados no teste. Sublinhou que a sua experiência como explicadora e o conhecimento constituído na ESE lhe permitiram definir um percurso de aprendizagem bem sucedido. As novas aprendizagens que identifica dizem respeito aos seus alunos da turma de estágio e só poderia considerá-las generalizáveis se tivesse mais experiências no mesmo sentido. Ou seja, mais uma vez colocou o conhecimento experiencial como mais significativo.

5.4.3.1. Reflexão sobre o propósito das aulas: Satisfação face aos resultados

Nas três aulas sobre multiplicação de números racionais o foco de Glória era que os alunos fossem eficientes na resolução de tarefas mobilizando os procedimentos de cálculo da multiplicação de números racionais na representação fracionária. Existiam duas etapas a desenvolver no processo de ensino-aprendizagem dos números racionais:

Acho que é importante que eles primeiro saibam fazer e depois possam pensar. . . Acho que há prioridades em todas as coisas . . . Primeiro vamos ficar aqui com a ideia do procedimento, é esse o grande objetivo, conseguirmos perceber como é que se opera, o que é que se opera, como é que se escolhe. [Posteriormente] vamos pensar... O que é que acontece aos números, o que é que acontece em problemas de contexto real. . .

Ou seja, a primeira etapa de trabalho passava por ensinar os procedimentos e praticar e em seguida aprofundar o trabalho em tarefas mais desafiantes e contextualizadas. No entanto, não era possível passar da primeira etapa porque “não me é dado um tempo” e, por isso, tinha que “ficar pelo procedimento, mas do procedimento eu não os posso privar porque é-lhes fundamental . . . Quanto muito poderia ter mais uma ou duas aulas de consolidação...” (GEF).

A futura professora ficou satisfeita com o seu trabalho e, quando questionada sobre uma possível reformulação da abordagem seguida, tanto na entrevista, no final das três aulas, como no final do processo de estágio, respondeu “Eu gostei, muito sinceramente. . . Foi o caminho que eu escolhi... Não voltava atrás para fazer diferente. . . Acho que até foi benéfico para os alunos. Acho que os alunos fizeram aprendizagens ...” (GEM). Neste momento ainda não tinha sido realizada a avaliação sumativa das aprendizagens mas na última entrevista, quando terminou o estágio a não tinha dúvidas. Nessa altura o seu discurso ficou mais forte, uma vez que os alunos tinham tido bons resultados no teste, por ela proposto. Este facto, segundo a futura professora, provava

que a sua abordagem estava correta e sublinhou “os resultados que eles tiveram foram bons. . . O certo é que a resposta dos alunos foi..., satisfiz-me... Pensei assim “OK, não sei se é a melhor abordagem mas que esta resulta, resulta de certeza”...” (GEF). Quando questionada se faria alterações ao trabalho realizado ao longo do estágio, que nem sempre foi a abordagem defendida pelos restantes intervenientes no processo, Glória não tinha dúvidas:

Vai parecer muita arrogância. Não vou melhorar muita coisa! Eu vou-te explicar porquê, se o objetivo é que os meus alunos estejam mais ou menos na mesma linha de pensamento, ou seja, eles serem responsáveis por aquilo que estão a fazer e conseguirem aprender, acho que eles até estão a conseguir aprender. Portanto não estou a ver que alteração significativa, que vá produzir bons efeitos. (GEF)

Em síntese, considerando o foco de Glória considerou que não faria outras opções, uma vez que os resultados no teste reforçaram a sua posição sublinhando que a sua abordagem era benéfica para os alunos aprenderem. Identificou duas etapas na aprendizagem do tópico mas considerou que não teve tempo para avançar para a exploração os conceitos envolvidos e aprofundar o trabalho em tarefas mais desafiantes e contextualizadas.

5.4.3.2. Reflexão sobre as tarefas exploradas: Adequadas ao propósito e tempo

Glória tomou a decisão de construir as tarefas que propôs nas suas aulas “assumindo os riscos inerentes a esse processo. Em didática encaro o papel do professor como sendo proactivo, responsável pelo processo de ensino-aprendizagem” (GRE). Para sustentar esta opção, citou Brousseau (2006): “Em didática, o professor quer transmitir aos alunos uma cultura que, naquele momento, lhes é estranha. Cria, por isso, um meio (cursos, textos, problemas, materiais, etc.) favorável às atividades e aquisições que está visando” (GRE).

Sem perder o foco no seu propósito principal, Glória construiu recursos informativos e tarefas com o objetivo de ensinar procedimentos e em seguida praticá-los. Sobre as tarefas propostas, considerando que estavam a ser propostas a alunos no 5.º ano, concluiu que eram adequadas a este nível. Para sustentar esta ideia lembrou que no caso dos alunos de 1.º ciclo fez outras opções:

Eu pensei assim, vamos ver o que é que resulta... Eu estava habituada ao concreto porque achava que era necessário, no 1.º ciclo. . . Eu acho que é a altura, efetivamente, nesta idade que estão [no 2.º ciclo] de eles darem este pequeno salto. Não é um nível de abstração muito grande e não quer dizer que não se concretize, numa fase final em exemplos concretos.

No caso específico do tema dos números racionais de modo a “ter algum sucesso” a futura professora considerou que:

Nós temos que apostar, realmente, não em problemas muito... Tarefas tão abertas que eles às vezes até se perdem mas realmente ter um nível de abstração relativamente elevado. . . É a primeira vez que eles são confrontados com isto porque até agora, toda a gente, toda a perspectiva e todo o ensino que é feito é concretizar, concretizar, concretizar. Parece que quando se pede qualquer coisa que não faça parte do universo do pensamento deles que eles se perdem completamente!... (GEF)

Deste modo, Glória assumiu que o que estava a pedir aos seus alunos podia ser menos significativo e distante de experiências anteriores mas que era necessário para a sua aprendizagem matemática. Na sua perspectiva, a professora cooperante gostava que os alunos fossem “ativos” e gostaria que houvesse menos “repetição” e pediu para reduzir o número de exercícios e “explicar muito bem esses e ficávamos por aí”. No entanto, Glória não concordou com esta proposta porque

Normalmente o que se faz, nas unidades de racionais, muito em particular . . . Arrumou-se, explorou-se, não muito, fez-se aquilo que era preciso, aquilo ficou arrumadinho, nunca mais lá se toca... Só quando algum dia voltar a ser necessário é que se volta lá, realmente, a esgravatar... Agora digo eu... Também não gosto muito de treino, mas quando é que eu treino? Quando mais tarde, daqui a um ano ou dois ou quando eles voltarem realmente a ter contextos para utilizarem os racionais, é nessa altura que vão fazer depois exercícios... Se calhar não... Então não tenho que dar algum treino aqui?. . . O treino também faz parte da aprendizagem da matemática, não é só a compreensão!

Deste modo criticou o foco na compreensão colocando-o em contraponto ao foco na memorização e considerou que os dois aspetos deveriam ser considerados. No entanto, nem sempre existiria tempo para explorar os conceitos e, por vezes, os alunos não treinavam autonomamente, pelo que para Glória a resolução de vários exercícios era incontornável: “Não treino nada? E deixo-os ir assim, um bocadinho desamparados, não sei, eu prefiro que eles me digam “ela é uma chata que me obrigou a fazer dez. . . Mas de certeza que aprendi!” (GEF). Ou seja, questionada se depois de concretizar as aulas preparadas, alteraria as tarefas considerou que estava satisfeita e “nem escolheria outras tarefas nem escolheria outros materiais”. O único aspeto a repensar era o tempo destinado para o trabalho realizado e deste modo “o tal constrangimento de tempo, eu penso que haveria outras tarefas até mais interessantes na sequência daquela para desenvolver ao longo da multiplicação” (GEF). Quando enunciou exemplos alternativos identificou o trabalho a realizar com a multiplicação explorando “que nós temos uma estratégia aditiva ou podemos usar uma multiplicativa, quando é que faz sentido uma

coisa e outra” e o envolvimento de outras “grandezas dos números com que estamos a trabalhar” (GEDA2).

Na reflexão escrita sobre as aulas que lecionou sobre números racionais resumiu o trabalho conseguido

Alterna-se entre exercícios, problemas e outras tarefas matemáticas um pouco mais abertas, privilegiando ora consolidação de procedimentos, ora a construção de conceitos, por vezes recorrendo a representações pictóricas. . . Foram recapituladas algumas propriedades das operações, em particular da adição e da multiplicação e, mediante alguns exercícios, generalizaram-se para os racionais.

Sobre o jogo proposto no final do percurso, Glória considerou que, comparando este jogo com o utilizado nos conteúdos anteriores, o tempo dado aos alunos para pensarem era mais longo do que no jogo anterior porque “alguns implicavam [exercício] e conteúdos que tinham sido trabalhados muito recentemente, portanto eles precisariam de algum tempo para se situarem”. Questionada sobre o jogo, que tinha como objetivo apresentar algo “lúdico”, e a resolução de cada item, em grande grupo, explicou que era importante “que eles concretizem porque senão os colegas não sabem o quê que está na cabeça deles” (GEDA3). No balanço escrito que fez no final da semana, apresentou um terceiro argumento para a proposta do jogo e considerou que permitiu fazer a “revisão de conteúdos, tendo em conta que se aproximava o teste de avaliação”. O seu balanço geral foi que o jogo fomentou “a colaboração entre todos”, “entusiasmo”, “refinamento das estratégias de cálculo mental” e gerou “comunicação matemática . . . com os alunos a justificarem as suas respostas e a discutirem a sua validade” (GRE).

Em síntese, Glória construiu recursos com o objetivo de introduzir os procedimentos e, em seguida, praticá-los. Considerou que as tarefas que desenhou se mostraram adequadas ao nível de ensino. Ainda que pudessem ser pouco significativas e distantes de experiências anteriores, eram as necessárias às aprendizagens matemáticas a realizar. Relativamente ao jogo, considerou que o tempo definido, maior do que no jogo de outra aula, era o adequado para os alunos, uma vez que os conteúdos tinham sido trabalhados recentemente. Depois da aula, concluiu que o jogo para além de “lúdico” possibilitou a compreensão das resoluções dos diferentes alunos, promoveu a interação e desenvolveu a comunicação matemática. Na sua perspetiva, a professora cooperante gostava que os alunos fossem “ativos” e gostaria que houvesse menos “repetição” durante as aulas. Criticou o foco na compreensão colocando-o em contraponto ao foco na memorização e considerou que os dois aspetos deveriam

coexistir. No entanto, nem sempre existia tempo para explorar os conceitos e os alunos não treinavam autonomamente. Por isso, o trabalho teria que ficar pelo que considerava fundamental, ou seja, o domínio dos procedimentos e respetivo treino. Sentiu que teve pouco tempo para o trabalho a realizar e questionada o que faria com mais tempo identificou a necessidade de abordar os diferentes significados de multiplicação e o envolvimento de outras “grandezas dos números”.

5.4.3.3. *Reflexão sobre as aprendizagens dos alunos: Preparação para o exame*

Glória estava satisfeita com as aprendizagens realizadas pelos alunos uma vez que eles tinham tido resultados satisfatórios nos testes. Relativamente à questão de os alunos terem desenvolvido o seu sentido de número com a abordagem seguida, considerou que “ainda não todos! Ainda estamos muito limitados por um quadro conceptual que eles trazem com eles [do 1.º ciclo]”. Para Glória ter sentido de número implicava

Pensarem em tudo o que é que o número pode representar. . . Pode ser o resultado de alguma coisa [de uma operação]. . . Perceber que operação é que vai realmente escolher e porque é que realmente vai ter de fazer aquela transformação ao número.

Assim, ainda existia trabalho a realizar que se far-se-ia ao longo da escolaridade, ou seja, “Atenção! Apesar de haver já exemplos e exercícios em que é feito não quer dizer, necessariamente, que eles tenham consciência do que está a acontecer aos números... depois da operação” (GEM).

Na entrevista final, mostrou-se satisfeita com o conseguido porque os alunos já tinham compreendido o que pretendia, que fossem autónomos e responsáveis na resolução das suas tarefas e, por isso, a estratégia usada era para manter. Considerava que tinha feito “uma aposta na ideia de alguma dose de abstração e que é capaz de ser bom... Aprendi que isso, afinal funciona, se funciona melhor ou pior é como digo, não posso saber...” Uma outra fonte que informou de modo irrefutável que os alunos de facto tinham realizado “boas aprendizagens” foi o teste que elaborou e propôs à cooperante e que em parte foi proposto aos alunos. Para Glória os resultados eram gratificantes:

72%. [de média]. Houve uma negativa, efetivamente uma aluna, tudo o resto não, todos os resultados foram muito aceitáveis. . . Muitos eram alunos que estavam na casa do 50, 60 e dispararam para o 70 e qualquer coisa e ficaram muito satisfeitos com isso. . . E como estamos num tipo de ensino que privilegia muito a avaliação formal e sumativa. . . O que conta para eles é se têm boas notas nos testes.

Ou seja, considerou a média dos testes satisfatória e que a maioria dos alunos melhoraram as notas. Estes resultados foram muito importantes numa escola, que Glória considerava com uma cultura onde a avaliação sumativa era o mais importante. A futura professora também procurou sustentar as suas ideias recorrendo ao tipo de itens que o exame de 6.º ano tinha proposto naquele ano sobre números racionais e considerou que os seus alunos estavam preparados para lhes responder: “teriam tido um desempenho bastante razoável na prova de exame porque teve um pouco em consonância” (GEF). Ou seja, o argumento final de Glória sobre a sua abordagem aos números racionais era que era a abordagem necessária porque preparava os alunos para o exame nacional.

Em síntese, Glória estava satisfeita com as aprendizagens realizadas pelos alunos uma vez que tinham tido resultados satisfatórios nos testes. Os alunos já tinham compreendido o que pretendia, eram autónomos e responsáveis na resolução das suas tarefas e, por isso, a estratégia usada era para manter. Considerou o recurso a situações abstratas uma abordagem adequada e os alunos seriam capazes de responder ao tipo de itens sobre números racionais que o exame de 6.º ano tinha proposto naquele ano. Ou seja, era a abordagem necessária porque preparava os alunos para o exame nacional. Relativamente ao desenvolvimento do sentido de número ainda existia trabalho a realizar o que deveria acontecer ao longo da escolaridade.

5.4.3.4. Reflexão sobre a comunicação: Ideias fundamentais sobre representar, questionar e explicar

Nas entrevistas após cada uma das aulas, Glória refletiu sobre os alguns aspetos relativos à comunicação em sala de aula que foram emergindo da sua prática: a função das representações pictóricas no ensino dos números racionais, o questionamento tendo em atenção os cuidados a ter a quem faz questões e, por fim, sobre as explicações que elaborou e os seus registos no quadro.

Representações. Quando Glória introduzia um novo conteúdo acompanhava as expressões simbólicas com expressões pictóricas. Para ela, esta relação apoiava os alunos a “perceber” a situação colocada, era “uma ajuda visual em relação àquilo que se está a pensar. . . Partir da representação visual porque acho que facilita e nós explicamos, basicamente é isso...” (GEDA2). Ainda assim, defendia que não era uma estratégia que deveria ser muito utilizada e enfatizada junto dos alunos uma vez que “não quer dizer que fazer muitos bonequinhos, toda a vida”. Rematou referindo

[Uma] representação é uma abstração à mesma, portanto, atenção... Mas o facto de eles verem qualquer coisa, portanto lá está, no fundo passarem daquilo que está na nossa cabeça para um esquema qualquer, seja ele qual for... Ajuda efetivamente os alunos a organizarem o seu pensamento. E, eles conseguem, que ainda que estejam a trabalhar. . . no abstrato. . . Ilustra o procedimento, e acho que isto é extremamente vantajoso...(GEF)

Glória também recorreu à linguagem natural como representação da operação que pretendia que os alunos mobilizassem. Um dos aspetos que sublinhou foi a ênfase dada ao “de” como forma de os alunos identificarem a operação a utilizar nas situações problemáticas que propôs. Para a futura professora a estratégia era simples: “Só quero isto, quando virem algo ‘de’ percebam e que estamos a trabalhar com frações, então isto implicará uma multiplicação, e uma multiplicação com estas regras que nós acabámos de ver” (GEDA2).

Questionamento. Glória recorria ao questionamento quando fazia as suas explicações no quadro ou quando circulava pela sala. Na sua reflexão escrita final, considerou ser muito cautelosa em como colocava as questões e a quem o fazia e “deixava sempre que eles se exprimissem livremente, sem qualquer tipo de pressão. Em função do exposto, poderia apenas repetir ou reformular o que foi dito”. Perante resoluções erradas, pretendia que “através de questionamento mais incisivo, os próprios alunos conseguissem perceber esse facto. Por vezes, bastava aos alunos enunciarem em voz alta o seu raciocínio para se aperceberem dos erros cometidos e fazerem a sua correção”. Para a futura professora existiam dois tipos de alunos, quer no momento de questionamento à frente do grande grupo, quer enquanto circulava pela sala no durante o trabalho autónomo. Com uns alunos o questionamento podia ser direto porque “se sentem perfeitamente bem, conseguem aguentar ‘fiz assim por isto ou por aquilo’” mas existiam outros que “a abordagem tem que ser muito subtil porque realmente se eles sentirem muito a presença do professor sentem-se um pouco inibidos (portanto temos que fazer uma passagem discreta pelos lugares...)” (GEM). Na reflexão final sobre o estágio consolidou as suas ideias sobre o questionamento a realizar aos alunos em grande grupo e escreveu:

Uma das estratégias de questionamento a que recorro pontualmente é a de solicitar intervenções a alunos que revelem mais autoconfiança e com facilidade de aprendizagem quando se tratam de questões ou problemas mais complexos. . . Estes alunos não se sentem intimidados e, se criarmos condições para isso, conseguem aceitar que erraram mas facilmente reconceptualizam e ajudam o resto da turma a encontrar uma estratégia correta para o problema. Para os restantes, fica a noção de que todos podemos errar. . . O importante é ultrapassar essa dificuldade. (GREF)

Ou seja, a professora considerou que o questionamento em grande grupo, pedindo a explicitação de ideias, era realizado aos alunos com mais capacidade de comunicação matemática de modo a não ser intimidante. Aos restantes atribuía o papel de observadores e que deveriam aprender partindo das experiências dos restantes.

Explicações. Glória considerou que a forma como transmitiu os conteúdos a aprender permitiu “cativar os alunos a aderir às [suas] ideias” e que os alunos estavam

Pelo menos durante uma grande parte da aula, conseguem estar focados numa tarefa ou até naquilo que eu estou a tentar transmitir. Às vezes também há partes que são de transmissão, é um pouco... Estou-lhes a dar algum conceito... e eles podem lá ter chegado mas depois temos que realmente colmatar aquilo. (GEM)

O silêncio dos alunos durante as explicações, para Glória, era sinal de que estavam focados e envolvidos pelo seu discurso e, por isso, estava satisfeita com a forma como comunicava com eles oralmente. Inicialmente sentiu que os alunos sentiram dificuldades em acompanhar a sua linguagem mas com o tempo “começaram a perceber a forma como eu me exprimo e . . . começaram a perceber melhor”. Considerava que esta dificuldade era devida à utilização de uma linguagem “a um nível demasiado elevado . . . Não quero que o obstáculo seja a linguagem, mas também não quero descer o nível de tal forma, que seja tão vulgar, que eles não evoluam”. A linguagem a que se referia era a linguagem natural: “Porque tu sabes que a língua portuguesa é fundamental na comunicação” (GEM).

Glória elaborava explicações mais longas em dois momentos da aula. Inicialmente, existia um momento de introdução das ideias a construir que culminava numa sistematização e registo do que era suposto memorizar. Na sua reflexão escrita no final do estágio fez um balanço sobre os momentos expositivos:

Prefiro métodos interativos mas nas aulas podem verificar-se momentos expositivos, principalmente quando pretendo sistematizar o que já foi explorado. Aliás, apesar do método expositivo ter muitos detratores, o que se verifica é que continua a predominar nas aulas (o que pude verificar nas aulas a que tive o privilégio de assistir), pelo que é evidente que proporciona aprendizagens efetivas. No entanto, este método deveria ser sempre combinado com outros e cabe ao professor torná-lo interessante para os alunos, nomeadamente pela abordagem das tarefas e pela escolha criteriosa destas. (GREF)

Glória, ainda que sentisse que era importante todo o tipo de interações, sublinhava a importância do professor explicar, expondo as suas ideias, defendendo que era o tipo de comunicação que mais utilizava e que lhe parecia que promovia aprendizagens.

Neste momento de comunicação importava que o professor fosse um bom orador, cativante e claro.

O desafio maior que Glória encontrou na sua prática supervisionada foi a comunicação escrita que apoiava e explicitava as suas explicações. O desafio era como organizar a informação de modo a que os registos dos alunos ficassem claros no caderno. Explicou:

distribuir o espaço no quadro, foi uma enorme dificuldade porque para mim o quadro está lá, a gente utiliza, e desde que aquilo não esteja muito amalgamado. . . Não foi assim muito fácil porque tive de andar a apagar muitas vezes, porque olhava para aquilo e dizia assim: “Pois, realmente, eles são pequeninos, se calhar passam exatamente... Se aquilo está mais torcido passam torcido... (GEF)

Assim, Glória foi refletindo sobre os diferentes aspetos relativos à comunicação em sala de aula que foram emergindo da sua prática. Relativamente à função das representações pictóricas no ensino dos números racionais considerou que estas são importantes na introdução de um novo conteúdo acompanhando as expressões simbólicas, ilustrando-as. A relação entre os dois tipos de representações permitia compreender as situações colocadas, mas a futura professora defendia que não era uma estratégia que devesse ser muito utilizada e enfatizada junto dos alunos. O importante era que os alunos usassem a linguagem simbólica. A linguagem natural, como representação da operação, era usada com base em expressões indicativas das operações e apresentações a usar. Refletindo sobre os cuidados a ter sobre a quem fazia questões, indicou a existência de dois tipos de alunos. Quando circulava pela sala e quando se apresentavam as resoluções em grande grupo, existiam alunos em que o questionamento podia ser direto mas com outros teria que cuidar de não os melindrar. Assim, em grande grupo, a explicitação de ideias era realizada pelos alunos com melhor desempenho. A futura professora sublinhou que os momentos em que o professor expõe as suas ideias são os mais frequentes na prática dos professores e que promovia aprendizagens importantes. Identificou dois momentos onde realizava explicações: na introdução das ideias a construir e na sistematização e registo do que era suposto memorizar. Para ela, o professor deveria ser um bom orador, cativante e claro. Das explicações que elaborou fez um balanço positivo e considerou que foi clara na transmissão dos conteúdos conseguindo envolver os alunos. Ainda assim sentiu que os alunos tiveram dificuldade em acompanhar a sua linguagem natural quando elaborava explicações mas foram-se habituando.

5.4.3.5. *Reflexão sobre as ações de gestão do ambiente de aprendizagem: O papel central do docente*

Glória estava convencida de que o ambiente de aprendizagem das suas aulas “está bem conseguido! A forma como consegui cativar os alunos a aderir às minhas ideias..., penso que está bem conseguido!” Glória considerou que estabeleceu uma boa “relação pessoal” e que os alunos perceberam que ela se “interessa por eles e isto não é preciso que nós afirmemos! (GEM). Inicialmente, por um lado sentiu que teve que estabelecer algumas regras relativamente ao “respeito pelo professor e, realmente, pela autoridade que nós temos que ter”. Por outro lado, “eles não duvidam quando eu faço uma correção que aquela realmente seria a correção, ou não duvida quando eu reformulo qualquer coisa, que aquela realmente seria a forma correta de dizer aquilo”(GEF) e, por isso, estabeleceu uma relação de confiança pedagógica. Ou seja, para Glória o professor era a autoridade tanto do ponto de vista da disciplina como relativamente ao conhecimento.

Na sua reflexão final escrita Glória descreveu as aulas observadas:

Se tivesse que caracterizar a rede comunicacional e metodológica nas aulas de matemática mais vocacionadas para tarefas de treino, poderia dizer que flui do professor para os alunos (apresentação do tema, da tarefa ou atividade); os alunos desenvolvem o seu trabalho de forma autónoma, sendo apoiados pelo professor se necessário; os alunos são solicitados a partilhar as suas respostas e raciocínios com a turma, oralmente ou através de resoluções no quadro, sendo recorrentemente questionados sobre os raciocínios que suportam as suas resoluções; no fim deste processo, é comum o professor precisar de fazer uma síntese das comunicações matemáticas dos alunos e mostrar-se disponível para esclarecer alguma dúvida que subsista. (GREF)

Nesta descrição sucinta Glória, definiu os principais momentos das suas aulas identificando, na sua visão, as ações que levou a cabo e o papel dos alunos nas aulas. Complementarmente, nas entrevistas foi comentando aspetos de detalhe nos diferentes momentos das suas aulas. Ou seja, as suas aulas tinham como foco o treino de procedimentos e, por isso, importava fazer um discurso mais centrado no professor começando pela explicação das ideias matemáticas a saber. Num segundo momento de trabalho autónomo o professor devia apoiar os alunos, se necessário. Durante o processo de explicação e de monitorização do trabalho dos alunos na resolução das tarefas, era muito importante que o professor estivesse “atento a pequenas dificuldades. . . [Quando temos um aluno parado] nós não sabemos se será porque está a pensar em qualquer coisa ou porque houve alguma dificuldade em termos da tarefa e que não conseguiu executar” (GEF) Desta forma, no momento de monitorização era importante a

observação e o questionamento sobre o desenrolar. Na correção das tarefas, quando os alunos eram “solicitados a partilhar as suas respostas e raciocínios com a turma”, eram questionados para explicitar as suas ideias. Glória considerou que não tinha uma estratégia particular sobre quem chamava ao quadro. Chamava “um aluno muito bom, salvo seja, um dos melhores, ou um aluno mais fraco. . . Independentemente da dificuldade do problema”. Por um lado, para os alunos com mais dificuldades a ida ao quadro podia ser um bom “desafio” e por outro podia ser bom para “poder apoiar” . . . (GEDA1). No final da correção, gostava que a resolução ficasse bem organizada no quadro e quando existia mais de uma resolução possível pedia que “transcrevam para o caderno as duas formas, dois processos de resolver a mesma coisa” (GEDA2). Neste momento o professor podia fazer uma síntese e esclarecer alguma dúvida dos alunos.

Em síntese, para Glória o professor era a autoridade tanto do ponto de vista da disciplina como relativamente ao conhecimento. Definiu os principais momentos das suas aulas identificando as ações que levou a cabo e o papel dos alunos nas aulas. Num primeiro momento explicava as ideias matemática, em seguida observava e questionava os alunos de modo a apoiar a sua resolução. No momento de apresentação das resoluções o papel do professor era questionar para apoiar a apresentação e no final clarificar a resolução e responder a dúvidas. Em grande grupo, a explicitação de ideias, era realizada pelos alunos com melhor desempenho e os restantes eram observadores que aprendiam das experiências dos restantes. O maior desafio para Glória foi organizar, no quadro, a informação importante que acompanhava as explicações orais.

Síntese

A prática de ensino da Glória realizou-se no segundo semestre e, durante um mês, ela e a sua parceira de estágio lecionaram a unidade de ensino relativa à multiplicação e divisão de números racionais. Lecionou sete aulas, tendo sido observadas três onde abordou a multiplicação de números racionais e as propriedades da multiplicação.

Visão sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais

Glória era uma futura professora que, antes de frequentar a ESE, teve muitos anos de experiência de ensino em contexto de explicações individuais. Como aluna no ensino básico e secundário sentiu poucas dificuldades na aprendizagem da Matemática independentemente da prática dos seus professores. A futura professora era considerada

pelos docentes e pela parceira de estágio boa aluna nas unidades curriculares específicas para a aprendizagem da Matemática embora, segundo a supervisora da ESE, na Didática da Matemática não fosse tão bem-sucedida. Sobre as experiências vividas na ESE considerou que não tinham tido impacto nas suas ideias e conhecimento matemático e didático, assumindo a sua experiência prática como muito mais significativa. Referiu e descreveu unidades curriculares onde lhe foram apresentadas diferentes atividades matemáticas. Considerou a Didática da Matemática muito prescritiva e não permitindo a discussão das suas ideias. Glória deu importância ao papel instrumental da Matemática escolar, mas referiu que também tinha um papel de desafio e de desenvolvimento de capacidades ainda que essa vertente estivesse ao alcance apenas de alguns alunos com mais aptidão. As experiências de estágio foram sempre tensas. Sublinhou o estágio de 1.º ciclo porque aprendeu como trabalhar com crianças pequenas e com uma professora cooperante com muita experiência, que sustentava a sua prática, tendo escrito artigos sobre isso.

Sobre o papel do professor, Glória considerou que o ideal era ser um mediador no processo de aprendizagem. No entanto, assumia que se os alunos fossem pouco autónomos e construtivos para a discussão das tarefas o professor tinha que ser mais diretivo. Relativamente aos alunos, considerou que o gosto pela Matemática e pelo desafio dos processos são as suas características próprias. Assim, o sucesso dos alunos na Matemática dependia fundamentalmente do seu perfil. Sublinhou que existem alunos que preferem aulas expositivas e onde se resolvem exercícios. Sobre o ensino e aprendizagem da Matemática estabeleceu uma relação estreita entre o tipo de tarefas e as abordagens de ensino-aprendizagem. Defendeu a diversificação do tipo de tarefas, mas indicou que se tinha que acautelar a sua duração, de modo a não frustrar os alunos pouco perseverantes. Considerava que existiam duas abordagens possíveis: uma com foco nos procedimentos e outra com foco na compreensão negligenciando o treino de procedimentos. Por isso, optava pelo foco nos procedimentos sustentando que foi bom para si como aluna e era mais fácil para os alunos. Também importava apostar na memorização dos procedimentos para a consolidação necessária ao futuro escolar. Deu importância ao papel instrumental da Matemática escolar.

No que respeita aos documentos curriculares, considerou o programa recentemente entrado em vigor, um bom documento porque era claro no que era esperado ensinar e não dava indicações sobre o modo de ensinar. Como estagiária,

assumia não ter autonomia para tomar decisões sobre as diferentes questões a ponderar na avaliação mas estava focada nas aprendizagens para a avaliação externa.

Preparação e concretização do processo de ensino-aprendizagem dos números racionais

Glória pretendia que os alunos dominassem os procedimentos de cálculo da multiplicação de números racionais. Na preparação das aulas, sentiu-se segura científica e didaticamente. Para se preparar não fez leituras específicas e não recorreu a pesquisa em manuais, brochuras e noutros documentos, mas consultou o programa e metas em vigor para perceber que conteúdos iria lecionar e cumprir. Para ela, a planificação era um processo desnecessário e fazia-o para cumprir o solicitado pelos supervisores de estágio, ainda que com desfasamento no tempo, impossibilitando a discussão das suas propostas. Organizou a sua planificação formal com as orientações dadas pela ESE mas não as seguiu completamente. Na preparação autónoma das aulas optou por desenhar tarefas que identificou como exercícios, vídeos, problemas e jogos. Na definição das tarefas, começou resolver o que tinha concebido para aferir o nível de desafio a propor aos alunos. Depois de desenhadas as tarefas, selecionou e sequenciou as que considerou mais pertinentes. Quando concretizou o preparado, Glória, apresentou várias tarefas com características diferentes com o mesmo propósito. A tarefa 1 era exploratória, tinha um contexto matemático, era aberta porque permitia aos alunos escolher os números envolvidos e era estruturada. Considerou as tarefas 2 e 3 como problemas por assumir que eram mais desafiantes, tendo contextos não matemáticos. O jogo de consolidação era constituído por tarefas idênticas às das aulas anteriores. Todas as tarefas eram de curta duração e era esperada a aplicação de procedimentos de cálculo. Na interação com os alunos, a futura professora ou os guiava ou estabelecia as estratégias de modo a que as tarefas fossem resolvidas como esperava. Ao fazê-lo, descia o nível de desafio das tarefas e fechava o nível de abertura, pelo que os alunos foram resolvendo exercícios nas três aulas. Estava alerta que na planificação deveria explicitar as suas ações na exploração dos materiais e que deveria antecipar resoluções dos alunos e preparar as questões mas considerava estes processos de antevisão desnecessários. No entanto, ainda que não sentisse necessidade para se preparar, percebia que podia ser importante para que outros antevissem a abordagem que se propunha desenvolver. Assim, não antecipou resoluções corretas ou incorretas, por considerar desnecessário e limitativo à concretização do esperado. Nas entrevistas, explicitou que esperava prevenir o erro de

generalizar o algoritmo da adição na multiplicação. Pela mesma razão, não antecipou resoluções dos alunos e não previu aspetos relativos à comunicação nos diferentes momentos das aulas. De modo a introduzir os procedimentos de cálculo, Glória, preparou e recorreu a representações pictóricas para ilustrar as quantidades envolvidas no cálculo de produtos entre números racionais. Nas restantes tarefas, as representações eram simbólicas. Relativamente aos tipos de questões, recorreu a questões de focalização e confirmação de modo a apoiar a resolução dos alunos ou a apresentação em plenário. Quando recorreu a processos de redizer, completava as ideias dos alunos. De modo a clarificar e informar os procedimentos a usar na resolução das tarefas, quer no momento de introdução de novas ideias matemáticas, quer no final dos processos de correção, desenvolvia explicações passo-a-passo, definindo os principais termos e, por vezes, recorrendo à participação dos alunos. Na tarefa 2 estabeleceu relações entre duas resoluções possíveis deixando uma delas registada. Note-se que o tipo de questionamento está relacionado com o tipo de ações de promoção das aprendizagens (apoiar/guiar e informar/sugerir) e a ação de informar com as explicações. A descrição dos diferentes momentos era sucinta, apresentando três momentos fundamentais: (i) apresentação de situações de onde se deduzia o algoritmo e respetivo reforço da informação; (ii) resolução das tarefas propostas de modo autónomo; e (iii) correção das tarefas propostas, onde um aluno apresentava a resolução e Glória completava as ideias. Na concretização começava por organizar os alunos para trabalho individual onde cada um tinha as suas tarefas e visibilidade para o quadro da sala de aula. O primeiro momento era para a introdução das ideias matemáticas definidas. Neste momento, partindo de exemplos e recorrendo a representações simbólicas ou relacionando-as com as pictóricas, Glória induzia os procedimentos ou as propriedades a aprender. Quando os alunos já conheciam os procedimentos mas queria que os reconhecessem em novas tarefas, com o contributo dos alunos, *indicava* o procedimento ou propriedade. As ações de promoção da aprendizagem eram fundamentalmente *guiar*. Quando começava por *desafiar*, mas rapidamente passava para *informar* os procedimentos. Durante a resolução das tarefas, os alunos podiam *participar*, questionando ou acrescentando informação, quando solicitado. Como feedback, ou *validava* as respostas ou fazia questões para guiar para a *resolução* esperada. No segundo momento, quando propunha as tarefas, recorria fundamentalmente a *sugerir ou informar* definindo as representações e o tipo de estratégia a adotar. Nas tarefas com contexto matemático (Tarefas 2 e 3) não foram discutidos o contexto e os dados envolvidos, possivelmente porque se tratava de

situações simples e próximas dos alunos. A tarefa 4, o jogo, foi exemplificada com uma jogada. No momento de resolução da tarefa, Glória monitorizava, observando as resoluções, questionava pouco e, quando interagia, informava, sugeria ou indicava os procedimentos e validava a resolução da tarefa (T1, T2, T4). Na tarefa 2 *guiou* os alunos nos procedimentos a adoptar e *validava resoluções*. Na apresentação e correção da tarefa, depois de relembrar o que era proposto, o aluno que terminasse primeiro recorrendo à resolução esperada, registava a sua resolução no quadro. Glória *apoiava e guiava* a apresentação (T1, T2, T4). No final da apresentação dos alunos *explicava novamente* os procedimentos envolvidos e validava a resolução. Perante uma estratégia alternativa, analisou-a e apresentou à turma comparando as duas estratégias *informando* sobre as ideias subjacentes (T2). Na tarefa 3, mostrou como se identificava a operação e elaborou a explicação da resolução, com o contributo dos alunos.

Reflexão sobre as experiências vividas

Glória argumentou e sustentou as suas opções, quer no que respeita ao propósito de ensino-aprendizagem sobre a multiplicação de números racionais, quer relativamente às tarefas e dinâmicas definidas. Citando literatura específica, descrevendo as dinâmicas constituídas, ilustrando com excertos de diálogos e imagens das tarefas, procurou sustentar as suas opções. O seu principal propósito era que os seus alunos fossem eficientes na mobilização dos procedimentos de cálculo da multiplicação de números racionais e ficou satisfeita com o conseguido. Sublinhou que definiu o percurso de aprendizagem recorrendo ao conhecimento obtido com a sua experiência profissional e o constituído na sua formação na ESE. Não faria outras opções, relativamente ao tipo de tarefas, seus contextos e duração e manteria o mesmo tipo de comunicação. Considerou que as tarefas que definiu eram diversificadas e promoviam o mesmo tipo de conhecimento, o que é coerente com o seu propósito de ensinar procedimentos de cálculo da multiplicação de números racionais. Por isso, tinham as características necessárias para atingir o seu propósito, dado o tempo definido para o trabalho a realizar. Segundo Glória, mostraram-se pouco significativas e distantes de experiências anteriores dos seus alunos, mas eram as necessárias para as aprendizagens matemáticas tendo os alunos que adaptar-se às características do 2.º ciclo. No que respeita ao jogo, serviu para consolidar aprendizagens, num contexto “lúdico” e permitiu a interação e o desenvolvimento da comunicação matemática. O trabalho ideal teria que ter sido realizado em duas etapas mas considerou que não teve tempo para avançar para a

exploração dos conceitos envolvidos e propor tarefas mais desafiantes e contextualizadas. Considerou que o recurso a situações abstratas preparou os alunos para os itens do exame nacional de 6.º ano. Questionada sobre o que faria com mais tempo, identificou a necessidade de abordar os diferentes significados de multiplicação e o envolvimento de outras “grandezas dos números”. Indicou ainda que, relativamente ao desenvolvimento do sentido de número ainda existia trabalho a realizar o que devia acontecer ao longo da escolaridade. As aprendizagens identificadas eram focadas num conhecimento específico sobre os alunos da turma.

No que respeita à comunicação, Glória considerou importante relacionar as diferentes representações dos números racionais (fração, decimal e percentagem). Considerou que representações pictóricas eram importantes na introdução de um novo conteúdo e para ilustrar as expressões simbólicas. A relação entre os dois tipos de representação permitia compreender as situações colocadas, mas defendeu que não era uma estratégia que devesse ser enfatizada junto dos alunos. O importante era que os alunos usassem a linguagem simbólica. Glória, não via como pertinente preparar o questionamento. Este servia para suportar a apresentação das resoluções das tarefas e identificou a existência de dois tipos de alunos que abordava de modo diferente: com alguns o questionamento podia ser direto, mas com outros teria que cuidar de não melindrar com questões para as quais não soubessem a resposta certa. Assim, em grande grupo, a explicitação de ideias, era realizada pelos alunos com melhor desempenho. Defendeu a importância do professor explicar, expondo as suas ideias, porque isso promovia aprendizagens nos alunos. Esta prática vivida como aluna pareceu-lhe eficaz e, por isso, era uma estratégia a manter na sua prática. Identificou dois momentos fundamentais onde as considerou pertinentes: na introdução das ideias e na sistematização e registo. Sublinhou que o professor devia ser um transmissor de ideias matemáticas claro e cativante. Considerou que as suas explicações eram envolventes porque os alunos estavam em silêncio, ainda que no início tivessem algumas dificuldades em acompanhar a sua linguagem natural. O maior desafio para ela foi organizar por escrito a informação que acompanhava as explicações orais. Sobre o ambiente de aprendizagem constituído, estava satisfeita porque o professor era a autoridade, tanto do ponto de vista da gestão dos comportamentos, como do ponto de vista do conhecimento. Glória definiu os principais momentos das suas aulas identificando as ações que levou a cabo e o papel dos alunos nas aulas. Nos momentos de introdução importava explicar para depois, na exploração da tarefa, observar e apoiar

os alunos na resolução das tarefas e garantir que os alunos estavam a trabalhar. No momento da apresentação e correção das resoluções questionava os alunos para apoiar a apresentação e, no final, clarificava a resolução e respondia a dúvidas. Importava organizar a informação no quadro e garantir o registo nos cadernos.

Em síntese, Glória tinha uma visão sobre o ensino-aprendizagem da Matemática focada na fluidez nos procedimentos de cálculo, resultado das suas experiências enquanto aluna e explicadora. As experiências na ESE, para obtenção da certificação como professora, foram pouco significativas. Ainda assim, sinalizou as aprendizagens realizadas no estágio do 1.º ciclo. O contexto de estágio era tenso como resultado do confronto entre a sua visão e a das suas supervisoras. Para a futura professora, no processo de planificação, não considerava pertinente antever resoluções e prever o questionamento, fazendo-o apenas para que outros pudessem antever o que iria fazer nas aulas. Para preparar as suas aulas desenhou e sequenciou diferentes tarefas com o mesmo foco e organizou as suas aulas começando pela introdução das ideias matemáticas a ensinar para depois aplicar o aprendido em tarefas com contexto matemático e não matemático. As tarefas eram fechadas e os alunos não tiveram dificuldade em aplicar os procedimentos que repetidamente indicava. Refletindo sobre a sua prática de ensino supervisionada, mostrou-se satisfeita com os resultados obtidos e considerou que os alunos estavam preparados para o exame nacional. As tarefas propostas foram adequadas ao propósito e tempo que tinha e considerou que teve um papel central na qualidade do trabalho. Considerou que as suas ações e comunicação foram as necessárias para a apresentação das ideias fundamentais e promover o ambiente adequado ao desenvolvimento da aprendizagem onde os alunos deveriam escutar e aplicar o ensinado.

Capítulo 6

Ana

6.1. Apresentação e caracterização

Ana, com 23 anos, sempre quis ser professora de Matemática pelo gosto que tinha por crianças e pelo gosto pela disciplina que frequentou até ao 12.º ano com desempenho satisfatório. Na entrevista inicial, recordou algumas aulas, enquanto aluna do ensino básico e secundário referindo que o seu percurso nem sempre foi fácil, implicando esforço da sua parte para atingir os seus objetivos. Ressalvando o caso do seu professor do 12.º ano, não valorizou muito as práticas dos seus professores. Relativamente ao seu percurso no 1.º ciclo, lembrou-se de “não perceber nada de Matemática e de ficar mesmo muito nervosa antes dos testes”. Referiu com alguma pena que o ensino era baseado na memorização e que o professor “chegava lá e dizia ‘vocês têm de fazer assim, assim, assim’. Por isso é que há umas coisas que ainda hoje não percebo!” (AEI). No 2.º ciclo, considerou que as abordagens já apelavam mais para a resolução de problemas onde “tínhamos de perceber, interpretar os enunciados” com menos ênfase na memorização. Relacionando a sua história pessoal com o que observou nos contextos de estágio, concluiu: “Então aí realmente vi que se calhar não é a melhor alternativa, chegar lá e despejar os conteúdos. Temos de arranjar estratégias diferentes!” (AEI). Ainda na primeira entrevista, reportando-se ao ensino secundário, Ana contou que começou “a gostar de Matemática” no seu 12.º ano. . . Apesar das dificuldades, tive um professor que realmente me ajudou a apaixonar pela Matemática. Foi um dos motivos pelos quais vim para este curso!” (AEM). Mais tarde reforçou esta ideia

dizendo que começou a gostar de Matemática “quando comecei a perceber, realmente, determinados pontos” (AEM). Assim, enquanto aluna, interessou-se pela Matemática depois de ter vivido uma experiência positiva, quando começou a compreender os conceitos envolvidos. Esta mudança no seu percurso escolar levou-a a candidatar-se ao ensino superior, perspetivando o mestrado para o ensino do 1.º e 2.º ciclo com um forte interesse no ensino da Matemática.

6.2. Visão sobre o ensino-aprendizagem da Matemática

6.2.1. Experiências na Escola Superior de Educação: Aprendizagens nem sempre mobilizáveis

Ana frequentou a licenciatura e o mestrado na ESE B. No âmbito da licenciatura frequentou várias unidades curriculares específicas para a aprendizagem da Matemática e de Didática da Matemática. Considerou-se uma aluna “razoável” e nas unidades curriculares de Matemática considerou-se boa aluna como resultado do investimento que realizou: “Tenho muitas dificuldades. Eu investi muito no estudo, ler... Porquê? Sabia que gostava daquilo, então era muito mais fácil estar dentro do assunto” (AEI).

Ana referiu diferentes unidades curriculares, tanto da licenciatura como do mestrado onde ela e os seus colegas se debruçaram sobre tópicos relativos aos números racionais que posteriormente teria que lecionar no ensino básico. Nestas unidades curriculares exploravam tarefas exploratórias e, uma vez que o grupo era pequeno, existia espaço para resolver dificuldades específicas e que ela e os seus colegas colocavam “muitas questões, porque temos dúvidas [específicas]!” (AEI). Nas unidades curriculares de Didática da Matemática, da licenciatura e do mestrado, Ana analisou textos relativos ao ensino e aprendizagem dos diferentes temas matemáticos. Na licenciatura a obra mais significativa foi os *Princípios e normas para a aprendizagem matemática* do NCTM, referindo que “lemos esse livro, os textos, analisámos as estratégias de resolução”. Dessa experiência, indicou a sua surpresa quando contactou com as resoluções de crianças dos primeiros anos: “fiquei a pensar como é que os alunos chegaram a esta conclusão?... Como é que pensaram esta estratégia?” (AEI).

Considerando o observado e o que foi descrito pela supervisora da ESE, para além de discutirem textos, de modo a enquadrar teoricamente o trabalho, resolviam e analisavam tarefas, tanto do ponto de vista do conteúdo, como do ponto de vista

didático. No 2.º ano, as formandas apresentavam e discutiam textos propostos pelos docentes, discutiam e aprofundavam, em grande grupo, as questões didáticas envolvidas e/ou construíam tarefas de modo a explorar conceitos estruturantes do ensino no 2.º ciclo. Quando Ana foi questionada sobre o texto que mais a marcou nestas aulas, identificou um artigo onde “fiquei a perceber que havia outras [estratégias] alternativas que podia utilizar. Os outros [textos] também falavam [sobre este tipo de questões] só que não eram tão acessíveis, para colocarmos em prática” (AEI). Assim, o seu discurso sugeria que estas dinâmicas foram importantes apesar de nem sempre compreender os textos de modo a mobilizar as ideias neles expostas na sua prática de ensino.

A futura professora referiu que as experiências vividas ao longo de cinco anos foram importantes para o seu conhecimento matemático de natureza conceptual pois os procedimentos já conhecia bem. No entanto, ainda se sentia insegura relativamente ao seu conhecimento da Matemática. Relativamente ao conhecimento didático referiu que as experiências foram importantes porque “acabamos por saber algumas estratégias, algumas sequências de tarefas que podemos colocar [em prática]. . . Se estiver relacionado com o contexto real deles, ainda melhor!” (AEI). Quando questionada se pretendia pôr em prática algumas das tarefas que analisou mostrou-se nervosa, riu-se e respondeu: “Eu já tentei algumas e gostava de continuar a tentar mais, mas realmente para o fazer preciso de estar segura. Porquê? Para ter a certeza que eles vão conseguir aprender com aquilo que eu estou a fazer” (AEI).

Assim, Ana sentiu que as experiências vividas na ESE B foram significativas para si e para a sua prática letiva. Apesar de não especificar que estratégias de ensino foram abordadas, referiu que teve contato com diferentes tarefas matemáticas que lhe permitiram compreender os conceitos a abordar no ensino básico. Considerou que as tarefas propostas na ESE poderiam ser usadas com os seus futuros alunos mas existiram experiências anteriores que a tornavam insegura relativamente ao uso de determinado tipo de tarefas. Referiu que só poderia propor determinadas tarefas quando se sentisse segura sobre o *como* ensinar o conteúdo que os seus alunos devem aprender.

6.2.2. Experiências no estágio: Vivências nem sempre positivas

Ao longo da sua formação inicial, Ana foi tendo diferentes experiências de prática letiva em diversos níveis de escolaridade. Do ponto de vista da relação que estabeleceu com as crianças, a experiência que mais gostou foi na educação pré-escolar. No entanto, neste nível etário, considerou que não trabalhava os conceitos com o nível de

complexidade que gostava. Valorizou as experiências de prática que teve porque lhe permitiram colocar em prática aspetos analisados na ESE: “Sabermos como fazer na teoria não quer dizer que depois que seja fácil colocar em prática” (AEM). Um outro aspeto que Ana valorizou diz respeito ao facto da prática trazer problemas sobre como ensinar determinados conteúdos. Lembrou-se que numa das aulas que preparou, inicialmente, pensou sugerir os procedimentos, mas, depois de algumas leituras, constatou que não era a melhor estratégia para trabalhar os conceitos envolvidos, de modo a que os alunos os compreendessem. Quando decidiu, no 1.º ciclo, promover discussões coletivas, partindo de tarefas mais abertas, sentiu dificuldades em levar a cabo as ações necessárias para promoção de discussões produtivas na sala de aula. Contou como viveu um dos momentos:

Eu apliquei uma sequência no 1.º ciclo e disse mesmo “eu nunca mais faço isto na minha vida!” Correu muito mal! . . . Ainda não tinha a preparação que tenho hoje! Eu ia preparada, levava várias estratégias, no entanto, eles não conseguiram chegar às estratégias que eu levava. Muitos já estavam tão formatados para o cálculo que era só cálculo, não faziam mais nada, não dava para fazer exploração, acabava por morrer ali a tarefa. Outros, foi mesmo o problema em perceber as estratégias deles para poder refletir, questionar sobre elas... (AEM)

Assim, Ana relatou uma experiência que não foi bem-sucedida e, como primeiro impulso, pensou desistir de propor de tarefas desafiantes e de desenvolver uma prática de natureza exploratória.

Até ao momento do estágio de Matemática e Ciências Naturais e nos vários contextos onde interveio teve uma boa relação com os professores cooperantes com quem trabalhou, apesar de nem todos terem tempo para esclarecer as suas dúvidas:

Tinham tanta coisa para fazer, que não tinham tempo. . . Temos que trabalhar com muita coisa, para além da questão dos conteúdos... [Felizmente tinha a Glória] que realmente me ajudava a outro nível . . . Porque nós também estamos a trabalhar por uma nota. E colocar determinadas questões aos professores... (AEI)

Ana, numa fase do seu percurso, procurou apoio nos professores cooperantes relativamente às suas fragilidades em Matemática e Didática mas quando começou a trabalhar com a sua parceira de estágio, Glória, as questões começaram a resolver-se, uma vez que considerava a colega mais capaz. Segundo disse, esta parceira foi uma mais-valia, quer do ponto de vista emocional, quer do ponto de vista do conhecimento que foi desenvolvendo. Além disso, não tinha que expor as suas fragilidades aos professores da ESE que, no final, tinham que classificar o trabalho realizado. Um dos aspetos de análise no processo de supervisão eram as planificações. Segundo Ana,

alguns professores cooperantes não valorizavam as planificações, chegando a afirmá-lo explicitamente. Outros, percebendo que era uma obrigação ou compreendendo a importância da planificação, davam feedback para melhoria do processo de preparação das aulas. Sobre as suas experiências de planificação, referiu:

Eu, por exemplo, na área da Matemática no 1.º ciclo, chegava a colocar exemplos [resoluções possíveis] de problemas na planificação . . . No 2.º semestre já não colocava, porquê? Porque, para aquela professora, já não fazia sentido ter lá esses exemplos. Não precisava dizer quais [os problemas] é que eram, bastava dizer apenas como é que iria explorar. É mais fácil dizer . . . com um exemplo concreto do que no abstrato. (AEM)

Embora a indicação da ESE, fosse de antecipar resoluções de alunos e de realizar uma planificação de natureza descritiva, a determinado momento, pela experiência vivida, Ana abandonou essa forma de preparação de aulas. O processo de planificação escrita, a discutir com os supervisores de estágio, sofreu uma simplificação na descrição das ações a realizar em sala de aula e abandonou a antecipação das resoluções dos alunos. Até à prática de ensino supervisionada de Matemática no 2.º ciclo, os professores cooperantes mostraram-se satisfeitos com as descrições realizadas nas planificações. A sua parceira de estágio também influenciou nesse sentido: “Descrevia a sequência da aula, no entanto, não ia ao pormenor. Isso fazia nos meus rascunhos que era para me orientar. E depois também um bocadinho o par pedagógico que influencia muito” (AEAA4).

Assim, ao longo do percurso no ensino superior, Ana foi tendo diferentes experiências de prática de ensino supervisionada. A experiência de exploração de tarefas de natureza exploratória não foi muito positiva e quando iniciou o estágio de 2.º ciclo, em Matemática, mostrou reservas em repetir a experiência. Sentiu que a parceria com Glória era muito positiva uma vez que analisava as questões relativas aos conteúdos a lecionar e como lecioná-los. O processo de planificação alterou-se ao longo das suas experiências de estágio. Inicialmente, tentou corresponder às orientações da ESE mas os professores cooperantes nem sempre se reviam nestas orientações e foi abreviando a forma como descrescia os momentos de trabalho em sala de aula. Assim, quando o estágio de Matemática de 2.º ciclo se iniciou, preparou planificações escritas para os professores cooperantes e outras, informais, para se preparar para as aulas que iria lecionar.

6.2.3. Perspetivas sobre o ensino-aprendizagem da Matemática: Visão nem sempre concretizável

As experiências vividas por Ana, como aluna e formanda na ESE, contribuíram para o seu conhecimento sobre a Matemática e sobre o seu ensino. Em entrevista, quando foi interpelada sobre o que era para si a Matemática, nem sempre foi muito clara, mostrando alguma dificuldade em falar do assunto. Num primeiro momento, recordou que só começou a gostar da disciplina quando começou a compreender os processos envolvidos. Quando questionada sobre a Matemática como campo do saber, relembrou episódios da História da Matemática visitados numa unidade curricular da ESE, e centrou-se na ideia em que a Matemática é uma ciência:

Nós temos a Matemática todos os dias no nosso dia-a-dia . . . E em evolução. [Porque nós, Humanidade] estamos constantemente a fazer aprendizagens. Nós não estamos sempre no mesmo ponto, mesmo a nível da Matemática. (AEF)

Ana identificou a utilidade do saber matemático e sublinhou que este saber foi produto da evolução desta ciência. Note-se que estas ideias sobre a Matemática resultaram do discurso veiculado na ESE, uma vez que não revelou ter um conhecimento profundo da história da Matemática ou ter desenvolvido uma atividade Matemática significativa que tivesse marcado a sua visão.

Ana tinha ideias gerais sobre o ensino e aprendizagem da Matemática. Quando questionada sobre como caracterizaria um bom ensino, sentiu algumas dificuldades em organizar ideias e respondeu:

Um bom ensino... Essa é complicada! (risos). . . Como levar os alunos a gostar, a divertirem-se com aquilo que estamos a fazer? Como levar os alunos a perceberem aquilo que estamos a trabalhar, e na diversidade, que também levamos para dentro da sala de aula... Porque na minha perspetiva o professor deve estar preparado para explicar aquele conteúdo de qualquer maneira! Sempre de modo a que os alunos percebam, e que se divirtam, que gostem daquilo! (AEF)

Assim, inicialmente explicitou ideias gerais considerando que o professor devia transformar as aulas em espaços agradáveis focando a sua atenção num perfil de “bom explicador” que deve “explicar de diferentes formas” alunos diferentes. Ou seja, quanto mais diversas as explicações do docente, melhor professor este é. Por outro lado, defendeu que as aulas deviam centrar-se nos alunos de modo a evitar tenham experiências negativas. Questionada na última entrevista diretamente sobre o papel do professor e dos alunos na sala de aula, tal como noutros momentos, Ana começou por

procurar sinónimos que representassem as suas ideias (metáforas). Em seguida, avançou para um discurso direto de modo a representar essas mesmas ideias:

[Professor é] mediador, é colega, é tudo... Por exemplo, na parte da exploração de tarefas . . . Agora vem apresentar tu aos colegas! Todos concordam? Como é que faziam de maneira diferente?. . . Mas também temos de ser colega, questioná-los, não dar só a resposta, questioná-los... Então, e assim? Então, e se fosse assim? E se fosse assim, como é que resolvem o problema... (AEF)

Ana tinha uma representação de professor como dinamizador da atividade em sala de aula, remetendo para ações de promoção de um ambiente de aprendizagem e ações que desafiem e apoiem os alunos nas suas aprendizagens. Note-se que refere o questionamento constante como um aspeto relevante. No entanto, Ana admitiu que num primeiro movimento, no estágio de 1.º ciclo, pensou optar por um ensino mais direto:

No início pensava que tinha de chegar lá e dizer: “você faz assim, constroem o diagrama assim, por exemplo, e têm de colocar estes dados aqui e estes aqui”. Não tinha propriamente uma estratégia diferente para explicar aquilo. (AEF)

Mas as crianças mostraram-se “formatadas”. Perante os problemas de Matemática, “Liam o enunciado, viam que estavam lá determinados valores e faziam qualquer operação sem saber o que estavam a fazer. Sem saber se era aquilo que realmente lhes estavam a pedir...”. Assim e partindo de leituras realizadas, tal como foi indicado na seção anterior, concluiu que:

Se levasse um tema, determinadas atividades. . . E com os materiais manipuláveis é muito mais fácil eles perceberem aquilo que nós queremos trabalhar. [No entanto] há determinados conteúdos que nós não sabemos, pelo menos eu não sei, como é que hei-de fazer sem ser chegar lá e dizer: “é assim e é assim”. (AEF)

Ou seja, quando não soube como ensinar um tópico, remeteu para um ensino direto, próximo das experiências que teve como aluna. Ainda assim, soube identificar dificuldades dos alunos na resolução de problemas e, partindo das experiências vividas e de leituras que fez, procurou apoiar os seus alunos a aprender Matemática com prazer e de modo a que compreendessem os conceitos.

Quando questionada sobre o papel dos alunos no processo de ensino-aprendizagem, Ana considerou que as crianças dever-se-iam sentir livres de questionar o professor. Na sua perspetiva os alunos na sala de aula devem:

Ser alunos, colegas, porque devem apoiar os parceiros, devem ser bons ouvintes, sem dúvida, porque têm que escutar a nós mas também escutar os colegas. Conseguir ser também professores. Por exemplo colegas com mais dificuldade que

eles tenham lá na carteira, conseguir dar uma palavrinha. . . Eu já assisti a isso, é uma dinâmica também muito interessante em termos de sala de aula . . . O nosso objetivo é chegar a grande parte da turma. Nunca conseguimos chegar a todos!. . . Eles conseguirem perceber tão bem, conseguirem explicar aquilo com facilidade aos colegas [e porque também se torna] mais fácil para o colega.

Esta descrição do papel dos alunos sugeria um papel central no processo de ensino-aprendizagem onde lhes cabe comunicar as suas ideias ao professor mas principalmente aos colegas. No entanto, ficou claro se Ana estaria a equacionar a discussão de ideias diferentes. Mais acima, quando descreve o papel do professor, parece sugeri-lo, mas nesta fala remeteu apenas para o papel de explicador, onde o aluno que sabia resolver bem explicava ao aluno que não sabia.

Assim, Ana evidenciou ideias aparentemente conflitantes, que encarou como conciliáveis. Por um lado, deu bastante ênfase ao papel do professor como explicador, mas por outro lado, sublinhou o papel de questionador e dinamizador, concluindo que o professor deve ter vários papéis. Relativamente aos alunos, sendo o centro da atenção do professor, remete-os para o papel de explicadores dos colegas com mais dificuldades, tendo liberdade para questionar o professor, nomeadamente para esclarecer dúvidas.

Especificamente sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais, Ana referiu que, para iniciar o tema dos números racionais, deve-se propor problemas: “Então e agora o que é que me estão a pedir aqui? Como é que vamos fazer? Como é que nós podemos fazer?” A discussão de várias estratégias, a exploração do que surge, até chegar realmente ao ponto da questão” (AEF).

Ou seja, Ana considerou que o conhecimento se constrói num processo que vai do informal para o formal. Para consolidar aprendizagens, por exemplo, “para fazer revisões para o teste”, indicou que o foco devia ser nos procedimentos, uma vez que se fizer a consolidação com problemas os alunos ficam ansiosos e não tornam os conteúdos explícitos. Ou seja, “não está evidente o que eles precisam [para o teste].” Assim, considerava mais apropriado procurar explicar os procedimentos e exemplificou: “É assim que se faz, vamos lá ver, se tivermos uma divisão fazemos assim, numa multiplicação assim.” (AEF).

Nas entrevistas percebeu-se que Ana, por vezes, sentia-se perdida, e que nem sempre recorria às experiências da ESE, optando por fazer pesquisas individuais na procura de respostas para a sua insatisfação com o ensino direto. Esta insegurança, apesar de aparentemente ter sido resolvida no 1.º ciclo manteve-se no 2.º ciclo ou

quando passava para um novo tema matemático. Ou seja, mostrava-se insegura no *como* fazer. Na entrevista final refletiu sobre as suas inseguranças:

O que fazer, o que lhes responder, como, e também é a questão: Como abordar determinados conteúdos sem ser despejar matéria? . . . Para alguns miúdos serve, digamos assim, eles aprendem, mas para outros se for de outra maneira, eles se calhar chegam lá mais facilmente.

Ana sentia-se ansiosa relativamente ao *como* levar a cabo o papel esperado e idealizado. A futura professora não queria desenvolver uma prática de ensino direto mas estava insegura no *como* constituir uma prática de ensino-aprendizagem exploratória que, na sua perspetiva, era a que servia a todos os alunos.

Na última entrevista foi analisada a adequação do programa de Matemática de 2013 ao trabalho a realizar com os seus alunos de 5.º ano. Ana conhecia bem o programa de Matemática de 2007 mas ainda não tinha usado o de 2013. Referiu que tudo no 2.º ciclo era novo e que “As metas também são uma novidade. Já as conhecia, no entanto, nunca tinha estado na prática com elas” (EAA4). Para planificar sentia que o programa de 2013 era confuso e desajustado à prática que pretendia desenvolver:

Há conteúdos que não encontro lá, e há conteúdos que estão lá mas não é bem aquilo que nós vamos trabalhar. . . Aparece de uma maneira mais complexa, digamos assim... [Com foco no simbólico?] Sim, e nós ao nível de 5.º ano acabamos por não trabalhar esse lado do simbolismo. . . porque eles chegam ao 6.º ano e já, apesar de ainda não terem uma diferença muito grande, já têm outro tipo de mentalidade. (AEAA4)

Ana pretendia constituir uma prática consentânea com as orientações da Didática da Matemática da ESE e em linha com a literatura que conhecia. No entanto, considerava que o programa em vigor nem sempre se ajustava ao trabalho que queria fazer, levando-a a sentir-se insatisfeita. Por outro lado, sentiu que nem sempre os alunos tinham um desenvolvimento cognitivo para manipular os conceitos prescritos.

Em síntese, como resultado das suas experiências como aluna, sobretudo na ESE, Ana começou por identificar a utilidade de determinados conhecimentos de Matemática para o quotidiano. Referiu também a importância de os alunos conhecerem episódios da História da Matemática, de modo a compreenderem a evolução desta ciência e relembrou episódios desta História analisados na ESE. Estas ideias sobre a Matemática espelhavam o discurso construído na formação inicial. Relativamente ao papel do professor e dos alunos no processo de ensino e aprendizagem, explicitou ideias gerais diversas. Considerou que o professor devia transformar as aulas em espaços agradáveis

e que devia ser um “bom explicador”. Por outro lado, defendeu que na atividade em sala de aula, o papel central era dos alunos. Assim, os alunos seriam construtores do seu conhecimento e o professor desafiava e apoiava os alunos nas suas aprendizagens. No entanto, referiu exemplos que apontam os alunos como explicadores dos colegas com mais dificuldades recorrendo ao professor para esclarecer dúvidas. Dependendo das suas (in)seguranças e conhecimento, a visão de Ana evidenciou aspetos aparentemente conflitantes. Por um lado, quando tinha dúvidas sobre *o como* ensinar remetia para experiências vividas como aluna, descrevendo práticas de ensino direto, ressaltando que era importante que os alunos tivessem experiências agradáveis. Por outro lado, partindo das experiências vividas na ESE e de leituras que realizou, pretendia apoiar os seus alunos a aprender Matemática com compreensão. Quando a tarefa era difícil e quando teve experiências de ensino negativas recuou nas suas ideias. Considerou que o conhecimento se construía num processo que ia do informal para o formal. No final do estágio, referiu importava explorar os conceitos partindo de problemas e que, para consolidar aprendizagens, o foco seria nos procedimentos de cálculo. Da sua análise ao programa de Matemática em vigor, percebemos que as experiências que pretendia proporcionar aos seus alunos e que os conceitos que pretendia explorar tinham origem nas suas experiências na formação inicial e não nos documentos curriculares prescritos.

6.3. Prática de ensino supervisionada de Matemática no 2.º ciclo

6.3.1. Estágio: Um contexto dividido por ideias fundamentais

6.3.1.1. Escola e turma

A escola onde decorreu o estágio situava-se numa cidade pequena relativamente perto das instalações da ESE. Segundo a professora cooperante, a escola tinha bom equipamento tecnológico e cada sala, que era espaçosa, tinha um computador, projetor e, algumas salas, quadro interativo. Além disso, a escola estava equipada com algum material, e existia material *Cuisenaire*, usado pela professora cooperante. Ainda assim, esta professora descreveu dificuldades no trabalho dos alunos em grupo por falta de condições físicas da sala. Estas dificuldades relativas aos recursos físicos podem ter influenciado a experiência de trabalho e a inexistência de discussão em pequenos grupos de alunos. Note-se que esta informação pode ter sido passada também a Ana e ter resultado na opção que se verá mais adiante de trabalho a pares.

A turma onde Ana estagiou em Matemática e Ciências da Naturais no 2.º ciclo era do 5.º ano. Era uma turma calma de 20 alunos e que a professora cooperante descreveu como tendo muitas capacidades. A futura professora referiu que os alunos tinham algumas dificuldades, a que esperava dar resposta, dentro do possível, durante a sua intervenção. A futura professora sinalizou que os alunos memorizaram os conteúdos sem os compreender e que o grupo era heterogéneo no seu desempenho. Acrescentou também que os alunos revelavam diferentes níveis de comunicação matemática:

[Na aula anterior de correção do teste] Havia alunos que não tinham problema nenhum em explicar como pensaram e havia outros que já tinham alguma dificuldade, porquê? Não é só dificuldade na expressão oral é também perceber as bases que estão ali presentes no exercício e isso acabou por se notar um bocadinho ao longo da correção (AEAA1)

Deste modo a futura professora fez referência não só à capacidade de comunicação oral dos alunos mas, mais especificamente, à sua capacidade de explicitar matematicamente as suas ideias.

6.3.1.2. *Expetativas em relação ao estágio*

Na primeira entrevista, Ana evidenciou insegurança relativamente ao estágio de Matemática no 2.º ciclo referindo que tinha que dar a atenção a diversas questões, quer do ponto de vista da gestão de sala de aula, quer relativamente ao domínio dos conteúdos a lecionar:

Nós sabemos que temos de chegar à sala de aula. . . temos de dar atenção a todos os alunos. . . Temos de ter atenção aos conteúdos a trabalhar, temos de ter atenção quando vamos escrever no quadro. . . . Nós sabemos isto tudo na teoria, mas depois e na prática... (AEI)

Assim, quando perspetivou dificuldades, Ana remeteu para aspetos gerais como a gestão do espaço e dos alunos, do conteúdo a lecionar e da linguagem escrita quando faz registos no quadro. Questionada sobre que tipo de abordagem que iria desenvolver, mais focada na resolução de problemas ou num ensino direto, Ana explicou que iria depender do domínio que tinha do conteúdo e se o conseguiria pôr em prática em determinados tópicos. Ou seja, fazia depender as suas opções da sua segurança nos aspetos matemáticos, sentia que tinha a responsabilidade de garantir aprendizagem dos alunos e que não podia fazer “experiências” sem que estivesse segura:

Há pontos em que, se calhar, vou ser mais tradicional porque acho que não estou preparada para fugir muito ... [porque] não podemos pensar só em nós, temos de

pensar realmente nos alunos que estão à nossa frente porque eles não podem ficar condicionados pelas experiências que nós gostávamos de tentar. (AEI)

Ou seja, nos conteúdos onde se sentia insegura previa desenvolver uma prática de ensino direto por considerar que era menos arriscado para as aprendizagens dos alunos.

6.3.1.3. Contexto supervisão

Após 15 dias de observação da prática da professora cooperante, Ana sentia-se expectante e insegura em relação à sua atuação. Sentia que relativamente à gestão da sala de aula e aos comportamentos dos alunos já não iria ter muitas dificuldades mas ainda se sentia insegura em relação ao *como* ensinar. Apesar de sentir que os docentes da ESE dariam todo o apoio, preferia o apoio da sua colega de estágio, Glória, que considerou a sua “mentora”. Ana descreveu o papel da sua colega:

Ela tem alguns aninhos de experiência, ela acaba por me dizer: ‘não vás por aí que isso é capaz de não resultar, pensa em outra alternativa’. Então lá vamos nós, tentar pensar numa solução para dar determinado conteúdo, ou em outra estratégia. É mais assim, é uma espécie de mentora. Eu digo que ela é minha mãe adotiva . . . Se eu não percebo determinado conteúdo que tenho de abordar com eles, ela está ali, explica-me, vai mais além... Depois vou estudar, tiro as dúvidas e depois sim, é que já estou pronta... (AEI)

Ana tinha uma visão muito positiva da sua parceira de estágio, colocando-se numa situação de inferioridade, do ponto de vista do conhecimento e experiência. Parecia ter desenvolvido uma relação de dependência quando emergiam problemas na prática e tinha que procurar soluções, referindo que esse trabalho era realizado com o apoio da parceira que “lhe tira dúvidas” e “explica” os conteúdos a lecionar.

No entanto, e durante o período de prática supervisionada, Ana optou por não ouvir os conselhos de Glória e apostou em tarefas mais desafiantes, contextualizadas e que permitam discutir os conceitos a explorar. Referiu como se deu essa rotura:

Na divisão optei por levar uma sequência de problemas que depois iam ser explorados na sala de aula. Se não houvesse aquela chamada de atenção na Didática, e se eu não tivesse visto a brochura... Aquela proposta que eu tinha feito, provavelmente tinha caído. E tinha partido do abstrato. Porque depois na altura quando discutimos a ideia, eu e a Glória, fez-me mais sentido o que ela disse. Mas depois pensei “não, desta vez vou tentar através dos problemas, a ver como é que isto corre”. E porquê? Porque estava minimamente confiante. . . Porque tinha como base as brochuras. (AEM)

Durante o estágio Ana decidiu seguir um rumo diferente da sua parceira de estágio seguindo as ideias defendidas na ESE, pela docente de Didática da Matemática e

simultaneamente sua supervisora de estágio. Sublinhou que só seguiu este caminho porque se apoiou em materiais testados, sentindo-se assim segura sobre como lecionar.

6.3.2. Processo de planificação: Registos informal e formal

De modo a organizar o trabalho a realizar no primeiro mês de intervenção, Ana, a professora cooperante e a colega de estágio reuniram-se para distribuir os períodos de intervenção e decidir os tópicos que cada uma iria lecionar. Numa primeira fase, ficou responsável por lecionar a multiplicação de números racionais e respetivas propriedades. Mais tarde, durante a intervenção, existiram alguns atrasos e lecionou aspetos relativos à multiplicação (número inverso de um racional) e a divisão. Referiu a sua estratégia para a leção dos tópicos relativos aos números racionais:

Provavelmente vou ter de ir através dos exemplos concretos, para depois fazer o registo das propriedades. Nós normalmente estamos habituados aquelas questões dos “As”, dos “Bs”, a professora não quer nada disso, têm de ser mesmo exemplos concretos. . . Acho que eles deviam perceber o porquê daquela regra, não é propriamente o chegar lá. (AEI)

Ana queria explorar os números racionais com exemplos concretos de modo a que os alunos compreendessem os procedimentos a realizar. Essa também era a orientação da sua professora cooperante.

Na sua reflexão quinzenal, Ana escreveu sobre o sentimento que tinha antes de avançar para a intervenção, que estava empenhada em promover aprendizagens significativas e que tinha receio do erro, por falta de conhecimento da Matemática para ensinar. Na reflexão escrita mostrou que pretendia resolver essa insegurança estudando:

Há os dois lados da moeda: por um lado vêm as expectativas mas em contrapartida vêm os receios. Sei que ainda tenho muito para estudar e para aprender. . . Nesta prática pedagógica, tenho o receio de falhar face aos alunos que se encontram à minha frente, ou seja, colocar em causa as aprendizagens significativas dos alunos em questão.

Também nas entrevistas revelou muitas inseguranças e quando questionada sobre como as pretendia ultrapassar, remeteu para a preparação prévia referindo que tinha que se preparar “tanto a nível científico, como didático”:

Planificar, trabalhar bem os materiais que vou levar para a sala de aula, ter bem presente o que é que eu quero fazer, a sequência de atividades . . . Tenho de estar muito bem preparada para aquilo que eles me possam dizer, porque podem sair com coisas que eu não estou preparada para. (AEI)

Ana valorizava o processo de planificação. Estava alerta para questões referentes às suas ações na exploração dos materiais preparados e que, na planificação, deveria antecipar resoluções dos alunos e preparar as questões que estes pudessem colocar.

Nas disciplinas da ESE eram dadas orientações no que diz respeito aos aspetos essenciais a incluir nos planos de aula. Na tabela onde Ana apresentou a sua planificação formal observamos que inclui o sumário da aula, “domínios de referência ou objetivos”, descritores de desempenho, a descrição da aula, a sua duração, materiais e avaliação. Para preencher as colunas referentes aos domínios e descritores de desempenho, consultou o programa e metas de 2013, copiando o que está enunciado nos documentos. Um exemplo desta situação surge na planificação da aula sobre número inverso de um número racional: “6. Reconhecer que o inverso de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$ (sendo a e b números naturais) e reconhecer que dividir por um número racional positivo é o mesmo do que multiplicar pelo respetivo inverso” (AP). Ainda assim, em entrevistas, identificou os objetivos e definiu um propósito de ensino para as tarefas. Ana recebeu da ESE orientações específicas sobre a natureza e organização da planificação. Estas orientações remetiam para a previsão de diferentes resoluções das tarefas propostas, previsão de erros e dificuldades dos alunos e, finalmente, a discussão de diferentes estratégias, nomeadamente em tarefas mais desafiantes e com algum nível de abertura.

Apesar de se considerar mais descritiva que Glória, Ana sentia que não correspondia ao pedido pela supervisora da ESE. A professora cooperante foi alertando para o envio atempado das planificações de modo a existir tempo útil para discussão, o que nem sempre acontecia. Apesar de alguns atrasos, os planos de aula e os materiais foram sendo discutidos. Nas reuniões informais foram realizados ajustes nos documentos sem que tivessem sido guardadas diferentes versões para futura análise.

Em síntese, Ana lecionou numa escola que tinha boas condições e onde tinha os recursos disponíveis para desenvolver a sua prática. A sua turma de 5.º ano era muito interessada e com um desempenho bom ainda que a futura professora tenha identificado algumas dificuldades relativamente aos conteúdos e comunicação. A parceira de estágio tinha muita influência sobre ela e era o seu grande apoio. Ana sentia-se dividida entre as posições da sua colega de estágio e da professora cooperante e da sua supervisora da ESE. Inicialmente não se sentia suficientemente segura para tomar uma posição. Numa primeira fase optou por seguir os conselhos da colega de estágio mas, quando preparou a segunda fase do estágio, mudou de rumo e passou a fazer opções diferentes. Decidiu

seguir a abordagem defendida pela supervisora de estágio e pela professora cooperante. Ana planificou as aulas recorrendo à estrutura prevista pela ESE, onde incluiu os conteúdos a lecionar, a descrição das aulas referindo a sua duração, materiais e avaliação. Os conteúdos, objetivos e descritores para avaliação foram registados a partir do programa de 2013 sem alterações em função das aulas. Na sua perspetiva, o registo da previsão da atividade em sala de aula era menos descritivo do que o solicitado pela supervisora. Na ESE B era pedido que os estagiários registassem as possíveis resoluções de alunos, previssem os seus erros e dificuldades e descrevessem as suas próprias ações. Tal como previsto no processo de ensino supervisionado, discutiu as suas planificações com a professora cooperante. A planificação nem sempre foi realizada de modo a permitir uma discussão profunda mas foram discutidas com a professora cooperante as tarefas que eram propostas e a sua adequação aos alunos da turma.

6.4. Prática pedagógica e conhecimento didático: Multiplicação de frações inversas e divisão de números racionais

Ana lecionou oito aulas sobre números racionais, sendo quatro de introdução de novos tópicos. Nas restantes aulas corrigiu testes ou resolveu tarefas para revisão de conceitos e preparação para o teste. Nas quatro aulas observadas foram trabalhados os números racionais inversos entre si (primeira fase) e a divisão de números racionais na representação fracionária (segunda fase). Inicialmente, perspetivou 90 minutos para cada tópico mas o trabalho demorou mais tempo do que o esperado e foram necessários mais 45 minutos para cada tópico. Por norma, as aulas começavam com a correção de exercícios enviados para resolver em casa ou pela correção de exercícios propostos em aulas anteriores. Nesta seção apresento o trabalho de Ana de preparação, concretização e reflexão quando explorou conceitos relativos aos números racionais. Nos diferentes momentos das aulas, procuro caracterizar questões relativas à comunicação (porquê, quando e como recorreu às diferentes representações, questões e as suas explicações) e as ações de promoção e gestão da aprendizagem e do ambiente de aprendizagem.

6.4.1. Antevisão das aulas

6.4.1.1. *Propósito das aulas: Compreensão de regras para aplicar*

Na primeira fase da prática de ensino supervisionada, nas primeiras aulas, Ana iria abordar os números racionais inversos. De acordo com o seu plano inicial, traçado com a parceira de estágio, pretendia apresentar um vídeo demonstrativo da propriedade para considerar dois números racionais inversos um do outro, passando os alunos em seguida a resolver uma ficha com exercícios. Depois de conversar com a professora cooperante, este plano sofreu alterações. Para Ana era importante que os alunos chegassem à propriedade:

Para haver uma sequência lógica com as aulas que têm ocorrido. Porque quando foi a multiplicação, também foram eles que chegaram à regra, quando foi a adição, também. . . Vão perceber realmente, aquilo que estão a fazer em vez de ser memorizar. . . Queria tentar ir pelo processo de compreensão em vez de ser pelo de memorização. É fazer a experiência para ver o que é que aquilo vai dar. (AEAA1)

Assim, Ana pretendia trabalhar partindo de “casos concretos” e, por isso, propôs que os alunos representassem pictoricamente as operações indicadas em três expressões. O propósito de Ana era que, através da visualização, os alunos compreendessem que o produto de dois números racionais inversos era a unidade. Na segunda aula, de 45 minutos, retomou o mesmo tópico e propôs exercícios de aplicação.

Na segunda fase da prática de ensino supervisionada fez novas opções, resultantes da reunião prévia com a professora cooperante. Ana preparou duas aulas sobre divisão de números racionais. A professora cooperante sugeriu que desse ênfase à resolução de problemas com situações do quotidiano e que recorresse a tiras de papel para representar as operações e Ana decidiu:

[A ideia] era partir de um tipo de problemas, com o mesmo do contexto, de foro familiar, e depois ir para a regularidade, ou seja, para a regra. E para isso tive como base as tarefas que temos falado da divisão, nas aulas de didática. (AEAA3)

A futura professora seguiu as indicações dadas e preparou três problemas para uma aula de 90 minutos, onde pretendia discutir as diferentes resoluções e estabelecer o algoritmo “inverte e multiplica” para a divisão de números racionais fracionários. No final da primeira aula sobre a divisão, Ana e a professora cooperante decidiram deixar cair o terceiro problema e, na aula seguinte de 45 minutos, trabalhar outros dois problemas de partilha equitativa e três expressões numéricas para aplicar o algoritmo da divisão de frações. Ana decidiu propor um problema de cada vez. Ou seja,

No primeiro começávamos logo a introduzir um pouco a ideia da divisão, porque eles aqui vou estar a espera que eles façam a resolução com a divisão. Eu quero que eles façam através de esquemas, da subtração sucessiva, da adição, o que eles quiserem para depois começar aos poucos a introduzir a ideia de divisão. (AEAA3)

Ou seja, para que os alunos dessem significado ao que iriam aprender, Ana introduziu o algoritmo da divisão de frações partindo das resoluções dos alunos a diferentes problemas com contextos não matemáticos. Posteriormente, propôs três expressões para aplicarem o algoritmo da divisão. Durante a sua prática de ensino supervisionada o propósito de Ana era que os alunos compreendessem os conceitos para depois os aplicar e memorizar.

6.4.1.2. Preparação, seleção, desenho e sequenciação das tarefas: Um processo desafiante

Para preparar a lecionação, Ana leu textos que pesquisou na internet e na biblioteca, tendo procurado “livros com os autores. . . recomendados pelos professores aqui nas didáticas” (AEI). Também resolveu exercícios e problemas que podiam, ou não, ser realizados em sala de aula. Na entrevista antes da primeira aula, indicou as razões que a levaram rever estes conteúdos. Reviu todas as operações envolvendo números racionais, “as propriedades da multiplicação”, “mínimo múltiplo comum para encontrar os denominadores comuns entre frações” e questões sobre os números racionais inversos:

Foi importante relembrar como é que se fazia, como é que se poderia fazer apresentando outra estratégia. . . Relembrar essas pequenas coisas que se calhar são coisas muito básicas e que nós já devíamos saber. No entanto é preciso mesmo relembrar porque depois, na aula, pode surgir uma situação imprevista e quero estar à vontade no que estou a trabalhar. (AEAA1)

Assim, Ana reviu aspetos relativos aos tópicos a lecionar, por estar preocupada com as explicações que teria que construir sobre os conceitos e procedimentos e com a linguagem a usar.

Na primeira fase, no que se refere à seleção de tarefas, Ana analisou tarefas de brochuras que encontrou na internet. No entanto, num primeiro momento, pareceu-lhe mais adequado construir tarefas para cada aula, uma vez que sentia que eram mais significativas para si e para o trabalho a realizar:

Somos todos professores, é verdade, temos de saber todos os mesmos conteúdos, mas a nossa maneira de estar na sala de aula é completamente diferente uns dos

outros e, se calhar, eu sinto-me mais à vontade em ir por uma alternativa [diferente]. (AEI)

Este era também o discurso de Glória, pelo que é possível que esta opinião inicial de Ana tenha resultado de reflexões conjuntas. No entanto, e durante a intervenção, começou a alterar o seu discurso quando explicou porque é que optou por não usar tarefas exploradas na ESE: “Eu sei que dei nas aulas e sei o que trabalhei. O problema é fazer a transformação disso para o que eu posso levar para dentro da sala de aula. Esse é o meu problema!” (AEM). Já na entrevista final voltou a explicar as razões que a levaram a realizar tarefas de brochuras e não tarefas desenhadas por si ou exploradas na ESE:

O que é certo é que as tarefas que nós lemos, nas brochuras, ajudam. Acabamos por ter uma perceção, mais ou menos, daquilo que eventualmente poderá acontecer na sala de aula, o que é que eles podem questionar, que raciocínios é que eles podem ter. Mas o que é certo é que é uma turma!. . . Por exemplo, onde ocorreu o estudo, é completamente diferente da minha que eu estou. Só quando estou realmente perante eles e lhes coloco essa questão é que eu vou descobrir o que é que vai na cabeça deles. (AEF)

Ao longo da prática de ensino supervisionada, Ana foi alterando o seu discurso sobre se preferia selecionar tarefas exploradas na ESE, tarefas existentes em brochuras de natureza didática ou se desenhava tarefas específicas para os seus alunos. Inicialmente, defendia a construção e uso de tarefas pensadas especificamente para os seus alunos. As tarefas que construiu foram concebidas com a sua parceira de estágio. Uma vez que o seu discurso inicial é semelhante ao da parceira, esta opinião parece resultar de uma reflexão conjunta. Na segunda aula, de 45 minutos, manteve de algum modo o trabalho já iniciado mas já decidiu selecionar algumas tarefas de brochuras e adaptou-as. Assim, Ana pretendia trabalhar partindo de “casos concretos” e, por isso, propôs que os alunos representassem pictoricamente as operações indicadas em três expressões. Esta ideia ocorreu-lhe quando analisou o manual escolar dos alunos:

Eu tinha pensado na ideia das barras... Que estão divididas, por exemplo, $\frac{1}{3}$ e só está pintada uma parte das 3. Depois pedir para eles tracejarem o triplo de um terço... E colocarem aquilo de forma simbólica. Vai dar 3, que vai ser $\frac{3}{1}$ que é o inverso... (AEAA1)

Ana, pretendia que, através da visualização, os alunos compreendessem que o produto de dois números racionais inversos é a unidade. Por detrás desta ideia estão outras tarefas que recorrem ao modelo retangular na exploração dos números racionais e

suas operações e que surgiam no manual escolar. Note-se que parecia considerar que as representações pictóricas eram importantes para a compreensão da regra.

Assim, na primeira fase, Ana pretendia que os alunos inferissem e compreendessem as regras de cálculo na multiplicação de frações inversas entre si e que posteriormente aplicassem os procedimentos aprendidos em tarefas construída por si e pela parceira de estágio. Para tal, na tarefa 1, definiu as expressões numéricas Q1, Q2 e Q3, respetivamente “ $\frac{1}{4}$ de 4”; “ $\frac{1}{3}$ de 3” e “ $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$ ”, e definiu que iria pedir aos alunos que representassem pictoricamente as expressões de modo a visualizarem o produto obtido. O trabalho realizado na primeira aula demorou mais do que o esperado e Ana, de modo a sistematizar aprendizagens, construiu uma nova tarefa, Tarefa 2, que apresentou na segunda aula. Neste sentido apresentou representações pictóricas que ilustravam as expressões exploradas na aula anterior e propôs aos alunos a representação simbólica das operações. Pretendia que resolvessem as expressões simbolicamente recorrendo ao algoritmo da multiplicação de frações (Anexo 24). Ao explorar as tarefas, pretendia levar os alunos a encontrarem a propriedade “o produto de um número pelo seu inverso é 1 e identificarem que nas multiplicações efetuadas com frações, há a inversão do numerador pelo seu denominador” (AP). No final, os alunos resolviam duas expressões numéricas, denominada de Tarefa 3, e preenchiam uma frase com lacunas definindo a propriedade a aprender. Para sistematizar as aprendizagens, Ana preparou um PowerPoint com a expressão “ $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$ ” e, em conjunto com a parceira de estágio, usou um vídeo que apresentava a propriedade “o produto de um número pelo seu inverso é 1” (AP).

Na segunda fase da prática de ensino supervisionada, Ana introduziu a divisão de números racionais na forma de fração e planeou as suas aulas sozinha. Pensou as duas aulas, uma de 90 e outra de 45 minutos depois de uma reunião com a professora cooperante. Como já foi referido, Ana leu textos que pesquisou na internet e analisou brochuras com tarefas sobre a divisão de números racionais. Por fim decidiu selecionar tarefas de uma brochura (Monteiro & Pinto, 2012) analisada nas aulas da ESE e explicou as razões porque as selecionou: “Porque achei que fazia mais sentido na introdução... Mas isso também tem a ver [com] o meu à vontade para explorar cada uma delas e depois os problemas adaptei-os para o contexto que tinha.” Quando questionada porque não usou tarefas do manual, Ana explicou:

O manual confundiu-me um bocadinho. Pelo menos ao nível da explicação que é apresentada . . . Diz: “divisão é isto e depois tem lá uma reta numérica. . . E se era confuso para mim, eu depois não conseguia estar à vontade em termos de sala de aula. . . Optei por ir através das brochuras porque percebia o que estava lá a dizer, fazia sentido para mim... E era muito mais fácil. . . Há uma explicação breve dessas tarefas e nessa explicação. . . algumas apresentam alternativas de resolução dos alunos ainda há a explicação do porquê daquela tarefa. . . Quando vamos aplicar sabemos o que é que pretendemos com aquela tarefa. (AEAA4)

Ana seleccionou tarefas das brochuras porque estas davam informação relevante para a preparação das aulas. Rejeitou as tarefas do manual porque não compreendeu o trabalho proposto e não se sentia segura com a representação na reta numérica. Relativamente à seleção e sequenciação das tarefas da brochura, decidiu seleccionar uma tarefa de cada sequência de tarefas da brochura. Note-se que a brochura tinha três sequências de tarefas sobre divisão e Ana escolheu uma tarefa de cada sequência. E explicou que explicou que escolheu uma e reordenou:

Inv: Ah! As autoras propõem medida, partilha... E tu fizeste partilha...

Ana: Eu tinha logo partilha, depois tinha medida e depois voltava à partilha, se não estou em erro. A primeira era lançar ao pequeno-almoço dos irmãos a partilha do chocolate, cá está partilha, a segunda era no refeitório em relação à divisão dos dois litros de sumo pelos copos, que é medida e depois é a questão da caminhada, que voltamos à partilha.

(...)

Inv: O contexto de medida é mais difícil? Ou eram os números envolvidos?

Ana: Não, eram os números envolvidos. Aqui é mesmo a questão dos números envolvidos, porque aqui estou sempre a dividir por um número inteiro ou um número inteiro a dividir por uma fração, aqui não, aqui já seria a questão de meia hora ou três quartos de quilómetro. Já envolvia em ambos, frações. (AEDA3)

Ana, depois de seleccionou, redesenhou os problemas focando-se nos números envolvidos e não nos significados da divisão. Deste modo alterou a ordem das tarefas sem dar atenção aos significados de divisão e à ordem com que estes podem ser apresentados. A opção foi seleccionar uma tarefa de cada sequência perdendo-se os propósitos das sequências estabelecidas na brochura. Depois de seleccionar as tarefas realizou algumas alterações. Comparando as tarefas propostas por Ana com as da brochura consultada verificamos que retirou questões de nível de desafio mais elevado e adaptou os contextos dando continuidade ao que foi pensado pela parceira de estágio (situações colocadas à família MATS). Na brochura a primeira tarefa (T1) estava redigida do seguinte modo: “Depois de uma festa de anos sobraram $\frac{3}{4}$ de um bolo que a Helena dividiu em 6 fatias iguais. Que fração do bolo tem cada fatia” (Monteiro & Pinto, 2012, p.7). Nesta tarefa de divisão, com o significado de partilha equitativa, Ana

alterou os números envolvidos substituindo “ $\frac{3}{4}$ a dividir por 6” por “ $\frac{1}{3}$ a dividir por 2” (Figura 36).

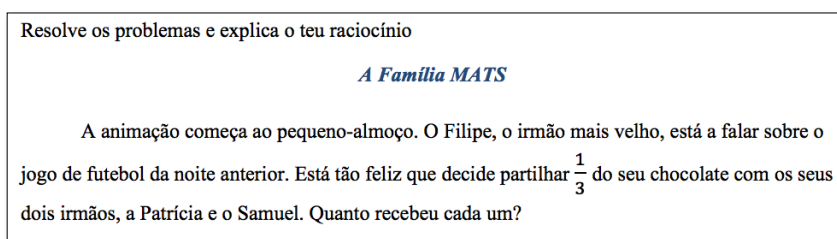


Figura 36. Tarefa 1 proposta na terceira aula

Considerando o ano de escolaridade envolvido, a alteração realizada reduziu o nível de desafio da tarefa tornando o cálculo bastante simples e possível de realizar mentalmente. A unidade de referência deixou de ser uma fração própria para passar a ser uma fração unitária e a partilha deixou de ser realizada por seis pessoas para ser por duas, envolvendo o cálculo da metade. Note-se que o modo como a situação é proposta podia levantar dúvidas sobre por quantas pessoas era dividido o chocolate.

Na segunda tarefa (T2) selecionada de Monteiro e Pinto (2012, p.32) e adaptada, abordava a divisão com o significado de medida e também foram realizadas alterações (Figura 37).

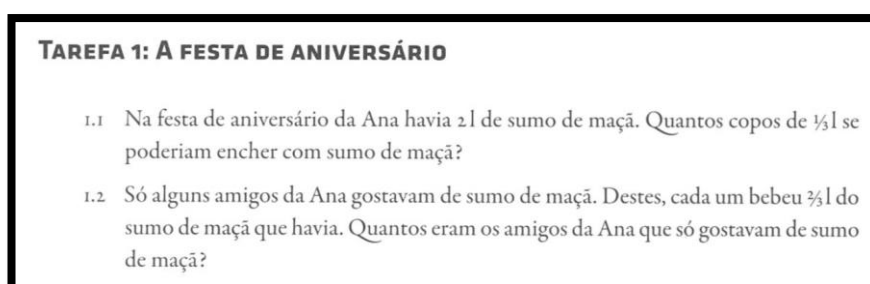


Figura 37. Tarefa 2 na brochura sobre divisão de números racionais

Ana alterou a linguagem tentando facilitar a interpretação da situação colocada e note-se que a segunda questão, mais desafiante, foi eliminada o que altera o nível de desafio da tarefa no seu conjunto. A tarefa proposta ficou com a seguinte redação:

No refeitório da escola houve a balbúrdia da hora do almoço. O Filipe tem de dividir dois litros de sumo pelos seus colegas. Cada copo leva $\frac{1}{4}$ de litro. Quantos copos encheu o Filipe?

Na terceira tarefa selecionada por Ana, e que mais tarde não foi concretizada por indicação da professora cooperante por não implicar o algoritmo da divisão, era novamente de partilha equitativa. Tal como aconteceu com a tarefa 2, Ana deixou cair a segunda pergunta reduzindo o nível de desafio da tarefa. Ou seja, quando Ana adaptou as questões colocadas nas tarefas selecionadas das brochuras desceu o nível de desafio das tarefas e nem sempre as alterações realizadas tornaram claro o que era pedido. As alterações efetuadas envolveram alterações na linguagem das questões, a substituição dos números envolvidos e a supressão de questões.

Assim, na segunda fase da prática, Ana propôs, primeiro, um problema (Tarefa 1) de divisão por partilha equitativa tendo por base a operação de $(\frac{1}{3} : 2)$ e, em seguida, um problema (Tarefa 2) de divisão por medida $(2 : \frac{1}{4})$. O terceiro problema colocava uma situação de divisão como operação inversa da multiplicação, estado envolvidos dois números racionais $(1\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2})$ (Anexo 25). A sequência estabelecida parecia depender dos números envolvidos e não tanto dos significados de divisão, com um desafio matemático crescente inerente aos números envolvidos. Inicialmente, preparou três problemas para 90 minutos mas a exploração demorou mais tempo do que esperava e precisou de outros 45 minutos. A professora cooperante sugeriu-lhe que não propusesse o último problema por não permitir explorar o algoritmo da divisão de frações. Nesse sentido, para a segunda aula, de sistematização e aplicação do algoritmo, Ana e a professora cooperante decidiram propor outros dois problemas de partilha equitativa (T3, T4) onde estavam envolvidas frações unitárias e números inteiros $(\frac{1}{3} : 4; \frac{1}{2} : 3)$ e três expressões numéricas (T5). Nesta última tarefa os alunos tinham que dividir frações com o que Ana chamou de “numerais maiores” (por exemplo, $\frac{7}{3} : \frac{21}{12}$) (Anexo 25). Para a futura professora estas expressões permitiam que os alunos calculassem divisões com “outro [desafio] ao nível de fração” (AEDA4). Assim, o facto de Ana construir e propor problemas idênticos à aula anterior teve implicações no nível de desafio que as tarefas levantavam aos alunos. Relativamente às expressões, definidas por Ana, o desafio colocado pela alteração dos números envolvidos parece remeter para aspetos relativos aos procedimentos e cálculo.

Em síntese, para a primeira aula, Ana decidiu propor expressões que os alunos deveriam representar pictoricamente. As tarefas tinham contextos puramente matemáticos e a futura professora salientou a necessidade da representação pictórica, de modo a promover a visualização das quantidades envolvidas e o efeito das operações. Os alunos já conheciam o algoritmo da multiplicação de frações. A sua colega de estágio também usou representações pictóricas para ilustrar os produtos, mas não pediu aos alunos que representassem pictoricamente a multiplicação de frações. As duas primeiras expressões propostas por Ana envolviam frações que assumiam o significado de operador em relação aos números inteiros. Para alunos do 5.º ano, este tipo de tarefa é relativamente simples. A terceira expressão envolvia um nível de desafio maior, uma vez que os alunos nunca tinham representado pictoricamente a multiplicação de duas frações. Note-se que se trata de um produto de uma fração própria por uma fração imprópria o que também eleva o nível de desafio. O facto de existirem várias representações pictóricas possíveis do produto leva a que esta expressão tenha uma natureza mais aberta. As restantes tarefas, na primeira e segunda aula, são pouco desafiantes e têm uma única resolução correta, constituindo exercícios. Na segunda fase, Ana adaptou os problemas com contextos não matemáticos a partir de uma brochura. Desde logo, selecionou apenas um problema de cada sequência alterando o percurso previsto na proposta da brochura. Em seguida, ao adaptar as tarefas alterou o contexto, tentou simplificar a linguagem e alterou as quantidades envolvidas e retirou algumas questões. Ao fazê-lo diminuiu o nível de desafio das tarefas e deu continuidade ao contexto apresentado pela parceira de estágio mas nem sempre obteve a clareza nas instruções como pretendia. Na quarta aula construiu exercícios (T5) e Ana procurou aumentar o nível de desafio envolvendo numerais de maior dimensão ou seja focando-se em aspetos relativos aos procedimentos e cálculo.

6.4.2.3. Antecipação da resolução das tarefas: Resolver para se preparar

Para se preparar para a leção, Ana antecipou resoluções das expressões a propor. As resoluções recorriam a representações simbólicas e pictóricas de modo a concretizar os resultados obtidos. Estas resoluções não faziam parte da planificação enviada aos supervisores/ avaliadores porque, como já vimos, considerava que poderia expor-lhes possíveis fragilidades. As resoluções foram sendo registadas no seu bloco de notas pessoal. Ana foi resolvendo de modos diferentes as expressões, considerando unidades de referência diferentes, talvez por dar significados diferentes aos números

racionais representados sob a forma de frações. Nas resoluções simbólicas, recorrendo a procedimentos de cálculo, resolveu as questões recorrendo ao algoritmo $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ e, quando tinha números inteiros, transformava-os em frações. As primeiras expressões pareciam não oferecer dúvidas quanto à sua representação pictórica, assim como a resolução das operações quando recorreu a procedimentos de cálculo. Sublinhou o “de”, na primeira expressão e indicou que representava a operação multiplicação e colocou uma nota referindo que qualquer número inteiro poderia ser expresso em fração colocando 1 como denominador. Na primeira e segunda operação considerou o número racional como operador, como seria de esperar. No entanto, a última expressão podia ser representada pictoricamente de diferentes formas. Os seus registos podem ser observados na figura 38.

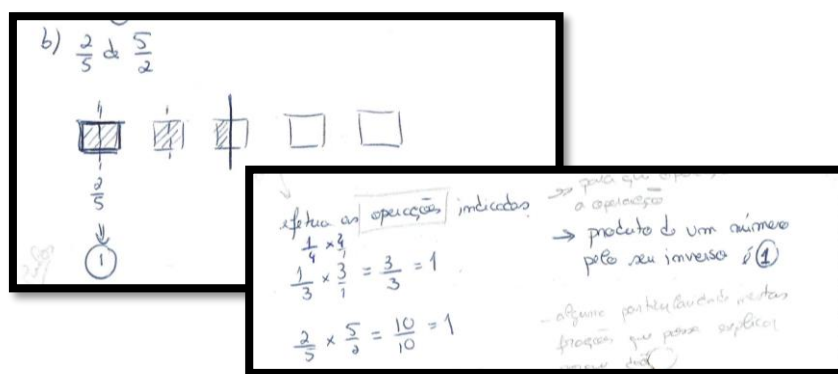


Figura 38. Resolução das tarefas propostas para as aulas 1 e 2 (1ª versão)

Na resolução da expressão “ $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$ ”, Ana partiu da unidade de referência 5 que dividiu em duas partes iguais pintando dois retângulos e meio. Dividiu a nova unidade em cinco partes e pintou duas delas o que equivale a um retângulo. Nesta resolução começou por interpretar a fração $\frac{5}{2}$ como quociente ao dividir os 5 retângulos ao meio. Em seguida, considerou $\frac{2}{5}$ como operador, assumindo $\frac{1}{5}$ como um novo todo e tomou duas partes. Assim o produto de $\frac{2}{5}$ por $\frac{5}{2}$ são duas partes das cinco, equivalentes a um retângulo. Para além das expressões enunciadas, Ana queria propor outras expressões e foi resolvendo outras situações. Nas diferentes resoluções, deu sempre o significado de parte-todo às frações próprias e o significado de quociente nas impróprias. Algumas páginas adiante do seu bloco de notas, tinha o processo de a antevisão do futuro PowerPoint que veio a usar (Figura 39).

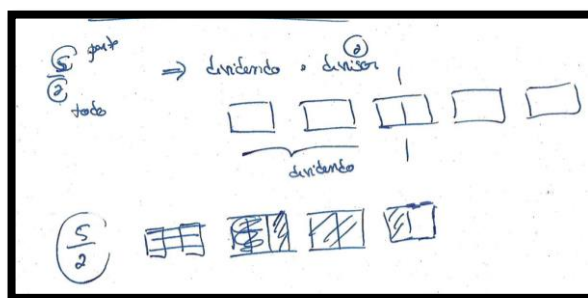


Figura 39. Segunda resolução para $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$

Neste registo, Ana considerou $\frac{5}{2}$ como uma fração com significado parte-todo e também como um quociente, sendo 5 o dividendo e 2 o divisor. Daí ter marcado a separação de cinco retângulos ao meio. Na segunda representação, em baixo, risca dois retângulos como estando a mais e considerou apenas dois retângulos e meio ou 5 meios retângulos, parecendo que ficou satisfeita com a resolução circundando a fração $\frac{5}{2}$. Nesta segunda resolução considerou um retângulo como a unidade e interpretou a fração como parte-todo. Assim, ao tentar obter uma representação ilustrativa da expressão $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$ transitou entre os significados parte-todo e quociente dependendo da unidade de referência que considerou. Por fim, para formular a explicação a dar aos alunos, Ana registou, no seu bloco de notas, as diferentes ideias a destacar e os passos a seguir. Também previu representações para representar o conceito e esclarecer a questão em análise. Previu identificar a unidade $\frac{5}{2}$ (fração imprópria) decompondo em $1 + 1 + \frac{1}{2}$. No segundo passo, planeou dividir os cinco meios em cinco partes tomando duas partes desse todo. Ou seja, ao longo do processo de antecipação da resolução da $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$, Ana foi prevendo diferentes formas de representar e explicar a resolução da expressão.

Na planificação escrita da terceira aula não foram antecipadas resoluções dos alunos prevendo apenas o registo do algoritmo no momento da síntese final talvez porque nas brochuras já tivesse a antecipação de resoluções. No entanto, nos seus registos pessoais podemos verificar que Ana resolveu algumas expressões do tipo $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ e $\frac{\frac{2a}{b}}{\frac{a}{b}}$ e a resolução da primeira tarefa (Figura 40) e na entrevista antecipou resoluções.

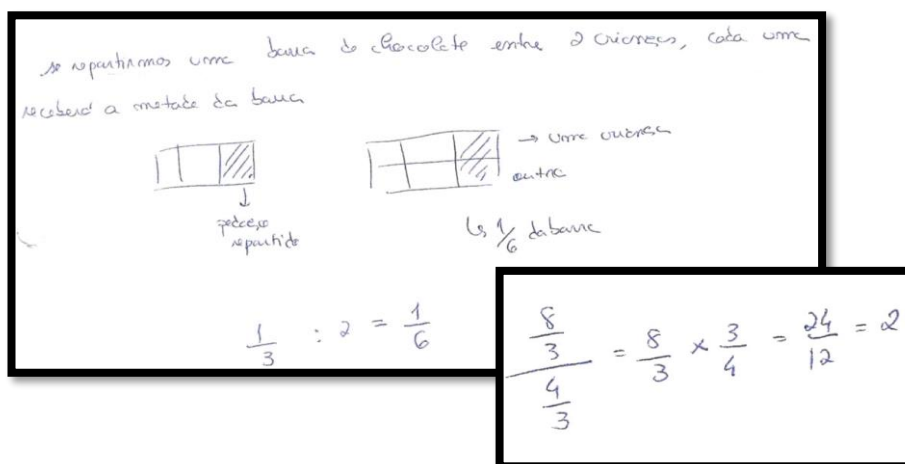


Figura 40. Notas pessoais sobre divisão de números racionais

Nos seus registos recorreu à representação retangular estabelecendo a unidade de referência e repartindo-a em duas partes, identificando o quociente obtido. A representação pictórica era acompanhada com a representação simbólica onde não estava explícito o algoritmo da divisão de frações. Quando resolveu a expressão abaixo recorreu ao algoritmo inverte e multiplica.

Na entrevista antes da aula, Ana referiu que esperava que os alunos resolvessem as duas primeiras tarefas recorrendo aos conhecimentos que já tinham:

Como é que resolvemos a divisão... Aí é trabalhar a ideia de inverso e multiplica. . . Portanto dividir por dois, é a mesma coisa que multiplicar por um meio, que é a mesma coisa que multiplicar por cinco décimas. . . . [O segundo] já era ir pelas adições sucessivas, pelo menos no raciocínio que eu fiz, também é possível através de esquema. Mas o que eu quero é que eles cheguem a ideia que nós estamos aqui a multiplicar, não estamos a adicionar várias vezes, logo multiplicar, logo o inverso da divisão é multiplicação (AEAA3).

Ana previu estabelecer a relação entre dividir e multiplicar pelo número inverso partindo das ideias que surgissem do primeiro problema, relacionando a divisão por 2 com a multiplicação por metade ou cinco décimas. Em seguida, queria reforçar a ideia na discussão do segundo problema onde partindo de situações de adição sucessiva (relacionando-as com subtrações sucessivas), ou de esquemas dos alunos, se chegaria à ideia da multiplicação e de divisão como operações inversas. Note-se que esta ideia se afastava do significado de divisão como medida tal como era previsto na brochura consultada.

Na planificação da quarta aula previu uma resolução recorrendo à representação pictórica da situação (Figura).

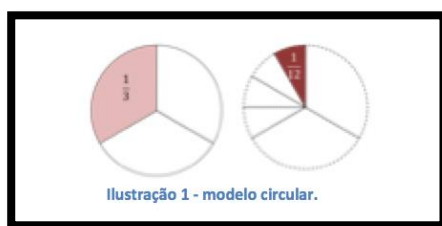


Figura 41. Representação pictórica prevista para a tarefa 1 da divisão de frações

Nesse sentido estabeleceu uma representação circular percebendo-se que previu iluminar unidade de referência $\frac{1}{3}$ e em seguida considerou a quarta parte dessa unidade chegando à resposta $\frac{1}{12}$. A representação prevista não dividia a representação circular em partes iguais, ou seja, a parte e o todo estavam implícitas. Note-se que a futura professora previu o estabelecimento de relações entre “a representação simbólica e o modelo circular” e a aplicação do algoritmo. Como se verá na próxima seção, no momento da exploração, os alunos evidenciaram alguma dificuldade em compreender o quociente identificado na representação da direita. Relativamente ao segundo problema registou, na sua planificação que pretendia confrontar estratégias mas não registou quais nem como, reforçando que pretendia a aplicação do algoritmo. A futura professora, no seu bloco de notas, previu as mesmas ideias mas a representação prevista (retangular) divide a unidade inicial em partes iguais. Relativamente à tarefa 5 foi previsto um exemplo de resolução simbólica com a respetiva identificação dos procedimentos a adotar no algoritmo inverte e multiplica mas não foram previstas resoluções dos alunos ou identificados erros possíveis.

Assim, a antecipação de resoluções das tarefas propostas centrou-se nas resoluções que pretendia apresentar aos seus alunos de modo a preparar-se para possíveis dúvidas dos alunos. Neste processo, a definição da unidade de referência teve duas fases, tendo a futura professora transitado entre os significados atribuídos às frações. Durante a semana que lecionou os números racionais inversos entre si resolveu várias expressões envolvendo números inversos e procurou a representação pictórica que representasse as situações colocadas. Atribuiu às frações impróprias o significado de quociente e às frações próprias o significado parte-todo. Na planificação escrita da terceira e quarta aula não foram antecipadas resoluções de alunos. No entanto nas entrevistas e nos seus registos pessoais, Ana antecipou as resoluções das tarefas e previu que partindo destas guiava os alunos para o algoritmo da divisão de frações. Analisando

os seus registos pessoais percebemos que Ana anteviu resoluções com representações pictóricas e simbólicas, mas não ficou claro como iria estabelecer relações entre elas. Na antecipação de diferentes resoluções às tarefas 2 e 3 e apesar da futura professora ter explicitamente referido os diferentes significados de divisão, quando selecionou as tarefas, ao explicar as resoluções o seu foco estava no significado de divisão como partilha e no significado de divisão como operação inversa da multiplicação. Na planificação escrita da quarta aula previu uma resolução recorrendo à representação pictórica da situação recorrendo à representação circular. A representação prevista não divide a representação circular em partes iguais o que leva a que a relação parte-todo seja implícita.

6.4.1.4. Momentos das aulas: Descrição sucinta do momento central

Ana não descreveu exaustivamente o que pretendia realizar nas aulas focando-se nas atividades essenciais a desenvolver. Analisando os planos de aula (aula de 90' e de 45') verificamos que descreveu sucintamente o que pretendia que acontecesse ao longo das aulas e com mais algum detalhe as atividades dos alunos no momento de exploração das tarefas (Figura 42).

(90') Correção do trabalho de casa (propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração). Entrega das questões-aula. Demonstração da correção de um dos problemas propostos (o caracol e o poço). Ficha de consolidação das propriedades da multiplicação. Tarefa exploratória: Propõe-se aos alunos a representação pictórica de produtos de números racionais (por exemplo: $\frac{1}{3}$ de 3; $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$). Pelas representações efetuadas os alunos descobrem a regularidade: o produto de um número pelo seu inverso é 1 e identificam que nas multiplicações efetuadas com frações, há a inversão do numerador pelo seu denominador. Como sistematização do conceito procede-se ao visionamento de um vídeo referente ao inverso de um número racional.	(45') Propõe-se aos alunos que realizem alguns cálculos onde façam o produto de um número pelo seu inverso. Através dos resultados obtidos os alunos descobrem a regularidade: o produto de um número pelo seu inverso é 1. Estes são solicitados ainda a identificar a regularidade presente nas operações propostas, identificando que nas multiplicações efetuadas com frações, há inversão do numerador pelo seu denominador. Resolução de uma ficha de trabalho para a sistematização do conceito de inverso de um número racional.

Figura 42. Planificações das aulas sobre números racionais inversos entre si

Na planificação da primeira aula, no quarto parágrafo, central para o propósito da aula, previu a exploração do conceito de inverso de um número racional. Assim, indicou que, inicialmente, iria propor uma tarefa exploratória propondo representações simbólicas e pictóricas de produtos de números racionais inversos. Em seguida, pretendia que os alunos, que já sabiam multiplicar números racionais, estabelecessem relações entre representações e que descobrissem a propriedade “o produto de um

número pelo seu inverso é 1”. No final, previa apresentar um vídeo (PowerPoint animado) com o registo da propriedade. No entanto, e como já foi referido, não cumpriu o planeado pelo que elaborou outra planificação para uma aula de 45 minutos (Figura 42). Na planificação da segunda aula, descreveu o trabalho que pretendia realizar estabelecendo o momento de proposta da tarefa, seguido pela exploração da tarefa, definindo o que se espera que os alunos fizessem. Por fim, referiu que iria propor uma ficha de trabalho para “sistematização do conceito” sem explicar o trabalho a realizar com as diferentes tarefas propostas. Na planificação das aulas estão definidos os propósitos. Na primeira planificação a futura professora enfatizou as questões relativas ao estabelecimento de relações entre representações mas na segunda descrição já não o fez. Na segunda descrição o foco estava nos procedimentos de cálculo a realizar e manteve a ideia de encontrar uma regularidade de modo a estabelecer a propriedade pretendida. Esta alteração de foco prende-se com os propósitos das duas aulas sendo que na primeira introduziu o novo conceito e na segunda levou os alunos a consolidar as aprendizagens realizadas aplicando o aprendido e memorizado.

Na segunda fase, na planificação escrita de aulas que queria que tivessem uma nova dinâmica, Ana apesar de não ter registado, na entrevista antes da terceira aula, contou que, inicialmente, pensou organizar os alunos individualmente mas

Depois há aqui miúdos com muitas dificuldades e pensei na ideia de pares. Em grupo achei que ia dar muita confusão. . . Eles até são uma turma muito sossegadinha, mas depois estarem a sair dos lugares, para estarem todos a virarem-se para o quadro, tinha pensado na ideia de pares.

A futura professora decidiu colocar os alunos a resolver as tarefas a pares para apoiar os alunos com mais dificuldades. Em detrimento ao trabalho em grupo, porque tinha preocupações com a gestão dos comportamentos dos alunos e com a organização dos espaços e recursos preferiu o trabalho a pares. A planificação escrita foi organizada do mesmo modo das aulas anteriores mas da terceira para a quarta aula descreveu com mais detalhe o trabalho que pretendia realizar com os alunos. Note-se que entre a terceira e quarta aula teve acesso às resoluções dos alunos no mesmo tipo de problemas. Na figura 43 verificamos como descreveu os diferentes momentos das aulas e as diferenças nessa descrição.

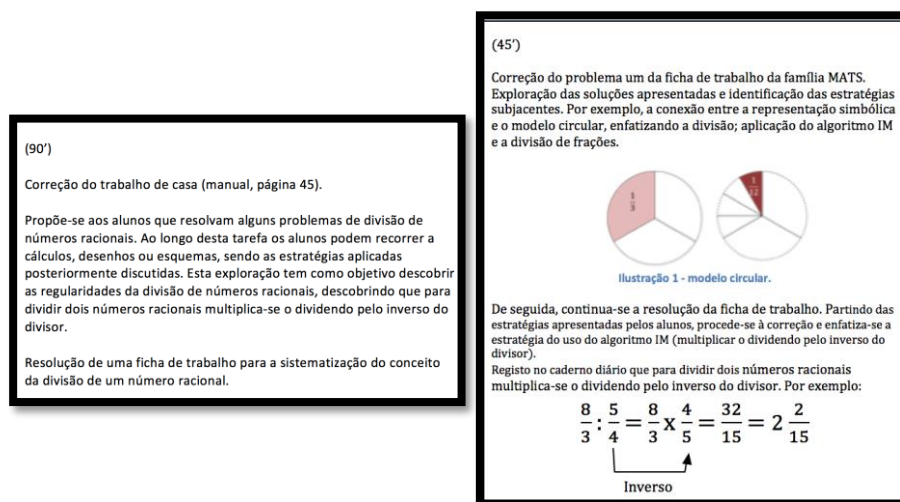


Figura 43. Descrição na planificação do trabalho a realizar na aula 3 e 4

Na planificação da terceira aula, Ana registou, no segundo parágrafo, a exploração dos problemas, onde os alunos podiam recorrer a diferentes estratégias posteriormente discutidas finalizando este momento com o registo no caderno do algoritmo da divisão (inverte e multiplica). Na planificação da quarta aula, a futura professora, descreveu um pouco mais como pretendia discutir os problemas. Por isso, registou que pretendia discutir o problema proposto na aula anterior e relacionando resoluções pictóricas e simbólicas estabelecer o algoritmo inverte e multiplica e considerou dois exemplos. Um onde estavam envolvidas duas frações e outro onde divide uma fração por um inteiro ($\frac{3}{4} : 3$). Na última expressão substitui 3 por $\frac{3}{1}$. Assim, verificamos que a futura professora, na planificação da quarta aula, descreveu com maior pormenor algumas resoluções e que, numa das tarefas, registou que pretendia estabelecer relações entre dois tipos de resolução, a pictórica e a simbólica.

Em entrevista, Ana explicou como pretendia organizar o momento de trabalho autónomo, como pretendia propor e gerir a exploração das tarefas e anteviu como iria ocorrer o trabalho no momento de discussão da tarefa em grande grupo:

E depois era a questão de resolverem aquilo [com] várias explorações, colocar as explorações [em] confronto (ideias) digamos assim e depois questionar “Então mas não há outra alternativa para fazer isto?”. Isto dá-lhes a ideia de quê... Chegar à divisão, mas depois como é que resolvemos a divisão... é trabalhar a ideia de inverso e multiplica (AEAA3).

Assim, Ana pretendia a apresentação das diferentes resoluções, confrontá-las em grande grupo e dessa discussão chegar ao algoritmo da divisão com frações (inverte e

multiplica). Pretendia colocar os alunos a resolver as tarefas a pares, de modo a que os alunos com mais dificuldades tivessem apoio dos colegas e para facilitar a gestão de comportamentos e recursos físicos. As planificações escritas, da segunda fase da prática, eram mais descritivas. Entre a planificação da terceira e da quarta aula antecipou possíveis resoluções pictóricas e simbólicas resultado do vivido na terceira aula. Deste modo verificou-se uma maior descrição do trabalho a realizar. Em entrevista explicitou que pretendia promover o confronto das diferentes resoluções de cada tarefa de modo a chegar ao algoritmo da divisão.

Em síntese final, o processo de planificação de Ana foi vivido em várias fases. Inicialmente, fez várias leituras e pesquisas de tarefas, reviu os aspetos matemáticos a considerar e registou nas suas notas pessoais aqueles que considerou essenciais. Preparou as aulas, definindo o seu propósito, construindo tarefas, antecipando a resolução das tarefas a explorar e descrevendo sucintamente os momentos de trabalho. Na primeira fase pretendia que, através da visualização das apresentações pictóricas das expressões propostas, os alunos compreendessem que o produto de dois números racionais inversos é a unidade e, em seguida, que aplicassem a propriedade aprendida. Finalmente, e para se sentir segura no trabalho em sala de aula, resolveu as tarefas a propor. Neste processo, a definição da unidade de referência teve duas fases, tendo a futura professora transitado entre os significados atribuídos às frações (quociente e parte-todo). Inicialmente, perante uma fração imprópria atribuiu-lhe o significado de quociente e perante frações próprias atribuiu o significado parte-todo. Posteriormente, e como resultado do processo de lecionação, sentiu necessidade de decompor a fração imprópria e atribuiu o significado de parte-todo reconhecido pelos seus alunos. Na segunda fase, pretendia introduzir o algoritmo da divisão de frações partindo das resoluções dos alunos a problemas com contextos próximos destes. Posteriormente, pretendia sistematizar o algoritmo inverte e multiplica com expressões numéricas. Para tal, adaptou tarefas de uma brochura. Os três problemas de divisão exploravam diferentes significados da divisão. Ao redesenhar as tarefas das brochuras, alterou o contexto, tentou simplificar a linguagem e retirou algumas questões. Ao fazê-lo diminui o nível de desafio das tarefas e deu continuidade ao contexto apresentado pela parceira de estágio. Ana não antecipou por escrito diferentes resoluções dos seus alunos e como a partir delas chegaria ao conceito de divisão de frações. No entanto analisando os seus registos pessoais e nas entrevistas percebemos que Ana tinha ideias prévias de como os alunos iriam resolver as tarefas a propor. Assim, anteviu resoluções com representações

pictóricas e simbólicas mas nem sempre ficando claro como iria estabelecer relações entre elas. Apesar da futura professora ter explicitamente referido os diferentes significados de divisão, quando previu as resoluções parece que o seu foco estava no significado de divisão como partilha e como operação inversa da multiplicação. Na planificação escrita da quarta aula reviu uma resolução recorrendo à representação pictórica da situação e estabeleceu uma representação circular que podia levantar dificuldades aos alunos. Na primeira fase, a descrição dos momentos de trabalho era sucinta e enfatizou o estabelecimento de relações entre representações e em seguida os procedimentos de cálculo. Ana registou sucintamente os momentos exploração das tarefas. Na segunda fase, descrevendo um pouco mais, referiu que pretendia colocar os alunos a resolver as tarefas a pares e que iria promover, em grande grupo, o confronto das diferentes resoluções de modo a chegar ao algoritmo da divisão de frações.

6.4.2. Concretização das aulas

Ana começou a sua primeira aula corrigindo questões deixadas de aulas anteriores, começando pelas questões onde os alunos tinham sentido mais dificuldades. Em seguida, passou para a correção de tarefas propostas pela parceira de estágio na aula anterior sobre propriedades da multiplicação com números racionais. Numa terceira fase introduziu o conceito central da aula, os números racionais inversos.

6.4.2.1. Aula 1: Proposta da tarefa 1 e exploração da questão “ $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$ ”

Para a compreensão da propriedade do produto da multiplicação de frações inversas, Ana começou por propor oralmente, registando no quadro, as expressões “ $\frac{1}{4}$ de 4” e “ $\frac{1}{3}$ de 3” que os alunos deviam calcular. Simultaneamente, solicitou aos alunos que representassem pictoricamente as resoluções. Note-se que estes já conheciam o procedimento da multiplicação de frações da aula anterior, lecionada por Glória, onde tinha recorrido às mesmas representações pictóricas para ilustrar produtos. No momento de proposta da tarefa, Ana indicou o que pretendia que os alunos fizessem, *sugerindo*: “Quero isso representado no papel. Eu não quero a operação, quero um esquema ou desenho!”. Enquanto circulou pelos alunos, foi reforçando: “Quero isso representado no papel. Eu não quero a operação, quero um esquema ou desenho!” Os alunos não sentiram dificuldade em representar pictoricamente as duas primeiras expressões. Ana

pediu silêncio e indicou que, caso tivessem alguma dúvida, deveriam colocar o dedo no ar. Depois de resolver no quadro as questões passou para a terceira questão.

Para propor a terceira questão, Ana escreveu a expressão “ $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$ ” no quadro e pediu aos alunos para, mais uma vez, representarem a expressão por desenhos ou por um esquema. Os alunos começaram a resolver a questão, mas mostravam-se confusos relativamente ao trabalho a realizar. Falando diretamente com um aluno, Ana indicou o que pretendia:

Ana: “ $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$ ”. Primeiro tens que pensar na unidade. Num todo.

Aluno: Eu acho que é multiplicação....

Ana: Sim, OK! Eu percebi o teu raciocínio. Mas eu quero que... (o aluno começou a apagar a resolução) Mantém! . . . Eu quero é que representes essa multiplicação, que tu fizeste mentalmente, em esquema!

Ana propôs a terceira expressão *informando*, mais uma vez, o que pretendia que os alunos fizessem e definiu a estratégia a seguir. Na interação com os alunos *sugeriu* uma representação pictórica, fechando a tarefa, e os alunos mostraram-se confusos uma vez que já conheciam o procedimento da multiplicação de frações. A futura professora voltou a sublinhar a necessidade de representar pictoricamente a situação, uma vez que pretendia que os alunos visualizassem as quantidades envolvidas e compreendessem porque o resultado era 1. O objetivo da tarefa, uma vez que pretendia que os alunos visualizassem as quantidades envolvidas e compreendessem porque o resultado era 1 mas ao *sugerir* uma representação pictórica, pode ter fechado a tarefa.

6.4.2.2. Discussão da questão “ $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$ ”

Enquanto circulava pela sala, Ana sublinhou aos alunos a necessidade de representarem pictoricamente a situação. A certa altura, percebeu que havia perguntas que se repetiam e decidiu discutir a tarefa em grande grupo. Começou por focar a atenção na fração $\frac{5}{2}$. Em diálogo, definiu o 5, como unidade de partida e dividiu esta unidade em duas partes. Uma aluna propôs dividir cada um dos 5 retângulos em metades e Ana desenhou a figura 44 e seguiu-se o diálogo.

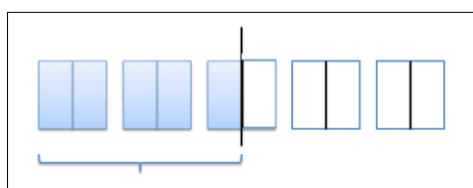


Figura 44. Reprodução da representação de Ana na 1.^a aula

Ana: A Gabi foi dividir cada uma das 5 unidades ao meio. Mas é isso que nos dizem para fazer?... Nós temos 5 unidades e, as cinco, vamos dividir em duas partes... [A opção da Gaby] vai ajudar para descobrir onde é o meio das nossas 5 partes... Vai ser o quê? (Traça o meio) Vamos ter aqui duas unidades e meia e mais 2 unidades e meia . . . Vamos ter cinco meios. E agora estes $\frac{2}{5}$? Nós temos que representar $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$. Ou seja, nós ao representarmos os $\frac{5}{2}$ fomos descobrir a nossa unidade para os $\frac{2}{5}$. Ou seja, onde nós vamos representar os $\frac{2}{5}$. Porque agora o nosso universo vai passar a ser só uma das partes. Que é onde nós vamos representar os $\frac{2}{5}$. . . Vamos pintar o quê, 2 partes de 5.

Aluno: Eu pensei em pôr logo 5 metades.

Ana: O teu raciocínio está correto. É que estes $\frac{2}{5}$ vão ser só desta parte. Nós já não vamos representar $\frac{2}{5}$ de todo o nosso universo, das 5 unidades. É só da parte daqui. Então estes $\frac{2}{5}$ vão ser o quê? Vão ser estas duas partes, destas 5. Que nos vai dar o quê?

Aluno: Uma unidade.

Ana tinha previsto discutir as resoluções dos alunos, mas, no momento da aula, avançou para uma explicação da resolução. Nesta explicação, considerou a fração imprópria $\frac{5}{2}$ como um quociente onde a unidade é 5 e é dividida em duas partes. Definiu os termos da expressão *informando* da importância de informar a unidade de referência e sublinhando a palavra *de* como forma dos alunos compreenderem que estão perante uma multiplicação. Em seguida, indicou que se estabeleceu uma nova unidade e considerou duas quintas partes dessa nova unidade. Assim, tentando esclarecer a questão em análise, explicou passo-a-passo as principais ideias matemáticas que pretendia ilustrar. No entanto, os alunos pareceram interpretar as frações como relação parte-todo. A futura professora não rejeitou a ideia mas não explorou estas duas perspetivas e a adequação da sua explicação às ideias prévias dos alunos.

Na sequência, a futura professora pediu aos alunos para resolverem as expressões simbolicamente relembrando que a parceira de estágio dizia sempre que o “*de, do e da* indicavam uma operação de multiplicação”. O resto da aula foi passado com os alunos a resolverem as operações “ $\frac{1}{4} \times 4$ ”; “ $\frac{1}{3} \times 3$ ” e “ $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}$ ”. Enquanto os alunos resolviam as operações, a professora cooperante chamou-a à parte e conversaram sobre a unidade de referência e pediu para apagar 2 os quadrados “a mais” ficando dois quadrados e meio.

6.4.2.3. Aula 2: Proposta e discussão da tarefa 2

Na aula seguinte, dando continuidade ao trabalho com a tarefa 2, Ana optou por saltar a fase de trabalho autónomo e avançar para a discussão das resoluções. Ao distribuir a ficha, reviu o realizado e enquadrou o trabalho a concretizar.

Projetou a ficha entregue em papel (Figura 43) e explorou as expressões *informando e guiando* os alunos a recorrer a procedimentos de cálculo da multiplicação de frações.

Efetua os cálculos e completa o quadro.

	Representação	Operação
$\frac{1}{4}$ de 4		
$\frac{1}{3}$ de 3		
$\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$		

Figura 45. Quadro resumo projetado no quadro branco

Temos $\frac{1}{4}$ de 4. Então como é que nós vamos fazer? (Aponta para uma aluna, mas a aluna não responde) Que operação é que nós temos ali presente? . . . Temos $\frac{1}{4}$ de 4, certo. Vamos ter que fazer uma operação. Que operação é que nos é pedida ali? (A aluna não responde) No de? Nas aulas anteriores a professora Glória falou-nos do *de*, *do*, e *da*, que nos indicava uma... Quem é que ajuda a colega?

Ana começou por inquirir uma aluna sobre o procedimento a realizar de modo a apresentar as suas ideias. Esta não respondeu e, de modo a apoiá-la, *guiou-a* na resolução, remetendo para a aula anterior, reforçando que “*de*” se referia à multiplicação. Perante a ausência de resposta, pediu ajuda aos alunos e obteve a resposta pretendida. Para finalizar, retomou a última explicação da aula anterior recorrendo a um PowerPoint de modo a clarificar a resolução (Figura 46).

Passo 1

$$\frac{5}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

Passo 2

$$\frac{2}{5} \text{ de } \frac{5}{2}$$

Figura 46. PowerPoint da situação $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$

Ana: Vamos esclarecer o que estivemos a fazer ontem. Nós, nos $\frac{5}{2}$, vamos observar o quê. Se nós formos através do número numeral misto, o que é que nós vamos ter? Vamos ter $\frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2}$. O que é que isto nos indica?

Aluno: $2\frac{1}{2}$.

Ana: $2\frac{1}{2}$, que é o que temos aqui (apontando para o primeiro slide), ou seja vamos ter 2 unidades, que temos aqui, 1 mais 1, mais metade, que é o que nós temos aqui representado, certo? E o que nós queremos saber é $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$. Então como é que nós vamos fazer? Nós temos representado o nosso todo. Temos 2 unidade e depois vamos ter as 5, no total, não é. Cada unidade está dividida em duas e nós queremos o quê? Os $\frac{2}{5}$, duas partes de cinco. Então o que é que nós vamos ter? Uma, duas... Vai corresponder a quanto? A quanto é que corresponde estes $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$?

Aluno: Uma unidade.

Ana começou a sua explicação retomando o trabalho realizado de modo a focar os alunos novamente na expressão $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$. Em seguida *sugeriu* que $\frac{5}{2}$ podem ser representados por um numeral misto. Explicando o *processo passo-a-passo*, decompôs o numeral misto para que os alunos visualisassem que a unidade era dois retângulos e meio, atribuindo o significado parte-todo. Por fim, apresentou a operação multiplicação explicando que se consideraram duas partes de cinco da unidade inicial ($\frac{5}{2}$) o que correspondia a duas metades de retângulo, ou seja, uma unidade.

Sobre o conceito de números racionais inversos, Ana realizou duas explicações diferentes, em aulas diferentes, procurando dar resposta às ideias prévias dos seus alunos. Sem que fosse “dada” uma propriedade para ser memorizada, representou pictoricamente a expressão proposta e desenvolveu explicações completas sobre a multiplicação de números racionais inversos. Na primeira explicação considerou a unidade de referência da fração imprópria $\frac{5}{2}$ como sendo cinco retângulos e deste modo atribuiu à fração o significado de quociente. Nesta primeira fase não previu outras perspectivas sobre os números racionais envolvidos e foi confrontada com uma perspectiva diferente dada pelos alunos. Perante o imprevisto, ou seja, perante a perspectiva dos alunos em encarar $\frac{5}{2}$ com o significado parte-todo, identificando um retângulo como unidade de referência, optou por realizar uma explicação focada na resolução que previu. Na explicação definiu o conceito de unidade de referência,

destacou as principais ideias matemáticas previstas e explicou o processo de pensamento passo-a-passo. No entanto, revelando algumas dificuldades em compreender as ideias dos alunos e em adaptar o seu discurso, não confrontou as duas perspetivas. Na aula seguinte, elaborou uma segunda explicação, considerando as ideias dos alunos, atribuindo a $\frac{5}{2}$ com o significado parte-todo.

6.4.2.4. Aula 3: Proposta e exploração da tarefa 1

A primeira aula de Ana sobre divisão de números racionais começou com a apresentação do contexto comum às diferentes tarefas dos próximos dois dias de trabalho. Propôs dois problemas num contexto de quotidiano familiar, tendo focado a atenção no contexto e não leu as tarefas. O seu objetivo era que os alunos dessem significado ao proposto (Figura 45).

Resolve os problemas e explica o teu raciocínio

A Família MATS

A animação começa ao pequeno-almoço. O Filipe, o irmão mais velho, está a falar sobre o jogo de futebol da noite anterior. Está tão feliz que decide partilhar $\frac{1}{3}$ do seu chocolate com os seus dois irmãos, a Patrícia e o Samuel. Quanto recebeu cada um?

Figura 47. Tarefa 1 para introduzir a divisão com frações (Ana)

Ana: Nós vamos conhecer a família Mats. E quem é esta família Mats? Temos o pai, uma mãe, temos o Filipe, que é o filho mais velho e temos mais dois filhos, o Samuel e a Patrícia. Esta família o que é que tem de especial. Esta família está sempre envolvida em muitas atividades. Adoram correr, passear, adoram partilhar, eles adoram partilhar. E o que é isto de partilhar? Eu já ouvi mas têm que falar mais alto.

Alunos: Dividir!

Alunos: Dividir por todos!

Ana: Dividir por todos. E como é que nós fazemos, dividirmos por todos?

Alunos: Partilhamos!

Ana: Partilhamos. Nós partilhamos, dividimos. Dividirmos, partilhamos.

Assim, verificamos que Ana *iniciou* o trabalho identificando aspetos fundamentais do contexto, como os elementos da família sublinhando o número de elementos. Focalizando os alunos, clarificou o significado de dividir como partilhar, esclareceu o vocabulário usado, *guiando* os alunos para o significado de divisão que pretendia explorar. Deste modo, enfatizou o significado de divisão como partilha equitativa. Ana organizou os materiais, estabeleceu o que esperava e o modo de registar as resoluções discutidas pelos pares: “Vamos registar o enunciado no vosso caderno que é para depois

dois a dois irem resolver. Discutirem ideias. Como é que vocês podem representar a resolução? Esquemas, desenhos, cálculos, o que vocês quiserem...”. Ou seja, promoveu a colaboração entre os pares e deu indicações de que as resoluções deviam ser discutidas. Por fim, pediu o registo das resoluções no caderno dando exemplos de representações a utilizar e deixando em aberto as estratégias a que os alunos poderiam recorrer.

Em seguida, no momento de exploração da tarefa, os alunos começaram a trabalhar e a futura professora foi circulando pela sala, observando o trabalho realizado. Perante as dificuldades dos alunos *informou* sobre os aspetos enunciados, em grande grupo. Entretanto, foi imprimindo dinâmica de trabalho, alertando os alunos para o tempo disponível para este momento: “Temos um problema e vocês os dois vão ter de discutir para arranjar uma solução. Olhem têm 2 minutos para passarem porque eu depois vou tirar o enunciado.” Apesar de não ter sido recorrente, quando se deparou com alunos bloqueados, e que ainda não tinham começado o trabalho, *guiou-os* focando-os no enunciado e no que era pedido na tarefa: “O Luís é o dono do chocolate e ele vai dividir uma parte do chocolate entre os dois irmãos. Eu tenho um chocolate. Vou tirar $\frac{1}{3}$ desse chocolate. E esse $\frac{1}{3}$ vou dividir por vocês as duas”.

Depois de propor a tarefa a futura professora sentiu necessidade de, com alguns alunos, voltar a identificar dados e as condições da situação colocada. Neste processo levou os alunos a identificarem-se com a situação procurando que dessem o significado de divisão a “ $\frac{1}{3}$ por dois” dando-lhe o sentido de partilha equitativa. No seu discurso introduziu usou a palavra dividir de modo a *sugerir* a operação a realizar. Esta indicação pode ter alterado o nível de complexidade da tarefa para aqueles alunos. Nas interações com os alunos, questionou pouco e deu poucas indicações sobre o trabalho a realizar.

6.4.2.5. Discussão da tarefa 1

Quinze minutos depois, iniciou a discussão em grande grupo onde foram apresentadas três resoluções corretas no quadro. A primeira apresentação foi da aluna Raquel que desenhou a sua resolução, cuja representação pictórica e a indicação simbólica do quociente não estavam claras. Raquel pediu para ir ao quadro explicar a resolução (Figura 46) e Ana apoiou a explicação:

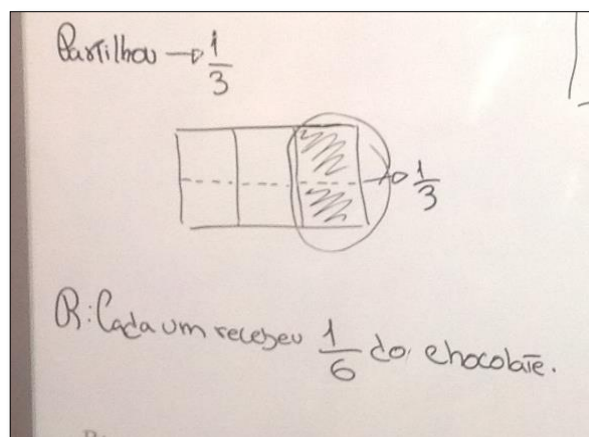


Figura 48. Resolução no quadro da Tarefa 1 (par de Raquel)

Raquel: Primeiro eu fiz a tablete de chocolate, depois fiz $\frac{1}{3}$ (apontando para a fração $\frac{1}{3}$ na parte superior da resolução e para a representação pictórica) e depois...

Ana: Ou seja dividiste o chocolate em quantas partes?

Raquel: Depois como iria dividir $\frac{1}{3}$ em dois porque dá metade para cada irmão...

Ana: Foste dividir em dois porque dá metade para cada irmão. E porque é que chegaste a $\frac{1}{6}$? Como é que chegaste a $\frac{1}{6}$?

Raquel: Porque depois ele começa a ser dividido... E ele só tem aqui uma...

Ana: Ele só deu um bocado para cada irmão, ok... (Raquel sentou-se)

As alunas começaram por dividir a unidade em três partes iguais. Em seguida dividiram as três partes ao meio, referindo que eram dois irmãos. A futura professora, inquirindo, *guiou* a aluna a explicar como chegou ao quociente $\frac{1}{6}$ que estava omissa na resolução das alunas. Raquel explicou que cada irmão ficou com uma parte da terça parte e Ana validou a resposta. Neste diálogo verificamos que o propósito de Ana, em pedir à aluna para apresentar a sua resolução, era explorar uma resolução pictórica incompleta onde não estava explícito o quociente obtido. Neste momento Ana não completou o registo mas mais tarde fá-lo partindo de uma outra resolução.

Sem que tenha realizado uma conexão entre as apresentações, Ana pediu a uma aluna, que resolveu a tarefa simbolicamente, para apresentar a sua resolução. A resolução indicava corretamente a operação a realizar mas a aluna não soube explicar como tinha chegado ao resultado correto. Entretanto, Ana pediu a uma terceira aluna, com mais capacidade de comunicação, para vir ao quadro. No entanto foi surpreendida com o raciocínio apresentado que não estava registado no caderno (Figura 49). A aluna

explicou a sua resolução (registada no quadro a vermelho) mas Ana compreendeu uma ideia diferente e discutiu a resolução, fazendo os registos a preto (Figura 49):

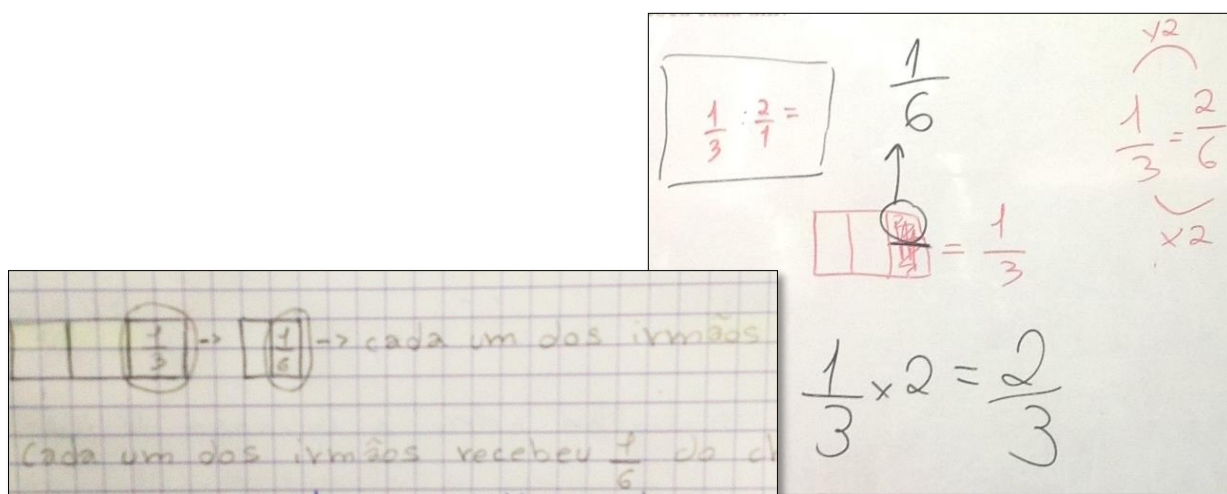


Figura 49. Resolução no caderno e no quadro da Tarefa 1 (par de Iva)

Iva: Eu pensei, $\frac{1}{3}$ é igual a $\frac{2}{6}$ e então $\frac{2}{6}$ que é igual a isto (apontando para $\frac{1}{3}$)... Então dividir isto em dois dá $\frac{1}{6}$.

Ana: Como é que fizeste a divisão?

Iva: Dividi por 2

Ana: Dividiste por 2. Mas tu aí só dividiste por 2 o quê? O numerador, não foi? [Em tom de dúvida sobre o processo]

Iva: Sim

Ana: Porquê?

Iva: Porque... não sei. Metade de $\frac{2}{6}$ é $\frac{1}{6}$!

Ana: Sim. Porque foste a partir do dobro, aqui. Para chegares a $\frac{1}{6}$. [momento de silêncio] Mas será que nós podemos fazer isso? [Outro momento de silêncio e a aluna olha para a sua resolução] O teu raciocínio está certo até aqui [apontando para a representação pictórica e sinalizando o quociente obtido]. ... E nós aqui não podemos aplicar esta ideia que tu estás a fazer (apontando para a igualdade). Mas o que é que a vossa colega pensou aqui. Então ela pensou, eu tenho um chocolate dividido em 3 partes. E como já tinha chegado à ideia de $\frac{1}{6}$, não foi? Pensou que o dobro de $\frac{1}{3}$ era os $\frac{2}{6}$. E depois só tinha de ir ver quanto é que correspondia a cada parte desses $\frac{2}{6}$. Este raciocínio aqui podemos fazer, este aqui é que não.

Neste episódio a aluna explicou a sua resolução correta, não antecipada por Ana, onde substituiu a fração $\frac{1}{3}$ por $\frac{2}{6}$ e, em seguida, estabeleceu que $\frac{1}{6}$ é metade de $\frac{2}{6}$. Esta resolução era interessante porque a aluna em vez de operar metade de $\frac{1}{3}$ optou por calcular metade de $\frac{2}{6}$ o que revelou a compreensão das quantidades envolvidas, indo

além dos procedimentos de cálculo. Perante a explicação de Iva, Ana interpretou que a aluna tinha estabelecido $\frac{2}{6}$ como o dobro de $\frac{1}{3}$ quando afirma “Porque foste a partir do dobro” e mais tarde “E como já tinha chegado à ideia de $\frac{1}{6}$, não foi? Pensou que o dobro de $\frac{1}{3}$ era os $\frac{2}{6}$ ”. Posteriormente tentou encontrar outra explicação para o raciocínio da aluna considerando que a aluna tinha partido do resultado e que tinha tentado reconstruir o valor obtido. Perante a explicação de Ana, a professora cooperante interveio clarificando a questão do dobro de $\frac{1}{3}$ e a fração equivalente de $\frac{1}{3}$ que é $\frac{2}{6}$ e validou a resposta da aluna. Ana apercebeu-se da situação, confirmou com a aluna se percebeu a confusão criada, sugeriu e registou o procedimento de cálculo do dobro de $\frac{1}{3}$ chegando a $\frac{2}{3}$ e também validou o pensamento da aluna pedindo que fosse para o lugar. Durante este momento os restantes alunos estiveram em silêncio a observar a situação. Nesta situação não ficou claro qual o entendimento de Ana relativamente à resolução da aluna podendo ter acontecido duas situações: (i) a futura professora não compreendeu a resolução da aluna, e numa situação inesperada acabou por confundir o procedimento cálculo de frações equivalentes com o cálculo do dobro de uma fração; (ii) Ana ao tentar compreender um raciocínio nunca pensado pela futura professora conjecturou possíveis interpretações do acontecido. Importa sublinhar que na aula seguinte, que veremos mais adiante, desenrolou-se um episódio semelhante e a futura professora mobilizou a aprendizagem realizada com este momento.

6.4.2.6. Síntese da tarefa 1 e sistematização do conceito de divisão

No final da apresentação das resoluções, da primeira tarefa, Ana guiou os alunos para o algoritmo da divisão de frações (inverte e multiplica) desenvolvendo um processo de questionamento que terminou numa breve explicação sobre o algoritmo. Partiu dos registos do quadro que resultaram das resoluções apresentadas pelos alunos e que foram sendo completadas por Ana. A futura professora começou por sublinhar que no quadro estavam registadas várias resoluções e *guiou* os alunos em determinadas resoluções levando-os a refletir sobre o realizado: “Nós aqui (apontando para a representação pictórica) chegámos que cada um recebeu $\frac{1}{6}$ de chocolate. E aqui neste (apontando para o algoritmo) acabou por dizer o quê? $\frac{1}{6}$ do chocolate, não era?” Entretanto os alunos observaram os registos no quadro e tentaram, sem sucesso, dar

sugestões para a relação entre as resoluções. Ana reformulou a estratégia e guiou-os sobre como dividir duas frações:

Ana: Como é que podemos resolver a divisão de dois números racionais?

Aluno: É a mesma coisa que a multiplicação só que a dividir.

Os alunos equacionaram o uso das regras de cálculo da multiplicação. Por isso, Ana pediu aos alunos para explicarem as suas ideias e estes ao tentarem dar resposta dispersaram. A futura professora retomou a questão inicial dirigindo-se a alunos específicos. Os alunos, mais uma vez, não se focaram nas ideias centrais da divisão de frações e identificaram os termos do algoritmo (dividendo, divisor e quociente) e Ana tentou uma nova questão ainda mais focada e sugerindo o que pretendia:

Ana: . . . Mas o que eu estou a perguntar é: quando nós estamos a dividir por dois por quanto é que multiplicamos? É o mesmo? Será?

Marco: Podemos multiplicar por $\frac{1}{2}$.

Ana: Quem é que falou que podemos multiplicar por $\frac{1}{2}$ [registra no quadro $2 \times \frac{1}{2} = 2$].
Porquê?

Marco: Porque multiplico duas vezes $\frac{1}{2}$.

Os alunos, mais uma vez, não estabeleceram a relação com os números inversos entre si e Ana sugeriu a resolução onde relembrou o problema proposto, destacou os cálculos realizados, os números envolvidos e o trabalho realizado na aula anterior. Conforme foi construindo as ideias principais foi registando as ideias do lado direito do quadro deixando o registo pictórico da esquerda (Figura 50):

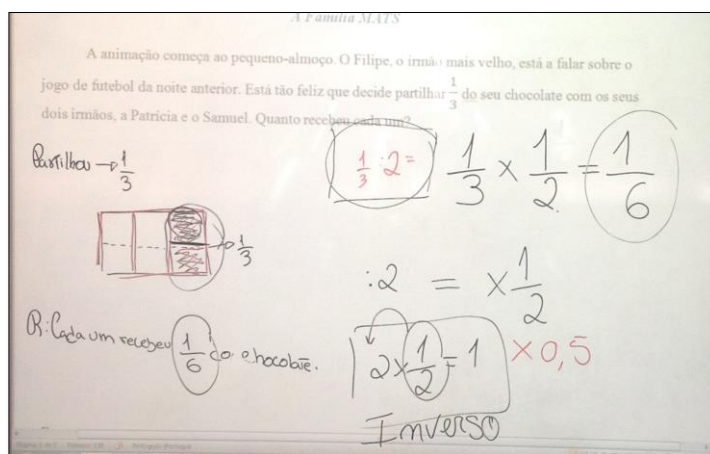


Figura 50. Registos no quadro da Tarefa1 na terceira aula

Ana: [O problema é sobre] a família Mats. Mas o que é isto [apontando para $\times \frac{1}{2}$]?

Aluno: É a mesma coisa que dividir por 2

Ana: Mas o que é que estamos aqui a representar? Que trabalhamos?

Aluno: É a multiplicação.

Ana: É a multiplicação. E nós estamos a multiplicar por o quê?

...

Tico: Os inversos.

Ana: Os inversos. Então, não é? Isto aqui $\frac{1}{2}$, não é inverso de 2? E este aqui não é inverso de 2 (apontando para 0,5)?

Assim, ao longo deste episódio Ana foi *guiando* os alunos para o algoritmo da divisão de frações (inverte e multiplica). A futura professora foi questionando os alunos com questões cada vez menos desafiantes e focadas nos procedimentos de cálculo a adoptar na tentativa de fazer emergir um procedimento específico. Inicialmente questionou como é que os alunos consideravam que se podia calcular a divisão. Os alunos consideraram que seria da mesma forma da multiplicação. Sem discutir a sugestão, interpelou alunos específicos que não lançaram novas ideias. Perante a dificuldade dos alunos, Ana fez uma pergunta direta/focada e *sugeriu* o que pretendia: “quando nós estamos a dividir por dois por quanto é que multiplicamos?”. Esta questão remetia para uma ideia que já tinha sido trabalhada e os alunos reconheceram dando uma resposta assertiva. Finalmente, Ana decidiu convidar os alunos a analisar a tarefa realizada, focando a atenção nos números envolvidos e nos cálculos realizados *guiando* os alunos identificaram os números inversos. Quando os alunos deram a resposta esperada pela futura professora, Ana redisse as últimas respostas e reforçou a ideia geral a compreender, introduzindo o algoritmo da divisão de frações (inverte e multiplica):” Multiplicar por $\frac{1}{2}$ é a mesma coisa que multiplicar por cinco décimas [ideia lançada por um aluno]. . . Podemos colocar a multiplicação, em vez da divisão e. . . temos que multiplicar pelo seu...? [Alunos: Inverso.]”. Ou seja, *sugeriu* a ideia de substituir a divisão pela multiplicação com o número racional inverso. Em seguida as suas questões centraram-se em questões processuais do algoritmo. Ana e os alunos confirmaram, através de cálculos, a equivalência entre dividir e multiplicar pelo inverso. Finalmente, retomou o trabalho realizado e comparou a resolução pictórica e simbólica:

Ana: Porque a vosso colega, quando ele leu o enunciado o que é que ela percebeu. Que estávamos a dividir $\frac{1}{3}$ por 2. Mas nós não sabíamos ainda dividir. Então fomos fazer através do quê? Através da multiplicação do seu inverso.

Aluno: Então se metermos $\frac{1}{3}$ por 2 ...

Ana: Sim. Então vamos ver pelo esquema. Temos uma barra de chocolate dividida em 3 partes. Eu tenho que dividir uma parte. Ele vai dividir esta parte, certo?

Aluno: Por dois

Ana: Por duas pessoas. Então o que é que nós vamos ter aqui?

Aluno: $\frac{1}{6}$ (circundando o número)

De modo a *guiar* o processo, Ana começou por focar os alunos na resolução simbólica, em seguida remeteu para o esquema e concluiu que chegaram ao mesmo resultado. No final um dos alunos colocou, outra situação procurando uma generalização, perguntando: “Por exemplo $\frac{1}{3}$ termos a dividir por qualquer coisa dá a mesma coisa que $\frac{1}{3}$ vezes [o inverso de] qualquer coisa.” Procurando validar a ideia do aluno, retomou casos particulares e termina dizendo que “Nós agora também vamos ver ao longo da resolução dos problemas e da explicação que nós fazemos, está bem?”.

Ana propôs as tarefas que iriam ser exploradas ao longo de duas aulas explorando o contexto das tarefas e procurando que os alunos dessem significado às tarefas propostas. Os problemas não foram lidos no momento de lançamento da tarefa e no momento, enquanto circulava e observava os alunos a trabalhar, a futura professora foi revendo a situação colocada e acabou por *informar* sobre dados e condições. No momento de exploração da tarefa, não existiu muita interação entre a professora e os alunos e Ana não colocou questões mas quando os alunos solicitaram apoio guiou-os alunos redizendo a situação colocada e transformando a situação para situações do foro pessoal procurando simular o problema. Na resolução da primeira tarefa a futura professora esperava resoluções diferentes e predominantemente pictóricas. No processo de discussão das resoluções discussão dos problemas propostos, Ana pretendia usar representações pictóricas e simbólicas e relacioná-las. A discussão caracterizou-se pela apresentação de três resoluções onde os alunos apresentaram as resoluções e a futura professora *apoiou e guiou* as apresentações onde terminou sugerindo procedimentos. Na última apresentação a futura professora deparou-se com uma situação imprevista e teve dificuldade em gerir a resolução apresentada. A professora cooperante interveio permitindo que a futura professora retomassem a questão. Como veremos em seguida, no dia seguinte numa situação idêntica mobilizou o aprendido e já soube apoiar os alunos. Na síntese da discussão, alternando as ações de guiar e sugerir, foi realizando um conjunto de questões que *guiaram* os alunos para o procedimento algorítmico constituindo um padrão afunilado relativamente ao nível de abertura e de desafio das questões. Assim, teve oportunidade de sublinhar qual a unidade de referência ($\frac{1}{3}$) e de enfatizar a ideia de metade expressa por (:2), por ($\times \frac{1}{2}$) e por (0,5), relacionando as

diferentes representações e significados. Relembrou a propriedade do inverso de um número e usou uma representação retangular para explorar a divisão de números racionais sob a forma de fração. No final sistematizou o algoritmo e um aluno identificou um procedimento generalizável. Note-se que a futura professora não explorou outros algoritmos possíveis na divisão de frações.

6.4.2.7. Aula 4: Proposta, exploração e discussão da tarefa 3

Na quarta aula, Ana continuou o trabalho iniciado e, de modo a revisitar os conceitos trabalhados na aula anterior, propôs dois problemas de partilha equitativa e três exercícios ($\frac{2}{3} : 2$; $\frac{7}{3} : 2\frac{1}{12}$; $\frac{8}{3} : \frac{2}{4}$) (Figura 51).

A Patrícia tem $\frac{1}{3}$ de um queijo. Ela vai dividir essa fração do queijo em quatro partes iguais: uma para ela, uma para o pai e uma para cada um dos seus irmãos. Que parte do queijo cada um receberá?

Figura 51. Tarefa 3 proposta na divisão de números racionais

O propósito era levar os alunos a recorrer ao algoritmo da divisão de frações (inverte e multiplica). Na proposta das tarefas Ana limitou-se a distribuir as folhas e não realizou qualquer leitura nem deu qualquer apoio à resolução da tarefa. O primeiro problema tinha sido lançado na aula anterior e ficou para trabalho de casa. Os problemas envolviam situações de partilha equitativa, tal como a tarefa 1 da aula anterior. Deste modo, considerando a experiência dos alunos, o nível de desafio era mais reduzido e, talvez por essa razão, Ana, ao contrário de noutras tarefas, não deu indicações sobre o tipo de representações que queria que os alunos usassem. O momento de exploração da tarefa foi rápido e Ana circulou observando as resoluções dos alunos e pouco interagiu.

Quando *iniciou* a discussão do primeiro problema, Ana sublinhou que houve alunos a resolver simbolicamente e alunos que resolveram pictoricamente: “Hoje já recorreram ao... À operação da divisão e outros que recorreram ao esquema.” Quando referiu “hoje já recorreram” sublinhou a sua pretensão dos alunos avançarem para a resolução simbólica recorrendo ao algoritmo. Em seguida, solicitou que viesse ao quadro uma aluna que recorreu à representação pictórica e uma outra onde se recorreu à

representação simbólica. A tarefa colocava uma situação em que um terço de queijo era dividido em quatro partes iguais e perguntava que parte cabia a cada uma de quatro pessoas. A aluna, tal como tinha feito na aula anterior, encontrou uma fração equivalente à parte da unidade que iria ser distribuída e Ana já não foi surpreendida *guiando* a aluna, com questões de focalização e validando a resposta. Para apresentar a resolução, a futura professora questionou a aluna de modo a estabelecer relações entre os registos pictóricos e simbólicos. Nesta fase da aprendizagem da divisão de frações, Ana queria que os alunos representassem formalmente as operações recorrendo ao algoritmo aprendido.

Na discussão da tarefa 3, a última resolução a apresentar foi a dos alunos que recorreram ao algoritmo da divisão. Ana foi apoiando e *guiando* a apresentação do aluno *informando* (remetendo para os dados do problema) e estabelecendo uma relação entre a representação simbólica e os dados e as condições. Nesta tarefa Ana, na fase de preparação da aula, tinha previsto uma representação circular mas nenhum aluno recorreu a este tipo de representação. No final da discussão da tarefa a futura professora inicia uma síntese questionando os alunos:

Ana: . . . Não havia outra forma de representar? Só por curiosidade? Nós quando pensamos num queijo, pensamos em quê?

Alunos: Redondo.

Ana: Então e se nós pensarmos em forma de um círculo, temos um queijo. Nós íamos dividir em quantas partes?

Em seguida, Ana elaborou a sua explicação sobre a situação colocada definindo a unidade de referência “ $1/3$ do queijo”, que seria dividida por quatro pessoas. Para apoiar a sua explicação projetou a figura 52 e explicou:

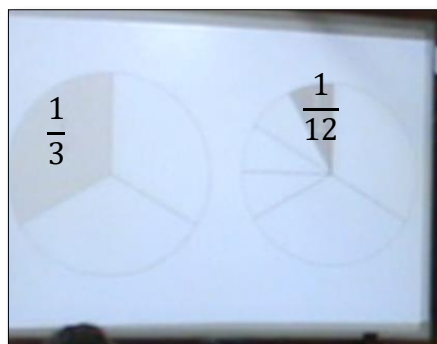


Figura 52. Representação apresentada no final da explicação da quarta aula

Ana: É exatamente a mesma coisa, só que aqui é uma representação diferente. . .
 Nós aqui temos o queijo e vamos dividir três partes. Ela tinha uma parte dessas três. Que vão ser divididas em quantas partes? 4. Então ela passa a ter uma parte de 12, porquê? Se esta parte está dividida em 4, esta também vai estar e esta também vai estar. E cada um vai comer uma parte das...

Alunos: 4

Ana: 12

Alunos: Dessas 4.

Para Ana era muito importante indicar a representação que tinha preparado. No entanto essa representação não foi suficientemente explícita para os alunos relativamente no número de partes que o queijo ficava dividido apesar de Ana claramente ter referido “Se esta parte está dividida em 4, esta também vai estar e esta também vai estar”. No final esta dificuldade dos alunos ficou clara quando os alunos identificaram o número de partes e não perceberam qual era o todo dizendo que era uma parte de quatro. Ana retificou a resposta para doze mas parece não ter percebido que as respostas dos alunos se prendiam com a representação que estava a projetar negligenciando às frações que estavam escritas em cada fatia. No final, não ficou claro que os alunos tivessem compreendido, mas o tempo da aula tinha terminado.

Em síntese, na primeira fase da prática de ensino supervisionada, e como observamos no quadro 7, Ana propôs tarefas com um nível de desafio reduzido para os alunos, com um contexto matemático. Apesar de ter previsto uma exploração da terceira expressão (T1Q3), apresentou de imediato uma explicação, alterando a natureza da tarefa. Na segunda fase da prática de ensino supervisionada, Ana propôs tarefas de natureza diferente, nomeadamente problemas.

Quadro 7. Natureza das tarefas e respetivas questões

Números Racionais inversos entre si			Divisão de frações		
Aula 1	Aula 2	Aula 3	Aula 4		
Exercício → T1Q1	Exercício	Exercício T2	Problema (T1)	Problema → (T3)	Exercício
Exercício → T1Q2	Exercício	Exercício T3	Problema (T2)	Problema → (T4)	Exercício
Exercício → T1Q3	Exercício	Exercício T4		Exercício T5	

Nesta fase as tarefas passaram a ser contextualizadas, apresentando um contexto familiar para os alunos transversal aos diferentes problemas. Fez a apresentação do contexto das tarefas e discutiu o significado de “dividir. Quando propôs a tarefa T3, em interação com os alunos, não manteve o nível de desafio, indicando os dados, as condições e as estratégias esperadas. Apesar de considerar que todas as tarefas apresentadas eram problemas, na quarta tarefa da quarta aula (T4), não desafiou tanto os alunos como esperava. Tal aconteceu, porque a tarefa 4 colocava uma situação idêntica, recorrendo-se ao mesmo significado de divisão, e porque depois da discussão das tarefas anteriores (T1, T2 e T3) os alunos já sabiam que a estratégia mais eficiente era recorrer ao algoritmo da divisão (inverte e multiplica). Para além das experiências dos alunos, no momento da proposta da tarefa, Ana indicou a estratégia e os alunos aplicaram o algoritmo. Deste modo, a tarefa surgiu como um exercício. Assim, apesar das tarefas seleccionadas, nas duas fases, terem níveis de desafio e contextos diferentes, ao serem propostas a estes alunos assumiram o mesmo nível de desafio.

As aulas de Ana estruturavam-se com a exploração tarefa a tarefa. Por sua vez, a exploração de cada tarefa organizava-se em três momentos de trabalho: proposta, exploração e discussão. A tabela 2 mostra os três momentos fundamentais e que, na fase que pretendia de discussão da tarefa, por vezes, ocorria uma explicação sobre a sua resolução.

Tabela 2. Momentos de trabalho com cada tarefa na fase 2

Momentos de trabalho	Multiplicação de números racionais inversos	Divisão de números racionais	
Proposta da tarefa	Define do tipo de estratégia a adotar (T1Q1, Q2, Q3, T2, T3, T4,)	Apresenta o contexto dos problemas (T1)	Faz a ponte entre tarefas sublinhando o seu propósito (T2, T3, T4)
Exploração da tarefa	Observa e reforça o pedido (T1Q1, Q2, Q3, T3, T4 e saltou em T2)	Observa, questiona e reforça o pedido (T1, T4)	Observa, questiona pouco (T3) e sugere estratégias (T2)
Discussão da tarefa	Apoia a apresentação da estratégia correta e explora erros (T1Q1, Q2, T2, T3, T4 e saltou em Q3)	Apoia a apresentação de diferentes estratégias corretas evidenciando a diversidade de resoluções onde apoia os alunos guiando, informando e sugerindo (T1, T2, T3, T4)	
Síntese	Explica relacionando representações (T1Q1, Q3, T3) / Valida (Q2, T2, T4)	Revê e sugere as estratégias e explica relacionando representações (T1, T2, T3, T4)	

No trabalho com a multiplicação de números racionais inversos, no momento de proposta da tarefa, Ana estabeleceu que o trabalho era individual e propôs questões *sugerindo* as estratégias que esperava que os alunos adotassem. Projetou as questões ou registou-as no quadro propondo o trabalho a realizar. Na segunda fase da prática, propôs as tarefas apresentando o contexto, de modo a que os alunos lhe atribuíssem significado, ou fazendo uma ponte entre o realizado na tarefa anterior *guiando e informando* os alunos de modo a identificarem dados e condições. Na tarefa 1 a discussão em torno do contexto foi mais cuidada uma vez que lançava o trabalho para toda a aula. Também organizou o ambiente de trabalho relativamente às formas de trabalho dos alunos e materiais da aula. No final sublinhou a importância do registo das resoluções. Assim, nas tarefas 2, 3 e 4 já não leu as tarefas nem deu informação sobre o contexto e condições. Na primeira fase da sua prática, Ana, o momento de exploração das tarefas, pediu silêncio e, caso os alunos tivessem alguma dúvida, deveriam solicitar ajuda. A futura professora, circulava, observava as resoluções e reforçou o pedido. Interagiu pouco com os alunos e *sugeriu* as resoluções previstas. Na segunda fase, pretendia uma

dinâmica diferente e organizou os alunos em pares resolvendo as tarefas autonomamente. Ana observou, questionou e reforçou o que era pedido, *informando e guiando* quando os alunos tinham dificuldades indicando dados e condições, e dando mais tempo do que na primeira fase para os alunos resolverem as tarefas. Na tarefa 2, Ana questionou pouco e quando respondia às dúvidas dos alunos tendia a *sugerir*. Na tarefa 3 praticamente saltou este momento porque os alunos resolveram a tarefa em casa e por isso não houve interação dando muito pouco tempo para este momento. Na primeira fase, como seria de esperar dada a natureza das tarefas, no momento de discussão das tarefas em coletivo, surgiram poucas resoluções das questões propostas. Ana solicitou a um aluno que apresentasse a sua resolução correta, apoiou *guiando* a resolução recorrendo a um questionamento focado. Por vezes, salientava erros que tinha observado no momento de trabalho autónomo, de modo a dissipar possíveis dúvidas e erros dos alunos. No final da apresentação das resoluções, aconteceram duas situações: *explicou* os procedimentos e conceitos envolvidos na tarefa ou validou a resolução apresentada. Nas tarefas onde pretendia introduzir ou reforçar conceitos recorreu a *explicações* para sistematizar as principais ideias. As explicações também surgiram quando os alunos tinham dúvidas recorrentes. Ana elaborou diferentes explicações, atribuindo significados diferentes, indo ao encontro das ideias prévias dos alunos. Perante o imprevisto, Ana, optava *por sugerir ou explicar* uma resolução que previu revelando algumas dificuldades em compreender as ideias dos alunos. Na segunda fase, Ana desenvolveu o trabalho de modo diferente, mantendo os momentos principais observados na primeira fase. Note-se que a tarefa 5, possivelmente pela sua natureza, seguiu uma rotina mais próxima da dinâmica constituída na primeira fase da prática de ensino supervisionada. Assim, procurando a discussão da tarefa, foram apresentadas diferentes resoluções. Durante as apresentações foi apoiando os alunos *guiando* na explicitação das suas ideias e *informando ou sugerindo* processos. No final da discussão a futura professora revia as estratégias apresentadas validando os resultados. Na tarefa 1, Ana pretendia introduzir o algoritmo, e por isso, através de um questionamento cada vez mais focado *guiou os alunos e sugeriu* os procedimentos e conceitos a aprender terminando com uma sistematização. Na tarefa 3, tal como tinha planeado, terminou a discussão apresentando uma resolução recorrendo à representação circular e reforçou as ideias matemáticas. Durante as discussões coletivas promoveu atitudes de respeito e interesse pelos trabalhos apresentados e geriu a participação dos alunos.

6.4.2. Reflexão sobre as aulas e sobre a prática supervisionada

Ao longo da prática supervisionada Ana escreveu duas reflexões sobre o período de estágio em que lecionou números racionais, para a sua supervisora de estágio, e fez o balanço final, em entrevista. As suas reflexões eram descritivas e sustentadas no programa de 2007 ou em autores das ciências da educação em geral. O cunho era pessoal e centrado no modo como viveu o processo. Na primeira reflexão escrita, quando se centrou na prática letiva, referiu que ficou nervosa com o processo de recolha de dados, mas que a possibilidade de observar os vídeos das suas aulas trouxe mais valias para a reflexão a realizar. No entanto, Ana optou por não usar produtos dos alunos ou excertos de diálogos registados nos vídeos. Na análise crítica debruçou-se em questões comportamentais como “postura e atitude em sala de aula” tendo sido muito crítica relativamente ao seu comportamento. Ainda assim, sem especificar, perspetivou aspetos a melhorar no futuro e salientou as apostas realizadas nas tarefas e num ambiente de “discussão”: “Sei que ainda tenho muitas arestas pontiagudas, no entanto começo a ver as aulas de uma maneira diferente, divirto-me com os alunos. Há um grande investimento a nível de materiais e comunicação oral, onde oiço os alunos e partilhamos ideias.” Ou seja, sublinhou que deu atenção às tarefas propostas e que esteve atenta à comunicação desenvolvida. No final do processo de estágio, na entrevista final, Ana estava satisfeita com o seu contributo para as aprendizagens dos alunos ficando claro quais os seus propósitos de ensino e aprendizagem:

Eu acho que grande parte do contributo foi meu também. Porque realmente com a exploração que fiz. . . se fosse questionar sobre a divisão, sobre o inverso, não havia um aluno que não conseguisse fazer alguma coisa. Porque por exemplo o inverso, nós não tivemos revisão nenhuma para o teste sobre isso, no teste não houve nem um que não acertasse completamente essa questão. . . . Na divisão . . . há miúdos que até com diferentes estratégias apresentaram a resolução [dos problemas] da divisão. Então, eles aprenderam comigo!

A futura professora, fez um balanço positivo sobre o seu processo de aprendizagem e sentiu que contribuiu para as aprendizagens dos alunos. Assumindo a complexidade do ensino e da aprendizagem dos números racionais com uma abordagem exploratória mostra-se satisfeita o realizado. Justificou o sucesso com as aprendizagens dos seus alunos, partindo dos desempenhos nos testes e sublinhando os alunos terem resolvido os problemas propostos de formas diferentes.

6.4.2.1. Reflexão sobre os propósitos das aulas: Compreender para aplicar

A prática de ensino supervisionada teve duas fases onde lecionou tópicos distintos e tomou decisões diferentes sobre como levar os alunos a compreender os conceitos. Na primeira fase, o propósito principal da primeira aula era que os alunos compreendessem que o produto de dois números racionais inversos é 1. Para tal, apresentou expressões que os alunos deveriam representar pictoricamente de modo a visualizarem o produto e a chegarem à regra. Quando introduziu a tarefa ficou satisfeita pelo facto dos alunos terem conseguido “fazer o raciocínio sem ninguém lhes pedir nada em concreto” (AEDA1). No entanto, existiram aspetos a melhorar que foram sinalizados pela professora cooperante. No balanço pós aula a professora cooperante pediu que Ana fosse mais dinâmica na gestão da sala de aula. Ficou decidido que faria uma segunda aula sobre o mesmo tópico para explicar a representação pictórica de dois quintos de cinco meios, que não tinha sido clarificadora na aula anterior. Nessa aula, sentiu que cumpriu os objetivos definidos e sem episódios críticos, referindo: “Correu bem a parte da relação de parte-todo, onde foi definido qual era o nosso todo... Que era os cinco meios . . . através do numeral misto, tínhamos duas unidades e um meio (AEDA2)”. Assim, os alunos compreenderam a regra relativa aos números racionais inversos e conseguiram resolver os exercícios com facilidade, o que indicava a Ana que a explicação realizada tinha sido clara. Para a futura professora o desafiante foi compreender as ideias dos seus alunos.

Na segunda fase, Ana concretizou duas aulas sobre divisão de números racionais na representação fracionária. Para tal, propôs um conjunto de problemas e tinha como propósito a compreensão do algoritmo da divisão de frações (inverte e multiplica). Na primeira aula deu liberdade aos alunos para resolverem os problemas recorrendo a estratégias informais e, posteriormente, guiou-os para a aplicação do algoritmo. Na aula seguinte propôs problemas e exercícios de aplicação do algoritmo. Ana estava muito nervosa antes da aula iniciar apesar de ter recorrido a tarefas propostas numa brochura com as características sugeridas pela professora cooperante. O propósito principal era propor “uma sequência de problemas que fizesse sentido, em que possam desenvolver a ideia da divisão, tanto como medida, como partilha.” (AEDA3). Durante a aula, quando foi surpreendida pela diversidade de resoluções, chegou a questionar-se como podia gerir o imprevisto: “‘Como é que eu faço?’ ‘Não era isso que eu tinha planeado!’” (AEDA3). O modo como os geriu deixou a futura professora satisfeita e considerou que apesar de ter sido desafiada com uma resolução imprevista:

Acabaram por chegar logo à ideia de divisão, interpretação, divisão através da representação . . . realmente não estava a contar com isso [com uma das resoluções mas] não houve problema, não é, se eles apareceram com aquela sugestão é agarrar e desenvolver a partir dali. (AEDA3)

A grande aposta tinha sido na abordagem de ensino e aprendizagem exploratória e na decisão de romper com a prática da sua parceira de estágio. A sua ideia era continuar para melhorar alguns aspetos ainda que colocasse como condição prévia sentir-se segura nos “conteúdos matemáticos a trabalhar com os alunos”:

Se eu não tiver as bases matemáticas como é que eu vou estar a desenvolver uma aula. Mesmo que eu esteja completamente à vontade ao nível das estratégias que proponho. E se eu estou completamente à vontade ao nível matemático mas chego lá e [digo] é assim, assim, assim . . . Acabo por não chegar [aos alunos]... As minhas apostas a nível matemático, neste momento estou a conseguir fazer apostas a nível didático. . . É uma vitória!. . . [Ver] as estratégias a que chegaram foi espetacular! (AEDA3)

Ao longo do processo de preparação da prática de ensino, por se sentir insegura relativamente ao seu conhecimento matemático realizou um investimento nesse domínio. No entanto, na segunda fase da prática de ensino, evidenciando segurança, revelou que procurou investir em questões que denominou de natureza didática. Ana considerou que fez uma aposta no processo de aprendizagem dos alunos.

6.4.2.2. *Reflexão sobre as tarefas exploradas: Significativas e promotoras de compreensão*

De modo a concretizar o seu propósito, propôs diferentes tarefas. A ideia central era “partir da compreensão para a memorização... Eles acabam por memorizar (AEAA1)”. Na ESE, e especificamente em Didática da Matemática, foi-lhe sugerido que propusesse tarefas com contextos realistas. Justificou ter começado por tarefas com contextos matemáticos para dar continuidade ao trabalho realizado anteriormente:

Na Didática dizem-nos sempre para partir de contextos que sejam familiares aos alunos. Da representação através dos retângulos, porquê, porque eles já na multiplicação tinham estado a trabalhar com a esta mesma lógica [com a colega de estágio]. . . . Acho que tem de haver uma sequência lógica . . . No entanto, a partir de agora sinto a necessidade de... Lá está, a um contexto familiar... (AEDA1)

No final da primeira fase da prática de ensino supervisionada, Ana não parecia completamente satisfeita com a sua opção relativamente às tarefas construídas e assumiu que nas próximas aulas queria ir ao encontro do sugerido na ESE. Note-se que quando Ana referiu contextos familiares estava a referir-se a contextos realistas e do quotidiano dos alunos, como mais tarde propôs na divisão de frações. Na segunda

reflexão acrescentou outra razão e explicou que equacionou propor tarefas com contextos reais mas sentiu dificuldades em fazê-lo:

Tentei arranjar maneira de colocar o inverso num contexto real, digamos assim e tive muitas dificuldades em fazê-lo . . . Porque não percebia a lógica de colocar o inverso..., é algo forçado, não era natural, e sou sincera, tive mesmo muitas dificuldades em arranjar um contexto... (AEAA2)

Assim, manteve a ideia inicial e ficou satisfeita pois o propósito era: “De estar ali uma unidade e, realmente, na situação de representação através de esquema era muito mais fácil de perceberem. . . a ideia é visualizarem, não é!” (AEDA1). Na segunda aula, Ana manteve o mesmo contexto matemático e explicou que ainda tentou procurar tarefas contextualizadas mas que lhe foi muito difícil criá-las. Por isso, manteve a ideia de explorar os conceitos recorrendo a representações pictóricas, que permitiriam os alunos visualizar e compreender a propriedade.

Na segunda fase, para a terceira e quarta aulas, Ana selecionou tarefas de uma brochura sobre o ensino e aprendizagem da divisão de números racionais fracionários. Selecionou problemas onde a divisão tinha significados diferentes. No entanto fez adaptações a nível do contexto e alterou a ordem proposta relativamente aos significados envolvidos. Para a quarta aula, propôs dois problemas de partilha equitativa e duas expressões numéricas simples. Sobre o processo de ensino e aprendizagem considerou desafiante mas que fazia sentido para os alunos:

Trabalhar a divisão de racionais através de uma atividade exploratória. . . . Esta é uma das experiências que nos desperta diferentes sensações, ora estamos com os pés colados ao chão com receio de não sermos capazes de decodificar o que os alunos estão a apresentar ora estamos a ferver de adrenalina com o que estamos a fazer. Foi sem dúvida uma experiência a repetir, pois os alunos estão a ter acesso ao conhecimento através deles obtendo aprendizagens significativas, em vez de algo lhes ser dado sem fazer sentido algum, sem haver consolidação ou aquisição de conhecimento. (Reflexão quinzenal)

Mais tarde, sublinhou o papel dos alunos e as implicações para o professor:

A resolução de problemas torna-se assim um processo crucial na aprendizagem da matemática, uma vez que o aluno contribui ativamente para o processo de aprendizagem. . . A adequação dos materiais aos alunos e aos objetivos específicos de aprendizagem. . . o trabalho que implica a sua criação é enriquecedor e formativo para o professor, que terá de se sustentar em termos teóricos e ponderar as suas escolhas. (Reflexão final)

Ana, nas suas reflexões escritas reconheceu a complexidade do ensino e aprendizagem dos tópicos relativos ao conjunto dos números racionais e acrescentou a

complexidade de ter optado por uma abordagem exploratória. Ainda assim mostrou-se satisfeita com as opções realizadas justificando com a qualidade do processo vivido e com a natureza das aprendizagens realizadas pelos alunos. Terminou referindo que o processo de construção e adequação de tarefas foi um processo promotor de reflexão sobre a própria prática.

6.4.2.3. Reflexão sobre as aprendizagens dos alunos: As dificuldades e a complexidade em apoiar

Ana considerou que tinha alunos capazes de resolver exercícios, mas que para o fazer recorriam a regras e procedimentos sem compreender o seu porquê. Por essa razão os alunos recorriam a procedimentos da adição e subtração na multiplicação. Por outro lado, deu-se conta que “havia alunos que não tinham problema nenhum em explicar como pensaram e havia outros que já tinham alguma dificuldade (AEAA1). Já durante a sua prática, Ana identificou outras dificuldades. Uma delas era a falta de sentido de número racional uma vez que na fração “veem dois números...^[1]_[SEP][o que leva os alunos a] multiplicar com o denominador e ao numerador não acontece nada” (AEDA1).

Na primeira fase da prática ficou evidente a dificuldade dos alunos em identificar a unidade de referência. Ana sentiu essa questão como um desafio “porque preciso de estar atenta para chegar lá, para conseguir perceber, acompanhar.” (EDA3). No momento de apresentação das resoluções, Ana teve que gerir e explorar resoluções corretas e incorretas que não tinha antecipado. Relativamente às representações pictóricas que surgiram, comentou que houve alunos que não compreenderam o pretendido e que “acabei, também, por me baralhar um pouco com o raciocínio dele” e que devia “ter eliminado as divisões . . . [Ou seja, não perceberam que] a unidade de referência era o quatro” (AEDA1). Na reflexão sobre o episódio soube identificar a dificuldade do aluno que o levou a dividir a unidade discreta em quatro partes e a tomar uma parte de um quadrado. No final, a resolução foi corrigida e retomou a ideia que queria deixar reforçada, parecendo satisfeita com o que conseguiu. Na segunda fase, o desafio esteve na compreensão da divisão de números racionais na representação fracionária. A futura professora considerou que a divisão de frações é exigente cognitivamente na medida que “nós muitas vezes, só trabalhamos com uma parte, ou parte-todo, consoante o problema proposto. E parte da parte, por vezes, acaba por gerar algum conflito de ideias.” (AEDA3). No trabalho com os alunos, discutir as resoluções dos alunos que são mais informais levantou-lhe dificuldades:

É engraçado que muitas vezes aquelas [resoluções] que nós associamos às mais simples são aquelas que me desafiam mais. . . Temos de fazer aquele raciocínio, ou seja, voltar atrás, perceber desde o início os passos que eles fizeram, muitas das vezes é um desafio. Para eles aquilo é muito lógico, agora, para nós já não. (EDA3)

A futura professora evidenciou dificuldades em aceder às ideias representadas pelos alunos que nem sempre espelhavam as ideias previstas. No entanto, não foram as estratégias informais que suscitaram o episódio mais crítico. Na terceira aula, uma das alunas apresentou uma resolução formal e Ana teve dificuldades em compreender a resolução proposta. Ao redizer o que a aluna tinha dito mostrou que compreendeu de modo diferente. No entanto em entrevista toma uma posição diferente:

Fiquei na dúvida porque não achei que seria a forma mais correta de representar. . . Eu não lhe podia dizer que aquilo não estava correto porque ela percebeu perfeitamente que apesar de ter feito ali um esquema ao lado, o seu todo continuava a ser aquele. Por isso é que eu optei por não apagar.

Ou seja, na dúvida preferiu manter a resolução da aluna. Na aula a professora cooperante sinalizou que a resposta estava correta e a futura professora ficou descansada. No entanto, não foi uma resolução que mais explorada porque teve dúvidas: “Fui logo a seguir ao quadro já com a representação correta, digamos assim. . . O esquema dela não refletia aquilo que ela estava a dizer. . . explicou-me aquilo perfeitamente. A representação é que não foi a ideal” (EDA4). Ana chamou ao quadro uma aluna que tinha uma representação que não tornava explícita a unidade de referência e por isso considerou importante discutir a sua resolução. Quando a aluna explicou a estratégia a futura professora teve dúvidas sobre o comunicado o que culminou numa situação desconfortável. Ana optou por não enfatizar a resolução apresentada e apresentou a sua onde se sentia mais confortável. Na aula seguinte, outra aluna seguiu a mesma estratégia e Ana apoiou a aluna na explicitação das suas ideias. Na entrevista depois da quarta aula Ana reflete sobre esse processo e descreveu a resolução com facilidade:

Ela recorre às frações equivalentes. Acaba por ir fazer a representação pictórica, não é? . . . Mas tudo suportado na equivalência de frações. . . Depois fiz a leitura do enunciado “então vamos lá ver o que é que nos pedem” e depois ela chegou à conclusão. . . Eu depois ajudei-a foi a perceber que no enunciado pedia era quanto é que tinha cada um deles.

Assim, Ana descreveu a resolução da aluna e identificou qual a relação que queria estabelecer entre a representação pictórica e simbólica referindo as ações que tomou

para guiar a aluna à identificação da parte da unidade que cada aluno tomou. O foco da futura professora era que o quociente apresentado tivesse significado na tarefa proposta e que apesar de ser possível obter diferentes frações como quociente que estas representavam uma parte do queijo inicial.

Assim, Ana estava satisfeita com as aprendizagens dos alunos mas o foco da suas reflexão era como gerir a aprendizagem dos seus alunos. Depois da fase de observação, Ana identificou nos alunos dificuldades relativamente à compreensão dos conceitos envolvidos, na aplicação dos procedimentos nos exercícios e em explicar as suas ideias. Por isso considerou que era importante propor tarefas que permitissem discutir ideias de modo a compreender os conceitos e procedimentos. Depois de lecionar duas aulas deu-se conta da dificuldade em identificar a unidade de referência e como gerir as dificuldades dos alunos, uma vez que não o soube guiar para a resolução correta ou que conhecia. A futura professora considerava que se tinha preparado para diferentes resoluções mas era um desafio conseguir compreender as ideias dos alunos e apoiar as suas aprendizagens. Note-se que quando se deparou com uma situação idêntica mobilizou as aprendizagens de uma aula para outra.

6.4.2.5. Reflexão sobre a comunicação: O desafio de compreender as ideias dos alunos

Nas entrevistas Ana foi refletindo sobre os diferentes aspetos relativos à comunicação em sala de aula que foram emergindo da sua prática. Foram alvo de atenção as representações dos números racionais que foram solicitadas e usadas. Ana debruçou-se essencialmente nas representações que os alunos foram usando nas suas resoluções (aspeto relativo à comunicação e dependente das tarefas propostas). Também foram problematizadas questões inerentes ao estabelecimento de relações entre representações. Um outro aspeto alvo de atenção foi o questionamento tendo refletido sobre as questões que fez e não fez e como questionou. Na primeira fase, o aspeto que foi alvo de maior atenção, decorrente da natureza da comunicação constituída, foram as explicações que elaborou e que foram sendo reformuladas da primeira aula para a segunda.

Representações. Uma das preocupações de Ana dizia respeito às representações usadas pelos alunos na resolução das tarefas. Quando, na primeira aula, Ana propôs aos alunos que representassem pictoricamente as expressões $\frac{1}{3}$ de 3, $\frac{1}{4}$ de 4 e $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$ os alunos questionaram o *porquê* uma vez que já conheciam os procedimentos de cálculo da

multiplicação entre frações. No entanto, o propósito era os alunos visualizarem a ideia de que o produto de dois números racionais inversos é 1:

O objetivo era eles chegarem à ideia do esquema. E houve muitos que começaram logo na resolução da operação, identificaram que aquilo era uma multiplicação, a nível . . . da operação, do cálculo. E, não era isso que eu pretendia, então foi só evidenciar que tinham que recorrer ao esquema ou ao desenho. . . O meu objetivo era eles visualizarem o que estávamos a fazer. Chegar à unidade, a visualização. (AEDA1)

Apesar da segurança da futura professora sobre o uso de representações pictórica era-lhe indiferente o tipo de esquemas: “Queria que partisse deles para ver também onde é que eles se sentem mais à vontade” (AEDA1). O objetivo central de Ana era a visualização das quantidades envolvidas, sendo por isso importantes as representações pictóricas. Nas tarefas da terceira aula, mais uma vez, deu liberdade para os alunos resolverem recorrendo a esquemas, desenhos e algoritmos. Note-se que na quarta aula esta liberdade foi sendo mais limitada e Ana sugeria tenuemente que pretendia que os alunos fossem adotando o algoritmo da divisão de frações. Na terceira aula, no momento de discussão das tarefas, uma das preocupações era que fossem apresentadas, tanto estratégias recorrendo a representações simbólicas, como a estratégias com recurso às representações pictóricas. Deste modo, Ana pretendia relacionar as representações promovendo a compreensão do algoritmo da divisão de frações. Na quarta aula Ana recorreu a um PowerPoint para representar a resolução da tarefa 3 mas nem todos os alunos compreenderam qual era o quociente porque na sua representação pictórica a unidade não estava explicitamente dividida em partes iguais. Note-se que a professora referiu oralmente que a unidade passaria a estar dividida em 12 partes iguais mas os alunos focaram-se na representação projetada. Ana explicou o que fez, porquê e o que faria numa próxima oportunidade:

Aqui a minha questão de um terço e depois porque é que só tenho aqui um terço dividido em quatro partes. Na altura, não me fazia sentido dividir todos em quatro partes, porquê. Porque só esta parte é que realmente ia ser repartida pelas pessoas. No entanto, para eles perceberem . . . tive a necessidade de referir. (AEDA4)

Assim, Ana pensou nas possíveis dificuldades dos alunos e por isso, oralmente sublinhou em quantas partes a unidade ficaria dividida. No entanto, para os seus alunos a representação pictórica projetada foi mais forte do que a informação dada em linguagem verbal oral. Como resultado da reflexão, partindo do vídeo do episódio, Ana

concluiu que nem todas as representações pictóricas clarificavam as ideias sendo necessário prepará-las com cuidado.

Na sua reflexão escrita sobre as duas últimas aulas, Ana explicitou ideias sobre a comunicação matemática dos alunos. Para a futura professora era importante que os alunos comunicassem por escrito, recorrendo a diferentes representações, e comunicassem oralmente expondo as suas ideias de modo a constituir-se uma discussão:

Foi solicitado aos alunos que resolvessem alguns problemas, recorrendo ao método que desejassem, fosse ele através de esquema, desenho, escrita, cálculo, entre outros. Posto isto e com a minha orientação os alunos foram ao quadro expor as suas ideias e a partir desta exploração teríamos de chegar ao conceito de divisão e descobrir que para dividir dois números racionais multiplica-se o dividendo pelo inverso do divisor.

Ana considerou que o recurso a diferentes representações permitiu que os alunos compreendessem os conceitos a aprender. Por isso, ao longo da sua prática de ensino supervisionada foi orientando os alunos neste sentido. A ideia central era que se os alunos tivessem acesso a diferentes resoluções e formas de pensar e se essas ideias fossem comunicadas, recorrendo a representações pictóricas e simbólicas, os alunos compreenderiam os conceitos. Note-se que Ana deu-se conta que existiam desafios inerentes ao uso de representações pictóricas mas ficava mais satisfeita quanto mais resoluções diferentes tivesse e de preferência recorrendo a representações pictóricas para a compreensão e a simbólicas quando pretendia a aplicação de procedimentos.

Questionamento. Nas duas primeiras aulas de Ana, o questionamento não era recorrente e ocorria quando circulava pelos alunos. Questionava para apoiar e desafiar os alunos na resolução das tarefas, quer relativamente às dúvidas que tinham, quer na aplicação de procedimentos de cálculo e de modo a justificarem o porquê de determinadas estratégias. Neste sentido deu o exemplo de questões que formulou ou poderia ter formulado: “Agora, o que é que vais fazer?”; “Mas pensa, pensa um bocadinho, se está assim, porque é que vais por esse caminho?” (AEDA2). Ou seja, Ana formulou questões que tinham como objetivo desafiar e apoiar os alunos nas suas resoluções e enunciou questões gerais, ajustáveis a qualquer tarefa.

Explicações. Nas entrevistas antes e depois de cada aula, e depois de rever os vídeos, Ana refletiu sobre as explicações que realizou e que foram centrais nas duas primeiras aulas. Comentou o que aconteceu: “[A explicação da primeira aula] vai além do procedimento e pode gerar algum conflito de ideias. . . E aí eu acho que foi mais isso, baralhar os miúdos” (AEF). Ana sentiu que a sua explicação, na primeira aula, não

partiu das ideias dos alunos e não estava adequada aos seus conhecimentos prévios. Os alunos começaram por interpretar a fração $5/2$ como uma relação parte-todo e manteve o seu plano interpretando a fração como quociente. Comentou o diálogo da primeira aula: “O meu objetivo era que eles percebessem que os cinco era uma unidade que ia ser dividida ao meio. E depois desse todo íamos ficar com o todo para os dois quintos, digamos assim...” (AEDA1). A futura professora teve dificuldade em compreender qual a unidade considerada pela aluna e mostrou-se insegura em relação à explicação construída uma vez que a unidade de referência que tinha previsto não foi totalmente compreendida pelos alunos. Depois desta entrevista, refletiu com a professora cooperante que a ajudou a compreender a perspetiva dos alunos. Como resultado da conversa, e como foi descrito, repensou a sua explicação e concretizou-a. Refletindo sobre o acontecido na segunda aula e perspetivando o trabalho a fazer numa outra oportunidade comentou:

Para mim, foi tão lógico este processo que não pensei na ideia de eles já terem as cinco partes... E de ser fácil para eles chegar aqui. . . Depois quando surgiu a [nova] proposta fez sentido . . . [Podíamos] confrontar as duas estratégias, as duas propostas... Aí teria sido mesmo o ideal! (EDA2)

Neste excerto da entrevista, Ana ainda não se sentia completamente segura com a explicação construída na segunda aula. Para a futura professora o foco em 5 como unidade de referência de cinco meios era o que tinha mais sentido. Mas percebeu que o foco no significado parte-todo e, portanto, partir da unidade de referência “um retângulo” fazia mais sentido para os alunos. Assim, a sua proposta final seria combinar as duas perspetivas mas não soube apresentar uma proposta.

Ao longo da sua prática de ensino supervisionada Ana foi refletindo sobre os diferentes aspetos relativos à comunicação. O papel das representações pictóricas dos números racionais e as explicações que elaborou foram os aspetos centrais da sua reflexão. Ainda assim, analisou o questionamento conseguido e os seus propósitos. Relativamente às representações verificamos que as representações pictóricas tinham um papel importante na compreensão dos conceitos e as representações simbólicas o papel de comunicar procedimentos. No que diz respeito ao questionamento refletiu sobre as questões que foi realizando enquanto circulava pelos alunos que tinham como objetivo desafiar e apoiar os alunos nas suas resoluções. As questões enunciadas nos momentos de reflexão eram gerais e não explicitavam o foco em determinados conceitos e portanto desligadas de situações concretas. Refletindo sobre as explicações

debruçou-se sobre a sua clareza ficando satisfeita com o comunicado, mas foi-se questionando sobre o foco das suas explicações e se estas eram adequadas às ideias prévias dos seus alunos. Ao longo das suas reflexões foi reconfigurando as suas explicações de modo a torná-las adequadas aos seus alunos e aos propósitos das tarefas.

6.4.2.6. Reflexão sobre as ações de gestão do ambiente de aprendizagem: Gerir a interação

Na primeira fase da prática de ensino supervisionada, Ana foi gerindo a sala de aula em conformidade com as tarefas a discutir. Dependendo das dificuldades dos alunos dava mais ou menos tempo para resolver as tarefas autonomamente. Quando se repetiam dúvidas avançava para a discussão em grande grupo. Durante o momento de exploração da tarefa foi circulando de modo a apoiar os alunos nas dificuldades e para compreender o trabalho que estavam a realizar: “O que eles estão a fazer. . . estar a ir pelo lado não mais fácil, ou errado, ou então por ser alguma estratégia que se calhar... seja interessante para ir mais tarde ao quadro” (AEDA2). Ou seja, o momento de trabalho autónomo eram, por um lado, para apoiar e desafiar os alunos mas, por outro, para se apropriar das ideias e resoluções dos alunos a explorar em grande grupo.

No momento em grande grupo, para Ana o importante era “dar um bocadinho de atenção a todos” (AEDA2) e quando tinha alunos menos participativos fazia questões específicas para os envolver na aula. Segundo disse, “sempre que colocam o dedo no ar, tento responder às questões deles . . . Claro que numa aula não dá para ir a todos, no entanto tento não repetir o aluno que vai ao quadro...” (AEDA2). Deste modo, para Ana, o momento servia dois objetivos: dar voz a todos os alunos e às suas ideias e responder às questões de todos dentro do tempo que tem que gerir. Durante a observação dos vídeos das aulas Ana refletiu sobre o facto de repetir muitas vezes o que os alunos explicavam, voltando a explicar o que já tinha sido dito. Para a futura professora este aspeto era muito importante porque: “Apesar de estarem a ouvir não estão a absorver aquilo que ele está a dizer. Muitas vezes é para dar algum realce aquilo que ele está a dizer. . . ou seja, colocar numa frase já mais “direitinha” (AEDA2). Durante as apresentações das resoluções, Ana sentiu necessidade de validar e de focar a atenção dos alunos nas apresentações dos colegas. Considerava que os alunos só “absorvem” a ideia quando era explicada por si ou explicava para redizer dando ênfase a ideias importantes ou aproveitava para corrigir ou alargar as ideias apresentadas.

Para tornar as aulas mais “dinâmicas” a solução passaria por “não estarem tanto tempo a fazer sozinhos, discutir mais em termos de propostas entre eles e eles explicarem o que realmente pretendiam ali fazer ou o que é que queriam dizer... Procurar mais esse lado de debate” (AEDA1). Na entrevista após a primeira aula estabeleceu como objetivo promover a discussão:

Estou tão concentrada naquilo que tenho para fazer e dizer que, por vezes, me esqueço de ir a eles [às suas ideias]. . . [Devo] colocar estratégias em confronto . . . Um aluno apresenta uma estratégia e outro apresenta outra diferente, e porque é que fizeram diferente e como, porque é que não foi igual...

Ana sentiu-se muito autocentrada nas suas ações e referiu que queria constituir discussões coletivas confrontando resoluções diferentes e corretas. Na segunda aula tinha como propósito a sistematização e aplicação dos conceitos trabalhados na aula anterior e, por isso, as tarefas não permitiam uma discussão e confronto de resoluções: “[Com estas tarefas] não havia oportunidade para debate, não havia oportunidade para discussão. Era muito a base de exercícios de cálculo” (AEDA2)

Na segunda fase, fazendo o balanço do momento de exploração da tarefa, considerou que tinha “perdido” muito tempo com cada par. E explicou:

Não tenho a capacidade que os outros professores têm, que passam e conseguem ver logo tudo. Não! Eu muitas vezes tenho que me debruçar sobre o aluno porque eu não consigo ver o que ele está a resolver.. . . Mas como vou passando por eles vou-me apercebendo, “se calhar este deve ir ao quadro, aquele ali fez diferente também está interessante, também é bom ir ao quadro”, para quê, para haver ali um confronto de várias estratégias.

Assim, Ana precisava de tempo para analisar as resoluções dos alunos enquanto circulava pelos alunos, no momento de trabalho autónomo. Para além de tentar compreender as ideias dos seus alunos, foi circulando de modo a selecionar quais as resoluções que queria ver discutidas no quadro. Num primeiro momento o foco da futura professora estava na diversidade de resoluções como forma de enriquecer a discussão mas mais tarde explicitou que a sua ideia prévia era sequenciar a apresentação da resolução mais informal para a formal:

Normalmente sim. Eles às vezes trocam-nos as voltas. Isso aconteceu na aula 3. Que eu fiz daquele que é mais fácil, mais fácil de perceção, ou seja, todos conseguiram chegar lá, para o mais difícil, para quê, até o aluno mais fraco percebe a primeira resolução e depois vamos aumentando o grau de complexidade. (EDA4)

Deste modo encontramos diferentes critérios para a sequenciação das diferentes resoluções e o discurso de Ana moveu-se da importância da diversidade para a

organização das diferentes resoluções da informal para a formal. Apesar das suas ideias, por vezes os alunos e as circunstâncias traziam dinâmicas imprevistas. Na quarta aula, na tarefa 3, Ana explicou que não seguiu nenhum critério de seleção das resoluções porque não circulou pelos alunos com esse objetivo: “Aqui não houve critério específico. Como houve trabalho de casa eu não sabia quais as propostas de resolução deles. (AEDA4)”. Em outros momentos os alunos apresentaram resoluções diferentes daquelas que registaram. Na terceira aula surgiram várias resoluções possíveis que Ana considerou bastante interessantes e, apesar de se levantarem desafios na gestão de diferentes ideias matemáticas, a futura professora ficou muito satisfeita:

A questão de confrontar as estratégias, no quadro, ao mesmo tempo para eles verem que há várias abordagens. . . Apesar de muitas vezes questionarmos, perguntarmos o porquê, e terem dificuldade em explicar. . . Finalmente consegui colocar em prática a exploração de estratégias. . . Mas também é um grande risco (AEDA3)

Na sua reflexão sobre os momentos de discussão da tarefa, Ana identificou o estabelecimento de relações entre estratégias como uma ação complexa. Outra ação complexa era a de desafiar e apoiar os alunos a comunicar as suas ideias apesar de registarem as estratégias. Reconheceu que não bastava perguntar porquê para desafiar a comunicação oral. Apesar da complexidade envolvida mostrou-se bastante satisfeita com o trabalho conseguido porque existiu diversidade de resoluções. Para finalizar a discussão das tarefas, Ana optava, ou por validar a resolução, ou por redizer o trabalho. Depois de visualizar o momento final de uma aula, repensou o trabalho a realizar: “Se fosse fazer neste momento optava por rematar logo a divisão. Ou seja, a síntese do que aprendemos da aula e revia o registo onde a divisão é o mesmo que a multiplicação pelo inverso. E colocava exemplos” (AEDA3). Ou seja, Ana queria realizar a discussão de diferentes resoluções e daí fazer surgir o algoritmo da divisão.

Assim, Ana, na primeira fase da prática de ensino supervisionada, não tinha estratégias pré-estabelecidas para a gestão da dinâmica de aula. Foi organizando as aulas em diferentes momentos em conformidade com as tarefas a discutir. A dinâmica constituída dependeu das dificuldades dos alunos que, quando se repetiram, a levavam a avançar para a discussão em grande grupo. Para ela, era importante dar atenção a todos os alunos e tentou dar resposta a todos. Ana sinalizou que teria que fazer uma melhor gestão do tempo no momento de trabalho autónomo, sendo importante a discussão de diferentes resoluções em grande grupo. Referiu que uma das razões que levaram à

dinâmica constituída foi a natureza das tarefas propostas e que estas não permitiam o confronto entre diferentes resoluções deixando como objetivo a discussão de resoluções a tarefas de natureza mais aberta. Na segunda fase, o momento de discussão das tarefas foi bastante importante nas suas reflexões porque os alunos resolveram as tarefas com diferentes estratégias. No entanto existiram vários desafios colocados à futura professora: (i) selecionar diferentes resoluções e sequenciá-las; (2) gerir resoluções apresentadas pelos alunos, inesperadamente, porque os alunos registam uma resolução mas no quadro apresentam outra; (3) Compreender no momento resoluções corretas e imprevistas ou resoluções incorretas mas que Ana considera que os argumentos são válidos; (4) Explorar erros e dificuldades para apoiar os alunos na compreensão dos seus erros. (5) Melhorar o registo e sistematização no final da discussão.

Síntese do caso de Ana

A prática de ensino da Ana realizou-se no 2.º semestre e, durante um mês, ela e a sua parceira de estágio lecionaram a unidade de ensino relativa à multiplicação e divisão de números racionais. Lecionou oito aulas, tendo sido observadas quatro onde explorou dois assuntos diferentes: a propriedade que estabelece a relação entre dois números racionais inversos e a divisão de números racionais representados por frações.

Visão sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais

Como aluna, no ensino básico e secundário, Ana sentiu dificuldades na aprendizagem da Matemática e fez depender estas dificuldades dos seus professores. Considerou-se uma aluna “razoável” e nas unidades curriculares de Matemática via-se a si mesma como boa aluna em resultado do investimento. Recordou que só começou a gostar da disciplina quando começou a compreender os processos envolvidos. A ESE teve um papel importante na construção da sua visão da Matemática, do seu ensino e aprendizagem, levando-a a identificar a Matemática como ciência e como ferramenta para o quotidiano e como forma de pensamento. Referiu unidades curriculares onde conheceu episódios da história da Matemática e identificou diversas atividades desenvolvidas, apesar de nem sempre conseguir transpor essas experiências para outros contextos. Por isso, para selecionar tarefas mais exploratórias optou por pesquisar na web brochuras sobre o tema. Em estágios anteriores, a experiência de exploração de

tarefas de natureza mais aberta não foi muito positiva e quando iniciou o estágio de 2.º ciclo em Matemática mostrou reserva em repetir a experiência.

Sobre o papel do professor no processo de ensino e aprendizagem, Ana começou por apresentá-lo como alguém que deve transformar as aulas em espaços agradáveis e que deve ser um “bom explicador”, referindo mais tarde a ideia do professor como promotor de aprendizagens. Neste sentido, a gestão das aprendizagens era o aspeto que mais a preocupava e onde se sentia mais insegura. Relativamente ao papel dos alunos, indicou que estes constroem o seu saber, mas também referiu que os “melhores” alunos podem, por vezes, substituir o professor como explicadores dos seus colegas.

A visão de ensino-aprendizagem de Ana parece depender em grande medida das suas (in)seguranças e conhecimento. Assim, quando tinha dúvidas sobre *como* ensinar, descreveu práticas de ensino direto, ressaltando que era importante que os alunos tivessem experiências agradáveis. Noutros momentos, indicou que pretendia propor tarefas de natureza mais aberta e apoiar os seus alunos a aprender Matemática com compreensão. Relativamente ao ensino e aprendizagem dos números racionais, identificou tópicos concretizáveis e tópicos abstratos e considerou que o conhecimento se constrói num processo que vai de um nível informal para um nível formal e da compreensão para memorização. Numa fase inicial, mostrou-se muito influenciada por ideias da sua parceira de estágio, mas, numa segunda fase, decidiu proporcionar aos seus alunos experiências de aprendizagem na linha das ideias discutidas na ESE e das experiências vividas na formação inicial. Deste modo, a sua visão ora pareceu em linha com a perspetiva de ensino e aprendizagem exploratório, ora coexistia com ideias mais tradicionais. Quando se sentiu insegura considerou que a melhor opção era desenvolver um ensino direto onde o professor domina o discurso da aula cumprindo os objetivos definidos.

Ana recorreu aos documentos curriculares para definir objetivos de aprendizagem. Da sua análise ao programa de Matemática em vigor, percebemos que as experiências que pretende proporcionar aos seus alunos e que os conceitos que pretende explorar têm origem no discurso veiculado na ESE.

Preparação e concretização do processo de ensino e aprendizagem dos números racionais

Ao longo da prática de ensino supervisionada, Ana pretendia que os alunos compreendessem os conceitos trabalhados sobre números racionais. Da primeira para a

segunda fase da prática ampliou o seu objetivo e propôs-se seguir uma abordagem exploratória baseada na resolução de problemas com contextos reais. Na preparação das aulas, revisitou artigos, analisou manuais escolares e brochuras, revendo ideias matemáticas e pesquisando tarefas para propor. Referiu que não se identificou com as propostas dos manuais escolares e optou por construir as suas tarefas e, na segunda fase, selecionar tarefas de brochuras, explicando que o recurso a estes materiais lhe trouxe segurança sobre a qualidade e preparação para a exploração. Relativamente às tarefas, na primeira fase da prática de ensino, como não encontrou problemas que a satisfizessem, propôs exercícios compostos por expressões simbólicas para representar pictoricamente a multiplicação de números racionais inversos. Em seguida, propôs representações pictóricas para representar simbolicamente e aplicar a regra aprendida. Na segunda fase, selecionou tarefas para apresentar aos alunos de uma brochura problemas sobre divisão. Nas alterações que efetuou nas tarefas que selecionou, reduziu o nível de desafio e de abertura. Em cada tópico a ensinar, Ana sequenciou as tarefas da exploração para a aplicação. Na concretização, acabou por, também, apoiar os alunos a identificar a unidade de referência das frações envolvidas na operação de multiplicação, explorando os seus significados. Na segunda fase, procurou sequenciar as tarefas considerando os diferentes significados, começando pelo significado de partilha equitativa, seguida do significado de medida e terminando com a divisão como operação inversa da multiplicação. Para consolidação propôs apenas problemas de partilha. Ana planeou as suas aulas em dois registos diferentes, um (formal) para entregar à professora cooperante e outro (informal) para se preparar para a lecionação. Na planificação formal, seguiu a estrutura definida pela ESE, registando os objetivos e conteúdos do programa de Matemática em vigor sem efetuar adequações relativas ao trabalho a realizar com os seus alunos. Descreveu a atividade a realizar nos diferentes momentos das aulas, nomeando as tarefas a propor e o propósito para cada momento e previu sucintamente as ações dos alunos na realização das tarefas. Por vezes, referiu que pretendia relacionar representações pictóricas e simbólicas. Nos registos informais, resolveu as tarefas recorrendo a representações pictóricas e simbólicas e usando procedimentos de cálculo. Estes registos, que surgiram da necessidade de adequar as suas explicações às ideias prévias dos seus alunos (aspeto que inicialmente não tinha previsto). Da primeira para a segunda fase, foi incluindo na planificação formal aspetos presentes na planificação informal (representações pictóricas e simbólicas das operações a explorar), resultado das reflexões conjuntas com a professora cooperante e da

necessidade de tornar mais explícito, a outros, o trabalho a realizar. Nas entrevistas da segunda fase de trabalho, previu como partir das resoluções das diferentes tarefas para chegar ao algoritmo da divisão explicitando os significados de divisão. Na segunda fase, explorou problemas com algum nível de desafio, mas como propôs problemas idênticos na terceira e quarta aula, estes tornaram-se pouco desafiantes para os alunos que os resolveram correta e rapidamente. No lançamento e na exploração das tarefas, perante as dificuldades dos alunos, reduziu ainda mais o seu nível de desafio, dando indicações sobre os dados, as condições e possíveis estratégias de resolução. O trabalho de Ana com cada tarefa estruturava-se em três momentos de trabalho: proposta, exploração e discussão que terminava com uma síntese realizada em contínuo mas que tinha sido preparada como um novo momento. Na proposta das tarefas, por vezes, sugeriu as estratégias que esperava que os alunos adotassem. Na segunda fase, apresentou o contexto enquadrando as tarefas das duas aulas seguintes, fazendo uma ponte entre o realizado e o pretendido na tarefa. Por vezes, guiou e informou os alunos a identificar dados e condições e tornou-se mais diretiva quando estes sentiam dificuldades em avançar com o trabalho. Organizou sempre as formas de trabalho dos alunos (individualmente na primeira fase e a pares na segunda fase), materiais da aula e sublinhou a importância do trabalho conjunto e o do registo das resoluções. Durante a exploração das tarefas circulou enquanto os alunos trabalhavam individualmente ou a pares, insistiu que registassem as suas estratégias, sublinhando a importância das representações pictóricas ou simbólicas, dependendo do propósito da aula. Observou as resoluções de modo a seleccionar e orquestrar a discussão e questionou os alunos e, focando-os no que era pedido, guiando e informando. Quando os alunos mostravam dificuldades, foi diretiva e acabava por sugerir o que previu. Na discussão das tarefas, Ana solicitou a apresentação de resoluções corretas, apoiou e guiou a apresentação questionando os alunos e salientou erros que tinha observado, de modo a esclarecer possíveis dúvidas. No final da apresentação das resoluções, validou a resolução ou informou sobre os procedimentos e conceitos envolvidos na tarefa relacionando representações. Na segunda fase da prática de ensino, surgiram várias resoluções, tendo Ana promovido a apresentação das resoluções corretas, com uma diversidade de representações, mais ou menos formais, mas foi alterando o critério de sequenciação entre discussões. Ao longo do processo, foi apoiando e guiando os alunos nas apresentações e na explicitação das suas ideias. No final, reviu as estratégias registadas no quadro, validando os resultados. Neste momento, (i) desenvolvia um questionamento

cada vez mais focado, guiando e informando os alunos até chegar aos procedimentos a aprender; (ii) guiava com questões cada vez menos desafiantes e mais focalizadas chegando a sugerir processos; (iii) quando antecipava as ideias dos alunos era mais segura na interação. No que respeita às ações de gestão do ambiente de aprendizagem, anteviu: (i) organizar dos alunos e materiais; (ii) gerir o tempo nos diferentes momentos de trabalho; (iii) orquestrar diferentes resoluções; e (iv) promover a interação entre os alunos confrontando resoluções. Na concretização, promoveu uma atitude de respeito e interesse pelos trabalhos e geriu a participação dos alunos.

Reflexão sobre as experiências vividas

Ana refletiu por escrito em relatórios de estágio e nas entrevistas realizadas. As suas reflexões escritas tendiam sobretudo a invocar autores das ciências da educação em geral e o programa de Matemática de 2007. Nas entrevistas, debruçou-se sobre a natureza e contexto das tarefas e analisou as aprendizagens e dificuldades dos alunos. Esteve muito centrada nas suas ações e comunicação, refletindo sobre a promoção de uma aprendizagem por compreensão, tendo indicado dificuldades na promoção das aprendizagens e na compreensão e gestão das resoluções dos alunos. Relativamente ao processo de ensino e aprendizagem do tema dos números racionais fez um balanço positivo. Ainda assim, identificou o tema como complexo para ensinar e aprender mas considera que contribuiu para as aprendizagens dos alunos por mérito da abordagem seguida. Nas entrevistas emergiram outras questões, tendo-se debruçado sobre as potencialidades e limitações das tarefas selecionadas, as aprendizagens dos alunos, a comunicação desenvolvida e as ações de gestão do ambiente de aprendizagem nos diferentes momentos da prática letiva. Relativamente às tarefas selecionadas, Ana sentiu que estas davam resposta aos propósitos explicitados e que gostaria de ter explorado. Considerou que as dificuldades que viveu resultaram da sua inexperiência na compreensão das estratégias propostas pelos alunos e na orquestração das diversas resoluções. Ao longo da prática de ensino, foi compreendendo que uma planificação escrita mais detalhada era uma ajuda na preparação da exploração das tarefas. No final, considerou que foi bem-sucedida porque os alunos resolveram com sucesso exercícios sobre números racionais inversos entre si e problemas envolvendo a divisão com frações, com diferentes estratégias incluindo o algoritmo “inverte e multiplica”. Apresentou razões para a seleção e adequação dos problemas referindo a diversidade de significados e sua sequenciação. É de notar, também, que identificou o grau de

difficuldade dos problemas com os números envolvidos sem problematizar os significados das operações. No que diz respeito às aprendizagens dos alunos, inicialmente percebeu que os alunos aplicavam procedimentos sem compreensão e que tinham dificuldades na comunicação. Na segunda fase da prática de ensino, como resultado do aumento da diversidade de resoluções, sentiu que os alunos foram mais criativos nas suas estratégias, mas também sentiu que esta diversidade lhe trouxe desafios inesperados de compreensão dessas estratégias e de gestão dos diversos contributos. Sobre a comunicação desenvolvida, inicialmente, debruçou-se sobre episódios onde foi pouco clara nas suas explicações e os cuidados a ter na elaboração de explicações no que respeita ao foco e adequação às ideias prévias dos alunos. Refletiu, ainda, sobre os propósitos do questionamento e as dificuldades inerentes à elaboração de questões que levem os alunos a construir conhecimento. Ao longo da prática de ensino refletiu sobre o papel das representações na compreensão dos conceitos analisando os desafios relativos ao uso de representações pictóricas. Considerou que estas representações têm um papel importante na compreensão dos conceitos e as representações simbólicas têm o papel de comunicar procedimentos. Esta ideia ficou espelhada nas tarefas construídas e no modo como foram exploradas. Posteriormente, sinalizou a importância do estabelecimento de relações entre diferentes representações da mesma situação. Ao longo do processo de prática de ensino supervisionado, Ana focou-se sobretudo nas suas ações de gestão do ambiente de aprendizagem. Na primeira fase, centrou-se na gestão do tempo, considerando que tinha despendido muito tempo no trabalho autónomo e pouco na discussão. Pretendia dar resposta a todos e ouvir todos os alunos e decidiu optar por tarefas mais abertas, orquestrar as diferentes resoluções e promover o confronto de ideias. Na segunda fase, retomou as dificuldades vividas durante o trabalho autónomo salientando a dificuldade em monitorizar o trabalho dos alunos de modo a selecionar as resoluções a apresentar durante a discussão. Mostrou grande preocupação com este momento, tendo identificado vários desafios, como: (i) compreender e selecionar diferentes resoluções e sequenciá-las; (ii) gerir resoluções inesperadas; e (iii) explorar erros e dificuldades para apoiar os alunos na sua compreensão. Considerou que tinha de melhorar o registo e sistematização no final da discussão.

Em síntese, a visão de Ana sobre o ensino-aprendizagem da Matemática com foco na compreensão dos conceitos e procedimentos a ensinar nem sempre era fácil de concretizar. Ainda que tivessem sido importantes as experiências vividas na ESE, nem

sempre as aprendizagens eram mobilizáveis. As experiências de estágio em anos anteriores nem sempre foram positivas deixando a futura professora ansiosa e dividida sobre o trabalho a realizar no novo contexto que, por sua vez, estava dividido sobre a abordagem a concretizar. Para preparar a sua prática selecionou, desenhou e sequenciou tarefas com natureza diferente e, ao redesenhar, alterou a sua natureza. Nos seus registos informais, antecipou resoluções de algumas tarefas e representações das situações que pretendia apresentar aos alunos no final da exploração de cada tarefa. Nos registos formais descreveu sucintamente os momentos que considerava fundamentais. A concretização das aulas estruturava-se em três momentos: proposta e exploração da tarefa e discussão e síntese das resoluções. Colocaram-se vários desafios à futura professora na compreensão das ideias dos alunos de modo a apoiá-los na resolução ou apresentação das suas ideias. Ainda assim, ficou satisfeita considerando que as tarefas propostas foram significativas para os alunos e que promoveram a compreensão das regras e procedimentos a aplicar. Para a futura professora, o desafio esteve no desenvolvimento de ações de promoção e gestão da aprendizagem e da interação dos alunos.

Capítulo 7

Conclusão

Neste capítulo começo por realizar uma síntese do estudo. De seguida, apresento os principais resultados obtidos, focando-me no conhecimento didático e a prática pedagógica de futuros professores no ensino de números racionais. Dou realce às diferentes fases da prática de pedagógica de três futuras professoras e ao seu conhecimento didático, analisando as suas perspetivas e as decisões que efetivamente tomam na prática. Indico que aprendizagens sobre números racionais pretendem desenvolver nos seus alunos, que tarefas propõem e como as exploram, identificando os aspetos relativos à comunicação e às ações, antevistas e concretizadas, e os desafios que se lhes colocam ao longo da sua prática de ensino supervisionada. Na parte final, com base numa reflexão sobre o trabalho realizado, sugiro implicações para a formação inicial de professores e para a investigação.

7.1. Síntese do estudo

Este estudo tem como objetivo compreender o conhecimento didático e a prática de ensino de futuros professores de 2.º ciclo sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais na prática de ensino supervisionada. Para tal, analiso a prática de ensino supervisionada e procuro analisar as questões emergentes e que reconhecem como relevantes relativamente às tarefas, aos alunos e aos aspetos relativos à comunicação e às suas ações. Assim, pretendo responder às seguintes questões: (i) Qual a visão dos futuros professores sobre o papel do professor e alunos, as tarefas a propor e

as dinâmicas a concretizar em sala de aula no que respeita ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática e especificamente dos números racionais? (ii) Como se caracteriza o modo como os futuros professores preparam e concretizam o processo de ensino e aprendizagem dos números racionais? (iii) Que aspetos são alvo de reflexão como resultado das experiências vividas e que desafios se manifestam na prática de ensino supervisionada quando lecionaram números racionais?

O quadro teórico desenvolveu-se em torno do conhecimento para ensinar Matemática e a prática pedagógica de futuros professores. Na discussão sobre o conhecimento didático, especificamente para ensinar o tema dos números racionais, emergiram as principais questões a considerar no ensino e na aprendizagem deste tema e as práticas pedagógicas desenvolvidas.

A investigação seguiu o paradigma interpretativo e uma abordagem qualitativa, seguindo um *design* de estudo de caso. As três futuras professoras são muito diferentes nos seus percursos escolares antes da formação inicial e na formação inicial e consideraram-se com níveis de desempenho diferentes, em diferentes tipos de unidades curriculares. Apresentaram focos de trabalho diferentes durante a sua prática de ensino supervisionada. Os casos foram selecionados em duas Escolas Superiores de Educação diferentes e estas futuras professoras foram as únicas a lecionar o tema dos números racionais nas ESE num raio de 150 quilómetros em torno de Lisboa, no período de recolha de dados. Os principais instrumentos de recolha de dados foram entrevistas, observação de aulas e análise documental de planos de aulas e de reflexões individuais. Foram intercaladas situações de observação das práticas de três futuras professoras com momentos de reflexão recorrendo a entrevistas semiestruturadas. Nos momentos de reflexão sobre episódios em sala de aula foi possível recorrer aos vídeos das suas aulas. Foram recolhidos quatro vídeos de aulas de cada futura professora, transcritos na sua totalidade. Foram audiogravadas entrevistas semiestruturadas no início e no final do estágio e antes e depois de cada aula. Os documentos produzidos como planificações, registos pessoais e reflexões escritas foram recolhidos e analisados. A análise dos dados assumiu um cunho descritivo e interpretativo e os dados foram analisados dedutivamente partindo do quadro teórico e, indutivamente, partindo das práticas desenvolvidas pelas futuras professoras do estudo.

7.2. Conclusões do estudo

Esta secção apresenta os principais resultados do estudo procurando dar resposta ao objetivo definido e respondendo às questões de investigação. As três futuras professoras, casos deste estudo, têm visões distintas e anteviram, concretizaram e refletiram de modo diferente perante o desafio de ensinarem o tema dos números racionais. A prática de ensino supervisionada dos três casos realizou-se no 2.º semestre. Sobre o tema dos Números Racionais, Berta lecionou durante uma semana e meia e Ana e Glória durante um mês, intercalando as semanas. Em quatro aulas, Berta explorou a representação fracionária, a relação entre as diferentes representações dos números racionais e o conceito de percentagem de modo a preparar o exame de 6.º ano do ensino básico. Ana e Glória lecionaram sete aulas cada uma e debruçaram-se sobre a multiplicação e divisão de números racionais.

7.2.1. Visão sobre o ensino e aprendizagem de números racionais

As três futuras professoras descreveram experiências nas ESE muito próximas, mas tinham percursos e perfis distintos o que permitiu terem perspetivas diferentes sobre o vivido. Glória era a única futura professora que, antes de frequentar a ESE, teve experiência de ensino e, por isso, antes de ser professora já tinha ideias fortes sobre o ensino e aprendizagem. Como alunas, no ensino básico e secundário, descreveram contextos e experiências próximas, mas apenas Glória sentiu poucas dificuldades na aprendizagem da Matemática independentemente da prática dos seus professores. Glória entendeu que foi feito o necessário. Ana e Berta referiram que as suas aprendizagens dependiam das práticas dos seus professores e que só começaram a gostar da disciplina quando compreenderam os processos envolvidos. Assim, pretendiam fazer diferente do que fizeram consigo e promover aprendizagens por compreensão.

As três professoras tinham percursos diferentes durante a sua formação inicial nas ESE. Berta considerou-se e foi considerada muito boa aluna. Glória era considerada boa aluna nas várias unidades curriculares da Matemática, mas, segundo a supervisora da ESE, na Didática da Matemática, não era tão bem-sucedida. Ana considerou-se uma aluna “razoável” e nas unidades curriculares de Matemática considerou-se boa aluna como resultado do investimento. Sobre as experiências vividas na ESE, tanto Berta como Ana, consideraram que as suas experiências tiveram um papel importante na construção da sua visão da Matemática, do seu ensino e aprendizagem. Apenas Glória

considerou que as experiências na ESE não tinham tido impacto nas suas ideias e conhecimento matemático e didático, assumindo a sua experiência prática como aquela que era verdadeiramente significativa.

Ana e Berta referiram episódios da História da Matemática e, recorrendo a essa informação, referiram que a Matemática era uma ciência, uma ferramenta para o quotidiano e uma forma de pensamento. Já Glória, no seu discurso, deu importância ao papel instrumental da Matemática escolar, deixando a ressalva de também ter um papel de desafio e de desenvolvimento de capacidades, mas que essa possibilidade apenas estava ao alcance de alguns alunos que tinham mais aptidão para a disciplina. Todas referiram e descreveram unidades curriculares, onde lhe foram apresentadas diferentes atividades matemáticas ainda que com um impacto diferente na sua prática futura. No caso de Berta as experiências foram bastante significativas para a sua aprendizagem e, por isso, decidiu selecionar de entre as tarefas experienciadas algumas para propor aos seus alunos. Para Berta, a tarefa explorada na Didática da Matemática era a tarefa onde se sentia mais preparada para explorar com os alunos devido à vivência multifacetada que teve. Ana, apesar de ter tido experiências importantes para o seu conhecimento matemático, sentia que nem sempre conseguia transportar essas experiências para outros contextos. Por isso, para selecionar tarefas mais exploratórias optou por pesquisar na *web* materiais sobre o tema. Glória considerou a Didática da Matemática muito prescritiva e não apoiava as ideias que trazia da sua experiência. No momento da sua prática supervisionada decidiu levar a cabo as suas ideias e, tendo o seu propósito como ponto de partida, desenhou as tarefas a propor.

Também as experiências de estágio anteriores tiveram aspetos comuns e diferentes. Nos casos de Berta e Ana, nem sempre as experiências foram positivas mas enquanto Berta avançou para uma experiência colaborativa com os seus supervisores, Ana tinha receio em mostrar as suas ideias às supervisoras e só num segundo momento adotou uma atitude mais ouvinte permitindo-se propor tarefas mais exploratórias, em linha com o proposto pelas supervisoras. No caso de Glória, as experiências de estágio foram sempre tensas e considerou importante o estágio de 1.º ciclo porque aprendeu como trabalhar com crianças pequenas. No entanto essa aprendizagem não foi transportada para o 2.º ciclo pois considerava que era altura de os alunos fazerem aprendizagens mais formais.

As visões das futuras professoras sobre o ensino e aprendizagem da Matemática e, especificamente, sobre o ensino dos números racionais eram mais próximas entre Berta

e Ana e mais distintas da visão de Glória. Sobre o papel do professor, Berta considerava que passava por reconhecer as dificuldades dos seus alunos, apoiá-los e desafiá-los na aprendizagem através das tarefas que propõe. Por isso, deveria saber sobre a Matemática que ensina e sobre o que os alunos aprendem, devia conhecer erros e dificuldades que pudessem surgir e como apoiar os alunos a aprender. Neste sentido, a gestão das aprendizagens era o aspeto que mais a preocupava e onde se sentia mais insegura. Também Ana tinha uma grande preocupação com a promoção e gestão das aprendizagens, ainda que inicialmente tenha transmitido a visão do professor como alguém que promove boas relações e que deve ser um “bom explicador”. Mais uma vez, Glória tinha ideias diferentes e centrou-se na ideia de que, se os alunos não fossem autónomos e construtivos na participação para a construção de uma explicação, o professor tem de ser mais diretivo, ainda que o ideal, no seu entender, era que fosse mediador de aprendizagem.

Relativamente ao papel do aluno, Berta via-o “como um matemático”, que constrói e mobiliza conhecimento e deve ser capaz de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático. Para que fossem produtivos, os alunos deveriam colocar em comum as ideias discutindo diferentes estratégias na resolução dos problemas propostos. Também Ana referiu que os alunos devem construir o seu saber e que podem apoiar os seus colegas com um desempenho mais frágil. Para Glória a questão era diferente. Considerou que o gosto pela Matemática e pelo desafio dos processos que a caracterizam são características próprias dos alunos. Assim, o sucesso dos alunos na Matemática dependia fundamentalmente do seu perfil. Sublinhou que se existem alunos que apreciam o desafio, existem outros que preferem aulas expositivas e onde basicamente se resolvem exercícios. Para Glória, o papel dos alunos é resolver as tarefas propostas de modo a aprenderem o previsto.

Sobre o ensino e aprendizagem da Matemática nos três casos pudemos verificar duas visões, de Berta e de Glória, com Ana oscilando entre as duas posições. Para Berta, a compreensão dos conceitos e a resolução de problemas eram aspetos centrais. No processo de ensino-aprendizagem por compreensão os alunos, tal como os matemáticos, constroem e mobilizam conhecimento e devem ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento. Já no caso de Glória a ênfase era dicotómica. Estabeleceu uma relação restrita entre o tipo de tarefas e as abordagens de ensino-aprendizagem e considerava que existiam duas

abordagens possíveis: uma abordagem com foco nos procedimentos e uma abordagem com foco na compreensão negligenciando o treino de procedimentos. Por isso, optava por preparar e concretizar a sua prática recorrendo ao foco nos procedimentos. No caso de Ana, verificamos que dependendo das suas (in)seguranças e conhecimento, apostaria num ensino direto, ressalvando que era importante que os alunos tivessem experiências agradáveis. Ainda assim considerava que era importante seguir uma abordagem idêntica à defendida por Berta, e mais próxima da veiculada pelos supervisores e, por isso, numa segunda fase da sua prática propôs tarefas exploratória e apostou na compreensão dos conceitos envolvidos ainda que isso a fizesse sentir insegura.

Sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais, Berta identificou como importante explorar as diferentes representações. Ana identificou tópicos concretizáveis e tópicos abstratos e considerou que o conhecimento se constrói num processo que vai de um nível informal para um nível formal e da compreensão para memorização. Glória foi sempre colocando o seu discurso num registo genérico, mesmo quando lhe coloquei questões específicas sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais e defendeu a diversificação do tipo de tarefas mas que se tinha que acautelar a sua duração, de modo a não frustrar os alunos pouco perseverantes.

Tal como alerta Chapman (2012), os professores são elementos centrais na forma como o currículo é interpretado e experienciado na sala de aula. Por isso, importa que reconheçam as características de determinadas abordagens, identificando quais os seus princípios do ensino e dos documentos curriculares, por exemplo os programas de Matemática de 2007 e 2013 ou a abordagem seguida pelo NCTM (2007). Este conhecimento é transversal pois, para os professores analisarem os documentos curriculares de modo a terem um papel ativo na sua implementação, devem ter conhecimentos diferentes dimensões do conhecimento didático. Note-se que o professor tem de conhecer os documentos curriculares perspetivando o currículo, o ensino e a aprendizagem como um processo contínuo e onde as ideias matemáticas se vão ampliando relacionando-as, e não apenas os dos ciclos que leciona. No momento do estudo foi revogado o programa então em vigor (ME, 2007) e passou a estar em vigor outro programa, com uma outra perspetiva curricular. Glória foi a única futura professora que tomou posição clara sobre a questão considerando o programa que entrou em vigor, um bom documento porque era claro no que era esperado ensinar e não dava indicações sobre o modo de ensinar. Das três professoras, apenas Berta estava a preparar os alunos para o exame nacional e considerou que deveria fazê-lo abordando as

ideias matemáticas de modo a que os alunos as compreendessem. No entanto, Glória mostrou-se preocupada com o exame e considerou que, com uma abordagem focada nos procedimentos, estava segura que os alunos tinham aprendido o necessário para o exame nacional. Note-se que com a mesma preocupação as duas futuras professoras optaram por abordagens diferentes estando mais alinhadas com as suas visões de ensino do que com o objetivo de prepararem os alunos para o exame, ainda que ambas justificassem as suas opções com o mesmo fim.

A avaliação pressupõe uma tomada de decisão sobre o que é relevante para determinado fim e existem decisões que não são tomadas pelos futuros professores. No entanto também estão envolvidas a recolha de informação, a sua interpretação e o desenvolvimento a partir da informação e análise. Ou seja, a avaliação da e para as aprendizagens pode ser vista como uma dimensão integrada na prática pedagógica que pode ser alvo de atenção específica. Perante as questões colocadas e durante as suas reflexões percebeu-se, ao longo da prática supervisionada das três futuras professoras, que as questões relativas à avaliação não foram prioritárias. Apenas Glória fazia referência a questões relativas à avaliação, mas apenas na perspetiva da avaliação das aprendizagens. A futura professora assumia não ter autonomia para tomar decisões sobre as diferentes questões a ponderar na avaliação o que pôde levar a não dar prioridade a esta dimensão no âmbito da prática pedagógica supervisionada quer de Glória, quer das restantes futuras professoras.

Em síntese, as três futuras professoras tiveram diferentes percursos antes e durante a formação inicial. Ainda que tenham vivido algumas situações próximas, as perceções sobre o vivido foram diferentes. Assim, foram construindo visões distintas sobre a Matemática e sobre o seu ensino. Mobilizando o experienciado e o aprendido nas ESE, caracterizaram os processos de ensino-aprendizagem da Matemática que consideraram importantes no tema dos números racionais, identificando o papel de professores e alunos. Glória sustentou a sua visão com a sua experiência como explicadora. Para Berta e Ana, importava fazer diferente do que foi feito com elas como alunas do ensino básico e secundário, promovendo a compreensão dos conceitos a abordar através da proposta de problemas com contexto. Glória conhecia abordagens de cunho exploratório, mas considerou prioritário os alunos dominarem primeiro os procedimentos de cálculo e, para isso, desenvolver uma prática mais direta. Perante os desafios que a prática pedagógica de natureza exploratória coloca, Berta procurou os supervisores e Ana, inicialmente, fez opções menos complexas de gerir. O facto das

futuras professoras não serem titulares das turmas, não parece ter favorecido a construção de ideias próprias no que respeita ao currículo e à avaliação das aprendizagens.

7.2.2. Preparação e concretização do ensino e aprendizagem de números racionais

Ao longo da prática de ensino supervisionada, as futuras professoras tinham focos diferentes. Berta e Ana pretendiam que os alunos compreendessem os conceitos abordados sobre os números racionais, sendo que Berta pretendia simultaneamente que os seus alunos desenvolvessem a capacidade de resolução de problemas e a comunicação matemática. Glória tinha o foco no domínio dos procedimentos de cálculo da multiplicação de números racionais na forma de fração. Note-se que Ana, da primeira para a segunda fase da prática ampliou o seu objetivo e propôs-se seguir uma abordagem exploratória baseada na resolução de problemas com contextos reais. Ou seja, afastou-se do foco de Glória e aproximou-se do foco de Berta.

7.2.2.1. Planificação na prática de ensino supervisionada

O professor tem que preparar o que vai ensinar e como vai ensinar, analisando criticamente materiais, artigos e documentos curriculares, adaptando às características dos seus alunos, recorrendo ao seu reportório de representações e selecionando as ideias que considera importantes para o ensino (Serrazina, 2012; Sullivan, Clarke, Clarke & Roche, 2013). As três futuras professoras, para se prepararem para a prática de ensino supervisionada, e depois de passarem por um período de observação, consultaram o programa em vigor. Berta consultou o PMEB (2007) para perceber os tópicos a explorar e abordagem a usar. Ana e Glória consultaram o novo programa e metas em vigor, PMM (2013), para perceber que conteúdos iria lecionar e o que tinha de cumprir. Berta e Ana estavam inseguras sobre o processo de ensino que teriam que levar a cabo, fizeram leituras específicas e pesquisaram e analisaram tarefas noutros manuais, brochuras e noutros documentos disponíveis na web. Glória sentia-se muito segura científica e didaticamente e prescindiu de realizar leituras específicas para o momento que iria iniciar.

Seguindo as orientações das ESE, que as três futuras professoras conheciam, elas deveriam explicitar as suas ações na exploração dos materiais e antecipar as resoluções dos alunos e preparar as questões. No entanto, na elaboração da planificação as três futuras professoras tiveram necessidades diferentes o que levou a modos de planificar

diferentes. Para Berta, planificar era um processo de antevisão da prática e permitia um trabalho conjunto com os supervisores. Nesse sentido, explicitou as suas ações na exploração dos materiais e antecipou resoluções dos alunos e questões gerais. Note-se que quanto mais profundas as suas experiências com as tarefas mais descritiva era a sua planificação. Já Ana fez duas planificações: a formal e apresentada aos supervisores e a informal que a apoiava na antevisão da sua prática. Na planificação formal descreveu a atividade a realizar nos diferentes momentos das aulas e previu sucintamente as ações dos alunos na realização das tarefas. Por vezes, referiu que pretendia relacionar representações pictóricas e simbólicas, mas não explicitou como o ia realizar. Nos registos pessoais, resolveu as tarefas recorrendo a representações pictóricas e simbólicas, usando procedimentos de cálculo. Estes registos surgiram da necessidade de adequar as suas explicações às ideias prévias dos seus alunos. Note-se que na segunda fase da prática, foi incluindo na planificação formal aspetos presentes na planificação informal permitindo a explicitação junto dos supervisores do processo que pretendia desenvolver. Finalmente, Glória, que considerava a planificação um processo desnecessário para o seu trabalho, mas importante para que outros lessem de modo a conhecerem a abordagem a desenvolver, cumpriu o solicitado, mas de modo muito sucinto descrevendo brevemente as atividades que iriam decorrer e sem cumprir completamente prazos de entrega.

7.2.2.2. A natureza das tarefas: Seleção, desenho, sequenciação e concretização

Berta, Glória e Ana tinham propósitos diferentes o que as levou a selecionar ou desenhar tarefas diferentes. No entanto, o mesmo tipo de tarefa pode ser proposta com diferentes propósitos, ainda que aquando da concretização a natureza das tarefas vividas pelos alunos espelhe os focos das futuras professoras. As três futuras professoras, depois de analisados vários manuais, incluindo os manuais escolares adotados nas escolas, consideraram que não se reviam nas propostas e selecionaram ou desenharam outras tarefas para propor aos seus alunos. Berta começou por selecionar um conjunto de tarefas exploradas em diferentes unidades curriculares da licenciatura e mestrado que considerou de qualidade, do ponto de vista do desafio cognitivo e do nível de abertura, para os objetivos de aprendizagens definidos. Selecionou duas tarefas exploratórias com várias questões e um problema com um contexto não matemático. Em seguida fez pequenos ajustamentos e sequenciou as tarefas com o apoio dos supervisores. A sequência dependia das representações a relacionar, começando com a representação

fracionária da fração, na depois importava estabelecer relação entre representações e finalizou com a exploração do conceito de percentagem. Quando concretizou o antevisto, Berta, na tarefa 2, apoiou e sugeriu resoluções nas alíneas que tinham um maior nível de desafio para os alunos, tendo as tarefas acabado por assumir um baixo nível de desafio.

Glória propôs várias tarefas com o mesmo foco (aplicação de procedimentos de cálculo) mas com características diferentes, tarefas com contextos matemáticos e não matemáticos e maioritariamente com baixo nível de desafio e abertura (exercícios). Apenas a tarefa 1 era mais aberta. No processo de definição das tarefas começou por resolver o que tinha concebido para aferir o nível de desafio a propor aos alunos. Depois de desenhadas as tarefas, selecionou as que considerou mais pertinentes e sequenciou-as. Sequenciou as tarefas em função da fase de trabalho, começando por apresentar exemplos, em seguida propôs exercícios de aplicação dos procedimentos, passou a situações com contexto e terminou com um jogo de consolidação com um carácter lúdico. Todo o processo foi realizado sozinha. Quando concretizou as suas aulas, na interação com os alunos, desceu o nível de desafio das tarefas sugerindo sua a resolução ou indicando o esperado, pelo que as tarefas acabaram por constituir exercícios para os alunos.

Ana fez opções diferentes em duas fases diferentes do estágio. De modo a dar continuidade ao trabalho realizado anteriormente pela parceira, na primeira fase, desenhou tarefas com Glória, seguindo a mesma abordagem. Referiu que, no início, equacionou propor tarefas com contextos reais, mas sentiu dificuldades em criá-las. De modo a promover a compreensão dos conceitos, como não conseguia criar tarefas com contextos não matemáticos, optou por explorar os conceitos recorrendo a representações pictóricas, com as quais os alunos iriam visualizar e, portanto, compreender a propriedade. Assim, desenhou tarefas de baixo nível de desafio e apenas uma tarefa era exploratória, sendo os restantes exercícios. Sequenciou as tarefas pelo nível de abertura do mais aberto para o mais fechado de modo a que os alunos deduzissem a regra de cálculo. Na segunda fase, optou por problemas de brochuras e explicou que o recurso a estes materiais lhe trouxe segurança sobre a qualidade e preparação da prática letiva. Também fez alterações que tornaram as questões mais diretas determinando a descida do nível de desafio. Na terceira fase começou com problemas para que dessem significado aos conceitos a aprender e em seguida propôs exercícios para aplicarem o aprendido. As alterações e a sequência definidas foram negociadas com a professora

cooperante. Quando concretizou a sua prática, no momento de proposta e na exploração das tarefas, perante as dificuldades dos alunos, reduziu mais uma vez o seu nível de desafio, dando indicações sobre os dados, as condições e possíveis estratégias de resolução. Também, nem sempre considerou as experiências vividas pelos alunos e apresentou tarefas de um nível de desafio menor do que o que desejava.

Assim, as futuras professoras, quando desenharam ou redesenharam as tarefas sem o apoio dos supervisores, reduziram o nível de desafio e abertura das tarefas alterando a sua natureza. Na fase de concretização, perante as dificuldades dos alunos antecipadas, no caso de Glória, ou sentidas em aula, no caso de Berta e Ana, desceram o nível de desafio das tarefas. Nem sempre as tarefas foram sentidas pelos alunos como desafiantes. Ou seja, o nível de desafio das tarefas desce quando os professores reinterpretam as tarefas. Dependendo das experiências dos alunos, as tarefas podem verificar-se menos desafiantes, e o nível de desafio volta a descer quando são propostas, realizadas e discutidas ou apresentadas aos alunos.

7.2.2.3. Antecipação da resolução dos alunos, previsão da orquestração das diferentes resoluções e sua concretização

As três futuras professoras anteciparam as resoluções dos alunos e as principais dificuldades e erros comuns, em registos de natureza diferente. Foi comum não anteciparem resoluções erradas. Berta cuidou de antecipar e enviar à supervisora da ESE, as resoluções das tarefas e na planificação registou as ideias principais que os alunos deveriam retirar das condições dadas, identificando algumas conversões existentes entre as diversas representações. Na tarefa 3, antecipou que os alunos podiam não ter em consideração a mudança da unidade de referência. Para a síntese final, preparou uma representação que poderia apoiar a compreensão das condições. Apesar de não ter previsto resoluções erradas antecipou o que os alunos poderiam pensar ao longo da resolução. Onde a sua antecipação foi mais clara foi na tarefa onde teve acesso ao vídeo, onde pôde observar os alunos a trabalhar e a justificar os seus raciocínios. Glória, apesar de não ter registado na planificação quaisquer resoluções, nas entrevistas previu o erro comum de generalizar o algoritmo da adição na multiplicação. A falta de registo foi sustentada com a pertinência sentida nesse processo e que poderia limitar a melhor concretização do esperado, ou seja, que poderia limitar a sua ação mais espontânea e adequada às circunstâncias reais. Ana, na primeira fase, nas resoluções informais, recorria a representações simbólicas e pictóricas de modo a explicar os

resultados obtidos. Analisando os diferentes registos informais de Ana, uma vez que na planificação formal não antecipou resoluções, percebemos que foi resolvendo as expressões de modos diferentes e talvez por dar significados diferentes aos números racionais representados sob a forma de frações, considerou diferentes unidades de referência. Nas entrevistas da segunda fase de trabalho, tendo acesso, nas brochuras, a uma antecipação de resoluções de alunos, previu como partir das resoluções das diferentes tarefas para chegar ao algoritmo da divisão explicitando os significados de divisão. As três futuras professoras nem sempre anteciparam questões específicas para apoiar e desafiar os alunos a procurarem resoluções eficientes para as tarefas propostas. Para tal pode ter contribuído não terem antecipado resoluções erradas, em linha com Stein et al. (2008) quando defendem que a antecipação das dificuldades dos alunos tem um papel fundamental para a orquestração de uma discussão matemática. Também Lo & Luo, 2012 e Son & Crespo, 2009, nos seus estudos identificaram estas dificuldades por parte dos futuros professores.

Na concretização da prática, perante as dificuldades dos alunos, as futuras professoras usaram fundamentalmente ações de apoiar, sugerir e informar. A exceção aconteceu no caso de Berta na tarefa 3, que tinha uma antevisão mais clara do que os alunos poderiam fazer na tarefa, perante as respostas esperadas mostrou-se segura e desafiou e apoiou os alunos a ultrapassar as suas dificuldades. No caso de Glória a previsão de os alunos generalizarem procedimentos de cálculo de umas operações para outras levou-a a alertar várias vezes os alunos para não cometerem esse erro. No caso de Ana, não ficou claro que a antecipação das resoluções tenha promovido ações mais adequadas às dificuldades dos alunos. As antecipações que realizou pareceram mais úteis para a sua segurança na explicação da resolução das tarefas do que para apoiar e desafiar os seus alunos na resolução das tarefas.

7.2.2.4. Preparação e concretização da comunicação: Questionamento, representações e explicações

A comunicação é um elemento estruturante da prática letiva, inerente ao processo de construção do conhecimento (Menezes, Ferreira, Martinho & Guerreiro, 2014). Comunicar é tornar algo em comum podendo-se fazer uso de questões, representações pictóricas e simbólicas e explicações. Na prática estes aspetos aparecem interligados e conectados, uma vez que o futuro professor pode recorrer a questões, retóricas ou não retóricas, durante uma explicação, eventualmente explorando uma determinada

representação de uma situação. São também estes elementos que estruturam as ações de promoção da aprendizagem analisadas no ponto seguinte.

Questionamento. Um aspeto importante da comunicação é o questionamento, podendo distinguir-se entre diversos tipos de questões (focalização, confirmação e inquirição) e estudar padrões de questionamento. Berta, previu questões para os diferentes momentos de interação com os alunos. Estas questões eram generalistas e próximas da heurística descrita por Pólya. Note-se que este autor foi abordado na Didática da Matemática e referido pela futura professora na sua reflexão escrita. Com o apoio da supervisora especificou um pouco mais o questionamento. Glória e Ana não fizeram a previsão de questões para os diferentes momentos das aulas.

Na proposta e na exploração da tarefa, Berta e Ana (fase 2), recorreram a questões de *inquirição e focalização*. Por vezes, Berta, *redizia* as suas afirmações de modo a guiar os alunos na resolução das tarefas. Note-se que nestes processos, Glória, completava as ideias dos alunos. Ana, por vezes *inquiria* os alunos de modo a desafiá-los a apresentar as suas ideias e, em seguida, recorria a questões de *focalização* para os guiar. De forma diferente, Glória, na introdução dos procedimentos, recorreu a questões de *focalização e confirmação* de modo a guiar a indução dos procedimentos a adotar. Mesmo quando começava por desafiar rapidamente passava para questões de focalização e terminava prescrevendo os procedimentos. Na apresentação e discussão das tarefas, Berta, para apoiar os alunos, tentando promover a discussão, recorreu a questões do tipo *confirmação e redizer* de modo a guiar. Já Glória optou por questões de *focalização e confirmação* para guiar e apoiar a apresentação. Durante as suas explicações Berta recorreu a questões de *focalização* e Ana recorreu a perguntas de retórica.

Nas circunstâncias onde os alunos têm dificuldades na resolução das tarefas, mais desafiantes para as futuras professoras, existiu uma tendência para usar questões de focalização. Por vezes as questões de *focalização e confirmação* eram acompanhadas com processos de redizer mantendo a mesma informação ou acrescentando ideias. No caso de Ana, mesmo quando recorria a questões de *inquirição*, na tentativa de clarificar o que pretendia, transitava para questões de *confirmação e focalização* cada vez mais fechadas. Ou seja, o tipo de questões está relacionado com o objetivo da interação e não estritamente com o momento de trabalho. Independentemente dos momentos, as questões de tipo inquirir são usadas para desafiar os alunos na resolução das tarefas e as de focalização para os guiar durante a resolução. As questões de confirmação são

recorrentes quando os alunos estão a apresentar as suas ideias, desse modo as professoras apoiam os alunos numa comunicação clara dos seus raciocínios. Nos diferentes momentos da aula existe um maior ênfase num tipo de interação e, por isso, determinados tipos de questões surgem mais nuns momentos do que noutros mas em todos os momentos podemos encontrar os três tipos de questões. As perguntas de focalização são as mais recorrentes nas práticas das futuras professoras.

Representações. Outro aspeto importante da comunicação é a exploração de representações que apoiem a resolução de tarefas, sejam ou não construídas pelos alunos, de modo a construir ou ilustrar objetos, conceitos e situações matemáticas (Mitchell, Charalambous & Hill, 2013). As três futuras professoras consideravam importante relacionar as diferentes representações (fração, numeral decimal e percentagem) dos números racionais, mas têm visões diferentes sobre o ensino-aprendizagem destes números (Isiksal & Cakiroglu, 2011). Também se observava que todas valorizam o uso de representações pictóricas, mas exploram-nas de diferentes modos e em fases distintas da prática letiva (Stylianou, 2010; Velez & Ponte, 2015). Assim, para introduzir os conceitos, Berta propôs problemas onde, por vezes, introduziu representações pictóricas para apoiar os alunos na compreensão das situações. Glória introduziu os tópicos dando atenção a regras e procedimentos usando representações pictóricas ilustrativas das regras. Por fim, Ana começou por seguir a mesma estratégia que Glória, mas a meio da prática supervisionada optou por outra abordagem em que solicitou aos alunos que recorressem a diferentes representações, explorando representações pictóricas para os apoiar na compreensão da resolução das tarefas. Durante a resolução, Berta e Ana solicitaram que os alunos recorressem a representações pictóricas mas apenas Berta interagiu com as representações incompletas construídas pelos alunos estabelecendo a relação entre as várias representações dos números racionais. Berta e Ana, realizaram sínteses finais recorrendo a representações pictóricas. Berta preparava as representações pictóricas e relacionava-as com as simbólicas e com a representação prevista retomou as ideias fundamentais a aprender. Glória, no trabalho com as propriedades optou apenas por representações simbólicas uma vez que os procedimentos já estavam ensinados.

No entanto, o processo de representação de situações matemáticas nem sempre foi confortável para os futuros professores. Ana sentiu dificuldade em explicar aos alunos o produto de duas frações quando quis explorar conceptualmente a multiplicação recorrendo a uma representação pictórica. Glória, ainda que tenha optado por apresentar

representações pictóricas relacionadas com simbólicas das quantidades envolvidas na multiplicação não previu como fazê-lo. Procurava ilustrar as regras e procedimentos com representações pictóricas que apenas evidenciam as quantidades envolvidas. Ou seja, não previu as dificuldades associadas ao uso de representações pictóricas, negligenciando a complexidade dos conceitos envolvidos. Tanto Ana como Berta, apesar de inicialmente terem dificuldades neste campo, mobilizaram aprendizagens de umas aulas para outras, procurando melhorar a preparação das suas aulas.

Explicações. Um terceiro aspeto importante da comunicação são as explicações. Longe de se reduzir à simples “transmissão do conteúdo”, explicar é um processo onde estabelecem relações entre ideias matemáticas. Para estabelecer essas relações podem ser usadas metáforas e analogias ou outras representações que permitam aos alunos compreender os conceitos e procedimentos (Medeiros & Ponte, 2010). As explicações dadas podem ter diferentes fins e características, focar-se nos procedimentos, como no caso de Glória, e/ou em conceitos, como no caso de Berta e Ana. Segundo Charalambous, Hill & Ball (2011), podem ser realizadas para introduzir um novo conteúdo como fez Glória, responder a questões dos alunos, ou apoiar os alunos em dificuldades (como aconteceu com Berta e Ana). Para além de apoiar a aprendizagem dos alunos, uma boa explicação pode eliminar ideias, significados e processos erróneos. Assim, as três futuras professoras sentiram necessidade de desenvolver explicações na fase final da apresentação das resoluções dos alunos.

Charalambous et al. (2011) debruçando-se sobre a qualidade das explicações elaboradas, consideram que uma “boa explicação” é significativa e de fácil entendimento. Assim, Berta explicava as resoluções, combinando informações sobre os principais termos e conceitos com questões e terminava apresentando a ideia fundamental, recorrendo a representações modelando procedimentos e conceitos, reforçando a resolução registada no quadro. Por vezes, em vez de modelar a situação, Berta partia das resoluções dos alunos e explicava relacionando representações constituindo-se uma representação final da situação da tarefa. Uma terceira forma de elaboração das explicações tratava-se de uma combinação das anteriores, ou seja, partindo do enunciado, constituía uma representação da situação e relacionava-a com as resoluções dos alunos retomando aspetos essenciais.

Glória, de modo a clarificar e informar os procedimentos a usar na resolução das tarefas, quer no momento de introdução de novas ideias matemáticas, quer no final dos processos de correção, desenvolvia explicações fazendo-o passo-a-passo, definindo os

principais termos e, por vezes, recorrendo à participação dos alunos. Na tarefa 2 estabeleceu relações entre duas resoluções possíveis deixando uma delas registada. Note-se que as explicações eram desenvolvidas para informar aos alunos o tipo de resolução esperada.

Também Ana nas suas explicações apresentava passo-a-passo as principais ideias matemáticas que pretendia ilustrar. Um dos momentos críticos da sua prática aconteceu por causa de uma explicação que tinha preparado. Na primeira fase da sua prática preparou em detalhe as suas explicações. No momento da preparação resolveu as expressões simbólica e pictoricamente. Nos seus registos informais partiu de uma unidade de referência dependente do significado atribuído à fração (quociente) (Barnett-Clarke et al., 2010). No entanto, na concretização foi confrontada com a perspetiva dos alunos em atribuir o significado parte-todo. Tendo dificuldade em compreender a perspetiva dos alunos optou por realizar uma explicação focada na resolução que previu (Charalambous, Hill, & Ball, 2011). Mais tarde, preparou uma segunda aula de 45 minutos. Depois de conversar com a professora cooperante, reconcetualizou a sua explicação e focou a sua atenção nos procedimentos de cálculo de multiplicação com frações. Nesta segunda fase, as suas explicações evidenciaram mais segurança relativamente a questões conceptuais imprevistas e revelaram que esteve mais atenta às ideias e dificuldades dos seus alunos. Assim, o caso de Ana mostra a importância de uma preparação cuidada (Serrazina, 2012; Sullivan, 2013) quando o propósito de ensino é compreensão de conceitos, sendo este um ensino mais complexo e desafiante para o professor.

7.2.2.5. Previsão e concretização das ações de promoção de aprendizagem

Uma aula pode ter várias estruturas e momentos dependendo das características das tarefas e do papel dos alunos e do professor (Ponte et al., 2012), que por sua vez, conforme foi evidente no ponto anterior, estão dependentes do foco previsto para o processo de ensino-aprendizagem. As três professoras tinham duas estruturas de aulas diferentes. Berta foi a única que descreveu todos os momentos que concretizou: proposta, exploração e discussão das tarefas que terminava com uma síntese final. Ana descreveu apenas os momentos de exploração das tarefas e concretizou os mesmos momentos de Berta, na segunda fase da sua prática. Glória, com uma descrição sucinta dos diferentes momentos, previu três momentos fundamentais: apresentação de situações de onde se deduzia o algoritmo e respetivo reforço da informação; resolução

das tarefas propostas de modo autónomo; correção das tarefas propostas onde um aluno apresentava a resolução e o professor completava as ideias. Assim, identificam-se duas práticas com focos, estruturas, tarefas e onde professor e alunos têm papéis diferentes.

Dependendo dos propósitos, tipo de tarefas propostas e momentos estruturados, as futuras professoras desenvolveram ações de promoção da aprendizagem onde estão envolvidos os processos de Identificar procedimentos/Interpretar situações, Representar, Aplicar procedimentos/Raciocinar e Avaliar as resoluções e resultados. As ações que desenvolveram nos diferentes momentos podem ser de Iniciar/ou convidar, Guiar/Apoiar, Informar/Sugerir e Desafiar.

Introdução das ideias matemáticas. Glória, de modo a promover as aprendizagens, constituiu um primeiro momento onde fez a introdução das ideias matemáticas. Partindo de exemplos, levou os alunos a deduzir os procedimentos ou as propriedades a aprender. Quando os alunos já conheciam os procedimentos mas queria que os reconhecessem em novas tarefas, *indicava* o procedimento ou propriedade. As ações de promoção da aprendizagem eram fundamentalmente *guiar*. Mesmo quando começava por *desafiar*, rapidamente passava e terminava *indicando* os procedimentos. Note-se que Berta e Ana não prepararam nem concretizaram este momento deixando para as sínteses finais das discussões a sistematização das ideias matemáticas.

Proposta das tarefas. Berta e Ana propuseram problemas com contextos não matemáticos. Ambas propuseram as tarefas, *informando e guiando* os alunos enquanto conversavam com eles dando significado ao proposto e *guiando-os* a identificar aspetos fundamentais do contexto, dos dados e das condições. Ana esclareceu o vocabulário usado. Note-se que Berta, na tarefa 3, lançou o problema *informando e guiando* os alunos mantendo o nível de desafio o que a distingue de Ana que nem sempre o manteve. O facto de Berta e Ana proporem questões em contexto não matemático, com propósitos próximos, parece levá-las a recorrerem a ações semelhantes, combinado as ações de *informar* e *guiar*. No entanto, quando os alunos revelaram dificuldades, as futuras professoras, por vezes, *guiaram* e em seguida *informaram* esses alunos nas suas resoluções e acabaram por *sugerir* representações ou passos a seguir, o que pode ter diminuído o nível de desafio e abertura da tarefa. Glória e Ana, na proposta das tarefas com contextos matemáticos anunciaram o que pretendiam que os alunos fizessem, *sugerindo* que deviam representar as expressões simbólicas com representações pictóricas e, apesar de ser importante explicitar o trabalho com os alunos, fecharam as

tarefas propostas. Glória, nos exercícios, também definiu o tipo de estratégia a adotar e no jogo, a tarefa foi exemplificada com uma jogada.

O momento de proposta de tarefas abertas e desafiantes coloca desafios aos futuros professores. Ao *convidar* para a resolução da tarefa, Berta e Ana, recorreram às ações *informar*, *guiar* e *desafiar*, sendo importante manter o nível de desafio (Larsson, 2015). No caso das tarefas abertas e desafiantes, tal como sublinham Jackson et al. (2013) e Larsson (2015), uma proposta feita de modo apropriado evita que o professor tenha de relançar a tarefa no momento seguinte, como aconteceu com Ana e Berta. Por isso, ao contrário do que fizeram Glória e Ana, é importante que os futuros professores, na fase de planeamento, constituam um reportório de questões desafiantes e especificamente previstas para o lançamento de uma tarefa. Importa também que os futuros professores antecipem os possíveis obstáculos à compreensão e envolvimento dos alunos nas tarefas que pretendem propor, como aconteceu no caso de Berta com a tarefa 3. Deste modo poderão estar mais disponíveis, no momento da interação, para reagir a situações inesperadas. No caso de Berta, podemos perceber que a fase de planeamento a ajudou a apoiar os alunos, questionando-os. No entanto, as suas questões não eram específicas para cada tarefa no que respeita às ideias matemáticas relevantes para a promoção do conhecimento matemático a desenvolver. Ou seja, quando os alunos tinham dificuldades acabou por *sugerir* a resolução e baixou o nível de desafio da tarefa. Quando estava pressionada com o tempo, resumiu as principais ideias da tarefa e ao fazê-lo acabou por *informar* os processos.

Nos casos de Glória e Ana (fase 1), a ação fundamental levada a cabo foi *informar*, procurando garantir que os alunos reconheçam os procedimentos a usar nas tarefas propostas. Berta e Ana (fase 2) visando a construção e compreensão do conhecimento pelos alunos, realizaram ações combinadas de *informar* e *guiar*, em que, para iniciar o trabalho, procuraram envolver e comprometer os alunos no trabalho a realizar. O principal desafio que se colocou às futuras professoras quando propunham tarefas com nível de desafio e abertura mais elevado e pretendiam *apoiar* e *guiar* os alunos na sua resolução, era manter esse nível de desafio e abertura.

Exploração das tarefas. O momento de exploração das tarefas é importante na construção do conhecimento dos alunos (NCTM, 2007). É neste momento que os alunos contactam com a tarefa, partido do proposto procuram definir as suas estratégias e representá-las. Caso sejam desafiados a fazê-lo, ainda têm que discutir as suas ideias com outros alunos e chegar a uma proposta conjunta. É também um momento

importante para o professor uma vez que tem que desafiar os alunos a prosseguir com a sua atividade e simultaneamente (re)conceptualizar o momento seguinte. Segundo Ponte et al. (2016), Berta monitorizou o trabalho dos alunos de modos diferentes. Começava por *desafiar, informava e guiava a partir das ideias dos alunos* e em seguida: (i) *Guiava* os alunos e *sugeria* a resolução da tarefa ou processo matemáticos e, (ii) Quando os alunos exprimiam dificuldades generalizadas, clarificava condições dando informação complementar, em grande grupo, para depois, com os alunos já em pares, *desafiar e informar*, focando para a questão colocada. Note-se que as combinações que foi realizando das diferentes ações foram dependendo das dificuldades expressas pelos alunos. Ana, questionava os alunos e, focando-os no que era pedido, *guiava e informava*. Quando os alunos mostravam dificuldades foi diretiva e acabava por *sugerir* resoluções que previu. Glória monitorizava, observando as resoluções, questionava pouco e quando interagia informava, *sugeria* os procedimentos e validava a resolução da tarefa (T1, T2, T4). Na tarefa 2 *guiou* os alunos nos procedimentos a adotar com *questões de focalização encadeadas* e, perante as respostas esperadas, *validava-as*.

Assim, mais uma vez, ao contrário do que fizeram Glória e Ana é importante que os futuros professores, na fase de planeamento, constituam um repertório de questões desafiantes e especificamente previstas para o momento de exploração da tarefa quando monitorizam os alunos. Neste momento é natural que os alunos sintam dificuldade em identificar o que fazer ou interpretar a situação e, por isso, os futuros professores podem *desafiá-los* a raciocinar, representar as suas ideias e avaliar as suas resoluções e resultados. No entanto, nem sempre conseguem e tendem a *guiar e informar* ou até mesmo a *sugerir a resolução*. Nos casos de Glória e Ana, quando monitorizavam, as resoluções tendiam a validar os resultados tornando a discussão no momento seguinte dispensável para esses alunos.

Apresentação das tarefas e correção ou discussão. Berta e Ana, previram discutir as tarefas propostas orquestrando as diferentes resoluções. Berta, ao contrário de Ana, tinha uma estratégia. Pretendia começar pelas resoluções mais “simples”, que podemos entender como menos formais, e deixava para último lugar as resoluções que no seu entender permitiam compreender os conceitos envolvidos. No entanto, não ficou evidente como iria relacionar as diferentes resoluções e concluir o processo de discussão. Berta e Ana, na concretização acabaram por não constituir uma verdadeira discussão tendo usado processos diferentes que determinaram que existisse apenas uma sequência de apresentações mais ou menos interligadas. Berta usou três processos: (i)

Apresentou e explicou a resolução terminando com a ideia fundamental reforçando a resolução registada de um dos alunos no quadro; (ii) *Sugeri*u que representassem pictoricamente a situação para depois apoiar o contributo dos alunos; e (iii) *Informou* sobre as condições, lendo o enunciado, e sublinhou as relações entre conceitos. A apresentação foi realizada por alunos com o apoio da futura professora *guiando* a apresentação das suas resoluções. Na tarefa 3 também promoveu a apresentação de resoluções incorretas e estabeleceu conexões entre ideias, comparando resoluções e discutindo diferenças apesar de não se constituir um discurso dialógico. Ana usou dois processos próximos de Berta mas ainda assim diferentes: (i) *Apoiou e guiou* a apresentação questionando os alunos de modo a explicitarem as suas ideias e salientou erros que tinha observado durante o trabalho autónomo, de modo a esclarecer possíveis dúvidas. Terminou tomando a palavra e explicou os procedimentos e conceitos envolvidos relacionando representações ou revendo as estratégias registadas no quadro, validando os resultados; (ii) *Guiou e informou* os alunos até chegar aos procedimentos e conceitos a aprender, através de um questionamento cada vez mais focado, chegando a sugerir processos. Quando tinha dificuldades em compreender as ideias dos alunos, tornou-se mais diretiva, *sugerindo* as ideias previstas na sua planificação. Por outro lado, quando conheceu ou antecipou as ideias dos alunos atempadamente desenvolveu um discurso mais participativo e seguro. Para o final das discussões das tarefas, Ana fez uma sistematização da resolução e Berta constituiu esquemas sobre as situações colocadas e evidenciou compreender as relações a estabelecer e mostrou preocupação em torná-las claras para os seus alunos. Quando concretizou o previsto, num contínuo ou estabelecendo um novo momento, retomava as questões já resolvidas e elaborava uma síntese partindo das resoluções dos alunos e explicando as relações existentes, partindo da representação inicial apresentada na tarefa, constituindo-se uma representação final da situação. Na tarefa 3, preparou uma representação em cartolina de modo a modelar a situação do problema e explicou focando os alunos no conhecimento matemático que emergia da tarefa estabelecendo conexões. Também Ana na síntese planeada terminou a discussão com a resolução preparada previamente, mas, na resolução, recorreu a uma representação diferente da explorada (representação circular).

Glória, com uma prática letiva bastante diferente de Berta e Ana, não previu com detalhe como promover o momento de apresentação e correção das resoluções. Apenas previu que um aluno apresentava a resolução e o professor completava as ideias (Ponte, 2005). Assim, na concretização do previsto, depois de relembrar o que era proposto,

chamou o aluno que terminasse primeiro e que resolveu a tarefa como o esperado e solicitava o registo da sua resolução. Glória *apoiava e guiava* a sua apresentação. No final da apresentação dos alunos *explicava* novamente os procedimentos envolvidos e validava a resolução. Quando um aluno propôs uma estratégia alternativa, a futura professora analisou-a e apresentou à turma comparando as duas estratégias *informando* sobre as ideias dos alunos subjacentes às diferentes resoluções. Na tarefa 3, antes da apresentação da resolução *indicou* como os alunos deveriam interpretar os enunciados dos problemas estando atentos à expressão “de” que identificava a operação multiplicação. Em seguida, em grande grupo, com o apoio dos alunos, elaborou a explicação da resolução da tarefa, ou seja, tenha sido previsto ou não, o principal desafio das três futuras professoras foi promover e gerir uma discussão produtiva das diferentes resoluções dos seus alunos. De facto, o que foi conseguido com uma maior ou menor participação dos alunos foi uma apresentação de diferentes resoluções. No final ficava estabilizada a resolução desejada. Assim, as ações das futuras professoras dependem dos seus propósitos de ensino e também do papel e natureza das tarefas que propõem aos alunos e a comunicação desenvolvidas nos diferentes momentos da aula. No entanto, esta relação é complexa. Assim, em todos os momentos das aulas, foi desafiante para as futuras professoras apoiar e guiar os alunos nas resoluções mas fazê-lo sem descer o nível de desafio e abertura das tarefas, ou seja, concretizar o que tinham previsto inicialmente.

7.2.2.6. *Previsão e concretização das ações de promoção do ambiente de aprendizagem*

Para além de ações de promoção da aprendizagem, as futuras professoras previram e concretizaram, para os diferentes momentos, ações de promoção do ambiente de aprendizagem pretendido, de modo a alcançar os objetivos previstos. No sentido de garantir os materiais necessários, modalidades de trabalho adequadas, tempos e momentos definidos e o papel pretendido para os alunos, desenvolveram ações de *Organizar; Regular participação/ interações; Selecionar e Validar/ Sequenciar; Orquestrar apresentações e Corrigir/ Discutir*.

Proposta das tarefas. No momento de proposta da tarefa ou de introdução das ideias matemáticas, os alunos começavam por prever e *organizar* as formas de trabalho. A pares, nos casos de Berta e Ana (na segunda fase) ou individual, no caso de Glória e Ana (na primeira fase). Independentemente do tipo de organização dos alunos, todas as futuras professoras garantiram que cada aluno tinha as suas tarefas e estabeleceram os

momentos de trabalho. Para Glória, a visibilidade para o quadro da sala de aula era muito importante certificando-se disso mesmo junto dos alunos. Berta sublinhou a importância do trabalho conjunto e o do registo das resoluções. Ana partilhava das mesmas preocupações de Berta, mas as suas ações nem sempre eram explícitas.

Exploração das tarefas. No momento de exploração da tarefa as futuras professoras monitorizavam o trabalho dos alunos. Berta, tal como previu, circulava pelos alunos de modo a *selecionar* diferentes resoluções a *sequenciar*, para mais tarde estabelecer conexões entre resoluções estabelecendo uma discussão (Stein et al., 2008). Para tal, usou como critério começar pelas resoluções mais “simples”, que podemos entender menos formais, e deixando para último as resoluções que no seu entender permitiam compreender os conceitos envolvidos. De modo a agilizar a discussão, no momento seguinte, promoveu o registo e organização das resoluções. Nas entrevistas, Ana também planeava selecionar e sequenciar diferentes resoluções, mas não tinha uma estratégia de *orquestração*. O importante era serem resoluções diferentes sendo que uma delas era a que pretendia que fosse a resolução a registar no caderno dos alunos. Note-se que Glória não procurou sequenciar resoluções e, por isso, circulou de modo a *validar* resoluções e *selecionar* a resolução a apresentar.

Na segunda fase da prática, Ana desenvolveu ações próximas de Berta. Nos momentos de trabalho autónomo, as futuras professoras promoveram a colaboração entre os pares e *regularam as interações*. No entanto, enquanto Berta levou os alunos a redizer as formas de pensamento dos colegas e remeteu para discussão entre pares as dúvidas que lhes foram sendo colocadas, Ana não o fez, limitando-se a questionar se os pares já tinham discutido a resolução e se a tinham realizado em conjunto. Glória e Ana (na fase 1), sem que tenha sido previsto, tiveram ações idênticas, mas diferentes de Berta. Assim, depois da proposta da tarefa, promoveram um ambiente de trabalho silencioso e de carácter individual. Estabeleceram um ambiente silencioso e quando os alunos tinham dúvidas colocavam o dedo no ar e as futuras professoras deslocavam-se para junto deles e respondiam às dúvidas de modo a *regular a participação*. Ou seja, agiram no sentido de não existirem interações entre pares, definiram que os alunos deveriam registar as suas resoluções pictóricas nos cadernos e não promoveram um ambiente de discussão.

Discussão ou apresentação das tarefas. No momento seguinte todas as professoras previram um momento de discussão das tarefas resolvidas. No entanto, o que pretendiam nem sempre foi concretizado. Berta, na planificação, não tinha deixado

evidente como iria *orquestrar* as diferentes resoluções. Para o final das discussões das tarefas constituiu esquemas sobre as situações colocadas e evidenciou compreender as *conexões* a estabelecer e a preocupação em torná-las claras para os seus alunos (Stein et al., 2008). Tanto no caso de Berta como no caso de Ana (na segunda fase), na concretização, a discussão transformou-se numa apresentação sequencial das diferentes resoluções onde promoveu uma atitude de respeito e interesse pelos trabalhos e *regulou a participação* dos alunos, selecionando de entre aqueles que tinham resoluções que enriquecessem a discussão. Ana selecionou aqueles que tomavam a palavra. A apresentação de diferentes resoluções, decorreu entre a professora e um aluno. No caso de Berta, os restantes alunos assumiam o papel de observadores participantes e, no caso de Ana, o papel de observadores. No final, Berta reviu as estratégias registadas no quadro, e com a síntese final relacionou-as. No caso de Ana, ainda que tivesse um critério de seleção, selecionando, tal como Berta, resoluções mais ou menos formais, no entanto, o critério de sequenciação foi-se alterando entre discussões. No final, reviu as estratégias registadas no quadro, *validando* os resultados.

Glória, nos momentos de apresentação das tarefas pediu aos alunos a sua *participação*, questionando e acrescentando informação. Como feedback, ou *validava* as respostas ou fazia questões para guiar a *apresentação da resolução* esperada e, como tal, no final corrigida. Outras vezes, começou pela apresentação da resolução por parte do seu autor, apoiado pela futura professora. Na grande maioria das situações era a futura professora que interpelava os alunos de modo a participarem, ou seja *regulava as participações*, quer quando os alunos do quadro estavam a apresentar ou nas suas próprias explicações da resolução. Estas explicações validavam as respostas e permitiam a clarificação do esperado. Na primeira fase da prática, Ana tomou as ações de Glória. Note-se, que Ana, explorou erros detetados nas resoluções de alguns alunos confrontando estas resoluções com a resolução apresentada, num trabalho mais próximo com o realizado por Berta. No final da apresentação das resoluções, *validou* a resolução ou indicou explicando os procedimentos e conceitos envolvidos na tarefa relacionando representações, conforme aconteceu com Glória.

Em síntese, depois de saberem os tópicos a lecionar, as três futuras professoras analisaram diferentes recursos, selecionaram ou (re)desenharam tarefas de natureza diferente e sequenciaram-nas estabelecendo um caminho de acordo com um certo propósito. Quando ajustaram ou desenharam as tarefas, sem apoio dos supervisores, desceram o nível de desafio. Durante a preparação, anteciparam erros e dificuldades

ainda que não tenham previsto resoluções erradas, e previram orquestrar resoluções no momento de apresentação e discussão. Perante respostas esperadas desafiaram e apoiaram os alunos a ultrapassar as suas dificuldades. Perante as dificuldades que não foram previstas, as futuras professoras usaram fundamentalmente ações de apoiar, sugerir e informar alterando mais uma vez a natureza das tarefas. A comunicação e as ações a desenvolver no processo de ensino-aprendizagem foram previstas com diferentes níveis de detalhe. Quando o detalhe era menor, mais vezes desceram o nível de desafio da tarefa na sua interação com os alunos. No que respeita às representações, as futuras professoras tinham previsto relacionar representações pictórica e simbólicas com objetivos diferentes (compreensão dos conceitos e ilustração de procedimentos). No entanto, não previram que algumas representações pictóricas podiam não ser clarificadoras das ideias matemáticas. Assim, no que respeita à comunicação e às ações dos professores ficou clara a necessidade de uma previsão adequada dessas ações em articulação com a atividade dos alunos quando o propósito é desafiar o desenvolvimento dos processos matemáticos num ambiente de aprendizagem promotor da construção do conhecimento entre pares.

7.2.3. Reflexão sobre a prática pedagógica como resultado da experiência vivida

As futuras professoras foram refletindo sobre a sua prática pedagógica ao longo do período de estágio. Para além de o fazerem nas reflexões escritas solicitadas pela supervisora da ESE no final de uma semana de trabalho (Berta) ou de uma unidade de ensino (Glória e Ana) também o fizeram antes e depois de cada aula lecionada e antes e depois do estágio. Nas entrevistas, perspetivaram cada aula e refletiram sobre o concretizado. Nas reflexões escritas podemos perceber três tipos diferentes de reflexão. Apenas Berta recorreu aos documentos curriculares para sustentar a sua abordagem. Tanto Berta como Glória fizeram uma análise crítica das suas práticas recorrendo a autores do campo da Didática da Matemática que lhe foram propostos na ESE. Note-se que o foco da análise era diferente. Berta recorreu à literatura para sustentar as suas ideias sobre a abordagem seguida, os seus propósito e preocupações. Já Glória fazia-o para defender as suas opções alvo de críticas dos supervisores. Para além do recurso à literatura específica, Berta e Glória, descreveram as dinâmicas constituídas, ilustrando excertos de diálogos registados nos vídeos (Glória), a produção dos alunos (Berta) e a imagens das tarefas, procurando sustentar que as suas opções promoveram as aprendizagens esperadas, no caso de Glória, ou fazendo uma análise crítica do

conseguido, no caso de Berta na tarefa 3. As características das reflexões de Ana eram muito diferentes das restantes futuras professoras. As suas reflexões escritas não eram suscitadas ou sustentadas empiricamente em produtos dos alunos ou excertos de diálogos registados em vídeos e tendiam sobretudo a citar autores das ciências da educação em geral e o programa de Matemática de 2007, apesar de já não ser esse o documento curricular em vigor para os seus alunos. Como seria de esperar, num curto espaço de tempo não se perceberam alterações de fundo nas visões que tinham sobre o ensino e aprendizagem da Matemática e especificamente sobre o tema dos números racionais. No final do estágio, as três futuras professoras demonstraram estar satisfeitas com o conseguido no que respeita às tarefas propostas, às aprendizagens desenvolvidas pelos alunos, aos aspetos da comunicação realizada e promovida e às suas ações de promoção da aprendizagem e de gestão do ambiente de aprendizagem.

7.2.3.1. Reflexão sobre as tarefas na prática de ensino supervisionada

Berta, propôs diferentes tarefas que considerou que, para além de contribuíram para as aprendizagens dos alunos, também promoveram o surgimento de diferentes estratégias de resolução das questões colocadas. O facto de os alunos resolverem a tarefa com diferentes estratégias e representações permitiu a sua discussão, quer na fase de trabalho autónomo, quer em grande grupo. Para além da diversidade da natureza das tarefas também importava envolverem diferentes unidades (contínuas e discretas). Também Glória, recorrendo à linguagem usada nos textos que leu na formação inicial, defendeu que tinha desenvolvido um trabalho diverso com os alunos uma vez que tinha proposto tarefas de natureza diferente. No entanto, note-se que as tarefas desenhadas e sequenciadas tinham os mesmos objetivos e promoviam o mesmo tipo de conhecimento, o que é coerente com o seu propósito de ensinar procedimentos de cálculo da multiplicação de números racionais na forma de fração. Tal como Berta, Glória partindo dos textos lidos na ESE, evidenciou que estava alerta para a importância de propor tarefas desafiantes e contextualizadas, de modo a que estas fossem significativas para os seus alunos e promovessem a discussão de ideias matemáticas. No entanto, recorrendo à identificação de variáveis de contexto (os alunos e o tempo), defendeu que não seria concretizável o defendido pelas suas professoras de Didática. Glória, no final da unidade, procurando promover a interação e o desenvolvimento da comunicação matemática, propôs um jogo, que serviu para consolidar aprendizagens, num contexto “lúdico”. Ana também considerou a seleção de tarefas adequada uma vez

que ou davam resposta à diversidade de significados ou tinham níveis de desafio diferentes fazendo-os depender dos números envolvidos sem problematizar os significados das operações. Glória mostrou-se bastante segura sobre o trabalho desenvolvido e indicou que não faria outras opções, relativamente ao tipo de tarefas, seus contextos e duração e manteria o mesmo tipo de comunicação por razões diferentes. As tarefas mostraram-se pertinentes e adequadas ao nível de ensino, ainda que pouco significativas, tendo os alunos que adaptar-se às características do 2.º ciclo e referiu que preparava os alunos para os itens do exame nacional de 6.º ano que tinha proposto naquele ano. Como não existia tempo para explorar os conceitos e os alunos não treinavam autonomamente, teria que ficar pelo que considerava fundamental, o domínio dos procedimentos e respetivo treino. Questionada sobre o que faria com mais tempo identificou a necessidade de abordar os diferentes significados de multiplicação e o envolvimento de outras “grandezas dos números”. Relativamente ao desenvolvimento do sentido de número ainda existia trabalho a realizar o que devia acontecer ao longo da escolaridade.

Ana, nas entrevistas, mostrou estar alertada para o papel de diferentes tarefas nas aprendizagens dos alunos e considerou que as tarefas selecionadas davam resposta aos propósitos explicitados e que gostaria de ter explorado. As dificuldades que viveu resultaram da sua inexperiência na compreensão das estratégias propostas pelos alunos e na orquestração das diversas resoluções. Ainda assim, considerou que foi bem-sucedida porque os alunos resolveram com sucesso as tarefas propostas recorrendo aos procedimentos de cálculo. Ou seja, no momento de balanço final voltou a focar-se em ideias mais próximas de Glória. Note-se que Ana na primeira fase da sua prática tinha opções próximas de Glória e na segunda fase mais próximas do defendido pelos supervisores e na linha de Berta.

7.2.3.2. Reflexão sobre as aprendizagens dos alunos na prática de ensino supervisionada

Todas as futuras professoras fizeram um balanço positivo das aprendizagens realizadas pelos seus alunos. Tanto Berta como Ana também sentiram que tinham realizado aprendizagens sobre como os alunos aprendem e que dificuldades sentem. Neste sentido, Berta, sublinhou que ficou mais alerta para a importância do estabelecimento de conversões e tratamentos de números racionais de modo a que os alunos desenvolvam o seu sentido de número e compreendam os conceitos envolvidos.

Ana identificou o tema dos números racionais como complexo para ensinar e aprender, mas sentiu que contribuiu para as aprendizagens dos alunos por mérito da abordagem seguida.

Para além de estar satisfeita com a aprendizagens dos tópicos envolvidos, Berta considerou que a comunicação matemática intensificou-se e que as interações foram mais produtivas. Para a futura professora foi surpreendente constatar que com a abordagem seguida nem sempre foram os alunos com melhores notas que apoiaram os restantes. Num sentido diferente, também Glória concluiu que a experiência de ensino foi bem-sucedida considerando as capacidades dos seus alunos e com o tempo que dispunha. Com o treino dos procedimentos e porque insistiu na chamada de atenção para não cometerem determinados erros, considerou que os alunos tinham compreendido o que pretendia, eram autónomos e responsáveis na resolução das suas tarefas. O seu principal argumento sobre o sucesso nas aprendizagens dos alunos foi os resultados obtidos no teste realizado no final da unidade de ensino. Ana, em linha com o pensamento de Glória, identificou a aprendizagem dos procedimentos de cálculo da multiplicação, mas identificou dificuldades na compreensão dos conceitos envolvidos. Na segunda fase da prática, considerou como positivo que os alunos sido “mais criativos” nas suas estratégias, mas que esse facto lhe trouxe desafios.

7.2.3.3. Reflexão sobre a comunicação e as ações na prática de ensino supervisionada

O questionamento na comunicação. Ao longo da sua prática de ensino, Berta, mostrou sempre preocupações sobre a natureza do questionamento que, na sua perspetiva, deveria apoiar e guiar os alunos na construção do conhecimento desafiando-os a pensar sobre as suas resoluções. De modo a ser bem-sucedida, e seguindo as orientações da ESE, previu as questões a colocar, mas ainda assim continuava a considerar o processo de questionamento como um desafio de modo a não descer o nível de desafio das tarefas. Pelo contrário, Glória, não via como pertinente preparar o questionamento, tanto no momento de exploração das tarefas como na apresentação das resoluções em grande grupo. Segundo a futura professora, este questionamento devia ser realizado com cautela e apenas aos alunos com melhor desempenho de modo a não os melindrar. Esta perspetiva sobre o papel do questionamento mostrou que, para Glória, questionar serve para testar, ao contrário de Berta que vê o questionamento como um processo de promoção e gestão da aprendizagem. Note-se que tal como Glória, Ana não previu um questionamento e mesmo quando questionada parecia não

ter ideias sobre o papel do questionamento na aprendizagem dos seus alunos. Para Ana importava regular as participações e ouvir as respostas dos alunos para os tentar compreender.

As representações na comunicação. As três futuras professoras consideravam importante relacionar as diferentes representações dos números racionais (fração, decimal e percentagem). Representar pictoricamente as quantidades e relacionar com as representações simbólicas também era importante, mas por razões diferentes. Berta e Ana, incentivaram os seus alunos a recorrerem a representações pictóricas de modo a darem significado aos resultados obtidos. Note-se que Ana tinha uma posição dogmática. Considerava as representações pictóricas importantes para a compreensão de conceitos e as simbólicas para comunicar procedimentos. No processo de ensino-aprendizagem perceberam que existiam desafios e questões em torno das representações pictóricas uma vez que nem todas eram clarificadoras dos conceitos a representar e das ideias comunicar. Glória, considerava as representações pictóricas presentes nas tarefas propostas, importantes na introdução de um novo conteúdo de modo a ilustrar expressões simbólicas. A relação entre os dois tipos de representações permitia compreender as situações colocadas, mas defendeu que não era uma estratégia que devesse ser enfatizada junto dos alunos. O importante era que os alunos usassem a linguagem simbólica. A linguagem natural, da representação da operação, era usada para informar sobre as operações a realizar. Também Berta se mostrou preocupada com o rigor na comunicação e apoiou os seus alunos reorganizando as suas resoluções e na forma como comunicavam as suas ideias aos restantes.

As explicações na comunicação. Para Berta, as explicações tinham o papel de definir o que era importante que os alunos retivessem e, por isso, o momento de elaboração de explicações era o final da discussão onde se sistematizava e a clarificava as ideias matemáticas que emergiam da discussão. Para tal importava preparar esquemas para clarificar as condições dadas e explicar de forma clara a resolução da tarefa. Tal como Berta preparava as suas explicações recorrendo a representações das situações colocadas de modo a apresentar em aula. Nas suas reflexões, Ana, mostrou-se preocupada com o foco das suas explicações, ou seja, se estas eram adequadas às ideias prévias dos alunos. Glória, discutindo o papel do professor e dos alunos e articulando-os com a função das explicações no processo de ensino-aprendizagem, defendeu que era importante para a aprendizagem momentos em que o professor explica. Considerava que esta prática era eficaz e remeteu para as suas experiências como aluna. Assim, o

professor devia explicar, claramente e de modo “cativante”, as suas ideias na introdução das ideias a construir e na sistematização e registo do que era suposto memorizar. Fez um balanço positivo das explicações elaboradas por si porque os alunos estavam em silêncio podendo ter dificuldades em acompanhar a sua linguagem natural, mais elaborada. Para si o desafio estava em organizar, no quadro, os registos que acompanhavam as explicações orais.

Ações de promoção da aprendizagem e do ambiente de aprendizagem. Nas suas reflexões, as futuras professoras debruçaram-se fundamentalmente nas suas ações de gestão e promoção do ambiente de aprendizagem. Berta, previu diferentes momentos com diferentes dinâmicas de trabalho. Sobre o momento de proposta das tarefas considerou que foi importante analisar, em grande grupo, o enunciado, de forma a clarificá-lo e sublinhou que estava satisfeita de ter dado atenção ao esclarecimento de dúvidas, no que se refere aos termos e conceitos abordados nos enunciados. Note-se que foi a única futura professora que se debruçou sobre as suas ações no momento de proposta das tarefas mostrando-se alerta sobre a importância deste momento para uma exploração produtiva das tarefas.

No que respeita ao momento de exploração das tarefas, Berta, tinha como preocupação a melhoria da qualidade das interações entre os alunos, promovendo a discussão das suas ideias e apoiando os alunos a ultrapassar as dificuldades de organização escrita e oral das resoluções. No final ficou satisfeita com o conseguido. Também neste momento selecionou as resoluções que pretendia ver discutidas em grande grupo tendo desenvolvido o que tinha previsto. No caso de Ana, este foi um momento vivido com desafios diferentes e de natureza diferente dependendo das dinâmicas promovidas. Inicialmente mostrou preocupações com a gestão do tempo, considerando que tinha despendido muito tempo no trabalho autónomo e pouco na discussão das tarefas. Para tentar equilibrar os tempos e momentos decidiu optar por tarefas mais abertas e promover a discussão de várias resoluções. Na segunda fase continuou a sentir dificuldade em gerir o tempo, mas as suas preocupações alargaram-se, resultado de levar a cabo uma prática mais complexa. Ao contrário de Berta, as dificuldades centraram-se em questões relativas à seleção de diferentes resoluções e como sequenciá-las. Outros aspetos desafiantes foram relativas ao apoio aos alunos com dificuldades na resolução e na compreensão das ideias dos alunos e em compreender as resoluções dos alunos que não tinha antecipado. Estas dificuldades que Ana teve e Berta não revelou, podem estar relacionadas com o facto de nem sempre ter usado o mesmo

critério de sequenciação que tinha definido (das resoluções informais para as mais formais) e de não ter antecipado diferentes resoluções incluindo resoluções erradas das tarefas. Tanto Berta como Ana, sentiram que importava planear bem o registo e sistematização no final da discussão de modo a melhorar o final da discussão. Num sentido diferente, Glória estava satisfeita com o ambiente de aprendizagem constituído, pois ficou claro que o professor era a autoridade, tanto do ponto de vista da gestão dos comportamentos, como do ponto de vista do conhecimento. Para Glória, neste momento a grande preocupação estava em garantir uma boa monitorização do trabalho dos alunos de modo a garantir que os alunos estavam a trabalhar e estar para apoiar os alunos na resolução das tarefas. Nesse sentido era importante guiar os alunos através do questionamento.

As três futuras professoras previram desenvolver discussões, em grande grupo, das resoluções. No entanto, no momento de concretização tal não aconteceu como o previsto. Quando refletiram sobre o último momento da aula nem sempre ficou claro para as professoras que tinham ficado insatisfeitas. Pelo contrário, estavam satisfeitas com o apoio prestado à apresentação das resoluções selecionadas. Berta considerou que foi importante cuidar de solicitar o registo no quadro das apresentações que considerou interessantes para discussão em grande grupo e ter completado com ideias dos restantes alunos, as resoluções apresentadas. Também ficou satisfeita por ter pedido o contributo dos alunos desde que tivessem algo a acrescentar à resolução. Considerou que se sentiu mais segura com a tarefa 3 do que com as restantes estando mais atenta ao nível de desafio colocado aos alunos e, por isso, remeteu cada vez mais para o contexto e para as condições apresentadas em vez de sugerir a resolução. Ana, decidiu destinar mais tempo na discussão. De modo a dar resposta a todos e ouvir todos os alunos, decidiu pela apresentação de diferentes resoluções e promover o confronto de ideias. Assim, como conseguiu transitar de momentos onde explicou as resoluções (Fase1) para um momento de apresentação de diferentes resoluções (fase 2), já ficou satisfeita com o conseguido. Também referiu que tinha de melhorar o registo e sistematização no final da discussão. Para Glória, no momento da apresentação das resoluções das tarefas, a sua preocupação centrou-se no registo nos cadernos das resoluções apresentadas no quadro.

Em síntese, recorrendo a reflexões de natureza diferente, as futuras professoras, no final do estágio, demonstraram estar satisfeitas com o conseguido no que respeita às tarefas propostas e às aprendizagens realizadas pelos alunos. Identificaram como dificuldades desenvolver ações adequadas às dificuldades dos alunos, na compreensão

das suas estratégias e na orquestração das diversas resoluções. Berta ficou mais atenta à importância do estabelecimento de conversões e tratamentos de números racionais e ao desenvolvimento da comunicação matemática dos seus alunos. No que respeita à comunicação, identificaram os desafios colocados no questionamento aos alunos de modo a não alterar a natureza das tarefas e as dificuldades em torno das representações pictóricas como clarificadoras dos conceitos e das ideias comunicar. O rigor matemático na comunicação também foi alvo de reflexão. A qualidade das explicações dadas pelas futuras professoras para apoiar e promover aprendizagem antes e depois da experiência foram alvo de preocupação. Concluíram que a melhor forma de garantir a qualidade das suas explicações era prepará-las com cuidado, de modo a serem adequadas aos seus alunos. Um último aspeto alvo de reflexão foi relativo às ações de promoção do ambiente de aprendizagem nos diferentes momentos da aula, tendo as professoras procurado estabelecer modalidades de trabalho, tempos e momentos adequados ao trabalho e a regulação da participação e interações dos alunos.

7.2.4. Relação entre conhecimento didático e prática pedagógica

Importa compreender o conhecimento dos futuros professores no momento da sua prática supervisionada, assumindo que, nesse contexto, o conhecimento do futuro professor é sujeito a circunstâncias que permitem a perceção da sua natureza. Mais que mapear é fundamental compreender a sua natureza e como intervém na prática letiva (Ponte & Chapman, 2015). O conhecimento dos futuros professores para ensinar Matemática, e especificamente os números racionais, pode ser visto nas dimensões *Conhecimento sobre as tarefas*, *Conhecimento sobre os alunos* e, intersetando estas duas dimensões, *As ações e comunicação* nos diferentes momentos das aulas (Figura 51). O *conhecimento sobre o currículo e a avaliação* dos futuros professores podem ser vistos como transversais às restantes dimensões.



Figura 53. Conhecimento didático de futuros professores para ensinar números racionais

A formação inicial de professores é um processo onde se estabelecem relações entre novo conhecimento e ideias prévias sobre a prática letiva trazidas das experiências vividas como alunos (Swars, Smith, Smith & Hart, 2009). As futuras professoras tinham experiências e visões diferentes sobre a Matemática, o seu ensino e aprendizagem e, no que diz respeito especificamente ao tema dos números racionais, entendimentos diferentes. Estas visões e experiências, independentemente dos contextos mas influenciadas por estes, promoveram diferentes reflexões sobre os seus propósitos, o que previram, o que concretizaram e, por isso, sobre as aprendizagens promovidas nos seus alunos no trabalho com as tarefas propostas e através da sua intervenção. Sobre o currículo e a avaliação das aprendizagens, tanto Berta como Ana, ainda que questionadas, não tinham muitas ideias sobre estas dimensões da prática pedagógica. Sobre os diferentes documentos curriculares, em vigor e em discussão no momento da sua prática pedagógica, repetiam algumas das ideias veiculadas na Didática da Matemática. Para Glória, numa posição enquanto professora experiente, os documentos curriculares deviam definir o que ensinar, dando liberdade ao professor sobre como ensinar, tal como considerou que acontecia com o programa de 2013. Como estagiária, assumia não ter autonomia para tomar decisões sobre as diferentes questões a ponderar na avaliação, mas mostrou-se focada nas aprendizagens a realizar tendo a avaliação externa como um horizonte orientador.

As três futuras professoras constituíram práticas pedagógicas segundo três fases: planificação, concretização e reflexão. Nestas três fases estava implicada uma relação dinâmica entre tarefas, aluno(s) e professor e, no centro desta relação triangular, temos as questões relativas à comunicação constituída e às ações desenvolvidas pelo professor

(Figura 54). Os diferentes propósitos de ensino e aprendizagem implicaram a definição das tarefas de natureza diferente, de modo a promover as aprendizagens desejadas nos seus alunos e implicaram uma comunicação com características diferentes e ações com focos também diferentes, quer previstas, quer concretizadas.

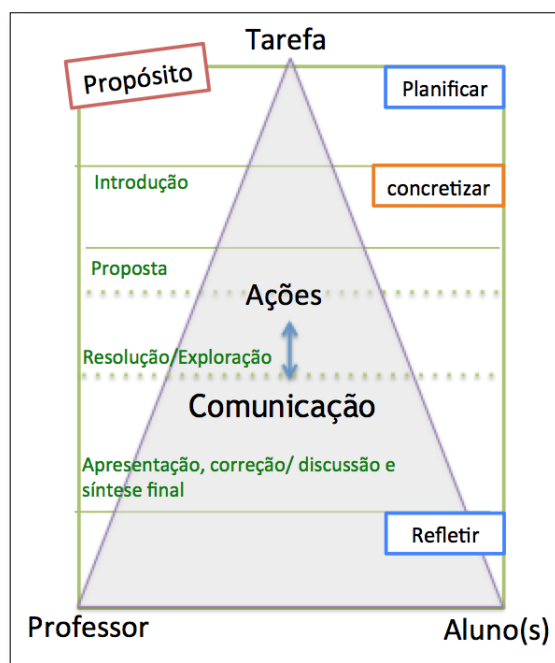


Figura 54. As fases da prática pedagógica e os momentos que estruturam a prática letiva

Dependendo do tipo de práticas previstas e concretizadas, os momentos de trabalho foram diferentes. Nos casos de Berta e Ana, a prática tinha três momentos fundamentais (Proposta da tarefa; Exploração da tarefa e Apresentação e discussão de resoluções) e, no caso de Glória, quatro momentos (introdução de ideias, regras e procedimentos; proposta da tarefa; resolução autónoma por parte dos alunos; e apresentação e correção). Nos diferentes momentos foram levadas a cabo ações diferentes e a comunicação teve características diferentes.

A relação entre o conhecimento para ensinar números racionais e as diferentes fases da prática está ilustrada na figura 55. As setas vermelhas representam as relações estabelecidas por Berta, as azuis por Glória e as laranja as relações estabelecidas por Ana. Estas relações podem ser unívocas ou biunívocas e podem ser contínuas ou mais ou menos ponteadas representando a respetiva intensidade. Estão sinalizados os momentos das aulas alvo de preparação e reflexão. As cores dos traços identificam as futuras professoras que o fizeram em determinados momentos.

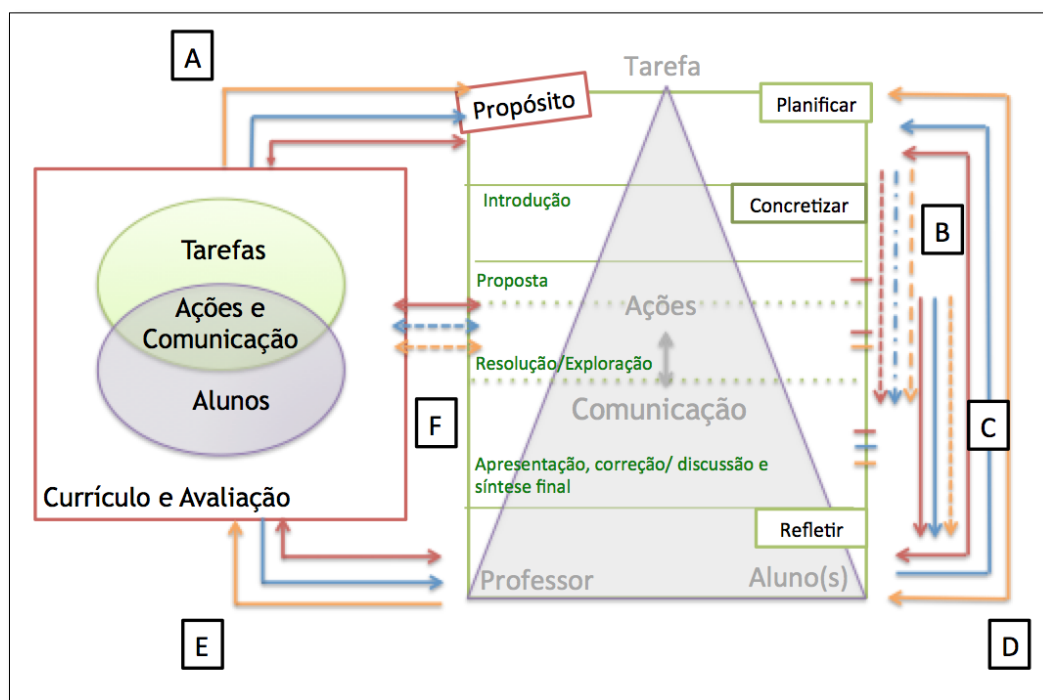


Figura 55. Relação entre conhecimento didático e a prática pedagógica

Em 1987, Shulman alertava para o facto do professor (e certamente também o futuro professor) construir o conhecimento ao longo do seu percurso de vida formativo, recorrendo a ele e organizando-o para a sua prática. Assim, o futuro professor, inicia a sua prática de ensino supervisionada com uma panóplia de experiências como aluno antes e durante da sua formação na Escola Superior de Educação. Na última fase da prática de ensino supervisionada traz consigo algumas experiências de estágio, tendo estabelecido relações de trabalho com parceiros de estágio e supervisores, o que estabelece um ponto de partida sobre o que é esperado na prática de ensino supervisionada. Todas estas experiências sustentam a sua visão sobre o ensino e aprendizagem de determinados tópicos matemáticos e sobre o papel de alunos e professores nesse processo, constituindo um corpo de conhecimentos para ensinar um determinado tema matemático. Glória também recorreu ao conhecimento obtido com a sua experiência profissional. Quando confrontava os conhecimentos de origens diferentes optava por atuar em função das suas experiências, que raramente foram ao encontro das leituras e reflexões realizadas nas aulas de Didática da Matemática. Assim, quando o futuro professor prepara uma aula, de modo a atingir os seus propósitos, ou seja, a dar resposta a um problema da prática, está a criar uma hipótese de trabalho. Para

tal, mobiliza o seu conhecimento para ensinar quando seleciona, (re)desenha tarefas e as sequencia, antecipa as ideias e resoluções dos alunos e prevê a comunicação e as suas ações quando for concretizar os diferentes momentos da prática letiva (relação representada por A). No caso de Berta, este processo foi apoiado pelos supervisores o que permitiu uma aprendizagem durante o processo de transição, estabelecendo-se uma relação biunívoca entre o que sabe e o que planifica.

Nas planificações formais, solicitadas pelos supervisores, os futuros professores registaram o previsto. No entanto, nos diferentes casos, nem todas as situações foram previstas e por vezes careciam de uma descrição mais detalhada. Para além do explicitado nas entrevistas pelas três futuras professoras, Ana também registou a sua preparação em registos pessoais, não formais. Glória, não investiu nos registos por os considerar desnecessários. A falta de previsão de um questionamento e de ações de gestão das dificuldades e promoção de aprendizagens levou a que, em interação com os alunos, as duas futuras professoras concretizassem o seu propósito e descessem o nível cognitivo das tarefas propostas. Ou seja, é na prática que o futuro professor mobiliza o conhecimento – onde as suas ações nem sempre coincidem com as ações previstas (relação representada por B, com graus de concretização do previsto e registado).

Na fase de reflexão, como resultado da interação e do confronto entre o previsto, o realizado e os resultados dessa ação, os futuros professores constituem ideias sobre o conseguido. Este conhecimento é resultado de uma experiência situada e pessoal dos futuros professores (relação representada por C). No caso de Glória, a relação é menos evidente, pois esta futura professora não identificou as experiências vividas na prática pedagógica como significativas para a sua futura prática e, por isso, esta relação não contribuiu para o seu conhecimento sobre o que, porquê e como ensinar e aprender na multiplicação de números racionais na forma de fração.

Esta relação dinâmica entre o conhecimento e a prática é dinamizada pela reflexão antes, durante e depois da prática. Como resultado da reflexão sobre o previsto e concretizado podem dar-se três efeitos: (i) Refletindo sobre a qualidade da preparação e os seus efeitos na prática, o futuro professor prevê de modo mais cuidado a sua planificação e, por outro lado, mobiliza para a aula seguinte as conclusões retiradas no momento da reflexão. Ou seja, estas novas aprendizagens levam o futuro professor a tomar decisões (relação representada por D). No caso de Glória, quando refletiu sobre o preparado e concretizado, não considerou importante fazer ajustamentos, assumindo que o trabalho realizado produziu as aprendizagens que anteviu para os seus alunos. Ainda

que Glória sublinhasse que reformulava as suas aulas em função dos acontecimentos das aulas anteriores, não existem evidências disso ter acontecido. O grau de concretização da aula planificada informava a futura professora sobre o que lecionar na aula seguinte sem que para isso tenham sido realizados ajustamentos na forma de planear e desenvolver o processo de ensino-aprendizagem (estabelecendo-se uma relação unívoca); (ii) Refletindo sobre o previsto e concretizado e procurando sustentar suas opções, fazendo uma análise crítica da sua prática pedagógica supervisionada, reestrutura e enriquece as suas ideias sobre o processo de ensino e aprendizagem e estabelece-se um novo corpo de conhecimento (relação representada por E). No entanto, nem sempre assim acontece. No caso de Ana, a reflexão não é sustentada pelas aprendizagens promovidas na Didática da Matemática. No caso de Glória, quando refletiu sobre os diferentes aspetos relativos aos alunos, às tarefas e às suas ações e aspetos de comunicação retomou as ideias iniciais sobre os alunos, as tarefas e a comunicação e reforçou-as ainda que tenha referido literatura mas apenas para refutar as críticas dos seus supervisores. Considerou as experiências vividas na prática pedagógica importantes para compreender melhor como os alunos onde estagiou podiam realizar as aprendizagens desejadas ainda que não admita que o que aprendeu possa ser generalizado a outros alunos; finalmente (iii) O entendimento que o futuro professor tem sobre aquilo que foi vivido é também mediado pela sua visão sobre a Matemática e o seu ensino-aprendizagem, podendo reforçar ideias prévias ou alterá-lo (relação estabelecida por F). No caso de Glória, esta considera-se bastante satisfeita com o conseguido e não previu nem concretizou alterações na prática e reforçou as suas ideias e justificou as suas opções com variáveis externas (tempo e as capacidades dos alunos) à sua prática. Ana, nem sempre se sentiu capaz de concretizar a prática que iria ao encontro do seu propósito.

7.3. Reflexão final

Nesta última secção, faço uma reflexão sobre as implicações deste estudo para a formação inicial de professores, perspetivo o seu papel e os desafios que se colocam, assim como reflexões para a investigação nesta área.

7.3.1. Desafios para a formação inicial de professores

Desenvolver um plano de estudos que dê resposta às necessidades de formação dos futuros professores, de modo a tornarem-se profissionais competentes e capazes de se desenvolverem profissionalmente ao longo da sua vida, coloca múltiplos desafios à formação inicial. Dado que o papel do professor é crucial no desenvolvimento curricular, importa tornar os futuros professores competentes para desenvolverem uma abordagem pedagógica de natureza exploratória que permita o desenvolvimento de aprendizagens conceptualmente profundas e significativas nos seus futuros alunos (Chapman, 2012). Esta prática, sendo mais desafiante para alunos e professores, exige um corpo de conhecimentos robusto. No que respeita à formação inicial para ensinar Matemática nos primeiros anos, os desafios são diversos e específicos sendo necessário priorizar aprendizagens que se consideram estruturantes.

Visão sobre a Matemática, o seu ensino e a sua aprendizagem. Quando os estudantes iniciam a sua formação inicial trazem consigo uma panóplia de experiências como alunos do ensino básico e secundário que informam a sua visão sobre a Matemática, sobre o papel dos professores, dos alunos e como se ensina e aprende (Monteiro, 2004; Stenberg et al., 2014). Tal como aconteceu com Berta, Glória e Ana, os futuros professores que vão ensinar Matemática nos primeiros anos, para além de trazerem as suas visões, também trazem consigo um corpo de conhecimentos, quer de natureza processual como, desejavelmente, conceptual. Para além dos conhecimentos matemáticos no que respeita à compreensão de conceitos, relações e procedimentos, importa que tragam capacidades de resolver problemas e raciocinar de um modo abstrato e de comunicar matematicamente implicando a compreensão e utilização de representações e estratégias. No entanto, nem sempre tal acontece (Monteiro, 2004) e estes aspetos cruzam-se necessariamente com aspetos sobre como vão concretizar a aprendizagem e o ensino da Matemática.

Conhecimento da Matemática para ensinar. É na formação inicial que se restabelecem os contatos com a Matemática elementar mas desta feita de um ponto de vista superior (Klein, 2009; Ma, 1999). Para tal, importa dar atenção às abordagens usadas nas diferentes unidades curriculares de cariz matemático, uma vez que estas devem permitir não só promover conhecimento no sentido mais restrito, mas também capacidades matemáticas e atitudes capazes de promover a concretização das grandes finalidades para a aprendizagem Matemática nos primeiros anos. Desde logo, e também

nas unidades de cariz matemático, a articulação entre conteúdo e pedagogia revela-se possível e com contributos significativos para o desenvolvimento do conhecimento profissional dos formandos desde a licenciatura. Neste estudo, partindo do caso de Berta, podemos verificar que as situações de ensino-aprendizagem propostas na formação inicial podem contribuir para que os futuros professores comecem a perspetivar-se enquanto professores (Ponte & Chapman, 2015). No que respeita ao ensino e aprendizagem do tema dos números racionais importa propor na formação inicial tarefas cognitivamente desafiantes e que permitam diferentes estratégias, mais ou menos formais, de modo a que os futuros professores as resolvam, discutam e analisem diferentes resoluções, procurando identificar possíveis erros e aprendizagens a promover nos seus futuros alunos (Lo & Luo, 2012; Son & Crespo, 2009). Este estudo aponta para algumas questões que se colocaram às três futuras professoras no que respeita a tópicos matemáticos: (i) A importância da identificação da unidade de referência (Tobias, 2012); (ii) A exploração de diversas representações dos números racionais, as suas relações, de forma compreensiva, quer dos números envolvidos como das operações, reconhecendo a complexidade dos constructos envolvidos (Ferreira & Ponte, 2015; Orril & Brown, 2012; Stylianou, 2010;); os significados que os racionais sob a forma de fração podem assumir permitindo o desenvolvimento de um conhecimento específico de natureza conceptual estruturante do conhecimento para ensinar estes números (Bartell et al., 2012; Chapman, 2007). Assim, os futuros professores devem experienciar, no seu percurso de formação, abordagens pedagógicas que sirvam como referenciais práticos, explicitamente sustentados em teóricos, de modo a que consigam identificar os contributos das abordagens para a sua própria aprendizagem. A análise de situações de ensino-aprendizagem com a análise de tarefas e de respostas de alunos a essas tarefas são atividades de desenvolvimento do conhecimento matemático para ensinar Matemática (Bartell et al., 2012; Ponte & Chapman, 2015).

Conhecimento para ensinar Matemática. Ao longo da formação inicial, durante o primeiro ciclo (licenciatura em educação básica) e o segundo ciclo de formação (mestrado profissionalizante) existe uma formação de carácter geral no que respeita à formação em diferentes áreas de docência e uma área de formação educacional. A articulação entre estas áreas, como é a componente científica de formação para a docência em Matemática, tem necessariamente que ser concretizada, colocando desafios às escolas de formação quanto à articulação e coerência entre práticas de ensino e focos

de trabalho. Os relatos das futuras professoras deste estudo identificam momentos formativos em Matemática que estavam em linha com as questões abordadas nas Didáticas da Matemática, evidenciando a importância da articulação entre as unidades curriculares de áreas de formação diferentes. Este estudo, refletindo em torno dos casos de Glória e Ana, mostra a importância de, na Didática da Matemática, se discutirem, não só os processos vividos por alunos em aprendizagem, como também os processos vividos pelos próprios futuros professores, antes e durante da formação inicial, retirando ilações sobre o efeito que as abordagens realizadas no ensino e aprendizagem dos números racionais teve na sua compreensão dos conceitos. Assim, na Didática da Matemática, especificamente em relação aos números racionais, importa trazer da investigação textos de natureza teórica e empírica e partir destes para analisar questões fundamentais sobre o ensino do tema já enunciadas no ponto anterior (Bartell et al., 2012; Chapman, 2007; Orril & Brown, 2012; Tobias, 2012), como foi referido por Ana e Glória neste estudo. Note-se que, no caso de Berta, para além da análise de textos e tarefas matemáticas, o recurso a vídeos de aulas, em linha com o apresentado por Branco e Ponte (2014), foi importante para uma antevisão mais detalhada do proposto na sua prática letiva. Assim, importa recorrer a textos empíricos e vídeos com episódios críticos, das práticas dos futuros professores (Ferreira & Ponte, 2014) ou trazidos pelos docentes de Didática. Também será importante propor tarefas promotoras da análise e discussões profundas sobre: (i) as tarefas a propor, dependendo dos objetivos de aprendizagem no âmbito dos números racionais e a manutenção do nível de desafio (Ponte, 2005; Stein et al., 2008; Stein & Smith, 1998); (ii) as dificuldades dos alunos com os conceitos fundamentais envolvidos neste tema (Lamon, 2006; Ma, 1999; NCTM, 2007; Norton et al., 2011) (iii) a comunicação desenvolvida com atenção às potencialidades e obstáculos quando recorre a determinadas representações e o estabelecimento de relações entre as representações dos números racionais e suas operações com foco nos processos e nos produtos (Stylianou, 2010), ao questionamento com diferentes características e objetivos (Brendefur & Frykholm, 2000; NCTM, 2007; Ponte et al., 2012), como se podem desenvolver explicações claras e pertinentes para a aprendizagem neste tema (Charalambos, Hill & Ball, 2011) e, ainda, as ações a desenvolver para a promoção de uma aprendizagem significativa para a promoção de diferentes ambientes de aprendizagem (Canavarro et al., 2014; Ferreira & Ponte, 2017; Ponte, Mata-Pereira & Quaresma, 2013; Stein et al., 2008).

Relativamente às dificuldades em conservar o nível de desafio e abertura das tarefas no momento da sua resolução em sala de aula importa, no âmbito do trabalho em Didática da Matemática, antes e durante a experiência na prática de ensino supervisionada, encontrar formas de sensibilizar para a importância de antever a prática letiva e de apoiar os futuros professores no seu planeamento. Deste modo, tal como vimos, será fundamental que as planificações incorporem um reportório de questões e de ações de promoção da aprendizagem. Também importa a antevisão das ações de promoção do ambiente de aprendizagem que se pretende concretizar nos espaços de aprendizagem.

Prática de Ensino Supervisionada e o conhecimento para ensinar Matemática. Para além da articulação entre áreas nos planos estudos importa dar atenção às articulações necessárias entre os responsáveis pela Didática da Matemática e pelos responsáveis pelas dinâmicas desenvolvidas no âmbito da prática de ensino supervisionada. Neste sentido, importa sublinhar que unidades curriculares diferentes contribuem decisivamente para o desenvolvimento de um conhecimento e de competências de aprendizagem ao longo da vida nos futuros professores. Tal como pudemos observar no caso de Glória, nesta articulação podem desenvolver-se tensões e, por isso, uma colaboração estreita é fundamental permitindo a orientação e apoio do trabalho a realizar na prática. Ou seja, é central que todas as experiências vividas ao longo da formação inicial promovam ferramentas de aprendizagem para que os futuros professores sejam competentes na reflexão e investigação sobre a sua própria prática. Tal como se evidencia nos casos de Berta e Ana, importa estabelecer uma relação estreita entre as unidades curriculares de Didática da Matemática e a Prática de Ensino Supervisionada, promovendo uma discussão entre o planificado e o concretizado, de modo a sublinhar a pertinência de antever aspetos relativos às tarefas, aos alunos, às ações e comunicação do professor no processo de aprendizagem dos alunos (Ponte & Chapman, 2008, 2012; Serrazina, 2017). Por outro lado, importa que tanto os futuros professores como os seus formadores estejam alerta para as questões relacionadas com a preparação e concretização da prática letiva. É importante que na fase de preparação os futuros professores discutam com os seus supervisores diferentes resoluções, minimizando o impacto de situações imprevistas na qualidade das práticas letivas.

Por fim, um aspeto que não ficou evidente no estudo foi um enfoque, quer nas Didáticas Específicas, como na Prática de Ensino Supervisionada, relativamente às questões da avaliação tornando explícito o papel da avaliação da e para as

aprendizagens. Será relevante os futuros professores viverem experiências e reflexões na construção de instrumentos de avaliação e de critérios de avaliação com diferentes fins.

7.3.2. Desafios para a Investigação

A investigação tem dado atenção ao conhecimento dos futuros professores relativamente ao ensino e aprendizagem em diferentes perspetivas (Ball et al., 2008; Ponte & Chapman, 2008, 2015; Ponte, 2012; Shulman, 1986, 1987; Silverman & Thompson, 2008). Por exemplo, o estudo de Tobias (2012) tinha como objetivo compreender e desenvolver a linguagem utilizada pelos futuros professores para definir a unidade de referência, no conjunto dos números racionais (frações). Esta importância dada à linguagem do professor decorre do papel que a comunicação assume no processo de ensino-aprendizagem. Noutra perspetiva, os resultados de um estudo realizado por Isiksal e Cakiroglu (2011), sobre a multiplicação de frações, indicam que os futuros professores têm diferentes ideias sobre os erros e dificuldades dos alunos e referem várias estratégias para os evitar e ultrapassar. Também o estudo realizado mostra que entre as três futuras professoras coexistem diferentes ideias sobre *o que* e *como* ensinar e aprender o tema dos números racionais. No entanto, ainda existem poucos estudos sobre o modo como os futuros professores levam a cabo as estratégias que concebem e como apoiam os alunos a ultrapassar as suas dificuldades (Branco, 2013).

Este estudo decorreu na fase final do percurso de formação de futuros professores com um olhar nas suas práticas de ensino supervisionado. Constatou-se que diferentes visões, assim como competência na resposta aos desafios colocados, contribuem para a preparação, concretização e reflexão sobre as práticas. No entanto, práticas de ensino diferentes têm desafios comuns. Neste sentido, são necessários estudos longitudinais que acompanhem o percurso de diferentes formandos, desde o 1.º ano e até ao estágio final, para a identificação de aspetos essenciais no desenvolvimento profissional dos professores e futuros professores. No final do segundo ciclo de estudos, os futuros professores devem desenvolver investigações sobre a própria prática. Este processo de desenvolvimento profissional é um dos momentos críticos para a certificação dos docentes e que importa estudar e discutir as suas potencialidades e limitações.

Para promover uma formação de qualidade, tanto do ponto de vista científico como didático, importa refletir e intervir nos processos formativos, usando abordagens

que promovam um conhecimento de natureza conceptual, em aspetos tão centrais nos primeiros anos como o ensino-aprendizagem dos números racionais.

Coloca-se também a questão de saber que tipo de ensino e que tipo de conceitos devem ser encarados como fundamentais. Ou seja, importa desenvolver estudos em torno das experiências de ensino-aprendizagem na formação inicial, tanto nas unidades curriculares de Matemática, como em Didática da Matemática de modo a compreender processos de desenvolvimento do conhecimento didático de futuros professores sobre o ensino-aprendizagem dos números racionais. Assim, os relatos das futuras professoras deste estudo sugerem que seria pertinente desenhar planos de trabalho no âmbito da Didática da Matemática para investigação com uma atenção sobre os aspetos críticos no ensino da Matemática (Bartell, Webel, Bowen & Dyson, 2012; Ponte & Chapman, 2015) e especificamente no tema dos números racionais (Tobias, 2012). Note-se que, no caso de Berta, o recurso a vídeos de aulas, em linha com o apresentado por Branco e Ponte (2014), foi importante para uma antevisão mais detalhada do proposto na sua prática letiva. Assim, considerando os resultados deste estudo no âmbito dos números racionais existem aspetos críticos específicos a tomar em atenção.

Seria importante realizar estudos sobre experiências de ensino na unidade curricular de Didática da Matemática em que se desenhassem tarefas promotoras análise e discussões profundas sobre a natureza das tarefas, as dificuldades dos alunos com os conceitos fundamentais envolvidos neste tema, a comunicação com um foco nas representações, no questionamento e explicações e ainda sobre as ações a desenvolver na promoção de uma aprendizagem e de um ambiente de aprendizagem produtivo.

Em Portugal, a análise da prática dos professores tem dado grande atenção à compreensão da prática de ensino-aprendizagem exploratória (Ponte, 2014). No entanto, no contexto escolar coexistem práticas diferentes, que se situam entre o ensino direto (Ponte, 2005), numa abordagem tradicional, e práticas de ensino-aprendizagem numa abordagem de cunho exploratório. Além disso, a estrutura de uma aula pode variar, com os diferentes momentos de trabalho organizados de diferentes modos, dependendo das características das tarefas, da comunicação constituída e dos papéis vividos por alunos e pelo professor (Ponte, 2005, 2014). Assim, tal como aconteceu neste estudo com Glória, importa compreender melhor quais as ações levadas cabo por professores com práticas mais diretivas, tentando compreender em que momentos os professores as consideram produtivas e porquê. Compreendendo melhor perspectivas diferentes das da Didática da Matemática e as suas concretizações, a formação continua e pós-graduada de

professores poderá estar mais sustentada sobre como refutar algumas teorias locais e sustentadas no conhecimento prático e senso comum.

As questões da avaliação das aprendizagens são transversais às questões do campo da Didática, seria importante compreender de modo mais focado quais os aspectos discutidos ao longo da formação inicial de professores sobre os aspectos relativos à avaliação das aprendizagens com foco, quer na avaliação formativa, quer na avaliação sumativa. Estas questões serão alvo de discussão continuada nas comunidades educativas onde desenvolverão as suas práticas pedagógicas e, por isso, importa capacitar os futuros professores para a reflexão e concretização de estratégias de avaliação para uma escola para todos, com todos e cada um.

As três futuras professoras deste estudo não estão a exercer a docência, duas porque não terminaram o ciclo de estudos por não entregarem o relatório final de mestrado e outra porque a falta de emprego a levou a emigrar e dedicou-se a outra atividade profissional. Seria importante realizar estudos que acompanhassem os futuros professores durante os seus primeiros anos de prática. Seria pertinente perceber se desenvolvem o conhecimento didático analisando as transformações ocorridas nas suas visões sobre o ensino e aprendizagem e como desenvolvem as suas práticas pedagógicas nos primeiros anos de docência.

É importante estudar continuamente a formação de professores, dando conta das mudanças que ocorrem e que a afetam. Este estudo foi desenvolvido num momento de mudança curricular e ficou evidente que as três futuras professoras se posicionaram de modo diferente relativamente à mudança que estava a ocorrer. Assim, seria pertinente compreender que ferramentas são promovidas nos futuros professores de modo a analisar criticamente estas mudanças, fundamentando cientificamente as alterações definidas pelas diferentes tutelas que terão ao longo da sua vida profissional.

Referências Bibliográficas

- AERA (2011). Code of ethics. *Educational Researcher*, 40(3), 145-156. DOI: 10.3102/0013189X11410403
- Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação. Um guia prático e crítico*. Porto: ASA Editores.
- Alsawaie, O., & Alghazo, I. (2010). The effect of video-based approach on prospective teachers' ability to analyze mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 223–241.
- André, M. (2013). O que é um estudo de caso qualitativo em educação? *Revista da FAEEBA: Educação e Contemporaneidade*, 22(40), 95-103.
- Bal, A. P. (2015). Skills of using and transform multiple representations of the prospective teachers. *Procedia: Social and Behavioral Sciences*, 197, 582 - 588.
- Ball, D. L. (1990) The mathematical understandings that prospective teachers brings to teacher education. *The Elementary School Journal*, 9, 449-466.
- Ball, D. L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.
- Barnett-Clarke, C., Fisher, W, Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grades 3- 5*. Reston, VA: NCTM.
- Bartell, T., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2012). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Teacher Education*. doi 10.1007/s10857-012-9205-4.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). New York, NY: Academic Press.
- Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.). *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.
- Boavida, A., & Marques, T. (2010). Número decimal: de que falamos. In A. Boavida, F. Mendes, & T. Marques, (Orgs.). *Números decimais: Uma proposta de abordagem. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico* (2.^a ed.). Escola Superior de Educação de Setúbal. Retirado em 29 de Março de 2012 de <http://projectos.esse.ips.pt/pfcm/wpcontent/uploads/2010/02/numerosdecimaispropostadeabord.pdf>
- Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico. Programa de formação contínua em matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos*. Lisboa: ME: DGIDC.

- Boerst, T., Blunk, M., Shaughnessy, M., Farmer, S., DeFino, R., Pfaff, E. & Pynes, D. (2020). Preparing teachers to formatively assess: Connecting the initial capabilities of preservice teachers with visions of teaching practice. *Handbook of Research on Formative Assessment in Pre-K Through Elementary Classrooms* (pp. 98-126). DOI: 10.4018/978-1-7998-0323-2.ch005
- Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Branco, N. (2013). *O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores nos primeiros anos*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa.
- Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 125-153.
- Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.
- Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais de Matemática* (pp. 217-236). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (on-line).
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) Model. *Research in Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., & Contreras-González, L. C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educacion Matemática*, 7(3), 78-92.
- Carvalho, R. (2016) *Cálculo mental com números racionais: Um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa, Portugal. (disponível em <http://hdl.handle.net/10451/23646>).
- Chapaman, O. (2007). Facilitating preservice teachers' development of mathematics knowledge for teaching arithmetic operations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 341–349.
- Chapaman, O. (2012). Challenges in mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15, 263–270 DOI 10.1007/s10857-012-9223-2
- Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16, 1–6.
- Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64, 293-316.
- Charalambous, C. Y., Hill, H., & Ball, D. (2011). Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: how does it look and what might it take? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 441–463.
- Choppin, J. (2011). Learned adaptations: Teachers' understanding and use of curriculum resources. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 331-353. DOI 10.1007/s10857-011-9170-3

- Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel.
- Clarke, D. (2000). Time to reflect. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(3), 201-203.
- Clarke, D., Roche, A., & Mitchell, A. (2008). 10 Practical tips for making fractions come alive and make sense. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13 (7), 373-379.
- Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, 9, 343- 363.
- Cramer, K., Behr, M., Post T., Lesh, R., (2009) *Rational Number Project: Initial Fraction Ideas. Teacher's guide RNP: Inicial fraction Ideas*. Retirado em 26 de fevereiro de 2012 de <http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/default.html>
- Cramer, K., Henry, A. (2002). Using manipulative models to build number sense for addition of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Org.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook*, 41-48. Reston, VA: NCTM.
- Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2009). Fractions operations and initial decimal ideas. *Companion module to Rational Number Project: Fraction Lessons for the Middle Grades*. Retirado em 26 de fevereiro de 2012 de <http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/rnp2.html>
- Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 395-415 DOI 10.1007/s10857-008-9081-0
- Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2018). *Research design qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (5th ed.). London: Sage.
- Cruz, M. & Spinillo, A. (2004). Resolvendo adição de frações através do simbolismo matemático e através de âncoras. *Quadrante*, 13, 2, 3- 29.
- Danielson, C. (2009). What can we do with a common numerator? *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(9), 528-531.
- Davis, J. (2009). Understanding the influence of two mathematics textbooks on prospective secondary teachers' knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12, 365–389.
- Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L., & Dooren, W. V. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, 47, 82-92
- Depaepe, F., Van Roy, P., Torbeyns, J., Kleickmann, T., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2018). Stimulating pre-service teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers. *Educational Studies Mathematics*, 99, 197–216. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9822-7>
- Diário da República – I Série n.º 122 (27-06-2014). Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Declaração de retificação nº 32/2014 de 27 de junho.

- Diário da República – I Série nº 38 (22-02-2007). Lisboa: Ministério da Educação. Decreto-Lei nº 43/2007 de 22 de fevereiro.
- Diário da República – I Série nº 92 (14-05-2014). Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Docência. Decreto-Lei nº 79/2014 de 14 de maio.
- Dinham, S.M. & Stritter, F. (1986). Research on professional education. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: Macmillan. DOI 10.1007/s10857-012-9220-5
- Dolk, M. (2009). Looking at numbers: Young children developing number sense. *Actas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM)*. Vila Real: SPIEM.
- Empson, S., Levi, L., Carpenter, T. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Eric Knuth (Eds), *Early algebraization, advances in mathematics education* (pp. 409- 428). Springer.
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*, 119-161. New York, NY: Macmillan.
- Fenstermacher, G. (1994). The knower and the known: The nature of knowledge in research on teaching. *Review of Research in Education*, 20, 3-56.
- Ferreira, N. (2006). *Professores de Matemática e Ciências na Área de Projeto: Práticas e desenvolvimento profissional* (Dissertação de mestrado na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa).
- Ferreira, N. (2019). Autonomia e Flexibilidade Curricular no desenvolvimento das aprendizagens em Matemática: perspetivas e desafios. *Educação e Matemática* 151, 1.
- Ferreira, N., & Ponte, J. P. (2014). Conhecimento didático sobre tarefas na formação inicial de professores: O caso de Berta. In *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM)*. Sesimbra: SPIEM.
- Ferreira, N., & Ponte, J. P. (2014). Edição de vídeo: Uma tarefa promotora de conhecimento para ensinar Matemática na formação inicial de professores do 1º ciclo. In *Supervisão Liderança e Cultura de Escola* (pp. 405-414). Mangualde: Edições Pedago.
- Ferreira, N., & Ponte, J. P. (2015a). Exploring pictorial representations in rational numbers: Struggles of a prospective teacher. *Proceedings of 9th Congress of European Research in Mathematics Education* Charles University, Faculty of Education, Prague.
- Ferreira, N., & Ponte, J. P. (2015b). O papel das representações na prática letiva: Três futuras professoras e suas práticas de ensino nos números racionais. In *Atas do EIEM 2015: Encontro de Investigação em Educação Matemática*, 277-293. Bragança: SPIEM.
- Ferreira, N., & Ponte, J. P. (2016). Planning, teaching and reflecting on how to explain inverse rational numbers: The case of Ana. *Proceedings of ERME Topic Conference*, Berlim, Alemanha.
- Flyvbjerg, B. (2011). Case study. In N. Denzin & J. Lincon (Eds.). *Handbook of qualitative Research* (pp. 301-316). London: Sage.

- Fontana, A., & Frey, J. (1994). Interviewing: The art of Science. In N. Denzin & J. Lincon (Eds). *Handbook of qualitative Research*, 361-376. London: Sage.
- Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction*. Portsmouth, NH: Heineman.
- Gainsburg, J. (2012). Why new mathematics teachers do or don't use practices emphasized in their credential program. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(5), 359-379. DOI : 10.1007/s10857-012-9208-1
- Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, Percentages, Decimals and Proportions; a Learning-Teaching Trajectory for Grade 4, 5 and 6*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.
- Ghousseini, H., & Herbst, P. (2016). Pedagogies of practice and opportunities to learn about classroom mathematics discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(1), 79–103. DOI: 10.1007/s10857-014-9296-1
- Gibbs, G. (2012). *El análisis de datos cualitativos en Investigación Cualitativa*. Madrid: Morata.
- Godino, J. (2003). *Matemáticas y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-Maestros*. Granada : Universidade de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática
- Goetz, J. P., & Le Compte, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. San Diego, CA: Academic Press.
- Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*, 178-203. New York, NY: Routledge.
- Gregg, J. & Gregg, D. (2007). Measurement and Fair-sharing Models for Dividing Fractions. *Mathematics Teaching in Middle School*, 12, 9, 490-496.
- Griffiths, H. B. & Hilton, P.J. (sd). *Matemática Clássica: uma interpretação contemporânea*. Volume 3. Editora Edgard Blucher: Universidade de São Paulo. (pp. 339-347)
- Grootenboer, P.(2008). Mathematical belief change in prospective primary teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 479–497. DOI : 10.1007/s10857-008-9084)
- Guberman, R. & Leikin, R (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16, 33–56. DOI : 10.1007/s10857-012-9210-7)
- Guerreiro, H. G. & Serrazina, L. (2017). A Aprendizagem dos Números Racionais com Compreensão Envolvendo um Processo de Modelação Emergente. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 181-201. DOI:10.1590/1980-4415v31n57a09)
- Guimarães, H. (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade matemática: Um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).
- Guimarães, H. (2008). Perspetivas sobre o conhecimento do professor. *Revista Diálogo Educativo*, 8 (25), 819-839. Curitiba.

- Guimarães, H. (2010). Concepções, crenças e conhecimento – afinidades e distinções essenciais. *Quadrante*, 19(2), 81-101.
- Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança: O trabalho e a cultura dos professores na idade pós-moderna*. Lisboa: McGraw Hill.
- Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 333-355.
- Hodges, T., Cady, J. & Collins, L. (2008). Fraction representation: The not-so-common denominator among textbooks. In *Mathematics teaching in the middle school*, 14 (2), 78-84.
- Hoek, D. & Gravemeijer, K (2011). Changes of interaction during the development of a mathematical learning environment. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 393- 411. DOI : 10.1007/s10857-011-9184-x)
- Howe, C., Nunes, T. & Bryant, P. (2010). *Rational number and proportional reasoning: Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science*. (cedido para discussão na aula de Didática do Números e Álgebra)
- Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fractions operation sense. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 72-78). Reston: NCTM.
- Isiksal, M., Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: the case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 213–230.
- Izsák, A., Tillema, E. & Tunç-Pekkan Z. (2008). Teaching and Learning Fraction addition on Number Lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, (39), 33–62.
- Jackson, K., Garrison, A., Wilson, J., Gibbons, L., & Shahan, E. C. (2013). Exploring relationships between setting up complex tasks and opportunities to learn in concluding whole-class discussions in middle-grades mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44 (4), 646-682.
- Jackson, K., Shahan, E. C. Garrison, A. & Cobb, P. (2012). Launching complex tasks. *Mathematics teaching in Middle School*, 18 (1), 24-29.
- Jansen, A & Hohensee, C. (2016). Examining and elaborating upon the nature of elementary prospective teachers' conceptions of partitive division with fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19, 503–522. DOI : 10.1007/s10857-015-9312-0)
- Jaworski, B., & Potari, D. (2009). Bridging the macro- and micro-divide: Using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 219–236.
- Johanning, D. (2011). Estimation's Role In Calculations With Fractions. In *Mathematics teaching in Middle School*, 17 (2), 96-102.
- Johar, R., Patahuddin, S.M. & Widjaja, W. (2017). Linking pre-service teachers' questioning and students' strategies in solving contextual problems: A case study in Indonesia and the Netherlands. *The Mathematics Enthusiast*, 14(1), 101-128. Available at: <https://scholarworks.umt.edu/tme/vol14/iss1/8>

- Klein, F. (2009). *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior - Aritmética*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.
- Kraemer, J. (2010). Uma proposta para trabalhar os números decimais. In Boavida, A., Mendes, F. & Marques, T. (Org.). *2.ª edição de Números decimais: Uma proposta de abordagem. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico 2009. Escola Superior de Educação de Setúbal*. Retirado em 29 de Março de 2012 de <http://projectos.esse.ips.pt/pfcm/wp-content/uploads/2010/02/numerosdecimaispropostadeabord.pdf>
- Lamon, S. (2001). Presenting and Representing from Fractions to Rational Numbers. Cuoco, A. Curcio, F. (Eds): *The Roles of Representations in School Mathematics*. NCTM, Yearbook, Reston VA.
- Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content and instructional strategies for teaching* (2nd ed.). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Lamon, S. (2007). Rational Numbers And Proportional Reasoning. In Lester, F. K. (Jr. Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 629-667. NCTM: Charlotte, NC - Information Age Publishing.
- Lee, H. S. & Sztajn, P. (2008). Focusing on Units to Support Prospective Elementary Teachers' Understanding of Division in Fractional Contexts. *School Science and Mathematics*, 108, 1, 20-27.
- Lee, J. (2012). Prospective elementary teachers' perceptions of real-life connections reflected in posing and evaluating story problems. *Journal Mathematics Teacher Education*, 15, 429-452.
- Lee, J.L. & Shin, J. (2016). Key development understandings-based Textbook analysis: Fraction addition and multiplication. In 13th *International Congress on Mathematical Education*. Hamburg, 24-31.
- Leinhardt, G (2010). Introduction: Explaining Instructional Explanations. M.K. Stein, L. Kucan (eds.), *Instructional Explanations in the Disciplines*, 1. DOI: 10.1007/978-1-4419-0594-9
- Leinhardt, G. (1993). Instructional explanations in history and mathematics. In W. Kintsch (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 5-16). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Leinhardt, G., & Smith, D. A. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. *Journal of Educational Psychology*, 77(3), 247-271. DOI: 10.1037/0022-0663.77.3.247
- Llinares, S., & Valls, J. (2009). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal for Mathematics Teacher Educatio*, 13, 177-196.
- Lo, J. & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal for Mathematics Teacher Education*. DOI: 10.1007/s10857-012-9221-4
- Ludke, M., & André, M. E. D. A. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematic in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mamede, E. (2011). Sobre o Ensino e Aprendizagem de Frações Nos Níveis Elementares De Ensino. In *Actas do profMat 2011*. APM: Lisboa
- Marbach-Ad, G. & McGinnis, J.R. (2009). Beginning Mathematics Teachers' Beliefs of Subject Matter and Instructional Actions Documented Over Time. *School Science and Mathematics*, 109, 6, 338-351.
- Marcelo, C. (2009). Desenvolvimento profissional docente: passado e futuro. *Sísifo. Revista de Ciências da Educação*, 8, 7-22.
- Martinho, H. (2007). *A Comunicação na Sala de Aula de Matemática: Um projeto colaborativo com três professoras do ensino básico* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).
- Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 97-111. (doi.org/10.1080/002073900287426)
- Mason, J. & Spence, M. 2000, Beyond Mere Knowledge of Mathematics: The Importance of Knowing-To Act in the Moment, in D. Turosh (Ed.) *Forms of Mathematical Knowledge: learning and teaching with understanding*, Kluwer, Dordrecht. Available from: John Mason Retrieved on: 05 November 2016
- Mata-Pereira, J. (2018). *As Ações do Professor para promover Raciocínio Matemático na sala de aula*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).
- McClain, K. (2000). An analysis of the teacher's role in supporting the emergence of symbolizations in one first-grade classroom. *The Journal of Mathematical Behavior*, 19(2), 189-207.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). *A Proposed Framework For Examining Basic Number Sense. For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8 e 44.
- Menezes, L. (2004) *Investigar para ensinar Matemática: Contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).
- Menezes, L., Tomás Ferreira, R., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais de professores de Matemática* (pp. 135-164). Lisboa: IE (on-line).
- Mewborn, D.S. (2000). Learning to Teach Elementary Mathematics: Ecological elements of a field experience. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 27-46.
- Mewborn, D.S. (2001). Teachers Content Knowledge, Teacher Education, and their Effects on the Preparation of Elementary Teachers in the United States. *Mathematics Education Research Journal*, 3, 28-36.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.

- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais. Ensino Básico: Matemática*. Lisboa: DGE. Retirado em 1 julho de 2020 em <https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico>
- Ministério da Educação e Ciências (2013). *Programa e Metas curriculares. Matemática – Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Mitchell, Charalambous & Hill (2014) Examining the task and knowledge demands needed to teach with representations. *Journal Mathematics Teacher Education*, 17, 37–60. DOI : 10.1007/s10857-013-9253-4
- Mitchell, R. & Marin, K. A. (2015). Examining the use of a structured analysis framework to support prospective teacher noticing. *Journal Mathematics Teacher Education*, 18, 551–575. DOI : 10.1007/s10857-014-9294-3
- Molinari, L. & Mameli, C. (2010) Classroom dialogic discourse: An observational study. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 2, 3857–3860. Available online at www.sciencedirect.com
- Monteiro, C.; Costa, C.; Costa, C. (2004). Competências Matemáticas à saída da Formação Inicial. In: Borralho, A. (org.) *A Matemática na Formação do Professor*, (pp.169-196). Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.
- Monteiro, C., Pinto, H.; Figueiredo, N. (2005). As Frações e o Desenvolvimento Do Sentido Do Número Racional. *Revista Educação e Matemática*, 84, 47-51.
- Monteiro, M. C., & Pinto, H. (2006). A Aprendizagem Dos Números Racionais. *Quadrante*, 14(1), 89-108.
- Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Linán-Garcia, M. M. & Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estruturando la formación inicial de profesores de Matemáticas: Una Propuesta des el modelo MTSK. In (Eds.) Jiménez, E.B., Rodríguez, N. C., Verdú, C. F. & Astudillo, M. T. G. *Investigación sobre el profesor de Matemáticas: Práctica de aula, conocimiento, competencia Y desarrollo profesional*, 157-177 – 1.^a ed.- Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca. Retirado de <https://play.google.com/store/books/author?id=Badillo%20Jim%C3%A9nez%2C%20Edelmira> em maio de 2020
- Moss, J.; Case, R. (1999). Developing children’s understanding of the rational numbers: a new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, Reston*, 30, 2, 122-147.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.
- NCTM (2014). *Princípios para a Ação: assegurar a todos o sucesso em matemática*. Lisboa: APM (tradução em 2017).
- Newton, K.J. (2010). The Sweetest Chocolate Milk. In *Mathematics Teaching In The Middle School*, 16 (3), 149-153.
- Nguyen, N., McFadden, A., Tangen, D. & Beutel, D. (2013). Video-Stimulated Recall Interviews in Qualitative Research. *Joint AARE Conference*, 1-10. Adelaide. Retirado de <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED603301.pdf>

- Ni, Y. & Zhou, Y. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist*, 40, 1, 27-52.
- Norton, A., McCloskey, A., & Hudson, R. (2011). Prediction assessments: Using video-based predictions to assess prospective teachers' knowledge of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 305–325.
- Olanoff, D., Lo J. & Tobias, J. (2014). Mathematical Content Knowledge for Teaching Elementary Mathematics: A Focus on Fractions. *The Mathematics Enthusiast*, 11, 2, 267–310.
- Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI (Org), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, 29-42. Lisboa: APM.
- Orrill, C. & Brown, R. (2012). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*. DOI : 10.1007/s10857-012-9218-z
- Orrill, C. & Brown, R. (2012b). Making sense of double number lines in professional development: exploring teachers' understandings of proportional relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education*. DOI: 10.1007/s10857-012-9218-z
- Pastor, J., Calleja, P. & Trejo, C. (1969). *Análisis matemático* (volume I). Editorial Kapelusz (8ª edição). Buenos Aires.
- Pérez, J. (1997). *Números decimales: porquê? Para quê?*. Madrid: Síntesis.
- Peterson, B. e Williams, S. (2008). Learning mathematics for teaching in the student teaching experience: two contrasting cases. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 459–478.
- Pinto, H. (2011). *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: Universidade de Lisboa.
- Pinto, J. & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens* (Cap. 2). Lisboa: Universidade Aberta
- Pólya, G. (1977). *Arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência.
- Potari, D. (2012). The complexity of mathematics teaching and learning in mathematics teacher education and research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, (15), 97–101.
- Ponte, J. P. (2004). Investigar a nossa própria prática: Uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. In E. Castro & E. Torre (Org.), *Investigación en educación matemática*, (pp. 61-84). Coruña: Universidad da Coruña.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2006a). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132.
- Ponte, J. P. (2006b). Os desafios do Processo de Bolonha para a formação inicial de professores. *Revista da Educação*, 14(1), 19-36.

- Ponte, J. P. (2012). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In N. Planas (Ed.), *Educación matemática: Teoría, crítica y práctica*. Barcelona: Graó.
- Ponte, J. P. (2017). Discussões coletivas no ensino-aprendizagem da Matemática. In GTI (Ed.), *A prática dos professores: Planificação e discussão Coletiva na sala de aula*, 33-56. Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.
- Ponte, J. P., & Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed.). New York, NY: Taylor & Francis.
- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, 93, 51–66. DOI : 10.1007/s10649-016-9681-z
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didática da Matemática do 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22(2), 55-81.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática*, 1, 67- 88.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula? *Educação e Matemática*, 133, 26-35.
- Ponte, J., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J., Veia, L. & Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 20 (2), 39-74.
- Ponte, J.P. (2006c). Números e Álgebra no Currículo Escolar. In I. Vale, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Eds), *Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 5- 27). Lisboa: SEM-SPCE.
- Ponte, J.P. & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante*, 13 (2), 51-74.
- Ponte, J.P., & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante*, 20(1), 53-81.
- Predinger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analyzing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, 18, 3-17.
- Predinger, S. (2011). Why Johnny Can't Apply Multiplication? Revisiting the Choice of Operations With Fractions. *International Electronic Journal of Mathematics Education: IEJME*, 6 (2). Retirado em 1 de Março de 2013 de <http://www.iejme.com/022011/ab2.htm>

- Putra, Z. (2018). *A Comparative Study of Danish and Indonesian Pre-service Teachers' Knowledge of Rational Numbers*. Doctoral Thesis, Department of Science Education, Copenhagen University.
- Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2019). Dinâmicas de reflexão e colaboração entre professores do 1.º ciclo num estudo de aula em Matemática. *Bolema*, 33(63).
- Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2012). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford handbook of numerical cognition*. Oxford: Oxford University Press. Retrived from <http://www.vanderbilt.edu/psychologicalsciences/bio/bethany-rittle-johnson> in 9 of September 2014.
- Rowland, T. (2013). the knowledge quartet: the genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teachers' mathematics knowledge. *Sisyphus, Journal of Education*, 1(3), 14-43.
- Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem syn-thesis. Em B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Ankara, Turkey: PME.
- Santos, E., & Santos, L. (2019). Estratégias avaliativas reguladoras para a aprendizagem com tarefas que usam tecnologia: Que contributo para uma prática reguladora do ensino? In H. Guimarães, H. Pinto, A. I. Silvestre, F. R. Jorge & P. M. Afonso (Eds.), *Atas do XXX Seminário de Investigação em Educação Matemática (SIEM)*. Lisboa.
- Santos, E., & Santos, L. (2020). The study with GeoGebra of the area of the parallelogram and Formative Assessment. In *Handbook of Research on Formative assessment in Pre-K through Elementary Classrooms*. IGI Global (pp. 206-225). PA: IGI Global. doi: 10.4018/978-1-7998-0322-2. <https://www.igi-global.com/chapter/learning-the-parallelogram-area-with-technology-supported-by-formative-assessment/240568>
- Santos, L. (2008). *Diferenciação Pedagógica: Um desafio a enfrentar*, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, DIFMAT, Projeto AREA.
- Santos, L. (2011). Que critérios de qualidade para a avaliação formativa? In D. Fernandes (Org.), *Avaliação em educação: Dez olhares sobre uma prática social incontornável* (pp. 155 -165). Curitiba: Editora Melo.
- Santos, L. e Ponte, J.P. (2002). A prática letiva como atividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário. *Quadrante*, Vol. 11, Nº 2, retirada do repositório da UL- IE em 25 de Abril de 2012
- Santos, L., & Cai, J. (2016). Curriculum and assessment. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 153–185). Rotterdam: Sense Publishers.
- Sawars, S., Smith, S., Smith, M. e Hart, L. (2009). A longitudinal study of a developmental teacher preparation program on elementary prospective teachers' mathematics beliefs. *Journal of Mathematics Teacher Education*, (12), 47–66.
- Saxe, G. B. (1999). Professional development, classroom practices, and students' mathematics learning: A cultural perspective. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings*

- of the 23th *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 121-128). Haiffa, Israel: PME.
- Scaptura, C., Suh, J. & Mahaffey, G. (2007). Masterpieces to Mathematics: Using art to teach fraction, decimal, and percent equivalents. In *Mathematics teaching in the middle school*, 13 (1), 24-28.
- Scherrer, J. & Stein, M. K. (2012). Effects of a coding intervention on what teachers learn to notice during whole-group discussion. *Journal of Mathematics Teacher Education*. DOI : 10.1007/s10857-012-9207-2
- Schifter, D. (1997). Developing operation sense as a foundation for algebra. Paper presented at the meeting of the *American educational research association*: Chicago.
- Schoenfeld, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243-261.
- Schoenfeld, A. H. (2002). Research methods in (mathematics) education. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 435- 487. Mahwah NJ: Erlbaum
- Schön, D. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. In A. Nóvoa (Ed.), *Os professores e a sua formação*, 79-91. Lisboa: D. Quixote. Uma primeira versão deste texto foi apresentada na 43.^a *Conferência Anual da ASCD* (Boston, Massachusetts, 1988).
- Semana, S., & Santos, L. (2011). Appropriation of assessment criteria by the students: Practice and reflection of a math teacher in a context of collaborative work. *Proceedings of PME 35*, 1, 386.
- Serrazina, L. (1999). Reflexão, conhecimento e práticas lectivas em Matemática num contexto de reforma curricular no 1.º ciclo. *Quadrante*, 8(1-2), 139-168.
- Serrazina, L. S. (2017). Planificação do ensino e aprendizagem da Matemática. In GTI (Ed.), *A prática dos professores: Planificação e discussão Coletiva na sala de aula*. (pp. 9-31). Lisboa: APM.
- Serrazina, L., Vale, I, Fonseca, H. & Pimentel, T. (2002). *Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores*. Retirado em 6 de junho de 2020 de <https://www.academia.edu/21700455/Investiga%C3%A7%C3%B5esmatem%C3%A1ticaseprofissionaisnaforma%C3%A7%C3%A3odeprofessores>
- Serrazina, M. L. (2012). Conhecimento matemático para ensinar: Papel da planificação e da reflexão na formação de professores. *Revista Electrónica de Educação*, 6(1), 266-283.
- Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in the mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 205–233.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Researcher*, 57(1), 1-22.
- Silverman, J. e Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 499–511.

- Sinicrope, R., Mick, H. & Kolb, J. (2002). Interpretations of Fraction Division. In Litwiller, B and. Bright, G, (Ed.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions: 2002 Yearbook*, National Council of Teachers of Mathematics, 237-246, Reston, VA.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 14, 66-91.
- Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transition from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics*, 37(3), 251-172.
- Smith, M. S., Hughes, E. K., Engle, R. A., & Stein, M. K. (2009). Orchestrating discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(9), 549-556.
- Son, J.W., e Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, (12), 235–261
- Spitzer, S., Phelps, C., Beyers, J., Johnson, D., e Sieminski, E. (2011). Developing prospective elementary teachers' abilities to identify evidence of student mathematical achievement. *Journal for Mathematics Teacher Education*, (14), 67–87.
- Stake, R. (1995). *A arte da investigação com estudos de caso*. Fundação Calouste Gulbenkian. Tradução do original inglês The Art of Case Study Research. London: Sage.
- Star, J.R. (2000). On the Relationship Between Knowing and Doing in Procedural Learning. In B. Fishman & S. O'Connor-Divelbiss (Eds.), *Fourth International Conference of the Learning Sciences* (pp. 80-86). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Star, J.R. (2005). Reconceptualizing Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (5), 404-411.
- Steele, M. e Rogers, K. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: the case of proof. *Journal for Mathematics Teacher Education*, 15, 159–180.
- Steffe, L. & Olive. J. (2010). *Children's Fractional Knowledge*. Springer: New York Dordrecht Heidelberg London (DOI 10.1007/978-1-4419-0591-8)
- Stein, M. K., e Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3 (4), 268-275.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313-340.
- Stein, M. k., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development*. New York: Teachers College.
- Stenberg, K., Karlsson, L., Pitkaniemi, H. & Maaranen, K. Beginning (2014). Student teachers' teacher identities based on their practical theories. *European Journal of Teacher Education*, 37 (2), 204–219. DOI : 10.1080/02619768.2014.882309
- Stephens, A. Bottge, B, Rueda, E. (2009). Ramping Up On Fractions. In *Mathematics teaching in the middle school*, 14 (9), 520-526.

- Streefland (1982). Subtracting fractions with different denominators. *Educational Studies in Mathematics*, 13, 233-255.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer.
- Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 325-343.
- Sullivan, P., Clarke, D. J., & Clarke, D. M. (2012). Choosing tasks to match the content you are wanting to teach. *Australian Primary Mathematics Journal*, 17(3), 24-27
- Sullivan, P., Clarke, D.J., Clarke, D.M., & Roche, A. (2013). Teachers' decisions about mathematics tasks when planning. In V. Steinle, L. Ball, & C. Bordini (Eds.), *Mathematics education: Yesterday, today and tomorrow (Proceedings of the 36th MERGA annual conference*, pp. 626-633). Melbourne: MERGA.
- Sweetland, J. & Fogarty, M. (2008). Prove it! Engaging Teachers as Learners to Enhance Conceptual Understanding. *Teaching Children Mathematics*, 15, 2 68-73. National Council of Teachers of Mathematics.
- Tavares, D., Pinto, H., Menino, H., Rodrigues, M. & Raínho, N. (2017). O conhecimento matemático de futuros professores dos primeiros anos: o caso dos números racionais. *Atas da VI Conferência Internacional: Investigação, Práticas e Contextos em Educação*.
- Thanheiser, E., Olanoff, D., Hillen, A., Feldman, Z., Tobias, J.M. & Welder, R. M. (2015). Reflective analysis as a tool for task redesign: The case of prospective elementary teachers solving and posing fraction comparison problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*. DOI : 10.1007/s10857-015-9334-7
- Thomas, N. D., Mulligan, J. T., & Goldin, G. A. (2002). Children's representation and structural development of the counting sequence 1–100. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(1), 117-133.
- Thompson, I. (1999). *Mental calculation strategies for addition and subtraction Part 1. Mathematics in school*, 28(5).
- Thompson, I. (2009). Mental calculation. *Mathematics Teaching*, 213, 40-42.
- Tobias, J. (2012). Prospective elementary teachers' development of fraction language for defining the whole. *Journal of Mathematics Teacher Education*. (DOI 10.1007/s10857-012-9212-5)
- Velez, I. (2020). *Tarefas na sala de aula: Prática letiva de professores do 3.º ano com representações matemáticas*. (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).
- Velez, I., & Ponte, J.P. (2015). Promoting the understanding of graph representations by grade 3 students. *Proceedings of 9th CERME Congress*. Charles University, Faculty of Education, Prague.
- Ventura, H; Oliveira, H (2009). As representações dos números racionais na resolução de problemas com recurso à barra como modelo. *Atas do XIX EIEM* — Vila Real
- Walshaw, M. (2012). Teacher knowledge as fundamental to effective teaching practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15, 181–185.
- Whitacre, I., & Nickerson, S. D. (2016). Investigating the improvement of prospective elementary teachers' number sense in reasoning about fraction magnitude.

- Journal of Mathematics Teacher Education*, 19, 57–77. (DOI 10.1007/s10857-014-9295-2)
- Wilkins, J.L.M. (2008). The relationship among elementary teachers' content knowledge, attitudes, beliefs, and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 139–164. DOI : 10.1007/s10857-007-9068-2
- Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 171-191.
- Woods, P. (1999). *Investigar a arte de ensinar*. Porto: Porto Editora.
- Wu, H. (2008). *Fractions, Decimals, and Rational Numbers*. Retirado em 3 de março de 2012 <http://math.berkeley.edu/~wu/NMPfractions4.pdf>
- Wyberg, T., Whitney, S., Cramer, K., Monson, D. & Leavitt, S. (2012) Unfolding fraction multiplication. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 17, 5, 289-294.
- Yackel, E., e Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.
- Yin, R. (2009). *Case study research: Design and methods* (4th edition). London: Sage.
- Zaslavsky, O. (2010). The challenge of listening. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 3–5.

Anexos

Anexo 1. Calendarização das fases do estudo

[illegible]

Anexo 2. Entrevista Inicial aos futuros professores

1) Experiências vividas enquanto aluno até ao ensino superior.

- a. Quantos anos de escolaridade frequentou a disciplina de Matemática? Com sucesso? Porquê?
- b. Lembra-se como era as suas aulas de Matemática (no ensino básico ou no ensino secundário)? Acha que estas aulas proporcionavam boas aprendizagens? Porquê?
- c. Lembra-se como aprendeu sobre números racionais no ensino básico?

2) Experiências vividas e a viver enquanto aluno do ensino superior.

- a. Quais as unidades curriculares que frequentou e que se debruçaram sobre tópicos relacionados com os números racionais? Acha que estas aulas proporcionavam uma boa forma de aprender? Porquê?
- b. Considera que as aprendizagens realizadas nos últimos cinco anos o prepararam adequadamente para ensinar números racionais? Porquê?
- c. Que expectativas tem sobre as aprendizagens que irá desenvolver no seu estágio? O que espera do professor cooperante? O que espera do supervisor da instituição de formação?

3) Perspetivas sobre a prática letiva

- a) O que é para si um bom ensino?
- b) Qual acha que deve ser o papel do professor na aula? E dos alunos?
- c) Como acha que se deve preparar uma aula? Quais os aspetos que devem ser tidos em conta? O que fazer quando os alunos parecem não saber um tópico que já foi trabalhado?

4) Conhecimento sobre números racionais e sobre o ensino dos números racionais

- a. Já teve contato com as planificações do professor cooperantes sobre os tópicos relativos aos racionais? As planificações seguem as orientações o programa de Matemática de 2007 ou 2013? Que dificuldades imagina que pode ter no ensino?
- b. Como está a pensar trabalhar estes tópicos?

5) Tem algum outro comentário que gostaria de fazer?

Anexo 3. Entrevista a meio do estágio aos futuros professores

- 1) Balanço geral sobre o ensino e aprendizagem constituído.
 - a. Como se sente relativamente à prática já realizada? Quais são os seus pontos fortes? Quais as fragilidades? Que dificuldades está a sentir?
 - b. O que é que aprendeu sobre números racionais e o seu ensino desde começou o estágio? Existe alguma situação relativamente ao ensino e aprendizagem que a tenha surpreendido?
 - c. Que efeitos pensa que teve a sua prática nas aprendizagens dos alunos? O tipo de alunos afetou as suas escolhas de como ensinar os tópicos? Que adaptações fez tendo em conta a realidade que encontrou?
 - d. Que outros aspetos influenciaram as escolhas que realizou sobre como ensinar determinados tópicos?

- 2) Tem algum outro comentário que gostaria de fazer?

Anexo 4. Entrevista final aos futuros professores

- 1) Mobilização de experiências enquanto aluno para a prática letiva.
 - a. Explique-me como foi o processo de planificação das aulas. Quais as fontes utilizadas? Quais as tarefas escolhidas e porquê? Define os objetivos? Como? Com quem?
- 2) Experiência vivida enquanto estagiário.
 - a. Por um momento, foque-se na matemática ou nos tópicos que ensinou. Pode dizer-me que tipo de assuntos é que conversou com o professor cooperante?
 - b. Agora foque-se nas tarefas e estratégias que usou. Pode dizer-me que tipo de assuntos é que conversou com o professor cooperante?
- 3) Perspetivas sobre o ensino - aprendizagem.
 - a. Depois desta experiência de prática letiva, o que é para si um bom ensino?
 - b. Qual o papel do professor na aula? E dos alunos?
 - c. Como se deve preparar uma aula? Quais os aspetos devemos ter em conta? (tipo de tarefas, antecipação das ações do professor e do aluno, entre outros)
 - d. Quando está em aula, o que fazer quando os alunos não sabem um tópico já trabalhado?
- 4) Conhecimento sobre racionais e sobre o seu ensino- aprendizagem
 - a. Como é que foram definidas as tarefas a propor? Como é que se estabelece esse processo? Quais as razões que levam a fazer determinadas opções? Quais os factores que influenciaram a construção/adaptação das tarefas propostas?
 - b. Qual o balanço relativamente ao trabalho conseguido? Foi ao encontro dos objectivos estabelecidos por si?

- c. Focando-se nos conhecimentos matemáticos, que aprendizagens que realizou? Agora, focando-se nos conhecimentos sobre como ensinar e aprender números racionais, que aprendizagens realizou?
- d. Qual a influencia do contexto de estágio nas suas aprendizagens? Qual o papel do professor cooperante nas aprendizagens desenvolvidas?

5) Balanco geral sobre o ensino e aprendizagem constituído.

- a. Como se sente sobre o seu ensino? Quais são os seus pontos fortes? Quais as fragilidades? Que dificuldades está a sentir?
- b. O que é que aprendeu sobre números racionais e seu ensino-aprendizagem desde começou o estágio?
- c. As escolhas que fez sobre como ensinar os vários tópicos sobre números racionais afetaram os alunos? Como?
- d. O tipo de alunos afetou as suas escolhas de como ensinar os tópicos? Como?
- e. Que outros aspetos (manuais, materiais e ferramentas) influenciaram as escolhas que realizou sobre como ensinar determinados tópicos?

6) Tem algum outro comentário que gostaria de fazer?

Anexo 5. Guião de entrevistas aos Supervisores da ESE

1- Sobre o processo supervisivo

- a) Como caracterizaria a prática formativa nas diferentes UC(s) na licenciatura e mestrado (DM; Mat)?
- b) Relativamente ao ensino e aprendizagem dos racionais que abordagens têm sido realizadas e defendidas?
- c) Quais as orientações para a planificação? E para a prática?

2- Sobre o processo supervisivo com estas alunas

- a) Como se tem desenrolado o processo supervisivo com este par? E com este cooperante?
- b) Quais os aspetos analisados quando trabalha as planificações? E quando vem observar a prática? Matemática e didática? Como fazem?
- c) É normal circular pelas mesas interagindo com os alunos? Porquê? (Só para a Berta)
- d) Como se organizam os estágios e o processo formativo?

3- Sobre cada estagiária

- a) Como caracteriza a XXXX como aluna da ESE?
- b) Tendo em conta o que já observou da XXXX , Como caracterizaria a prática letiva? (Tarefas, planificações, abordagens, questionamento, gestão da dinâmica)
- c) Como caracterizaria o conhecimento matemático da FP? E o conhecimento didático?
- d) Que aspetos considera que poderiam ser melhorados? Porquê?
- e) Qual o balanço que faz sobre o percurso formativo desta estagiária? E sobre o processo de prática supervisionada?
- f) Qual o balanço que faz desta aula? Quais os episódios críticos que destacaria? (Apenas para Berta)

Anexo 6. Guião de reflexão pós- aula e de análise do vídeo

1) Identificação e análise de um episódio crítico do vídeo:

- a. O que aconteceu? Porque aconteceu? Qual foi o resultado? O que deveria ter acontecido? Quais as ideias e noções matemáticas que emergiram da discussão? Que tipo de análise faz das participações dos alunos?
- b. Analisar os sinais de compreensão ou confusão dos alunos sobre um conceito ou uma ideia.
- c. Analisar as questões onde os alunos evidenciam compreensão ou a falta dela sobre os conceitos trabalhados.
- d. Analisar os significados das interações aluno-aluno e que oportunidades surgiram para a aprendizagem dos alunos.
- e. Analisar a exploração de raciocínios que os alunos apresentaram durante a aula.

2) Balanço geral da aula:

- a. Quais as fontes em que se suportou para seleccionar estas tarefas (manuais, brochuras, materiais de aulas na ESE)?
- b. Vi na aula de hoje (...) [depende de cada aula]. Porque é que utilizou esta abordagem, esta tarefa, determinadas estratégias e representação(ões)?
- c. Quais os desafios que estas estratégias apresentaram para si?

3) Balanço das ações realizadas pelo professor

- a. O que pensa sobre as explicações dadas por si aos alunos?
- b. Descreva e analise a forma como introduziu [um conceito, uma generalização, ou um algoritmo].
- c. Como lidou com as questões dos alunos? (colocar a questão adaptando a situações do vídeo)
- d. O que pensa sobre um determinado tipo de feedback que forneceu aos alunos? (colocar a questão adaptando a situações do vídeo)

-
- e. Focando-se nos conhecimentos matemáticos, que aprendizagens que realizou? Agora, focando-se nos conhecimentos sobre como ensinar e aprender números racionais, que aprendizagens realizou?

4) Tem algum outro comentário que gostaria de fazer?

Anexo 7. Guião de observação da prática letiva

A. Antecipação da aula (Análise da preparação e planificação)

- a. Os objetivos estão claros e percebe-se um propósito de ensino? Porquê?
- b. Como fundamenta as opções?
- c. Antecipa dificuldades e erros? Quais?
- d. Prevê estratégias e sequenciação da exploração? Como?
- e. Antecipa possíveis conexões e síntese final? Como?
- f. Outros aspetos decorrentes do plano de aula.

B. Aspetos a observar nas aulas videogravadas:

- a. Proposta da tarefa:
 - i. Tarefa (natureza, contexto e nível cognitivo).
 - ii. Modo de introdução da tarefa, apoiando a sua interpretação e apropriação pelos alunos.
 - i. Comunicação construída (tipo de questões, representações, situações de negociação de significados).
 - ii. Ações de gestão do ambiente de aprendizagem
- b. Exploração da tarefa em trabalho autónomo dos alunos:
 - i. Papel dos alunos e do professor.
 - ii. Comunicação construída (tipo de questões, representações, situações de negociação de significados).
 - iii. Ações de gestão do ambiente de aprendizagem
- c. Discussão coletiva e Síntese final
 - i. Comunicação construída (tipo de questões, representações, situações de negociação de significados).
 - ii. Sequenciação e exploração das estratégias utilizadas pelos alunos (incluindo erros e dificuldades).
 - iii. Ações de gestão do ambiente de aprendizagem
- d. Momentos de explicação e/ou explicações realizadas:
 - i. Comunicação construída (tipo de questões, representações, situações de negociação de significados).

-
- ii. Uma boa explicação matemática ...
 - 1. É significativa e fácil de entender
 - 2. Define os principais termos e conceitos de forma adequada
 - 3. Baseia-se e destaca as principais ideias matemáticas
 - 4. Explica o processo de pensamento passo-a-passo, sem pular etapas
 - 5. Faz as transições claras entre as etapas sucessivas
 - 6. Tem o público em mente, usa uma linguagem apropriada para o público
 - 7. Usa exemplos adequados e representações, se possível, e usa-os de forma adequada (por exemplo, quando explica um procedimento matemático, cada passo no procedimento é claramente modelado com representações visuais.
 - 8. Esclarece a questão em análise e mostra como deve ser respondida.
 - e. Aspectos gerais de gestão da sala de aula
 - i. Nível de desafio das perguntas e tarefas;
 - ii. Quem tem autoridade para julgar a robustez da matemática apresentada nas soluções ou estratégias;
 - iii. O professor faz conexões (ou coloca tarefas que promovam que os alunos realizem conexões) entre temas matemáticos e/ou entre tópicos da matemática;
 - iv. O professor faz conexões (ou coloca tarefas que promovam que os alunos realizem conexões) entre os tópicos matemáticos e outro tópico acadêmico;
 - v. O professor faz conexões (ou coloca tarefas que promovam que os alunos realizem conexões) entre temas matemáticos e uma situação da vida real;
 - vi. Os alunos escolham entre várias estratégias e métodos de resolução ou são apresentados métodos alternativos.
 - vii. O professor ou os alunos usam a tecnologia, materiais manipuláveis, para apoiar um conceito matemático;
 - viii. É dada especial atenção à linguagem (escrita, lida, ou falada);
 - ix. O professor usa ou incentiva os alunos a utilizar as múltiplas formas de representação para o mesmo problema.
 - x. Outros aspetos específicos de gestão do conhecimento construído (dependente de cada aula)

Anexo 8. Categorias, subcategorias e descritores para a análise de conteúdo

Categoria: Os números racionais e seus propósitos de ensino

Subcategorias	Descritores
Foco em procedimentos e processos matemáticos	Foco em algoritmos, regras e propriedades das operações e nos processos matemáticos identificar, representar, aplicar e avaliar.
Foco na compreensão para a aplicação de procedimentos e processos matemáticos	Foco nos significados das operações e relações entre procedimentos e representações e nos processos matemáticos interpretar, representar, aplicar e avaliar.
Foco na compreensão dos conceitos e processos matemáticos	Foco na relação entre representações, identificação da unidade de referência e processos matemáticos interpretar, representar, raciocinar e avaliar.

Categoria: Ensino-aprendizagem dos números racionais

Subcategorias	Sub Subcategorias	Descritores
Tarefas, sua natureza e características	Exercício	Tarefa com um nível de abertura baixo e o desafio que oferecem aos alunos também baixo
	Problema	Tarefa com um nível de abertura baixo e o desafio que oferecem aos alunos também alto
	Tarefa Exploratória	Tarefa com um nível de abertura alto e o desafio que oferecem aos alunos baixo
	Investigação	Tarefa com um nível de abertura alto e o desafio que oferecem aos alunos também alto
	Jogo	Tarefa com um nível de abertura médio-baixo e o desafio que oferecem aos alunos intermédio
	Contexto matemático	A tarefa é proposta com um contexto matemático.

	Contexto não matemático	A tarefa é proposta com um contexto não matemático
	Nível de Duração Longa	A tarefa é de longa duração na sua resolução.
	Nível de Duração Média	A tarefa é de média duração na sua resolução.
	Nível de Duração Curta	A tarefa é de curta duração na sua resolução.
	Desenho de tarefas	(Re)constrói tarefas definindo o tipo de contexto e procedimentos e/ou processos matemáticos a mobilizar
	Seleção e sequenciação de tarefas	Seleciona tarefas e sequencia-as definindo um percurso de trabalho
Aluno, seu papel e aprendizagens	Antecipa e/ou gere erros e dificuldades	Antecipa erros e dificuldades e/ou toma ações de gestão da aprendizagem.
	Antecipa e/ou gere resoluções diferentes	Antecipa diferentes resoluções corretas formais e informais e/ou interpreta ideias e resoluções inesperadas.
Representações	Representações pictóricas	Recorre e promove o recurso a representações como desenhos, esquemas ou modelos.
	Representações simbólicas	Recorre e promove o recurso a representações como números e símbolos e algoritmos.
Questões e explicações	Questão do tipo Inquirição	Questiona procurando que surja uma variedade de respostas legítimas.
	Questão do tipo Focalização	Questiona procurando que os alunos deem atenção a um dado ou condição.
	Questão do tipo Confirmação	Questiona procurando a resposta conhecida e esperada.
	Explicação	Quando os alunos têm dúvidas ou para sistematizar ideias, mostra como deve ser respondida uma dada questão.
Ações de promoção e	Convidar	Proporciona o envolvimento inicial dos alunos num dado momento.

gestão da aprendizagem nos diferentes momentos das aulas	Apoiar / Guiar	Conduz os alunos na resolução de uma tarefa já iniciada, de modo discreto ou explícito, através de perguntas ou por outras intervenções.
	Informar / Sugerir	Introduz informação, proporciona argumentos, ou valida respostas dos alunos.
	Desafiar	Coloca uma questão ou dá uma indicação que põe o aluno na situação de ser ele próprio a avançar nos processos matemáticos.
Ações de promoção e gestão do ambiente de aprendizagem nos diferentes momentos das aulas	Organizar	Gere materiais, o tempo e/ou os modos de trabalho.
	Regular	Gere os alunos de modo a participarem, apresentando as suas ideias, e/ou interajam discutindo entre si.
	Selecionar e sequenciar	Seleciona e sequencia diferentes resoluções.
	Orquestrar	Orquestra, corrige e/ou discute apresentações dos alunos.

Anexo 9. Autorização dos participantes

_____, ____ de _____ de 20____

Enquadramento do estudo

O trabalho a realizar com os alunos relativamente aos números racionais constitui uma grande preocupação dos professores. Primeiro, porque é um tema que surge ao longo de toda a escolaridade, frequentemente com muito menos sucesso que o desejado; segundo, porque é um tema matemática e pedagogicamente complexo; e, terceiro, porque constitui a base para ideias mais avançadas, como os conceitos algébricos, influenciando o sucesso dos alunos nos seus estudos posteriores. As orientações curriculares em vigor em Portugal, reforçam o papel dos números racionais, indicando-se a necessidade de os trabalhar desde os níveis elementares. Assim, o ensino-aprendizagem dos números racionais é um significativo desafio profissional, sendo importante compreender o conhecimento do futuro professor que ensina este tópico.

Nos últimos anos, para além das transformações curriculares ocorridas, também a formação inicial de professores sofreu mudanças decorrentes dos desafios do processo de Bolonha, tendo as estruturas dos cursos sofrido alterações, passando a envolver dois ciclos de formação, devendo-se dar atenção aos processos de formação de futuros professores e ao conhecimento constituído. Assim, o objetivo deste estudo é compreender o conhecimento de futuros professores de 2.º ciclo sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais analisando, a partir da prática supervisionada, o conhecimento manifestado pelos futuros professores e que estes reconhecem como relevante para a prática letiva.

Partindo do pressuposto que analisar o conhecimento dos professores é um empreendimento complexo, dada a sua íntima relação com a prática docente. A sua compreensão requer que o observemos na perspetiva dos principais atores (os futuros professores). Para tal devemos compreender as razões das suas opções, observando e refletindo com os professores as suas experiências na prática letiva e acompanhando o desenvolvimento do conhecimento para ensinar. Deste modo, esta investigação insere-se no paradigma interpretativo, tendo por base estudos de caso de quatro futuros professores de duas escolas superiores de educação. Como instrumentos de recolha de dados utilizam-se entrevistas, análise documental, diário de bordo, observação e gravação em vídeo de aulas. A análise de dados centra-se na interpretação dos

elementos recolhidos. Pretende-se proporcionar um contributo para a compreensão do conhecimento de futuros professores, de modo a conceber contextos de formação inicial que propiciem melhor conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem de números racionais no ensino básico, tópicos muito importantes no 2.º ciclo e que trazem grandes dificuldades aos alunos. Assim, os resultados deste estudo poderão contribuir para um refinamento do quadro teórico referente ao conhecimento necessário para e na prática letiva, compreendendo a sua natureza, o seu desenvolvimento e o modo como se relacionam a prática letiva.

A investigadora

Nadia Ferreira

Autorização

Eu _____, autorizo que Nadia Ferreira grave, em vídeo, as aulas lecionadas por mim no âmbito da prática pedagógica supervisionada, que grave em áudio as entrevistas realizadas e que analise os dados recolhidos em vídeo e áudio e os documentos produzidos durante a minha formação na Escola Superior de Educação. Desde que mantido o anonimato das identidades dos participantes, autorizo que dissemine os resultados e o conhecimento que advir desta investigação de modo a contribuir para o conhecimento da comunidade científica e da comunidade escolar (AERA, 2011)¹.

Data __/__/201... Assinatura: _____

¹ AERA (2011). Code of ethics. *Educational Researcher*, 40(3), 145-156. doi:10.3102/0013189X11410403

Anexo 10. Autorização do Diretor da Instituição Educativa

_____, ____ de _____ de 2014

Exmo (a). Sr (a). Diretor(a) do Agrupamento de escolas _____

Sou professora de Matemática, Mestre em Educação, pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Neste momento encontro-me a realizar o Doutoramento, em Didática da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

No âmbito da minha tese de doutoramento, estou a realizar uma investigação que pretende compreender o conhecimento de futuros professores de Matemática do 2.º ciclo sobre o ensino e aprendizagem de racionais.

Entre _____ e _____ de 2014 irei proceder à recolha de dados e gostaria de o fazer na turma do _____, da professora _____, que se mostrou disponível para colaborar neste estudo.

Para a recolha de dados é necessário proceder à gravação, em vídeo, de alguns episódios da aula de Matemática.

Assim, venho por este meio solicitar a autorização de V. Exa. para realizar a minha investigação, garantindo o anonimato da escola, da professora e dos alunos envolvidos, na tese ou em qualquer momento de divulgação do estudo.

Subcrevo-me com consideração, aguardando uma resposta favorável da parte de V. Exa.

A Investigadora

Anexo 11. Autorização dos Encarregados de Educação dos alunos

_____, ____ de Maio de 2014

Exmo(a). Sr(a). Encarregado(a) de Educação

Sou professora de Matemática e neste momento encontro-me a realizar o Doutoramento, em Didática da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. No âmbito da minha tese de doutoramento, estou a realizar uma investigação em que pretendo compreender o conhecimento de futuros professores de Matemática do 2.º ciclo sobre o ensino e aprendizagem de racionais.

A recolha de dados decorrerá durante o mês de Março, abril de 2014, na turma do seu educando, tendo sido autorizada pela Direção do Agrupamento. Para a recolha de dados é necessário proceder à gravação, em vídeo, de alguns episódios da aula de Matemática.

Assim, venho por este meio solicitar a sua autorização para vídeo-gravar o seu educando em contexto de sala de aula. Saliento ainda, que os dados recolhidos são usados exclusivamente como materiais de trabalho, estando garantida a privacidade e anonimato dos participantes. Mais informo que nunca serão publicadas quaisquer imagens do seu educando, sendo os dados recolhidos alvo de transcrição.

Manifesto, ainda, disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento que considere necessário. Para tal, pode contactar-me via telefone (966421790) ou por email (nadiadferreira@gmail.com).

Subcrevo-me com consideração, aguardando uma resposta favorável da parte de V. Exa.

A investigadora

Nadia Ferreira

≡<-----

Autorização

Eu _____ Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a) _____, N.º _____ da turma _____ do _____º ano, autorizo que a professora Nadia Ferreira grave em vídeo o meu educando na sala de aula de Matemática no âmbito da investigação que está a desenvolver e de acordo com as condições que apresentou.

Data ____/____/201... Assinatura: _____

Anexo 12. Planificação das Aulas 1, 2 e 3 de Berta

6.º C	TEMA: Números e Operações			
Tópicos	Objetivos específicos	Atividades/Estratégias	Recursos	Avaliação
Números racionais não negativos Noção e representação de número racional Comparação e ordenação Porcentagem	Compreender e usar um número racional como quociente, relação parte-todo, razão, medida e operador. Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas. Adicionar, subtrair, multiplicar e dividir números racionais não negativos representado em diferentes formas. Identificar e dar exemplos de frações equivalentes a uma dada fração e escrever uma fração na sua forma irredutível. Determinar o valor aproximado de um número e estimar a resposta a problemas envolvendo números inteiros e racionais não negativos. Compreender a noção de percentagem e relacionar diferentes formas de representar uma percentagem. Traduzir uma fração por uma percentagem e interpretá-la como o número de partes em 100. Calcular e usar percentagens.	Descrição das aulas 163 e 164 (90min): O professor inicia a aula, abrindo a lição. Começa por distribuir os alunos por pares de trabalho, para apresentar as tarefas que vão realizar em aula. Neste momento, distribui o enunciado (apêndice 24) a cada um dos alunos e faz a sua leitura. As duas tarefas são tratadas em separado. São esclarecidas dúvidas que possam existir, no que se refere aos termos e conceitos abordados no enunciado. O docente, durante este momento, tem um papel de orientador, devendo questionar os alunos, no sentido de os fazer pensar sobre as tarefas. São colocadas questões como: O que sabemos? Quais são as condições? O que queremos saber? Que conceitos matemáticos podem ser úteis? O professor informa os alunos do tempo que têm para realizar cada tarefa e avisa que depois se procederá a apresentação das conclusões. Isto acontece para todas as tarefas. Neste momento, os alunos começam a trabalhar com o seu par. O docente dá algum tempo para que os alunos possam discutir ideias e estratégias, mas, de seguida, deve passar por todos os grupos. Caso os alunos não consigam iniciar a tarefa ou se estiverem a pensar numa estratégia errada, o professor deve voltar a questioná-los. O docente observa o trabalho que cada grupo desenvolve e escolhe o grupo que quer que apresente a sua resolução, para cada uma das tarefas. Caso o professor escolha mais do que um grupo, para uma tarefa, o primeiro grupo a apresentar oralmente a resolução, será aquele que tem a estratégia mais simples e, por último, o grupo que	Quadro e caneta Caderno diário Enunciado da tarefa (apêndice 24) (Calculadoras) Dominó (apêndice 25)	Interesse demonstrado durante a aula. Participação na elaboração e discussão das tarefas. Aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente. Uso da terminologia adequada. Exposição oral das suas ideias de forma clara. Comportamento na sala de aula.

	Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos.	consegue obter uma melhor conclusão. Deve haver um porta-voz, que faz a apresentação oral e/ou escrita no quadro. O docente solicita muita atenção por parte dos colegas de turma, para que consigam colocar questões. O professor também deve colocar questões. Além disso, é necessário ter em atenção as diferentes representações por parte dos alunos (frações, decimais, percentagens). O professor deve fazer uma breve conclusão das ideias que surgiram durante a aula. No final da aula, mantendo os mesmos pares, os alunos jogam ao dominó dos números racionais (apêndice 25). Deste modo, o docente deve certificar-se de que os alunos relacionam as diferentes formas de representar números racionais. O professor termina a aula escrevendo o sumário no quadro. Os alunos devem fazer o registo no caderno diário.		
		Descrição das aulas 165 e 166 (90min): O professor inicia a aula, abrindo a lição. Neste momento, os alunos desenvolvem a tarefa do muro das frações, que deveria ter sido iniciada na aula anterior, tal como planificado (apêndice 24). De forma a não desperdiçar tempo, o professor deve desenvolver a primeira alínea com o grande grupo, para que os alunos compreendam e realizem a restante tarefa com o par. De seguida, apresenta a tarefa a realizar em aula. Neste momento, distribui o enunciado (apêndice 22) da tarefa a cada um dos alunos e faz a sua leitura. Há uma pequena discussão com os alunos sobre a temática das heranças, no sentido de perceberem do que trata a tarefa. São esclarecidas dúvidas que possam existir, no que se refere aos termos e conceitos abordados no enunciado. O docente, durante este momento, tem um papel de orientador, devendo questionar os alunos, no sentido de os fazer pensar sobre a tarefa. Deve, ainda, explicar a necessidade de comunicarem com clareza, expondo e justificando as suas ideias. São colocadas questões como: O que	Quadro e caneta Caderno diário Enunciado da tarefa (apêndice 24) Enunciado da tarefa (apêndice 22) (Calculadoras)	

	sabemos? Quais são as condições? O que queremos saber? Que conceitos matemáticos podem ser úteis? O professor informa os alunos do tempo que têm para realizar a tarefa e avisa que depois se procederá a apresentação das conclusões. Neste momento, os alunos começam a trabalhar com os seus pares. O docente dá algum tempo para que os alunos possam discutir ideias e estratégias, mas, de seguida, deve passar por todos os grupos. Caso os alunos não consigam iniciar a tarefa ou se estiverem a pensar numa estratégia errada, o professor deve voltar a questioná-los. Os alunos poderão ter mais dificuldades em saber o valor da herança total, para perceberem que parte da herança cabe a cada um dos filhos. O professor observa o trabalho que cada par desenvolve e escolhe quem quer que apresente a sua resolução, para cada alínea. Assim, deve privilegiar uma estratégia que pense que pode ajudar na compreensão dos colegas. Caso o docente escolha mais do que um grupo, para uma alínea, o primeiro grupo a apresentar oralmente a resolução, será aquele que tem a estratégia mais simples e, por último, o grupo que consegue obter uma melhor conclusão. Cada grupo deve escolher um porta-voz, que faz a apresentação oral e/ou escrita no quadro. O professor solicita muita atenção por parte dos colegas de turma, para que consigam colocar questões. O docente também deve colocar questões, que possam ajudar na compreensão da tarefa e nas relações que existem entre elas. O professor termina a aula escrevendo o sumário e o trabalho de casa no quadro. Os alunos devem fazer o registo no caderno diário.	
	Descrição das aulas 167 e 168 (90min): O professor inicia a aula, abrindo a lição. Neste momento, os alunos continuam a realizar a tarefa iniciada na aula anterior, tal como planificado (apêndice 22). De seguida, a tarefa é corrigida em grande grupo. O professor deve ter a preocupação de perceber se todos os alunos compreendem o que foi registado como conclusão.	Quadro e caneta Caderno diário Enunciado da tarefa (apêndice 23) (Calculadoras)

		Os pares de trabalho mantêm-se e o docente apresenta a tarefa que vão realizar em aula. Neste momento, distribui o enunciado (apêndice 23) da tarefa a cada um dos alunos e faz a sua leitura. Há uma pequena discussão com os alunos sobre a temática dos combustíveis e da sua alteração de preço, no sentido de perceberem do que trata a tarefa. São esclarecidas dúvidas que possam existir, no que se refere aos termos e conceitos abordados no enunciado. O professor, durante este momento, tem um papel de orientador, devendo questionar os alunos, no sentido de os fazer pensar sobre a tarefa. Deve, ainda, explicar a necessidade de comunicarem com clareza, expondo e justificando as suas ideias. O docente informa os alunos do tempo que têm para realizar a tarefa e avisa que depois se procederá a apresentação das conclusões. Neste momento, os alunos começam a trabalhar com os seus grupos, tentando responder à questão: Será que a gasolina voltou ao preço anterior?. O professor dá algum tempo para que os alunos possam discutir ideias e estratégias, mas, de seguida, deve passar por todos os grupos. São colocadas questões como: O que sabemos? Quais são as condições? O que queremos saber? Que conceitos matemáticos podem ser úteis? O que significa ter um aumento de 10%? Caso os alunos não consigam iniciar a tarefa ou se estiverem a pensar numa estratégia errada, o professor deve voltar a questioná-los. Poderão ter dificuldade em perceber a tarefa, pois não há referência ao preço da gasolina. Além disso, estão tentados a responder que a gasolina volta ao mesmo preço, pelo que o docente deve perguntar: O preço da gasolina é o mesmo em todos os locais de venda? E se supuserem um preço aceitável? Por que é que isto acontece? O docente deve incentivar os alunos a realizem cálculos com um valor, se não estiverem a conseguir avançar. O professor observa o trabalho que cada grupo desenvolve e escolhe os grupos que quer que apresentem a sua resolução. O primeiro grupo a apresentar oralmente a resolução, será aquele que tem a estratégia mais simples e, por último, o grupo que consegue obter uma melhor conclusão. Além disso, é necessário ter em atenção as diferentes representações por parte dos alunos (frações, decimais, percentagens).	

	Cada grupo deve escolher um porta-voz, que faz a apresentação oral e/ou escrita no quadro. O docente solicita muita atenção por parte dos colegas de turma, para que consigam colocar questões. O professor também deve colocar questões como: Por que escolheram este preço para a gasolina? Esse preço é razoável? Os resultados seriam diferentes se escolhessem outro preço? Por que razão os preços não voltam ao preço inicial, independentemente do valor escolhido? O que é que isso tem a ver com as percentagens? O valor do aumento e da descida alguma vez seriam iguais? Porquê? É importante que os alunos percebam o conceito de percentagem e que o relacionem com o de unidade, para entenderem que duas percentagens iguais, que incidem sobre unidades diferentes, não podem dar resultados iguais. Os alunos devem fazer o seguinte registo: Se a um dado valor A acrescentarmos 10% desse valor, obtemos um novo valor B, superior a A. Se, em seguida, ao valor B, retirarmos 10% desse valor, obtemos um terceiro valor C. O valor de C é menor do que o valor de A (inicial). O valor dos 10% de A é inferior ao valor dos 10% de B. O docente termina a aula escrevendo o sumário no quadro. Os alunos devem fazer o registo no caderno diário.	

Anexo 13. Planificação da Aula 4 de Berta

6.º C		TEMA: Números e Operações		
Tópicos	Objetivos específicos	Atividades/Estratégias	Recursos	Avaliação
Números racionais não negativos Percentagem	Compreender a noção de percentagem e relacionar diferentes formas de representar uma percentagem. Calcular e usar percentagens. Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos.	<u>Descrição das aulas 167 e 168 (90min):</u> O professor inicia a aula, abrindo a lição. O docente distribui o enunciado (apêndice 23) da tarefa a cada um dos alunos. Um dos elementos do par, escolhido pelo professor, faz a apresentação oral e escrita no quadro. O docente solicita muita atenção por parte dos colegas de turma, para que consigam colocar questões. O professor também deve colocar questões como: Por que escolheram este preço para a gasolina? Esse preço é razoável? Os resultados seriam diferentes se escolhessem outro preço? Por que razão os preços não voltam ao preço inicial, independentemente do valor escolhido? O que é que isso tem a ver com as percentagens? O valor do aumento e da descida alguma vez seriam iguais? Porquê? É importante que os alunos percebam o conceito de percentagem e que o relacionem com o de unidade, para entenderem que duas percentagens iguais, que incidem sobre unidades diferentes, não podem dar resultados iguais. Para isso, o professor utiliza cartolinas (uma tira é a unidade; outra tira que é a unidade e mais 10%; outra tira que é a nova unidade e se retira 10%). Os alunos devem fazer o seguinte registo: Se a um dado valor A acrescentarmos 10% desse valor, obtemos um novo valor B, superior a A. Se, em seguida, ao valor B, retirarmos 10% desse valor, obtemos um terceiro valor C. O valor de C é menor do que o valor de A (inicial). O valor dos 10% de A é inferior ao valor dos 10% de B.	Quadro e caneta Caderno diário Enunciado da tarefa (apêndice 23) (Calculadoras) Bostik	Interesse demonstrado durante a aula. Participação na elaboração e discussão das tarefas. Aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente. Uso da terminologia adequada. Exposição oral das suas ideias de forma clara. Comportamento na sala de aula.

Anexo 14. Tarefa 2 resolvida

Tarefa

Parte 1

Há muitos anos viveu um Rei que deixou em testamento aos seus quatro filhos toda a sua fortuna. Segundo as leis da época a sua fortuna teria de ser distribuída do seguinte modo:

- O filho mais velho receberia sempre $\frac{5}{10}$ da fortuna;

Os alunos devem perceber que a fração corresponde à metade da fortuna. Assim, podem associar a fração apresentada a $\frac{50}{100}$, 50%, 0,5.

- O filho mais novo receberia sempre a quarta parte da fortuna;

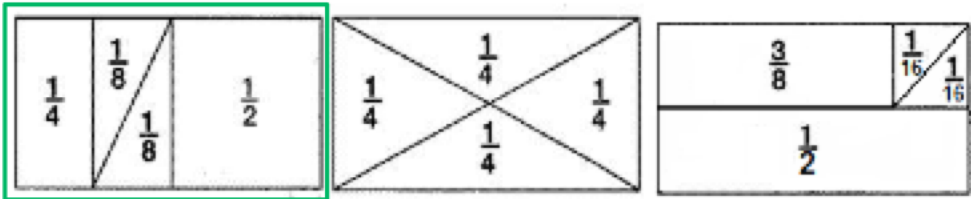
Os alunos devem perceber que a fração corresponde a $\frac{1}{4}$ da fortuna, logo a 25% da fortuna.

- Os restantes filhos receberiam igualmente a restante fortuna.

Os alunos devem perceber que cada um dos outros dois filhos recebe $\frac{1}{8}$ ou 12,5%.

Metade é para o filho mais velho							
				$\frac{1}{4}$ – filho mais novo			
						Filho 2	Filho 3

1.1. Qual das seguintes representações corresponde à distribuição da fortuna pelos quatro filhos? Porquê?



1.2. O valor da herança do filho mais velho foi calculado em 4 500 pesos reais. Quanto receberam, em pesos reais, os restantes filhos?

Filho mais velho – 50% da herança – 4500 pesos reais.

Os alunos podem perceber que a herança é de 9000 pelo cálculo $4500 \times 2 = 9000$.

Filho mais novo – 25% da herança – metade da herança do filho mais velho – 2250 pesos reais; ou $9000 : 4 = 2250$.

Dos outros dois filhos, cada um tem – 12,5% da herança – metade da herança do filho mais novo – 1125 pesos reais; ou $9000 : 8 = 1125$.

Caso não façam pela segunda opção, para perceberem se está correto, os alunos podem calcular $1125 \times 8 = 9000$ – que é o dobro do que recebe o filho mais velho, porque este recebe metade da fortuna.

1.3. Que percentagem da herança recebeu cada um dos filhos do meio?

Se o filho mais novo recebe 25% e se eles recebem metade da sua herança, então $25 : 2 = 12,5$. Dos outros dois filhos, cada um tem 12,5% da herança

1.4. Se tu fosses o Rei como dividias a fortuna pelos quatro filhos? Justifica a tua opção.

Penso que os alunos vão responder que dividiriam a herança igualmente pelos filhos.

1.4.1. De acordo com a tua opção que percentagem da fortuna recebia cada filho? Quanto recebiam em pesos reais?

Cada filho receberia – 25% - pois 100% para 4 filhos é 25%

Sendo a herança total de 9000 pesos reais, $9000 : 4 = 2250$

Parte 2

A distribuição dos anéis reais foi diferente. O Rei pegou na sua coleção de anéis de ouro e deu à sua única filha 40% dos anéis. Os outros filhos (homens) receberam em igual quantidade a restante parte da coleção de anéis. Um deles recebeu 5 anéis.

2.1. Que percentagem da herança coube a cada filho (homem)?

Se a filha recebeu 40%, então para os homens restou 60%. Como são 3 filhos homens $60:3=20$, logo cada um ficou com 20% dos anéis.

2.2. Assinala (X) que frações correspondem à parte da coleção de anéis que a filha recebeu?

$$\frac{4}{10} \quad \square$$

$$\frac{4}{25} \quad \square$$

$$\frac{2}{5} \quad \square$$

$$\frac{1}{5} \quad \square$$

2.3. Quantos anéis recebeu a filha?

Se a cada filho corresponde 20% dos anéis e se essa percentagem diz respeito a 5 anéis, então

Filho 1 – 20% - 5 anéis

Filho 2 – 20% - 5 anéis

Filho 3 – 20% - 5 anéis

Filha - 20% - 5 anéis e ainda 20% - 5 anéis, logo a filha tem 10 anéis.

Anexo 15. Tarefa 3 resolvida**Tarefa**

Como já deves ter dado conta, os preços dos combustíveis variam, com muita frequência, consoante o preço do barril de petróleo.

As bombas de combustível Petrolex Lda aumentaram o preço da gasolina em 10%, o que fez com que os automobilistas protestassem imenso. Perante isto, o Diretor da Petrolex Lda mandou voltar a baixar o preço da gasolina em 10%.

Será que a gasolina voltou ao preço anterior? Justifica a tua resposta.

O professor deve levar os alunos a experimentar valores para a gasolina, pois à partida a resposta é que a gasolina volta ao preço inicial.

10% do valor inicial = valor de aumento

Valor inicial + valor do aumento = novo valor

10% do novo valor = valor de desconto

Novo valor - valor de desconto = preço final

- o preço final é sempre mais baixo do que o preço inicial.

Exemplo: preço inicial – 1€

$$10\% \times 1 = 0,10 \times 1 = 0,10$$

$$1 + 0,10 = 1,10$$

$$10\% \times 1,10 = 0,10 \times 1,10 = 0,11$$

$$1,10 - 0,11 = 0,99$$

Exemplo: preço inicial – 1,5€

$$10\% \times 1,5 = 0,10 \times 1,5 = 0,15$$

$$1,5 + 0,15 = 1,65$$

$$10\% \times 1,65 = 0,10 \times 1,65 = 0,165$$

$$1,65 - 0,165 = 1,485$$

Exemplo: preço inicial – 2€

$$10\% \times 2 = 0,10 \times 2 = 0,20$$

$$2 + 0,20 = 2,20$$

$$10\% \times 2,20 = 0,10 \times 2,20 = 0,22$$

$$2,20 - 0,22 = 1,98$$

Anexo 16. Planificação da Aula 4 de Glória

18 de março de 2014			
Aula 45' Sumário: As propriedades da multiplicação.			
Domínio de Referência Objetivos Descritores de desempenho	Descrição da atividade/Estratégias/Experiências de aprendizagem	Recursos	Avaliação
Expressões algébricas 1. <i>Conhecer e aplicar as propriedades das operações</i> 1. Conhecer as prioridades convencionadas das operações de multiplicação.. 2. Reconhecer as propriedades associativa e comutativa da multiplicação e as propriedades distributivas da multiplicação relativamente à adição e à subtração e representá-las algebricamente. 3. Identificar 1 como o elemento neutro da multiplicação de números racionais não negativos e o 0 como elemento absorvente da multiplicação.	Rotina de sala de aula (Abertura da lição e sumário). Realização de uma ficha formativa sobre as propriedades da multiplicação. Projeta-se a ficha formativa e para a resolução de cada item da ficha solicita-se a dois alunos que venham resolver no quadro branco as duas operações propostas. Depois comenta-se o resultado e deduz-se a propriedade da multiplicação utilizada/apresentada e vai-se preenchendo a ficha. Resolução de exercícios da pág. 43 do manual.	PC Projetor Canetas de quadro branco Material de escrita Manual do aluno Ficha formativa ALG 5	Avaliação por observação direta focada no desempenho das tarefas propostas. Avaliação interativa.

Bibliografia: Programa e Metas Curriculares de Matemática (2013). Lisboa: Ministério da Educação.

Apêndice: Ficha formativa

Anexo 17. Aula 1: Multiplicação de números racionais

Ficha Formativa de Matemática - MULTIPLICAÇÃO DE RACIONAIS

5.º ANO

NOME: _____

Data ____/____/____

3×4 O triplo de quatro	$3 \times \square\square\square\square = \square\square\square\square\square\square\square\square\square\square = 12$
1. De acordo com o exemplo acima, pinta os espaços correspondentes nas figuras de modo a representarem as expressões numéricas indicadas.	
$3 \times 0,4$ O triplo de quatro décimas	$3 \times \begin{array}{ c c c c c } \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ c c c c c } \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{ c c c c c } \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = 1,2$
$3 \times \frac{1}{4}$ O triplo de um quarto	$3 \times \begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \frac{3}{4}$

2. Completa o quadro.

2×3 O de três	$2 \times \square\square\square = \dots\dots\dots = 6$
$2 \times \dots\dots\dots$ O dobro de três décimas	$2 \times \begin{array}{ c c c c c } \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ c c c c c } \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \dots\dots\dots$
$2 \times \frac{1}{3}$ O dobro de	$2 \times \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \text{—}$

3. Completa o quadro.

$\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$ Dois quintos de	$\frac{2}{5} \times \begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ c c c c c } \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \frac{2}{15}$ $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$
O produto de dois números representados por frações é uma fração em que o numerador é o produto dos e o denominador é o dos denominadores.	

Anexo 18. Aula 2: Tarefas 1, 2 e 3

NOME: _____

Data ____/____/____

1. Vê o vídeo e completa os espaços.

Para multiplicar
tenho só ações:
 os numeradores
e denominadores.



$$\frac{5}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{10}{21}$$

2. Inventa frações e efetua as multiplicações.

$$\frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$



3. A Marta comprou, a prestações, uma prancha de surf nova por 246€. Ela já pagou $\frac{2}{3}$ do total.

3.1. Quanto terá pago até agora?

3.2. Quanto dinheiro lhe falta entregar?

4. A Marta tinha imensos TPC para fazer no fim de semana. Os de Matemática eram $\frac{1}{4}$ dos TPC e a Marta conseguiu acabar apenas $\frac{2}{3}$.
Descobre que fração dos TPC conseguiu a Marta concluir.



Anexo 19. Aula 3: Propriedades das operações com números racionais**FICHA FORMATIVA DE MATEMÁTICA - PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO 5.º ANO**

NOME: _____

Data ____/____/____

Efetua os cálculos e completa o quadro.

Propriedade	
$\frac{3}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{\square}{\square}$	$\frac{7}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{\square}{\square}$
Propriedade	
$\left(\frac{3}{2} \times \frac{7}{3}\right) \times \frac{5}{4} = \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$	$\frac{3}{2} \times \left(\frac{7}{3} \times \frac{5}{4}\right) = \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$
Propriedade	
$\frac{3}{2} \times 0 =$	$0 \times \frac{3}{2} =$
Propriedade	
$\frac{3}{2} \times 1 = \frac{\square}{\square}$	$1 \times \frac{3}{2} = \frac{\square}{\square}$
Propriedade	
$\left(\frac{3}{2} + \frac{7}{3}\right) \times \frac{5}{4} = \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} + \frac{7}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$	
Propriedade	
$\frac{3}{2} \times \left(\frac{7}{3} - \frac{5}{4}\right) = \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ $\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} - \frac{7}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{\square}{\square} - \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$	

Anexo 20. Planificação da Aula 1 de Ana

26de março de 2014 – 5.º B				
Sumário:	Ficha de trabalho sobre as propriedades da multiplicação. O inverso de um número racional.			
Domínios de referência, objetivos	Descritores de Desempenho	Duração da aula Descrição da Atividade/ Estratégia	Materiais/ Recursos	Avaliação
Álgebra - Expressões Algébricas <i>1. Conhecer e aplicar as propriedades das operações</i>	1. Conhecer as prioridades convencionadas das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão e utilizar corretamente os parênteses; 2. Reconhecer as propriedades associativa e comutativa da adição e da multiplicação e as propriedades distributivas da multiplicação relativamente à adição e à subtração e representá-las algebricamente; 3. Identificar o 0 e o 1 como os elementos neutros respetivamente da adição e da multiplicação de números racionais não negativos e o 0 como elemento absorvente da multiplicação; 5. Identificar dois números racionais positivos como «inversos» um do outro quando o respetivo produto for igual a 1 e reconhecer que o inverso de um dado número racional positivo q é igual a $\frac{1}{q}$; 6. Reconhecer que o inverso de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$ (sendo a e b números naturais) e reconhecer que dividir por um número racional positivo é o mesmo do que multiplicar pelo respetivo inverso.	(90') Correção do trabalho de casa (propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração). Entrega das questões-aula. Demonstração da correção de um dos problemas propostos (o caracol e o poço). Ficha de consolidação das propriedades da multiplicação. Tarefa exploratória: Propõe-se aos alunos a representação pictórica de produtos de números racionais (por exemplo: $\frac{1}{3}$ de 3; $\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$). Pelas representações efetuadas os alunos descobrem a regularidade: o produto de um número pelo seu inverso é 1 e identificam que nas multiplicações efetuadas com frações, há a inversão do numerador pelo seu denominador. Como sistematização do conceito procede-se ao visionamento de um vídeo referente ao inverso de um número racional.	- questões-aula; - ficha de trabalho; - vídeo “O inverso”;	Avaliação formativa: regulação interativa e regulação retroativa

Anexo 21. Planificação da Aula 2 de Ana

27 de março de 2014 – 5.º B				
Sumário:	Ficha de trabalho sobre o inverso de um número racional.			
Domínios de referência, objetivos	Descritores de Desempenho	Duração da aula Descrição da Atividade/ Estratégia	Materiais/ Recursos	Avaliação
Álgebra - Expressões Algébricas 1. Conhecer e aplicar as propriedades das operações	5. Identificar dois números racionais positivos como «inversos» um do outro quando o respetivo produto for igual a 1 e reconhecer que o inverso de um dado número racional positivo q é igual a $\frac{1}{q}$; 6. Reconhecer que o inverso de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$ (sendo a e b números naturais) e reconhecer que dividir por um número racional positivo é o mesmo do que multiplicar pelo respetivo inverso.	(45') Propõe-se aos alunos que realizem alguns cálculos onde façam o produto de um número pelo seu inverso. Através dos resultados obtidos os alunos descobrem a regularidade: o produto de um número pelo seu inverso é 1. Estes são solicitados ainda a identificar a regularidade presente nas operações propostas, identificando que nas multiplicações efetuadas com frações, há inversão do numerador pelo seu denominador. Resolução de uma ficha de trabalho para a sistematização do conceito de inverso de um número racional.	- ficha de trabalho; - vídeo "O inverso";	Avaliação formativa: regulação interativa.

Anexo 22. Planificação da Aula 3 de Ana

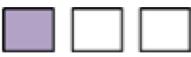
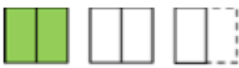
31 de março de 2014 – 5.º B				
Sumário:	Correção do T.P.C. Divisão de números racionais.			
Domínios de referência, objetivos	Descritores de Desempenho	Duração da aula Descrição da Atividade/ Estratégia	Materiais/ Recursos	Avaliação
Números e Operações – Números racionais não negativos 1 Efetuar operações com números racionais não negativos Álgebra - Expressões Algébricas 1. Conhecer e aplicar as propriedades das operações	7. Reconhecer que $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ (sendo a, b, c e d números naturais). 6. Reconhecer que o inverso de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$ (sendo a e b números naturais) e reconhecer que dividir por um número racional positivo é o mesmo do que multiplicar pelo respetivo inverso. 9. Reconhecer, dados números racionais positivos q, r, s e t, que $\frac{q}{r} = \frac{q \times t}{r \times s}$	(90') Correção do trabalho de casa (manual, página 45). Propõe-se aos alunos que resolvam alguns problemas de divisão de números racionais. Ao longo desta tarefa os alunos podem recorrer a cálculos, desenhos ou esquemas, sendo as estratégias aplicadas posteriormente discutidas. Esta exploração tem como objetivo descobrir as regularidades da divisão de números racionais, descobrindo que para dividir dois números racionais multiplica-se o dividendo pelo inverso do divisor. Resolução de uma ficha de trabalho para a sistematização do conceito da divisão de um número racional.	- manual; - ficha de trabalho de exploração; - ficha de trabalho de consolidação;	Avaliação formativa: regulação interativa.

Anexo 23. Planificação da Aula 4 de Ana

1 de abril de 2014 – 5.º B				
Sumário:	Divisão de números racionais.			
Domínios de referência, objetivos	Descritores de Desempenho	Duração da aula Descrição da Atividade/ Estratégia	Materiais/ Recursos	Avaliação
Números e Operações – Números racionais não negativos 1 Efetuar operações com números racionais não negativos Álgebra - Expressões Algébricas 1. Conhecer e aplicar as propriedades das operações	7. Reconhecer que $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ (sendo a, b, c e d números naturais). 6. Reconhecer que o inverso de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$ (sendo a e b números naturais) e reconhecer que dividir por um número racional positivo é o mesmo do que multiplicar pelo respetivo inverso. 9. Reconhecer, dados números racionais positivos q, r, s e t, que $\frac{q}{r} : \frac{s}{t} = \frac{q \times t}{r \times s}$	(45') Correção do problema um da ficha de trabalho da família MATS. Exploração das soluções apresentadas e identificação das estratégias subjacentes. Por exemplo, a conexão entre a representação simbólica e o modelo circular, enfatizando a divisão; aplicação do algoritmo IM e a divisão de frações.  Ilustração 1 - modelo circular. De seguida, continua-se a resolução da ficha de trabalho. Partindo das estratégias apresentadas pelos alunos, procede-se à correção e enfatiza-se a estratégia do uso do algoritmo IM (multiplicar o dividendo pelo inverso do divisor). Registo no caderno diário que para dividir dois números racionais multiplica-se o dividendo pelo inverso do divisor. Por exemplo: $\frac{8}{3} : \frac{5}{4} = \frac{8}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{32}{15} = 2 \frac{2}{15}$ Inverso	- ficha de trabalho;	Avaliação formativa: regulação interativa.

Anexo 24. Aula 2: Multiplicação de números racionais inversos

Efetua os cálculos e completa o quadro.

	Representação	Operação
$\frac{1}{4}$ de 4		
$\frac{1}{3}$ de 3		
$\frac{2}{5}$ de $\frac{5}{2}$		

Calcula:

a) $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{3}$

b) $\frac{3}{8}$ de $\frac{8}{3}$

Aprender que....

Dois números racionais são _____ um do outro quando o seu produto é igual a _____.

$$\frac{7}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{\square}{\square} = \square$$

Anexo 25. Aula 3: Divisão de números racionais

Resolve os problemas e explica o teu raciocínio

A Família MATS

A animação começa ao pequeno-almoço. O Filipe, o irmão mais velho, está a falar sobre o jogo de futebol da noite anterior. Está tão feliz que decide partilhar $\frac{1}{3}$ do seu chocolate com os seus dois irmãos, a Patrícia e o Samuel. Quanto recebeu cada um?

R: _____

No refeitório da escola houve a balbúrdia da hora do almoço. O Filipe tem de dividir dois litros de sumo pelos seus colegas. Cada copo leva $\frac{1}{4}$ de litro. Quantos copos encheu o Filipe?

R: _____

No final do dia, toda a família faz uma caminhada. Em meia hora percorrem $1\frac{3}{4}$ km. Quanto percorrem numa hora?