

UNIVERSIDADE DE LISBOA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



## **Formações e classes de Fitting**

Isabel Nobre

**Mestrado em Matemática**

Dissertação orientada por:  
Gracinda M.S. Gomes

2019



# Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à Professora Gracinda M. S. Gomes, orientadora desta dissertação de mestrado, por toda a ajuda e empenho na realização da mesma.

Aos meus pais, agradeço pelo incentivo e apoio que sempre me deram e que tornou possível os meus estudos e o alcance deste sucesso.

Ao Guilherme, pela constante presença e entusiasmo demonstrados ao longo desta grande viagem.

Agradeço ter sido integrada no projeto FCT, UID/MULTI/04261/2013 do centro de investigação CEMAT, pólo Ciências, o que me permitiu participar em vários encontros científicos e, assim, alargar os meus conhecimentos.

À Fundação Calouste Gulbenkian, agradeço a oportunidade de ter sido sua bolsista em 2016/2017 no âmbito do programa Novos Talentos em Matemática, período em que iniciei o estudo de tópicos ligados a esta área da Álgebra.

Uma palavra de agradecimento é também devida à Milestone Consulting, pelo prémio com que me felicitou em 2019.



# Resumo

Em Teoria dos Grupos, variedades, formações e classes de Fitting têm sido objeto de vasto estudo, sendo as classes de Fitting as classes, digamos, duais das formações. No âmbito dos Semigrupos Inversos, as variedades têm sido muito estudadas mas o mesmo não sucede com formações ou com classes de Fitting, sendo que o primeiro problema reside em encontrar as definições adequadas. É conhecido um conceito de formação para álgebras em geral e, portanto, para semigrupos inversos. Porém, este nem sempre permite obter os resultados desejados, o que nos levou a considerar formações especiais correspondentes a morfismos que separam idempotents, ditas *i*-formações. No que respeita a encontrar uma “boa” definição de classe de Fitting as dificuldades foram ainda maiores.

Tomámos como ponto de partida o estudo de formações e de classes de Fitting de grupos, tendo começado por estudar as classes dos grupos nilpotentes e dos grupos solúveis; que constituem exemplos de variedades, de formações e de classes de Fitting. Por outro lado, no âmbito dos semigrupos estudámos várias classes, e no caso dos semigrupos inversos mostrou-se essencial estudar a caracterização de congruências via kernel-traço para uso posterior.

Partindo de classes de grupos considerámos certas classes de semigrupos inversos associados, discutindo o impacto, umas nas outras, de serem variedade, formação ou classe de Fitting. Em alguns casos, os resultados obtidos foram apenas para semigrupos de Clifford. Atendendo à importância de saber como construir, em teoria dos grupos, um produto de formações ou de classes de Fitting que seja ainda uma classe do mesmo tipo, procurámos encontrar no caso inverso classes que fossem fechadas para certos produtos.

É importante ter presente que todos os semigrupos e grupos considerados neste trabalho são finitos, excepto se se disser explicitamente o contrário, e que esta dissertação não constitui um trabalho fechado, pois nela deixamos várias questões em aberto que planeamos continuar a explorar. Para além de perguntas no contexto inverso, colocam-se-nos problemas, por exemplo, no campo dos semigrupos completamente regulares ou no dos semigrupos ortodoxos, onde também podemos querer discutir classes do tipo formação ou de Fitting.

**Palavras-chave:** classe de Fitting, formação, grupos, semigrupos inversos.



# Abstract

In Group Theory, varieties, formations and Fitting classes have been object of extensive study, with the last being the "dual case" of formations. In the context of Inverse Semigroups, varieties have been widely studied, but the same is not true of formations or Fitting classes, with the first problem being finding the right definitions. There is a general concept of formation known for algebras in general, and, therefore, for inverse semigroups. However, this concept may not allow us to obtain the desired results, which led us to consider special formations corresponding to morphisms that separate idempotents, so called *i*-formations. In terms of finding a "good" definition of a Fitting class the difficulties were even greater.

We took as a starting point the study of formations and Fitting classes of groups, having started by studying the classes of nilpotent groups and soluble groups, which are examples of varieties, formations and Fitting classes. On the other hand, in the realm of semigroups we studied several classes, and in the case of inverse semigroups it became essential to study the characterization of congruences via kernel-trace, for later use.

Starting from group classes we considered certain associated inverse semigroup classes, discussing the impact on each other of being a variety, a formation, or a Fitting class. In some cases, the results obtained were only for Clifford semigroups. Given the importance of knowing how to build, in group theory, a product of formations or of Fitting classes that still is a class of the same type, naturally we sought to find in the inverse case classes that are closed for certain products.

It's important to keep in mind that all semigroups and groups considered in this study are finite, unless explicitly stated otherwise, and that this dissertation is not a closed work, for in it we leave several open questions that we plan to explore further. In addition to questions in the inverse context, problems arise, for example, in the field of completely regular semigroups or in the orthodox ones, where we may also want to discuss classes of formation or Fitting kind.

**Keywords:** Fitting class, formation, groups, inverse semigroups.



# Conteúdo

<b>1 Grupos</b>	<b>3</b>
1.1 p-grupos, $\pi$ -grupos e o Teorema de Sylow	4
1.2 Grupos nilpotentes e grupos solúveis	5
1.2.1 Comutadores	5
1.2.2 Série central	10
1.2.3 Grupos nilpotentes	16
1.2.4 p-nilpotência	19
1.2.5 Grupos solúveis	20
1.3 Variedades, formações e classes de Fitting de grupos	21
1.3.1 Conceitos e exemplos	22
1.3.2 Operadores de fecho	24
1.3.3 Operações	26
<b>2 Semigrupos</b>	<b>29</b>
2.1 Definições básicas	29
2.2 Semigrupos completamente regulares	35
2.3 Congruências	38
2.3.1 Congruências que separam idempotentes	44
2.4 Conjugação e subsemigrupos normais	47
2.5 Semigrupos inversos fundamentais	49
2.6 Semigrupos ortodoxos	50
<b>3 Formações e classes de Fitting de semigrupos inversos finitos</b>	<b>53</b>
3.1 Formações	53
3.2 Produto de formações	60
3.3 Classes de Fitting	66
3.4 Formações e classes de Fitting de semigrupos de Clifford	68
<b>4 Formações de outras classes de semigrupos finitos</b>	<b>73</b>
4.1 Semigrupos completamente regulares	73
4.2 Semigrupos regulares e semigrupos ortodoxos	76



# Lista de Figuras

2.1	"Caixa de ovos" . . . . .	32
2.2	Diagrama comutativo . . . . .	38
2.3	Diagrama comutativo . . . . .	43
3.1	"Operação em $U_1$ " . . . . .	56



# Lista de Símbolos

- $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  , 3  
 $(K)$  , 3  
 $(N, \tau)$  , 39, 77  
 $1$  , 4  
 $\langle N_1, N_2 \rangle$  , subsemigrupo de um semigrupo inverso gerado por  $N_1 \cup N_2$ , 46  
 $\langle X \rangle$  , 7  
 $A\xi$  , 37  
 $C_G(H)$  , 5  
 $D_a$  , 31  
 $E(A)$  , 29  
 $Ee$  , 49  
 $F(G)$  , 16  
 $For(S)$  , 55  
 $G'$  , 10  
 $G^{(n)}$  , 10  
 $G^\mathcal{V}$  ,  $\mathcal{V}$ -resíduo de um grupo  $G$ , 22  
 $G_1 \times \dots \times G_n$  , 16  
 $G_\mathcal{V}$  ,  $\mathcal{V}$ -radical de um grupo  $G$ , 22  
 $H \text{ char } G$  ,  $H$  é um subgrupo característico de um grupo  $G$ , 8  
 $H^G$  , 8  
 $H_a$  , 31  
 $HsnG$  ,  $H$  é um subgrupo subnormal de um grupo  $G$ , 17  
 $IJ$  , 30  
 $J_a$  , 31  
 $L_a$  , 31  
 $N \trianglelefteq G$  ,  $N$  é um subgrupo normal de um grupo  $G$ , 5  
 $N \trianglelefteq S$  ,  $N$  é um subsemigrupo normal de um semigrupo inverso  $S$ , 39  
 $N \trianglelefteq_i S$  ,  $N$  é um subsemigrupo i-normal de um semigrupo inverso  $S$ , 48  
 $N_0\mathcal{X}$  , 25  
 $N_G(H)$  , 4  
 $Q\mathcal{X}$  , 25  
 $R_0\mathcal{X}$  , 25  
 $R_a$  , 31  
 $S(e, f)$  , 50  
 $S\mathcal{X}$  , 25  
 $S^1 a S^1$  , 31  
 $S^1 a$  , 30  
 $S^1$  , 30  
 $S^\mathcal{F}$  ,  $\mathcal{F}$ -resíduo de um semigrupo inverso  $S$ , 62  
 $S_\mathcal{C}$  ,  $\mathcal{C}$ -radical de um semigrupo inverso  $S$ , 70  
 $S_n\mathcal{X}$  , 25  
 $Sl$  , 29  
 $Syl_p(G)$  , 4  
 $T_E$  , 49  
 $T_{e, f}$  , 49  
 $V(a)$  , 32  
 $Var(S)$  , 54  
 $X_1^g$  , 8  
 $X_1^{X_2}$  , 8  
 $Z(G)$  , centro de um grupo  $G$ , 5  
 $Z(S)$  , centro de um semigrupo inverso  $S$ , 37  
 $Z_i(G)$  , 14  
 $[G : H]$  , 4  
 $[X_1, \dots, X_n]$  , 7  
 $[X_1, X_2]$  , 7  
 $[x, y]$  , 5  
 $[x_1, \dots, x_n]$  , 5  
 $\Delta$  , 44  
 $\cup_{\alpha \in Y} S_\alpha$  , 36  
 $\gamma_i(G)$  , 10  
 $\leftrightarrow$  , 17  
 $\leq$  , 3  
 $\mathcal{A}$  , 22  
 $\mathcal{C}\mathcal{R}$  , 74

$\mathcal{C}_1 \diamond \mathcal{C}_2$ , produto de Fitting de duas classes de semigrupos inversos, 70	$\mathcal{X}\mathcal{Y}$ , classe produto de duas classes de grupos, 26
$\mathcal{C}_1 \diamond \mathcal{C}_2$ , produto de Fitting de duas classes de grupos, 27	$\mathcal{X}^0$ , potência 0 de uma classe de semigrupos inversos, 61
$\mathcal{C}$ , 26	$\mathcal{X}^0$ , potência 0 de uma classe de grupos, 26
$\mathcal{D}$ , 31	$\mathcal{X}^n$ , potência $n$ de uma classe de semigrupos inversos, 61
$\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$ , formação produto de duas classes de semigrupos inversos, 65	$\mathcal{X}^n$ , potência $n$ de uma classe de grupos, 26
$\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$ , formação produto de duas classes de grupos, 26	$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ , classe de semigrupos de Clifford 70
$\mathcal{Fund}$ , 49	$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ , classe de semigrupos inversos, 56
$\mathcal{G}$ , 24	$\mathcal{L}_{\mathcal{Y}}$ , classe de semigrupos completamente regulares, 73, 74
$\mathcal{H}^b$ , 46	$\mu$ , 45
$\mathcal{H}$ , 31	$\nabla$ , 44
$\mathcal{I}(X)$ , 37	$\pi'$ , 19
$\mathcal{Inv}$ , 54	$\pi_i$ , 21
$\mathcal{J}$ , 31	$\rho^{\natural}$ , 36
$\mathcal{L}$ , 30	$\rho_N$ , 45
$\mathcal{N}^p$ , 24	$\rho_{(N,\tau)}$ , 39
$\mathcal{N}_{\pi}$ , 24	$\rho_{max}$ , 41
$\mathcal{N}$ , 1	$\rho_{min}$ , 41
$\mathcal{O}rt$ , 76	$\sigma$ , 43
$\mathcal{R}eg$ , 76	$\sim_{\circ}$ , 48
$\mathcal{R}$ , 30	$\sim_p^*$ , 47
$\mathcal{S}_p$ , 24	$\sim_p$ , 47
$\mathcal{S}_{\pi}$ , 24	$\tau^H$ , 43
$\mathcal{S}$ , 24	$\rightarrow$ , 17
$\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ , classe de semigrupos de Clifford 68	$\tau/\rho$ , 38
$\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ , classe de semigrupos inversos, 56	$aS^1$ , 30
$\mathcal{U}_{\mathcal{Y}}$ , classe de semigrupos completamente regulares, 74	$a \leq b$ , 34
$\mathcal{U}$ , 49	$a^0$ , 75
$\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ , classe de semigrupos de Clifford 68	$a^{-1}$ , 73
$\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ , classe de semigrupos inversos, 56	$ker \phi$ , kernel de um morfismo $\phi$ , 38
$\mathcal{W}_{\mathcal{Y}}$ , classe de semigrupos completamente regulares, 74	$ker \rho$ , kernel de uma congruência $\rho$ , 39
$\mathcal{X}\mathcal{Y}$ , classe produto de duas classes de semigrupos inversos 60	$p'$ , 19
	$tr \rho$ , 39
	$x^y$ , 5
	$ G $ , 4





# Introdução

A teoria dos semigrupos começou a desenvolver-se a partir de tentativas de generalizar a teoria dos grupos, mais propriamente tentando estender para semigrupos de transformações num conjunto resultados conhecidos sobre grupos de permutações. É claro que são as transformações parciais injetivas aquelas que mais se aproximam de permutações. Os semigrupos inversos surgem então como semigrupos destas transformações ditas bijeções parciais. A maior aproximação dos semigrupos inversos a grupos tornou possível a procura de teoremas estruturais modelados por aqueles já conhecidos em teoria dos grupos. Se efetuarmos uma pesquisa histórica da teoria dos semigrupos inversos notamos que a origem e desenvolvimento destes teve dois pontos de partida diferentes, mas basicamente semelhantes; um devido a V. Wagner e outro a G. Preston. V. Wagner introduziu os semigrupos inversos em 1952 como semigrupos regulares com idempotentes que comutam, chamando-lhes "grupos generalizados". Em 1953, foi provado por A. Liber que a definição de Wagner é equivalente a todo o elemento do semigrupo possuir um inverso único. O termo "semi-grupo inverso" só surgiu em 1954 com G. Preston que, independentemente, descobriu esta classe de semigrupos. Em 1984, M. Petrich num seu livro [23] procurou sistematizar o mais importante do que era conhecido à data sobre teoria dos semigrupos inversos.

Com os trabalhos de G. Birkhoff [6] e B.H. Neumann [20], o estudo da teoria de classes de álgebras e, em particular, de classes de grupos, ocorre explicitamente nos anos 30. Surge então o conceito de variedade de álgebras. Por vários anos este conceito não mereceu grande atenção, porém, como parte da Álgebra Universal, despertou grande interesse no final dos anos 40 entre aqueles que tiveram acesso às palestras de P. Hall em Cambridge. Por volta de 1970, A. Maltsev virou o foco para outras classes que não as de variedades, e o interesse por formações de grupos surgiu com o trabalho de W. Gaschütz [13] em 1962 e de R. W. Carter e T. Hawkes [7] em 1967. Desde então o estudo de variedades, formações e classes de Fitting de grupos tem tido uma enorme importância. Historicamente, o primeiro exemplo de uma classe de Fitting é a classe  $\mathcal{N}$  dos grupos nilpotentes - provado por H. Fitting em 1938. A classificação de grupos finitos solúveis, em paralelo com a classificação de grupos simples, viu um enorme desenvolvimento nos anos 60 e 70 do último século, com a grande quantidade de artigos que foram publicados. Em 1992, K. Doerk e T. Hawkes começaram a escrever o livro [11] que seria um marco histórico no estudo de classes de grupos finitos solúveis. Um enorme número de resultados no caso finito também pode ser encontrado no livro de A. Ballester-Bolinches e L. M. Ezquerro [3].

Variedades de semigrupos e variedades de semigrupos finitos (ou pseudovariedades) também foram objeto de interesse de muitos e a conexão entre variedades de semigrupos finitos e variedades de linguagens regulares estabelecida por Eilenberg em 1976 [12] desempenhou um papel crucial no desenvolvimento da interação entre Álgebra e Computação Teórica. À semelhança da teoria desenvolvida por Eilenberg, A. Ballester-Bolinches, J. E. Pin e X. Soler-Escrivà mostraram em [4] que as formações de semigrupos finitos correspondem também a classes de linguagens regulares, naturalmente chamadas formações.

No que diz respeito ao conceito de classe de Fitting (classes que de entre as classes de grupos são,

num certo sentido, duais das formações), quando se tenta estender a semigrupos, mesmo que em semigrupos inversos, surge um grande problema: qual a noção “certa” de subsemigrupo normal? A própria noção de conjugado, que lhe está associada, é por si só um grande problema pois varia de acordo com a classe que se considera (ver [1]).

A nossa dissertação está organizada em quatro capítulos. No primeiro capítulo, estudamos alguns aspetos de teoria dos grupos de modo a aumentar conhecimentos e permitir uma análise de alguns conceitos e resultados que mais tarde tentaremos modificar e estender adequadamente a semigrupos inversos finitos. Começamos por estudar grupos nilpotentes e grupos solúveis, exemplos que vão surgir no âmbito do estudo sobre variedades, formações ou classes de Fitting de grupos.

O segundo capítulo contém definições e resultados sobre semigrupos e, em particular, sobre semigrupos inversos, que serão os pilares para desenvolver o capítulo seguinte. Neste capítulo, refletimos ainda sobre o conceito de conjugado num semigrupo e, conseqüentemente, sobre o conceito de subsemigrupo normal, o qual será importante posteriormente no tratamento das classes de semigrupos e respetivos produtos. Para semigrupos inversos, considerámos primeiro o conceito de subsemigrupo normal de M. Petrich [23] e obtivemos alguns resultados. Mais tarde, adotámos como definição de normal o kernel de uma congruência que separa idempotentes – para evitar confusão chamamos a estes semigrupos i-normais.

No terceiro capítulo exploramos os conceitos de variedade e de formação de semigrupos inversos, conceitos estes motivados pelo estudo de [2] e [4], e com o auxílio de [3] definimos produto de formações de semigrupos inversos. Naturalmente perguntámo-nos neste capítulo se se podiam considerar classes de Fitting de semigrupos inversos, em particular de semigrupos de Clifford, e se sim como deveria ser o seu produto.

No último capítulo surge a ideia de generalizar os conceitos de formação e de classe de Fitting a outras classes de semigrupos, nomeadamente de semigrupos regulares, de completamente regulares ou de ortodoxos.

Atenção: Este trabalho trata de semigrupos e grupos finitos, mas é claro que no primeiro e segundo capítulos poderão aparecer semigrupos ou grupos infinitos clandestinamente. No entanto, o leitor deverá considerar que todos os semigrupos e grupos são finitos, excepto quando obviamente o não são.

# Capítulo 1

## Grupos

Este capítulo tem como primeiro objetivo alargar conhecimentos sobre teoria dos grupos e em seguida permitir uma análise de alguns resultados e ideias mais importantes para o nosso estudo, os quais serão úteis na compreensão e resultante aplicação a classes de semigrupos inversos nos últimos capítulos. Por essa razão, a escolha das demonstrações apresentadas relaciona-se com a necessidade de desenvolver alguma flexibilidade em teoria dos grupos e com a aplicação dos resultados noutras secções, ou até mesmo na respetiva secção.

Começamos por estudar grupos nilpotentes e grupos solúveis mas antes de prosseguirmos com a definição destes grupos será necessário desenvolver uma certa agilidade com cálculos de comutadores e é o que tentaremos fazer na secção 1.2.1. Veremos ainda algumas identidades que nos permitirão desenvolver propriedades em comutadores de subgrupos. Na secção 1.2.2, introduziremos os conceitos de série central inferior e superior, o que nos permitirá definir grupo nilpotente na secção 1.2.3. Na secção 1.2.3 veremos ainda alguns exemplos de grupos nilpotentes, em particular, enunciaremos que, para um número primo  $p$ , todo o  $p$ -grupo finito é nilpotente, sendo que é na secção 1.1 que introduziremos o conceito de  $p$ -grupo, entre outros necessários mais adiante. Na secção 1.2.4 definimos a noção de  $\pi$ -subgrupo de Hall, o qual leva à consideração de grupos  $p$ -nilpotentes para um dado número primo  $p$  e, finalmente, na secção 1.2.5 introduziremos o conceito de grupo solúvel.

Segue-se a secção 1.3, onde veremos que todas estas classes de grupos enunciadas acima serão exemplo de variedade, de formação ou de classe de Fitting de grupos, conceitos estes que definiremos na secção 1.3.1. Na secção 1.3.2 veremos definições alternativas para formação ou classe de Fitting de grupos e, por último, introduziremos o conceito de classe produto na secção 1.3.3.

Para uma leitura mais detalhada sobre estes temas, o leitor poderá consultar por exemplo [3] ou [26].

No decorrer deste capítulo e seguintes, admitiremos que uma classe  $\mathcal{X}$  de álgebras de tipo  $(\tau)$  é uma coleção não vazia de álgebras de tipo  $(\tau)$  onde se  $A \in \mathcal{X}$ , então toda a álgebra isomorfa a  $A$  pertence a  $\mathcal{X}$ .

Se  $K$  é um conjunto de álgebras de tipo  $(\tau)$ , usaremos  $(K)$  para denotar a menor classe de álgebras de tipo  $(\tau)$  que contém  $K$ , e, se  $K = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , escreveremos  $(K) = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ .

As classes de álgebras podem ser parcialmente ordenadas por inclusão e dadas duas classes  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ , iremos denotar o facto de  $\mathcal{X}$  ser uma subclasse de  $\mathcal{Y}$  por  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ .

Escreveremos ainda  $B \leq A$  se  $A$  e  $B$  forem álgebras do mesmo tipo tais que  $B$  é subálgebra de  $A$ .

Para mais informações sobre Álgebra Universal, poderá ser consultado, por exemplo, [5].

## 1.1 $p$ -grupos, $\pi$ -grupos e o Teorema de Sylow

No que se segue, denotaremos por  $|G|$  a ordem de um grupo finito  $G$  e por  $[G : H]$  o índice de um subgrupo finito  $H$  em  $G$ .

Os próximos resultados podem encontrar-se por exemplo em [26].

**Definição 1.1.1.** Seja  $p$  um número primo. Um grupo finito  $G$  diz-se um  $p$ -grupo se  $|G|$  é uma potência de  $p$ .

Pelo Teorema de Lagrange, a ordem de cada elemento de um  $p$ -grupo também deve ser uma potência de  $p$ . Mais geralmente,

**Definição 1.1.2.** Dado  $\pi$  um conjunto de números primos, dizemos que um grupo finito  $G$  é um  $\pi$ -grupo se todos os primos  $p$  divisores de  $|G|$  pertencem a  $\pi$ .

Recordemos que

**Definição 1.1.3.** Um grupo abeliano ou comutativo é um grupo  $G$  onde  $xy = yx$ , para  $x, y \in G$ .

Equivalentemente, um grupo abeliano é um grupo  $G$  onde  $x^{-1}y^{-1}xy = 1$ , para  $x, y \in G$ .

**Proposição 1.1.4.** Se  $p$  é um número primo, todos os grupos de ordem  $p^2$  são abelianos.

**Definição 1.1.5.** Sejam  $G$  um grupo finito e  $p$  um número primo que divide  $|G|$ . Se  $k$  é o maior natural tal que  $p^k$  divide  $|G|$ , então qualquer subgrupo de  $G$  de ordem  $p^k$  é denominado por  $p$ -subgrupo de Sylow de  $G$ . Denotamos por  $Syl_p(G)$  o conjunto de todos os  $p$ -subgrupos de Sylow de  $G$ .

Iremos recordar com o próximo resultado que  $p$ -subgrupos de Sylow de  $G$  existem sempre e que quaisquer dois são conjugados - então, em particular, todos os  $p$ -subgrupos de Sylow de  $G$  são isomorfos.

De modo a não sobrecarregar a escrita, a partir de agora denotaremos por  $1$  o grupo trivial  $\{1\}$ .

**Teorema 1.1.6** (Teorema de Sylow). *Sejam  $G$  um grupo finito e  $p$  um número primo. Escreva-se  $|G| = p^k m$  onde o inteiro  $m$  não é divisível por  $p$ . Então,*

- (i) Existe  $H \leq G$  tal que  $|H| = p^k$ , i.e.  $H$  é um  $p$ -subgrupo de Sylow;
- (ii) Qualquer  $p$ -subgrupo  $R$  de  $G$  está contido num  $p$ -subgrupo de Sylow;
- (iii) Todos os  $p$ -subgrupos de Sylow são conjugados em  $G$ ;
- (iv)  $|Syl_p(G)|$  divide  $|G|$  e é congruente com 1 módulo  $p$ . Além disso, se  $H \in Syl_p(G)$ , então  $|Syl_p(G)| = [G : N_G(H)]$ .

Relativamente ao grupo  $N_G(H)$  que surge acima, recordemos que se trata do normalizador de  $H$  em  $G$ .

**Definição 1.1.7.** Seja  $H$  um subgrupo de um grupo  $G$ . O normalizador de  $H$  em  $G$  é definido por

$$N_G(H) := \{g \in G : g^{-1}Hg = H\} = \{g \in G : Hg = gH\}.$$

Se  $K \subseteq N_G(H)$  para algum subgrupo  $K$  de  $G$  dizemos que  $K$  normaliza  $H$ .

Note-se que se  $K \subseteq N_G(H)$ , então  $HK = KH$  e  $HK \leq G$ .

**Definição 1.1.8.** Um subgrupo  $N$  de um grupo  $G$  é um *subgrupo normal*, e escrevemos  $N \trianglelefteq G$ , se  $g^{-1}Ng = N$  para qualquer  $g \in G$ .

Equivalentemente, um subgrupo  $N$  de um grupo  $G$  é normal se  $Ng = gN$  para qualquer  $g \in G$  e, portanto, se  $N_G(N) = G$ .

Recordemos também que se  $G$  é um grupo e  $N \trianglelefteq G$ , então os subgrupos (normais) de  $G/N$  são da forma  $L/N$  onde  $N \trianglelefteq L \leq G$  ( $N \trianglelefteq L \trianglelefteq G$ ).

Outro conceito que será necessário mais adiante é o conceito de centralizador de um grupo.

**Definição 1.1.9.** Seja  $H$  um subgrupo de um grupo  $G$ . O *centralizador de  $H$  em  $G$*  é definido por

$$C_G(H) := \{x \in G : \forall k \in H, kx = xk\}.$$

Se  $K \subseteq C_G(H)$  para algum subgrupo  $K$  de  $G$  dizemos que  $K$  *centraliza  $H$* . Em particular definimos o *centro* de um grupo

$$Z(G) := C_G(G).$$

Observe-se que  $K \subseteq C_G(H)$  se e só se  $H \subseteq C_G(K)$ , no entanto  $K \subseteq N_G(H)$  não implica que  $H \subseteq N_G(K)$ .

Voltemos a nossa atenção novamente para o Teorema de Sylow e enunciemos duas consequências deste:

**Corolário 1.1.9.1.** *Sejam  $G$  um grupo finito e  $p$  um número primo que divide  $|G|$ . Um  $p$ -subgrupo de Sylow  $K$  de  $G$  é um subgrupo normal de  $G$  se e só se  $G$  tem um único  $p$ -subgrupo de Sylow.*

**Teorema 1.1.10** (Teorema de Cauchy). *Se  $p$  é um número primo que divide a ordem de um grupo finito  $G$ , então o grupo  $G$  contém um elemento de ordem  $p$ .*

## 1.2 Grupos nilpotentes e grupos solúveis

### 1.2.1 Comutadores

**Definição 1.2.1.** Dados um grupo  $G$  e  $x, y \in G$ , definimos

$$[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy$$

o *comutador de  $x$  e de  $y$* .

Mais geralmente, dados  $x_1, \dots, x_n \in G$ , definimos recursivamente

$$[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n],$$

onde por convenção  $[x_1] = x_1$ .

**Observação 1.2.2.**  $x, y \in G$  comutam se e só se  $[x, y] = 1$ .

Veremos adiante que esta observação leva a uma ligação natural entre elementos no centro de um grupo e comutadores triviais.

**Definição 1.2.3.** Dados um grupo  $G$  e  $x, y \in G$ , dizemos que

$$x^y := y^{-1}xy = x[x, y]$$

é o conjugado de  $x$  por  $y$ .

*Observação 1.2.4.*  $x, y \in G$  comutam se e só se  $x^y = x$ .

Listamos agora algumas propriedades básicas de comutadores atribuídas a P. Hall [17] (1933) e a E. Witt [30] (1937).

**Teorema 1.2.5.** *Sejam  $G$  um grupo e  $x, y, z \in G$ . Então,*

$$(i) [y, x] = [x, y]^{-1};$$

$$(ii) [xy, z] = [x, z]^y [y, z] = [x, z][x, z, y][y, z],$$

$$[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z];$$

(iii) *Se  $\sigma : G \rightarrow H$  é um morfismo entre grupos, então*

$$[x, y]^\sigma = [x^\sigma, y^\sigma].$$

*Em particular,  $[x, y]^z = [x^z, y^z]$ ;*

$$(iv) [x^{-1}, y] = ([x, y]^{x^{-1}})^{-1},$$

$$[x, y^{-1}] = ([x, y]^{y^{-1}})^{-1};$$

$$(v) [x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1. \text{ (Identidade de Hall-Witt)}$$

*Demonstração.* As alíneas (i), (ii) e (iii) são claras e seguem por cálculos triviais. Na última parte de (iii), toma-se o morfismo  $\sigma : G \rightarrow G$ ,  $x \mapsto z^{-1}xz$ .

Para demonstrar a primeira condição da alínea (iv), basta reparar que por (ii) se tem

$$[xx^{-1}, y] = [x, y]^{x^{-1}} [x^{-1}, y]$$

e que  $[xx^{-1}, y] = [1, y] = 1$ . Consequentemente,  $[x, y]^{x^{-1}} [x^{-1}, y] = 1$ , donde  $[x^{-1}, y] = ([x, y]^{x^{-1}})^{-1}$ . A segunda condição segue de modo análogo.

Para a alínea (v) note-se que, por definição de comutador, de conjugado e pela alínea (i), temos

$$\begin{aligned} [x, y^{-1}, z]^y &= y^{-1} [x, y^{-1}, z] y = y^{-1} [x, y^{-1}]^{-1} z^{-1} [x, y^{-1}] z y \\ &= y^{-1} [y^{-1}, x] z^{-1} [x, y^{-1}] z y = (y^{-1})^x z^{-1} [x, y^{-1}] z y \\ &= x^{-1} y^{-1} x z^{-1} x^{-1} y x y^{-1} z y = (x z x^{-1} y x)^{-1} (y x y^{-1} z y). \end{aligned}$$

Analogamente se vê que  $[y, z^{-1}, x]^z = (y x y^{-1} z y)^{-1} (z y z^{-1} x z)$  e que  $[z, x^{-1}, y]^x = (z y z^{-1} x z)^{-1} (x z x^{-1} y x)$ . Logo,

$$\begin{aligned} [x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x &= (x z x^{-1} y x)^{-1} (y x y^{-1} z y) (y x y^{-1} z y)^{-1} (z y z^{-1} x z) (z y z^{-1} x z)^{-1} (x z x^{-1} y x) \\ &= \cancel{(x z x^{-1} y x)^{-1}} \cancel{(x z x^{-1} y x)} = 1. \end{aligned}$$

□

Repare-se agora que, pelas alíneas (i) e (iv) do Teorema 1.2.5, temos

$$\begin{aligned} [x, y^{-1}, z]^y &= [[x, y^{-1}], z]^y = [[x, y^{-1}]^y, z^y] \\ &= [[x, y]^{-1}, z^y] = [y, x, z^y] \end{aligned}$$

e, analogamente,  $[y, z^{-1}, x]^z = [z, y, x^z]$  e  $[z, x^{-1}, y]^x = [x, z, y^x]$ . Então, pela Identidade de Hall-Witt,

$$[y, x, z^y][z, y, x^z][x, z, y^x] = 1,$$

donde se retira o seguinte corolário.

**Corolário 1.2.5.1** (Forma alternativa de Identidade de Hall-Witt). *Sejam  $G$  um grupo e  $x, y, z \in G$ . Então,*

$$[x, y, z^x][z, x, y^z][y, z, x^y] = 1.$$

Vejamos uma aplicação desta propriedade dos comutadores.

**Definição 1.2.6.** Um grupo  $G$  diz-se *metabeliano* se existir um subgrupo normal  $N$  tal que tanto  $N$  como o quociente  $G/N$  são abelianos.

**Teorema 1.2.7.** *Num grupo metabeliano os comutadores comutam entre si.*

*Demonstração.* Sejam  $G$  um grupo metabeliano e  $c_1, c_2$  comutadores em  $G$ . Então, existe  $N \trianglelefteq G$  tal que  $N$  e  $G/N$  são abelianos. Como  $G/N$  é abeliano,  $c_1N = c_2N = N$  e, portanto,  $c_1, c_2 \in N$ . Como  $N$  é abeliano,  $c_1$  e  $c_2$  comutam como pretendíamos.  $\square$

**Corolário 1.2.7.1.** *Sejam  $G$  um grupo metabeliano e  $x, y, z \in G$ . Então,*

$$[x, y, z][z, x, y][y, z, x] = 1.$$

*Demonstração.* Recorrendo à segunda parte da alínea (ii) do Teorema 1.2.5 e em seguida às observações 1.2.2 e 1.2.4 uma vez que os comutadores comutam, segue-se que

$$\begin{aligned} [x, y, z^x] &= [x, y], z[z, x] \\ &= [x, y], [z, x] [x, y], z]^{[z, x]} \\ &= [x, y], z] = [x, y, z]. \end{aligned}$$

Analogamente se obtém  $[z, x, y^z] = [z, x, y]$  e  $[y, z, x^y] = [y, z, x]$ , donde, pela forma alternativa da Identidade de Hall-Witt, temos

$$1 = [x, y, z^x][z, x, y^z][y, z, x^y] = [x, y, z][z, x, y][y, z, x].$$

$\square$

Dados um grupo  $G$  e um seu subconjunto  $X$ , denotamos por  $\langle X \rangle$  o menor subgrupo de  $G$  que contém  $X$ , ou seja, a interseção de todos os subgrupos de  $G$  que contêm  $X$ . Ao subgrupo  $\langle X \rangle$  damos o nome de *subgrupo gerado por  $X$* .

Também podemos formar comutadores de subconjuntos definindo,

**Definição 1.2.8.** Dados um grupo  $G$  e  $X_1, X_2, \dots, X_n \subseteq G$ ,

$$[X_1, X_2] := \langle [x_1, x_2] : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle,$$

e mais geralmente,

$$[X_1, \dots, X_n] := [[X_1, \dots, X_{n-1}], X_n]$$

para  $n \geq 2$ .

Em particular,  $[\{x\}, \{y\}] = \langle [x, y] \rangle$ , com  $x, y \in G$ .

Naturalmente, também podemos estender o conceito de conjugado de um elemento.

**Definição 1.2.9.** Seja  $G$  um grupo. Para  $g \in G$ , definimos

$$X_1^g := \langle x_1^g : x_1 \in X_1 \rangle \text{ e } X_1^{X_2} := \langle x_1^{x_2} : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle .$$

**Definição 1.2.10.** Por *fecho normal*  $H^G$  de um subgrupo  $H$  de um grupo  $G$  entende-se o menor subgrupo normal de  $G$  que contém  $H$ , tendo-se

$$H^G = \langle h^g : h \in H, g \in G \rangle .$$

*Observação 1.2.11.* Um subgrupo  $N$  de um grupo  $G$  é um subgrupo normal se  $N^g = N$  para qualquer  $g \in G$  ou, equivalentemente, se  $N^G = N$ .

**Teorema 1.2.12.** *Sejam  $G$  um grupo,  $X, Y \subseteq G$  e  $H, K, N \leq G$ . São válidas as seguintes propriedades:*

- (i)  $[X, Y] = [Y, X]$ ;
- (ii)  $K \subseteq C_G(H)$  se e só se  $[H, K] = 1$ . Em particular,  $H \subseteq Z(G)$  se e só se  $[H, G] = 1$ ;
- (iii)  $K \subseteq N_G(H)$  se e só se  $[H, K] \leq H$ . Em particular,  $N \trianglelefteq G$  se e só se  $[N, G] \leq N$ ;
- (iv) Se  $\sigma$  é um morfismo entre grupos, então

$$([H, K])\sigma = [H\sigma, K\sigma].$$

Em particular,  $[H, K]^g = [H^g, K^g]$ , para  $g \in G$ ;

- (v) Se  $H_1 < G$  e  $K_1 < G$  são tais que  $H_1 \leq H$  e  $K_1 \leq K$ , então  $[H_1, K_1] \leq [H, K]$ .

*Demonstração.* Consultar [8, Proposição 1.1, 1.2]. □

**Definição 1.2.13.** Um subgrupo  $H$  de um grupo  $G$  diz-se um *subgrupo característico*, e escreve-se  $H \text{ char } G$ , se para todo o automorfismo  $\phi$  de  $G$ , se tem  $H\phi = H$ .

Claramente, se  $H \text{ char } G$ , então  $H \trianglelefteq G$ , uma vez que para cada  $g \in G$ , se considerarmos o automorfismo  $\phi_g : G \rightarrow G$  definido por  $x \mapsto x^g$  se tem  $H\phi_g = H$  e, portanto,  $H^g = H$  para cada  $g \in G$ .

**Teorema 1.2.14.** *Dados um grupo  $G$  e subgrupos  $H$  e  $K$  de  $G$ , se  $H, K \text{ char } G$  então  $[H, K] \text{ char } G$ . Além disso, se  $H, K \trianglelefteq G$  então  $[H, K] \trianglelefteq G$ .*

*Demonstração.* Esta prova é imediata utilizando a alínea (iv) do Teorema 1.2.12. □

Será útil observar para a prova que se segue que, para um subgrupo  $H$  de um grupo  $G$  e para  $g \in G$ , se tem  $g \in N_G(H)$  se e só se  $g^{-1}Hg \subseteq H$  e  $gHg^{-1} \subseteq H$ .

**Teorema 1.2.15.** *Dados um grupo  $G$  e subgrupos  $H$  e  $K$  de  $G$ ,*

$$[H, K] \trianglelefteq \langle H, K \rangle .$$

*Demonstração.* Basta provar que  $H \subseteq N_G([H, K])$  e  $K \subseteq N_G([H, K])$ , donde seguirá que  $\langle H, K \rangle \subseteq N_G([H, K])$ , e portanto,  $[H, K] \trianglelefteq \langle H, K \rangle$ .

Sejam então  $h_1, h_2 \in H$  e  $k \in K$ . Como  $[h_1 h_2, k] = [h_1, k]^{h_2} [h_2, k]$  pelo Teorema 1.2.5 (ii), vem que

$$[h_1, k]^{h_2} = \underbrace{[h_1 h_2, k]}_{\in H} \underbrace{[h_2, k]^{-1}}_{\in [H, K]} \in [H, K],$$

donde  $h_2^{-1} [H, K] h_2 \subseteq [H, K]$ . De um modo análogo,

$$[h_1, k]^{h_2^{-1}} = [h_1 h_2^{-1}, k] [h_2^{-1}, k]^{-1} \in [H, K]$$

e  $h_2 [H, K] h_2^{-1} \subseteq [H, K]$ , para qualquer  $h_2 \in H$ . Portanto,  $H \subseteq N_G([H, K])$ .

Analogamente se mostra que  $K \subseteq N_G([H, K])$ . □

**Teorema 1.2.16.** *Dados um grupo  $G$  e  $H, K, L \leq G$ , se  $H \subseteq N_G(L)$ , então*

$$[HK, L] = [H, L][K, L].$$

*Demonstração.* Como  $H \subseteq HK$  e  $K \subseteq HK$ , temos que  $[H, L], [K, L] \subseteq [HK, L]$  e, como  $[HK, L]$  é um subgrupo, vem que

$$[H, L][K, L] \subseteq [HK, L].$$

Para provar a outra inclusão vejamos que:

1.  $[H, L][K, L]$  é um subgrupo de  $G$ ;
2. Cada gerador  $[hk, l]$  de  $[HK, L]$  pertence a  $[H, L][K, L]$ .

Para demonstrar (1), provemos que  $[H, L] \subseteq N_G([K, L])$ . Como  $[K, L] \trianglelefteq \langle K, L \rangle$ , temos em particular que  $L \subseteq N_G([K, L])$ . Como  $H \subseteq N_G(L)$ , temos  $[H, L] \leq L$ . Logo,  $[H, L] \subseteq N_G([K, L])$ . Portanto,  $[H, L][K, L] = [K, L][H, L]$ , e, conseqüentemente,  $[H, L][K, L]$  é um subgrupo de  $G$ .

Para demonstrar (2) reparemos que, como  $H \subseteq N_G(L)$ , temos  $[H, L] \leq L$  e, portanto, pelos teoremas 1.2.5 (ii) e 1.2.12 (i),

$$\begin{aligned} [hk, l] &= [h, l]^k [k, l] \\ &= [h, l] \underbrace{[[h, l], k]}_{\in [L, K] = [K, L]} [k, l] \in [H, L][K, L]. \end{aligned}$$

□

Observemos que dados subgrupos  $H, K, L$  de um grupo  $G$ ,

$$[L, H, K] = [[L, H], K] = \langle [g, k] : g \in [L, H], k \in K \rangle,$$

tendo-se que  $g$  pode não ser da forma  $[l, h]$  com  $l \in L$  e  $h \in H$ , i.e., não se tem necessariamente que  $[L, H, K] = \langle [l, h, k] : l \in L, h \in H, k \in K \rangle$ . No entanto, a seguinte proposição é válida.

**Proposição 1.2.17.** *Sejam  $H$  e  $K$  subgrupos de um grupo  $G$ , e sejam  $S$  e  $T$  subconjuntos não vazios de  $G$ . Se  $H = \langle S \rangle$  e  $K = \langle T \rangle$ , então  $[H, K] = ([S, T]^H)^K$ .*

*Demonstração.* Consultar [8, Corolário 1.5]. □

Tendo isto em mente podemos enunciar o próximo resultado que se deve a P. Hall.

**Teorema 1.2.18** (Lema dos três subgrupos). *Sejam  $G$  um grupo e  $H, K, L$  e  $N$  subgrupos de  $G$  com  $N \trianglelefteq G$ . Então,*

$$[H, K, L] \leq N \text{ e } [K, L, H] \leq N \implies [L, H, K] \leq N.$$

*Demonstração.* Pelo que acabámos de observar e pela Proposição 1.2.17,  $[H, K, L]$  é gerado por conjugados de comutadores da forma  $[h, k^{-1}, l]$ , com  $h \in H, k \in K$  e  $l \in L$ . De um modo análogo,  $[K, L, H]$  é gerado por conjugados de comutadores da forma  $[k, l^{-1}, h]$  e  $[L, H, K]$  por conjugados de comutadores da forma  $[l, h^{-1}, k]$ . Tome-se  $x = h, y = k$  e  $z = l$  na Identidade de Hall-Witt. Então,

$$[h, k^{-1}, l]^k [k, l^{-1}, h]^l [l, h^{-1}, k]^h = 1.$$

Ora, por hipótese,  $[h, k^{-1}, l]^k, [k, l^{-1}, h]^l \in N$  uma vez que  $N \trianglelefteq G$  e, consequentemente,  $[h, k^{-1}, l]^k [k, l^{-1}, h]^l \in N$ . Segue-se que  $[l, h^{-1}, k]^h \in N$ , donde  $[l, h^{-1}, k] = ([l, h^{-1}, k]^h)^{h^{-1}} \in N$ . Portanto,  $[L, H, K] \leq N$ , o que conclui a demonstração. □

## 1.2.2 Série central

**Definição 1.2.19.** Denotamos por  $G'$  o *subgrupo derivado* de um grupo  $G$ , definindo-o como sendo o subgrupo gerado por todos os comutadores em  $G$ , i.e.  $G' = [G, G]$ .

Formando repetidamente subgrupos derivados gera-se um sequência descendente de subgrupos característicos de  $G$  (por 1.2.12 (iv))

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots$$

onde  $G^{(1)} := G'$  e  $G^{(n+1)} := (G^{(n)})'$ . A esta sequência damos o nome de *série derivada* de  $G$  mas note-se que esta série não precisa de alcançar 1 ou mesmo de terminar. Claro que todos os fatores  $G^{(n)}/G^{(n+1)}$  são grupos abelianos; o primeiro destes  $G/G'$  tem uma importância particular que será tratada mais adiante.

Existe outra maneira natural de gerar uma sequência descendente de subgrupos de um grupo  $G$  formados por comutadores, basta comutar  $G$  repetidamente com  $G$ :

**Definição 1.2.20** (Série Central Inferior). A *série central inferior* (ou descendente) de um grupo  $G$  é a série de subgrupos  $\{\gamma_i(G)\}_{i \geq 1}$ , onde

$$\begin{aligned} \gamma_1(G) &= G, \\ \gamma_i(G) &= [\gamma_{i-1}(G), G] \text{ para } i \geq 2. \end{aligned}$$

Repare-se que se trata de facto de uma série descendente uma vez que para  $i \geq 1$ , como  $\gamma_i(G) \text{ char } G$ , então  $\gamma_i(G) \trianglelefteq G$ , e, portanto,  $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G] \subseteq \gamma_i(G)$ . Temos pois

$$G \geq [G, G] \geq [[G, G], G] \geq \dots$$

Notemos ainda que  $G^{(n)} \subseteq \gamma_n(G)$ , para qualquer  $n$ .

**Teorema 1.2.21.** *Dado um grupo  $G$ ,*

$$[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G)$$

para  $i, j \geq 1$ .

*Demonstração.* Seja  $j \geq 1$ . Para  $i = 1$ , temos

$$[G, \gamma_j(G)] = [\gamma_j(G), G] = \gamma_{j+1}(G).$$

Para  $i > 1$ , queremos mostrar por indução em  $i$  que

$$[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] = [\gamma_{i-1}(G), G, \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G).$$

Tendo presente o Teorema 1.2.18 (Lema dos três subgrupos), basta provar que

$$[G, \gamma_j(G), \gamma_{i-1}(G)] \leq \gamma_{i+j}(G)$$

e

$$[\gamma_j(G), \gamma_{i-1}(G), G] \leq \gamma_{i+j}(G).$$

Se  $i = 2$ , então

$$[G, \gamma_j(G), \gamma_1(G)] = [\gamma_{j+1}(G), G] = \gamma_{j+2}(G)$$

e

$$[\gamma_j(G), \gamma_1(G), G] = [\gamma_j(G), G, G] = [\gamma_{j+1}(G), G] = \gamma_{j+2}(G).$$

Admitamos agora que o resultado é válido para  $i - 1$ . Então,

$$[G, \gamma_j(G), \gamma_{i-1}(G)] = [\gamma_{j+1}(G), \gamma_{i-1}(G)] \leq \gamma_{i+j}(G)$$

e

$$[\gamma_j(G), \gamma_{i-1}(G), G] \leq [\gamma_{i+j-1}(G), G] = \gamma_{i+j}(G),$$

como se pretendia. □

*Observação 1.2.22.* Seja  $G$  um grupo. Então, para  $i \geq 1$  e  $N \trianglelefteq G$  tal que  $N \subseteq \gamma_i(G)$ , temos

$$\gamma_i(G/N) = \gamma_i(G)/N.$$

*Demonstração.* A prova segue por indução em  $i$ . Para  $i = 1$ ,

$$\gamma_1(G/N) = G/N = \gamma_1(G)/N.$$

Para  $i > 1$ , como  $N \subseteq \gamma_i(G) \subseteq \gamma_{i-1}(G)$ , segue por hipótese de indução que

$$\gamma_i(G/N) = [\gamma_{i-1}(G/N), G/N] = [\gamma_{i-1}(G)/N, G/N].$$

Tendo em mente o Teorema 1.2.12 (iv), consideremos o seguinte morfismo canónico entre grupos

$$\begin{aligned} \sigma : G &\longrightarrow G/N, \\ g &\longmapsto gN. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} [\gamma_{i-1}(G)/N, G/N] &= [(\gamma_{i-1}(G))\sigma, G\sigma] = [\gamma_{i-1}(G), G]\sigma \\ &= [\gamma_{i-1}(G), G]/N = \gamma_i(G)/N, \end{aligned}$$

como pretendíamos.  $\square$

**Teorema 1.2.23.** *Dado um grupo  $G = \langle X \rangle$ ,*

$$\gamma_i(G) = \langle [x_1, \dots, x_i]^g : x_j \in X, g \in G \text{ com } j = 1, \dots, i \rangle$$

para  $i \geq 1$ .

*Demonstração.* Para cada  $i = 1, 2, \dots$ , sejam  $N_i := \langle [x_1, \dots, x_i]^g : x_j \in X, g \in G \text{ com } j = 1, \dots, i \rangle$ . Obviamente que  $N_i \subseteq \gamma_i(G)$  e  $N_i \trianglelefteq G$  para  $i = 1, 2, \dots$ . Façamos o resto da prova por indução em  $i$ . Para  $i = 1$ , vem da hipótese  $G = \langle X \rangle$ . Para  $i > 1$ , basta reparar que, como  $N_i \subseteq \gamma_i(G)$ , provar a igualdade  $\gamma_i(G) = N_i$  é equivalente a provar  $\gamma_i(G)/N_i \cong 1$ , ou ainda, pela Observação 1.2.22, a provar que  $\gamma_{i-1}(G/N_i) \subseteq Z(G/N_i)$ . Assim, admitamos que o resultado é válido para  $i-1$ , ou seja,  $\gamma_{i-1}(G) = N_{i-1}$ . Como  $Z(G/N_i) \trianglelefteq G/N_i$ , é suficiente provar que  $[x_1N_i, \dots, x_{i-1}N_i] \in Z(G/N_i)$  para  $x_j \in X$ , ora

$$\begin{aligned} [[x_1N_i, \dots, x_{i-1}N_i], x_iN_i] &= [x_1N_i, \dots, x_{i-1}N_i, x_iN_i] \\ &= \underbrace{[x_1, \dots, x_{i-1}, x_i]}_{\in N_i} N_i = N_i, \end{aligned}$$

e portanto,  $\gamma_{i-1}(G/N_i) \subseteq Z(G/N_i)$ , como se pretendia.  $\square$

**Corolário 1.2.23.1.** *Dado um grupo  $G$ ,*

$$\gamma_i(G) = \langle [g_1, g_2, \dots, g_i] : g_j \in G \text{ com } j = 1, \dots, i \rangle$$

para  $i \geq 1$ .

**Corolário 1.2.23.2.** *Dado um grupo  $G = \langle X \rangle$ ,*

$$\gamma_i(G) = \langle [x_1, \dots, x_i], \gamma_{i+1}(G) : x_j \in X \text{ com } j = 1, \dots, i \rangle$$

ou, equivalentemente,

$$\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G) = \langle [x_1\gamma_{i+1}(G), \dots, x_i\gamma_{i+1}(G)] : x_j \in X \text{ com } j = 1, \dots, i \rangle$$

para  $i \geq 1$ .

*Demonstração.* Atendendo ao Teorema 1.2.23, basta reparar que dados  $x_1, \dots, x_i, g \in G$ , por definição de conjugado se tem

$$[x_1, \dots, x_i]^g = [x_1, \dots, x_i] \underbrace{[x_1, \dots, x_i, g]}_{\in \gamma_{i+1}(G)}.$$

$\square$

**Definição 1.2.24.** Dizemos que um subconjunto  $X$  de um grupo  $G$  é um *subconjunto normal* se  $X$  é invariante sob conjugação por elementos de  $G$ .

**Corolário 1.2.24.1.** Dado um grupo  $G = \langle X \rangle$ , onde  $X$  é um subconjunto normal, então

$$\gamma_i(G) = \langle [x_1, \dots, x_i] : x_j \in X \text{ com } j = 1, \dots, i \rangle .$$

*Demonstração.* Segue imediatamente do Teorema 1.2.23 e do facto de, para cada  $x_j \in X$  e  $g \in G$ , se ter  $x_j^g \in X$  e de  $[x_1, \dots, x_i]^g = [x_1^g, \dots, x_i^g]$ .  $\square$

**Exemplo 1.2.25.** Consideremos o grupo diedral

$$D_{2n} = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, a^b = a^{-1} \rangle .$$

Pelo Teorema 1.2.23 temos

$$\begin{aligned} D'_{2n} &= \gamma_2(D_{2n}) = \langle [a, b] \rangle^{D_{2n}} = \langle a^{-1}a^b \rangle^{D_{2n}} \\ &= \langle a^{-2} \rangle^{D_{2n}} = \langle a^2 \rangle^{D_{2n}} . \end{aligned}$$

Como o grupo cíclico  $\langle a^2 \rangle$  é normal em  $D_{2n}$ , segue pelo Corolário anterior que

$$D'_{2n} = \langle a^2 \rangle .$$

*Observação 1.2.26.* Dado  $G$  um grupo, cada quociente  $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$  é abeliano uma vez que

$$[\gamma_i(G), \gamma_i(G)] \subseteq [\gamma_i(G), G] = \gamma_{i+1}(G)$$

**Teorema 1.2.27.** Dado um grupo  $G$ , o subgrupo derivado  $G' = \gamma_2(G)$  é o menor subgrupo normal de  $G$  cujo quociente é abeliano. Equivalentemente,  $G/G'$  é o maior quociente abeliano de  $G$ .

Por esta razão,  $G/G'$  diz-se a *abelianização* de  $G$ .

*Demonstração.* Dado um subgrupo normal  $N$  de  $G$ ,  $G/N$  é abeliano se e só se  $[xN, yN] = N$ , para  $xN, yN \in G/N$ , se e só se  $[x, y] \in N$ , para  $x, y \in G$ , se e só se  $G' \leq N$ .  $\square$

**Definição 1.2.28.** Dada uma série de subgrupos de um grupo  $G$

$$N_{r+1} < N_r < \dots < N_1,$$

chamamos *comprimento da série* ao número  $r$ .

**Definição 1.2.29.** Dizemos que uma série descendente de subgrupos

$$N_{r+1} \leq N_r \leq \dots \leq N_1$$

de um grupo  $G$  é uma *série central* se  $[N_i, G] \leq N_{i+1}$  para  $i = 1, \dots, r$ .

O nome série central surge do facto de que passando ao quociente por  $N_{i+1}$  obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} [N_i, G] \leq N_{i+1} &\iff [N_i/N_{i+1}, G/N_{i+1}] \leq N_{i+1}/N_{i+1} \cong 1 \\ &\iff N_i/N_{i+1} \leq Z(G/N_{i+1}). \end{aligned}$$

**Exemplo 1.2.30.** A série central inferior é uma série central.

*Observação 1.2.31.* 1. Como  $[N_i, G] \leq N_{i+1} \leq N_i$ , então  $N_i \trianglelefteq G$ .

2. A série

$$N_{r+1} \leq \dots \leq N_{i+1} \leq K \leq N_i \leq \dots \leq N_1,$$

com  $K \leq G$ , é também uma série central, uma vez que  $[N_i, G] \leq N_{i+1} \leq K$  e  $[K, G] \leq [N_i, G] \leq N_{i+1}$ .

Dado um subgrupo normal  $N$  de um grupo  $G$ , podemos considerar uma série central começando com  $N$ . Tal pode ser feito de duas formas naturais:

- $N =: N_1 \geq [N, G] =: N_2 \geq [N, G, G] =: N_3 \geq [N, G, G, G] =: N_4 \geq \dots$

- $N =: N_{r+1} \leq N_r \leq N_{r-1} \leq \dots$

onde  $N_i$  é tal que  $N_i/N_{i+1} = Z(G/N_{i+1})$  para  $i \leq r$ .

Esta segunda condição leva-nos então a poder considerar a próxima definição.

**Definição 1.2.32** (Série Central Superior). A *série central superior* é a série ascendente central

$$Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots \leq Z_i(G) \leq \dots$$

obtida do seguinte modo:

$$\begin{aligned} Z_0(G) &= 1, \\ Z(G/Z_{i-1}(G)) &= Z_i(G)/Z_{i-1}(G) \text{ para } i \geq 2. \end{aligned}$$

Em particular,  $Z_1(G) = Z(G)$  e  $Z_2(G)$  é tal que  $Z(G/Z(G)) = Z_2(G)/Z(G)$ .

Enunciaremos agora um resultado que será necessário ter presente na demonstração do próximo Teorema.

**Lema 1.2.33.** *Sejam  $G$  um grupo,  $N \trianglelefteq G$  e  $H < G$ . Então  $[H, G] \leq N$  se e só se  ${}^{HN}/N \leq Z(G/N)$ .*

*Demonstração.* Suponhamos primeiro que  ${}^{HN}/N \leq Z(G/N)$ . Seja  $h \in H$ . Então  $(hN)(gN) = (gN)(hN)$  para qualquer  $g \in G$ . Logo  $[hN, gN] = N$ . Como  $[hN, gN] = [h, g]N$ , temos  $[h, g] \in N$ . Como  $h$  e  $g$  foram tomados arbitrariamente, obtemos que  $[H, G]$  é um subgrupo de  $N$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $[H, G] \leq N$ . Sejam  $hN \in {}^{HN}/N$  e  $gN \in G/N$ . Como

$$[hN, gN] = [h, g]N$$

e  $[h, g] \in N$  por hipótese, temos  $[hN, gN] = N$ . Logo,  $hN \in Z(G/N)$ , como queríamos.  $\square$

**Teorema 1.2.34.** *Dado um grupo  $G$ , são equivalentes as seguintes condições:*

- (i) *Existe uma série central ascendente de 1 até  $G$ ;*
- (ii) *A série central inferior acaba em 1;*
- (iii) *A série central superior acaba em  $G$ .*

*Demonstração.* É claro que (ii)  $\implies$  (i) e que (iii)  $\implies$  (i).

Começemos então por mostrar que (i)  $\implies$  (ii) e, para tal, seja

$$1 = N_{r+1} \leq N_r \leq \dots \leq N_2 \leq N_1 = G$$

uma série central.

Primeiro provemos por indução em  $i \geq 1$  que  $\gamma_i(G) \leq N_i$ . Para  $i = 1$ , temos  $\gamma_1(G) = G = N_1$ . Seja  $i > 1$  e suponhamos que  $\gamma_{i-1}(G) \leq N_{i-1}$ . Por definição de série central e em seguida pelo Teorema 1.2.12 (v), temos

$$\gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G] \leq [N_{i-1}, G] \leq N_i.$$

Como  $\gamma_i(G) \leq N_i$  para  $i \geq 1$ , obtemos  $\gamma_{r+1}(G) \leq N_{r+1} = 1$  e, conseqüentemente, a série central inferior acaba em 1.

Provemos agora que (i)  $\implies$  (iii). Vejamos que  $N_{r-j+1} \leq Z_j(G)$  para  $j \geq 0$ . Se  $j = 0$ , então  $N_{r+1} = 1 = Z_0(G)$ . Seja  $j > 0$  e suponhamos que o resultado é válido para  $j - 1$ . Por definição de série central e por hipótese de indução temos

$$[N_{r-j+1}, G] \leq N_{r-j+2} \leq N_{r-j} \leq Z_{j-1}(G).$$

Pondo  $H = N_{r-j+1}$  e  $N = Z_{j-1}(G)$  no Lema 1.2.33, obtemos

$$N_{r-j+1}Z_{j-1}(G)/Z_{j-1}(G) \leq Z \left( \frac{G}{Z_{j-1}(G)} \right) = Z_j(G)/Z_{j-1}(G).$$

Logo,  $N_{r-j+1} \leq Z_j(G)$ ,

Conseqüentemente,  $G = N_1 \leq Z_r(G)$ , donde segue que a série central superior acaba em  $G$ , como pretendido.  $\square$

*Observação 1.2.35.* O Teorema 1.2.34 diz-nos também que se

$$1 = N_{r+1} \leq N_r \leq \dots \leq N_2 \leq N_1 = G$$

for uma série central, então

$$\begin{aligned} \gamma_i(G) &\leq N_i, \\ N_{r-i+1} &\leq Z_i(G) \end{aligned}$$

e, o comprimento da série central inferior e da série central superior é no máximo o comprimento da série central original.

**Definição 1.2.36.** Um grupo nilpotente é um grupo no qual as condições equivalentes do Teorema 1.2.34 são válidas.

Se assim for, o comprimento da série central inferior é igual ao comprimento da série central superior e é menor ou igual que o comprimento de qualquer série central.

**Definição 1.2.37.** Ao número  $c$  determinado por:

$$\gamma_{c+1}(G) = 1 \text{ ou } Z_c(G) = G$$

chamamos *classe de nilpotência* do grupo  $G$ .

Pelo Teorema 1.2.34, se  $G$  é um grupo nilpotente de classe de nilpotência  $c$ , temos

$$\gamma_{c-i+1}(G) \leq Z_i(G) \text{ para } i = 0, \dots, c.$$

### 1.2.3 Grupos nilpotentes

Dizemos que um grupo  $G$  é *nilpotente de classe*  $\leq c$  se e só se  $\gamma_{c+1}(G) = 1$ . Equivalentemente,  $G$  é nilpotente de classe  $\leq c$  se e só se  $Z_c(G) = G$ .

**Exemplo 1.2.38.** Os grupos abelianos são grupos nilpotentes de classe 1 uma vez que um grupo  $G$  é abeliano se e só se  $[g_1, g_2] = 1$ , para  $g_1, g_2 \in G$ , se e só se  $\gamma_2(G) = \langle [g_1, g_2] : g_1, g_2 \in G \rangle = 1$ , se e só se  $Z_1(G) = Z(G) = G$ .

É claro que um grupo nilpotente de classe 0 tem ordem 1. A classe dos grupos nilpotentes generaliza pois a classe dos grupos abelianos.

Isto permite-nos reparar que um grupo  $G$  é nilpotente de classe  $\leq c$  se e só se  $[g_1, \dots, g_{c+1}] = 1$  para qualquer  $g_i \in G$  se e só se, se  $G = \langle X \rangle$  então  $[x_1, \dots, x_{c+1}] = 1$  para qualquer  $x_i \in X$ .

**Exemplo 1.2.39.** Dado um número primo  $p$ , todos os  $p$ -grupos finitos são nilpotentes [26]. Porém um  $p$ -grupo pode não ser abeliano, tal é o caso do grupo matricial

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

de ordem  $p^3$ , uma vez que o centro do grupo

$$Z(G) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

tem ordem  $p$ .

**Exemplo 1.2.40.** O produto direto  $G = G_1 \times \dots \times G_n$  de um número finito de grupos nilpotentes é nilpotente, basta reparar que

$$\gamma_i(G) = \gamma_i(G_1) \times \dots \times \gamma_i(G_n)$$

e a classe de nilpotência de  $G$  é o máximo das classes de nilpotência dos seus fatores.

**Exemplo 1.2.41.** Segue dos dois exemplos anteriores que o produto direto de um número finito de  $p$ -grupos finitos (para possivelmente diferentes primos  $p$ ) é um grupo nilpotente finito.

Dado um grupo finito  $G$ , o produto de todos os subgrupos normais nilpotentes de  $G$  é nilpotente, e é o maior subgrupo normal nilpotente de  $G$ .

**Definição 1.2.42.** Designamos o produto de todos os subgrupos normais nilpotentes de um grupo  $G$  por *subgrupo Fitting* de  $G$ , e denotamo-lo por  $F(G)$ .

Pode-se verificar que  $F(G)$  é um subgrupo característico de  $G$  e, além disso,  $G$  é nilpotente se e só se  $F(G) = G$ .

**Exemplo 1.2.43.** 1. Recordemos primeiro que um grupo  $G$  é simples se  $G \neq 1$  e  $1$  e  $G$  são os únicos subgrupos normais de  $G$ .

O subgrupo de Fitting de um grupo simples não abeliano  $G$  (por exemplo o grupo alternado  $A_5$  de ordem 5) é o subgrupo trivial  $1$ .

2. Vejamos que o subgrupo de Fitting do grupo simétrico  $S_3$  é  $A_3$ .

Começemos por recordar que  $S_3$  tem dois subgrupos normais não triviais -  $A_3$  e  $S_3$  - e provemos por indução em  $i$  que, para  $i \geq 0$ , temos  $Z_i(S_3) = 1$ . Consequentemente,  $Z_i(S_3) < S_3$  para qualquer  $i$  e portanto  $S_3$  não é nilpotente. Recordemos ainda que duas permutações  $\sigma, \tau \in S_3$  são conjugadas se e só se têm a mesma estrutura de ciclo. Assim, como  $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ , uma permutação está no centro de  $S_3$  se e só se é a única permutação com a sua estrutura de ciclo. Logo,  $Z(S_3) = 1$ . Suponhamos agora que  $Z_i(S_3) = 1$ . Então,

$$\begin{aligned} Z_{i+1}(S_3) &= Z_{i+1}(S_3)/Z_i(S_3) = Z(S_3/Z_i(S_3)) \\ &= Z(S_3) = 1, \end{aligned}$$

como pretendíamos. Por outro lado,  $A_3$  é um grupo cíclico e, portanto, é um grupo abeliano, donde segue que  $A_3$  é nilpotente. Assim,  $A_3$  é o maior subgrupo normal nilpotente de  $S_3$ .

Iremos enumerar a seguir diversas propriedades de grupos finitos que são equivalentes à nilpotência. Uma destas chama-se *condição de normalizador*, que nos diz que todo o subgrupo próprio está propriamente contido no seu normalizador.

Recordemos primeiro que,

**Definição 1.2.44.** Dado  $H$  um subgrupo de um grupo  $G$ , dizemos que  $H$  é *subnormal* em  $G$ , e escrevemos  $HsnG$ , se existe uma cadeia finita de subgrupos

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_n = G.$$

*Observação 1.2.45.* Observe-se que a relação "subnormal" é uma relação transitiva, o que não pode ser dito a respeito da relação "normal". Tal facto será útil para definir produto de duas classes de Fitting de grupos.

**Teorema 1.2.46.** *Seja  $G$  um grupo finito. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i)  $G$  é nilpotente;
- (ii) Todo o subgrupo  $H$  de  $G$  é subnormal;
- (iii) Todo o subgrupo maximal de  $G$  é normal em  $G$ ;
- (iv)  $G$  satisfaz a condição de normalizador;
- (v)  $G$  é produto direto dos seus subgrupos de Sylow.

*Demonstração.* Consultar [26, Teorema 5.2.4]. □

É importante ter presente a próxima definição e correspondente observação.

**Definição 1.2.47.** Uma álgebra  $B$  de tipo  $(\tau)$  diz-se um *quociente* de uma álgebra  $A$  do mesmo tipo se existe um morfismo sobrejetivo  $\theta$  de  $A$  em  $B$  e escrevemos  $\theta : A \twoheadrightarrow B$ .

Escrevemos  $\theta : A \hookrightarrow B$  se o morfismo  $\theta$  for injetivo. A um morfismo injetivo também damos o nome de *mergulho*.

*Observação 1.2.48.* No caso dos grupos, dizer que  $H$  é quociente de um grupo  $G$  equivale a dizer que  $H \cong G/N$  onde  $N$  é um subgrupo normal de  $G$ . Recordemos que, pelo primeiro Teorema do isomorfismo, se  $\theta : G \rightarrow H$  é morfismo sobrejetivo entre grupos, então  $\ker \theta$  é um subgrupo normal de  $G$  e  $H$  é isomorfo a  $G/\ker \theta$ .

**Proposição 1.2.49.** *A classe de todos os grupos nilpotentes é fechada para subgrupos, quocientes e produtos diretos em número finito.*

*Demonstração.* Sejam  $G$  um grupo nilpotente e  $H$  um subgrupo de  $G$ . Então existe uma série de  $G$

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$$

tal que  $[G_{i+1}, G] \leq G_i$ . Para  $i = 0, 1, \dots, n$ , defina-se  $H_i := G_i \cap H$ . Deste modo, a série

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = H$$

é uma série central de  $H$ . De facto  $[H_{i+1}, H] \leq [H, H] \leq H$  e, por outro lado,  $[H_{i+1}, H] \leq [G_{i+1}, G] \leq G_i$ , donde  $[H_{i+1}, H] \leq G_i \cap H = H_i$ . Consequentemente,  $H$  é um grupo nilpotente como se pretendia.

Sejam agora  $G$  um grupo nilpotente e  $\theta : G \rightarrow H$  um morfismo sobrejetivo entre grupos. Consideremos uma série central de  $G$

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G.$$

Temos  $[G_{i+1}, G] \leq G_i$ . Para  $i = 0, 1, \dots, n$  seja  $H_i := G_i \theta$ . Como pelo Teorema 1.2.12 temos  $[H_{i+1}, H] = [G_{i+1} \theta, G \theta] = [G_{i+1}, G] \theta \leq G_i \theta = H_i$ , então a série

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = H$$

é uma série central de  $H$ , o que torna  $H$  um grupo nilpotente.

Recorrendo ao Exemplo 1.2.40, verificamos que a classe dos grupos nilpotentes também é fechada para produtos diretos em número finito e concluímos assim a demonstração.  $\square$

*Observação 1.2.50.* Se tomarmos só os grupos finitos nilpotentes, formam o que mais tarde iremos chamar de pseudovariedade.

**Proposição 1.2.51.** *A classe de todos os grupos nilpotentes é fechada para subgrupos normais e, se  $G = NM$  com  $N$  e  $M$  subgrupos normais nilpotentes de  $G$ , então  $G$  é também nilpotente.*

*Demonstração.* Vimos na Proposição 1.2.49 que a classe de todos os grupos nilpotentes é fechada para subgrupos e, consequentemente, é fechada para subgrupos normais. Por outro lado, se  $N$  e  $M$  são grupos nilpotentes, então existem duas séries centrais

$$1 = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_k = N,$$

$$1 = M_0 \leq M_1 \leq \dots \leq M_p = M.$$

Suponhamos sem perda de generalidade que  $k \leq p$  e consideremos a série de  $G$

$$1 = N_0 M_0 \leq N_1 M_1 \leq \dots \leq N_k M_k \leq N_k M_{k+1} \leq \dots \leq N_k M_p = NM = G.$$

Então, pelo Teorema 1.2.16 e por definição de série central,

$$[N_i M_i, G] = [N_i, G][M_i, G] \leq N_{i+1} M_{i+1}.$$

Consequentemente,  $G$  é nilpotente como pretendíamos.  $\square$

*Observação 1.2.52.* Os grupos finitos nilpotentes formam o que mais tarde chamaremos de classe de Fitting de grupos finitos.

### 1.2.4 $p$ -nilpotência

**Definição 1.2.53.** Dados  $p$  um número primo e  $\pi$  um conjunto de números primos não vazio, definimos

$$p' = \{q : q \text{ primo e } q \neq p\},$$

$$\pi' = \{q : q \text{ primo e } q \notin \pi\}.$$

**Definição 1.2.54.** Um  $\pi$ -subgrupo de Hall de um grupo finito  $G$  é um subgrupo  $H$  de  $G$  tal que  $|H|$  é um produto envolvendo apenas números primos em  $\pi$  e  $[G : H]$  é um produto envolvendo apenas números primos em  $\pi'$ .

Repare-se que todo o  $\pi$ -subgrupo de Hall de um grupo finito  $G$  é um  $\pi$ -subgrupo de Sylow. No entanto,  $G$  não contém necessariamente  $\pi$ -subgrupos de Hall.

**Exemplo 1.2.55.** Considere-se agora o grupo alternado  $A_5$  de ordem 5. Ora,  $A_5$  é um grupo simples e

$$|A_5| = 5! / 2 = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Vejamos que  $A_5$  não tem  $\{3, 5\}$ -subgrupos de Hall. Suponhamos que existe um tal  $\{3, 5\}$ -subgrupo de Hall  $H$  de  $A_5$ . Então,  $H$  tem ordem 15 e índice 4. Se considerarmos a ação de  $A_5$  nas classes laterais de  $H$  obtemos um morfismo  $\theta : A_5 \rightarrow S_4$ . A contradição é atingida observando que  $\ker \theta \neq 1, A_5$  mas  $\ker \theta \trianglelefteq A_5$ , uma vez que isto significa que  $A_5$  não é um grupo simples.

Por outro lado, um  $\{2, 3\}$ -subgrupo de Hall de  $A_5$  tem ordem 12 e conhecemos um subgrupo de  $A_5$  com esta ordem que é  $A_4$ . Assim,  $A_4$  é um  $\{2, 3\}$ -subgrupo de Hall de  $A_5$ .

**Definição 1.2.56.** Um grupo finito  $G$  diz-se  $p$ -nilpotente se  $G$  tem um  $p'$ -subgrupo normal de Hall.

Assim,  $G$  diz-se  $p$ -nilpotente se existir um  $p'$ -subgrupo normal  $H$  de  $G$  tal que  $[G : H] = p^k$ , para algum  $k \in \mathbb{N}$ .

Pode-se provar, usando a condição (v) do Teorema 1.2.46, que todo o grupo nilpotente finito é  $p$ -nilpotente e, reciprocamente, um grupo finito que é  $p$ -nilpotente para todo o número primo  $p$  é nilpotente [26].

Um resultado conhecido de Burnside diz-nos que se  $P$  for um  $p$ -subgrupo abeliano de Sylow de  $G$ , então, se  $N_G(P)$  é  $p$ -nilpotente então  $G$  também o é.

**Exemplo 1.2.57.** 1. Todo o grupo abeliano é  $p$ -nilpotente para todos os primos  $p$ .

2. O grupo diedral  $D_{2p}$ , para um número primo  $p$  ímpar, é 2-nilpotente mas não é  $p$ -nilpotente.

**Teorema 1.2.58.** Seja  $p$  um primo. A classe dos grupos  $p$ -nilpotentes é fechada para subgrupos, quocientes e produtos diretos em número finito.

*Demonstração.* Sejam  $G$  um grupo  $p$ -nilpotente e  $H$  um subgrupo de  $G$ . Seja  $N$  um  $p'$ -subgrupo normal de Hall de  $G$ . Tomemos  $K := H \cap N$ . Então  $K \trianglelefteq H$  e, como  $K \leq N$ , temos que  $p$  não divide  $|K|$ . Uma vez que, pelo segundo Teorema do isomorfismo, se tem

$$H/K = H/H \cap N \cong HN/N \leq G/N$$

e, além disso,  $[G : N] = |G|/|N|$  é um produto de primos em  $p'$ , concluímos que  $[H : K] = |H|/|K|$  também é um produto de primos em  $p'$ . Segue-se que  $K$  é um  $p'$ -subgrupo normal de Hall de  $H$  e, portanto,  $H$  é  $p$ -nilpotente.

Seja agora  $G$  um grupo  $p$ -nilpotente e  $H$  um subgrupo normal de  $G$ . Seja  $N$  um  $p'$ -subgrupo normal de Hall de  $G$ . Defina-se  $K = {}^{NH}/H \trianglelefteq G/H$ . Então, pelo terceiro Teorema do isomorfismo,

$$({}^G/H)/({}^{NH}/H) \cong G/NH,$$

donde  $[G : NH] = |G|/|NH| \leq |G|/|N| = [G : N]$  e, portanto,  $[G : NH]$  é um produto de primos em  $p'$ . Além disso, como

$$K = {}^{NH}/H \cong N/N \cap H$$

e  $p$  não divide  $|N|$ , vem que  $p$  não divide  $|K|$ . Consequentemente,  $K$  é um  $p'$ -subgrupo normal de Hall de  $G/N$  e, portanto,  $G/N$  é  $p$ -nilpotente.

Finalmente seja  $G = G_1 \times \dots \times G_n$  um grupo tal que  $G_i$  é  $p$ -nilpotente para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Tomemos  $N_i$  um  $p'$ -subgrupo normal de Hall de  $G_i$ . Então, verifica-se que  $N_1 \times \dots \times N_n$  é um  $p'$ -subgrupo normal de Hall de  $G$ , o que conclui a nossa demonstração.  $\square$

*Observação 1.2.59.* Os grupos finitos  $p$ -nilpotentes, para um dado número primo  $p$ , formam o que chamaremos de pseudovarietade ou variedade de grupos finitos.

### 1.2.5 Grupos solúveis

Recordemos que dado um grupo  $G$ , definimos  $G^{(1)} = G' = [G, G]$  e  $G^{(n)} = (G^{(n-1)})'$ .

**Definição 1.2.60.** Dado um grupo  $G$ , dizemos que  $G$  é *solúvel* se existe  $n \geq 1$  tal que  $G^{(n)} = 1$ .

**Teorema 1.2.61.** A classe dos grupos solúveis é fechada para subgrupos, quocientes e produtos diretos em número finito.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grupo solúvel e seja  $H$  um subgrupo de  $G$ . Então existe  $n \geq 1$  tal que  $G^{(n)} = 1$ . Como  $H^{(n)} \leq G^{(n)}$ , temos  $H^{(n)} = 1$ .

Seja agora  $\sigma : G \rightarrow R$  um morfismo sobrejetivo entre grupos. Podemos verificar por indução em  $n$  e recorrendo ao Teorema 1.2.12 (iv) que  $G^{(n)}\sigma = R^{(n)}$  e, consequentemente, temos  $R^{(n)} = 1$ .

Por fim, sejam  $G_1, \dots, G_k$  grupos solúveis. Então, para cada  $i = 1, \dots, k$ , existe  $n_i \geq 1$  tal que  $G_i^{(n_i)} = 1$ . Pode-se verificar que  $(G_1 \times \dots \times G_k)^{(n)} = G_1^{(n)} \times \dots \times G_k^{(n)}$ , e portanto, basta tomar  $n = \max\{n_1, \dots, n_k\}$  e obtemos que  $(G_1 \times \dots \times G_k)^{(n)} = 1$  como se pretendia.  $\square$

*Observação 1.2.62.* Os grupos finitos solúveis constituem então o que mais tarde iremos chamar de pseudovarietade.

**Teorema 1.2.63.** Sejam  $G$  um grupo e  $N$  um subgrupo normal de  $G$ . Então,  $G$  é solúvel se e só se  $N$  e  $G/N$  são solúveis.

*Demonstração.* A prova de que se  $G$  é solúvel então  $N$  e  $G/N$  são solúveis, segue diretamente do Teorema 1.2.61. Suponhamos agora que  $N$  e  $G/N$  são solúveis. Então existem  $n, m \geq 1$  tais que  $G/N^{(n)} = N$  e  $N^{(m)} = 1$ . Então  $G^{(n)} \subseteq N$ . Assim  $G^{(n+m)} = (G^{(n)})^{(m)} \subseteq N^{(m)} = 1$ . Logo  $G^{(n+m)} = 1$  e portanto  $G$  é solúvel.  $\square$

**Proposição 1.2.64.** *O produto de dois subgrupos normais solúveis de um grupo é solúvel.*

*Demonstração.* Sejam  $N$  e  $M$  subgrupos normais solúveis de um grupo  $G$ . Então, pelo Teorema 1.2.61,  $M/M \cap N$  é solúvel. Como  $MN/N \cong M/M \cap N$ , pelo Teorema 1.2.63,  $MN$  é solúvel.  $\square$

*Observação 1.2.65.* Atendendo ao Teorema 1.2.61 e à Proposição 1.2.64, os grupos finitos solúveis vão constituir o que chamaremos de classe de Fitting de grupos finitos.

**Exemplo 1.2.66.** 1. Grupos abelianos e grupos nilpotentes são solúveis.

2.  $p$ -grupos finitos são solúveis, uma vez que são grupos nilpotentes.

3. Vimos no Exemplo 1.2.25 que  $D'_{2n}$  é o grupo cíclico  $\langle a^2 \rangle$ , donde  $D'_{2n}$  é um grupo abeliano. Portanto,  $D'_{2n}$  é solúvel, uma vez que  $(D'_{2n})' = 1$  e, conseqüentemente,  $D_{2n}^{(2)} = 1$ . Logo,  $D_{2n}$  é solúvel.

4.  $S_n$  é solúvel para  $n \leq 4$  e não solúvel para  $n \geq 5$ .

### 1.3 Variedades, formações e classes de Fitting de grupos

Recordemos que uma classe de álgebras universais, por exemplo de grupos, de semigrupos, etc, é uma coleção não vazia de álgebras fechada para imagens isomorfas.

Uma *variedade de álgebras de tipo*  $(\tau)$  é uma classe  $\mathcal{V}$  de álgebras de tipo  $(\tau)$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- Se  $A \in \mathcal{V}$  e  $B$  é subálgebra de  $A$ , então  $B \in \mathcal{V}$ ;
- Se  $A \in \mathcal{V}$  e  $B$  é quociente de  $A$ , então  $B \in \mathcal{V}$ ;
- Se  $A_i \in \mathcal{V}$  para  $i \in I$ , então o produto direto  $\prod_{i \in I} A_i \in \mathcal{V}$ .

Sucintamente, uma variedade de álgebras é uma classe de álgebras fechada para subálgebras, quocientes e produtos diretos.

*Observação 1.3.1.* Se uma classe de álgebras  $\mathcal{V}$  é fechada para produtos diretos sobre um conjunto  $I$  arbitrário, em particular, para  $I = \emptyset$ , então contém a álgebra singular  $\{1\}$ . O mesmo se passa se for fechada para produtos subdiretos, definidos abaixo. Assim, como  $I$  pode ser vazio,  $\{1\} \in \mathcal{V}$ . No entanto, se uma classe de álgebras  $\mathcal{V}$  não vazia também é fechada para quocientes, temos sempre  $\{1\} \in \mathcal{V}$ .

De um modo análogo, uma *formação de álgebras de tipo*  $(\tau)$  é uma classe de álgebras de tipo  $(\tau)$  fechada para quocientes e produtos subdiretos arbitrários; onde entendemos por *produto subdireto* de uma família  $(A_i)_{i \in I}$  de álgebras de tipo  $(\tau)$ , uma álgebra  $A$  de tipo  $(\tau)$  que se mergulha no produto direto  $\prod_{i \in I} A_i$  tal que cada projeção induzida  $\pi_i : A \rightarrow A_i$  é sobrejetiva.

Se as álgebras são finitas, quer na definição de variedade quer na definição de formação, exigimos produtos com um número finito de fatores.

Adicionalmente, uma formação de álgebras finitas de tipo  $(\tau)$  é uma classe de álgebras finitas de tipo  $(\tau)$  que satisfaz:

- Se  $A \in \mathcal{F}$  e  $B$  é quociente de  $A$ , então  $B \in \mathcal{F}$ ;
- Se  $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$  e  $B$  é produto subdireto de  $A_1$  e  $A_2$ , então  $B \in \mathcal{F}$ .

Notemos que uma classe de álgebras finitas  $\mathcal{F}$  pode também ser definida como formação do seguinte modo [29]:

- Se  $\rho$  é uma congruência em  $A$  e  $A \in \mathcal{F}$ , então  $A/\rho \in \mathcal{F}$ ;
- Se  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são congruências em  $A$  e  $A/\rho_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 1, 2$ , então  $A/\rho_1 \cap \rho_2 \in \mathcal{F}$ .

É claro que toda a variedade de álgebras (finitas) é formação de álgebras (finitas).

Nas secções que se seguem estudaremos certas classes de grupos finitos. Posteriormente, procuraremos estender essas teorias a semigrupos inversos finitos. Para uma leitura mais detalhada sobre classes de grupos, o leitor poderá consultar por exemplo [3] e [11].

### 1.3.1 Conceitos e exemplos

**Definição 1.3.2.** Seja  $\mathcal{V}$  uma classe de grupos que contém o grupo trivial. Dado um grupo  $G$  podemos definir

$$G^{\mathcal{V}} := \cap \{N : N \trianglelefteq G, G/N \in \mathcal{V}\} \text{ e } G_{\mathcal{V}} := \langle N : N \trianglelefteq G, N \in \mathcal{V} \rangle,$$

os quais são subgrupos característicos de  $G$ . O grupo  $G^{\mathcal{V}}$  diz-se o  $\mathcal{V}$ -resíduo e o grupo  $G_{\mathcal{V}}$  diz-se o  $\mathcal{V}$ -radical de  $G$ .

Dados um número finito de subgrupos normais  $N_1, \dots, N_n$  de um grupo  $G$ , pode-se verificar que  $\langle N_1, \dots, N_n \rangle = N_1 \dots N_n$ . Assim, o  $\mathcal{V}$ -radical de um grupo finito  $G$  é o subgrupo

$$G_{\mathcal{V}} = \prod \{N : N \trianglelefteq G, N \in \mathcal{V}\}.$$

*Observação 1.3.3.* Percebemos que poderá haver ambiguidade na notação  $\prod$ , uma vez que a utilizamos tanto para produto como para produto direto, porém, pensamos que o leitor conseguirá distinguir os dois casos sempre que estes ocorrem.

Em geral, nem  $G_{\mathcal{V}}$  nem  $G/G_{\mathcal{V}}$  pertencem à classe  $\mathcal{V}$ . No entanto, se  $G_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ , então  $G_{\mathcal{V}}$  é o maior subgrupo normal de  $G$  que pertence a  $\mathcal{V}$ . Analogamente, se  $G/G_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ , então  $G^{\mathcal{V}}$  é o menor subgrupo normal de  $G$  cujo quociente  $G/G^{\mathcal{V}}$  pertence a  $\mathcal{V}$ .

Repare-se que, para a classe  $\mathcal{N}$  dos grupos nilpotentes,  $G_{\mathcal{N}}$  denota o subgrupo de Fitting  $F(G)$  introduzido anteriormente e, para a classe  $\mathcal{A}$  dos grupos abelianos,  $G^{\mathcal{A}}$  denota o subgrupo derivado  $G'$ .

**Definição 1.3.4.** Dada uma classe de grupos finitos  $\mathcal{V}$ , dizemos que  $\mathcal{V}$  é uma *variedade de grupos finitos*, ou *pseudovariiedade*, se satisfaz as seguintes condições:

1. Qualquer subgrupo de um grupo de  $\mathcal{V}$  pertence a  $\mathcal{V}$ ;
2. Qualquer quociente de um grupo de  $\mathcal{V}$  pertence a  $\mathcal{V}$ ;
3. O produto direto de qualquer família finita de grupos de  $\mathcal{V}$  também pertence a  $\mathcal{V}$ .

Não havendo perigo de confusão usaremos simplesmente a denominação variedade mesmo quando estamos a tratar de grupos finitos.

**Definição 1.3.5.** Dada uma classe de grupos finitos  $\mathcal{F}$ , dizemos que  $\mathcal{F}$  é uma *formação de grupos finitos* se satisfaz as seguintes condições:

1. Qualquer quociente de um grupo de  $\mathcal{F}$  pertence a  $\mathcal{F}$ ;
2. O produto subdireto de qualquer família finita de grupos de  $\mathcal{F}$  também pertence a  $\mathcal{F}$ .

Notemos que a condição (3) da Definição 1.3.4 bem como a condição (2) da Definição 1.3.5, podem ser substituídas por produto de dois elementos da classe está na classe, ou por produto subdireto de dois elementos no caso da Definição 1.3.5.

**Proposição 1.3.6.** Uma formação de grupos finitos é uma classe de grupos finitos  $\mathcal{F}$  com as seguintes propriedades:

- (i) Se  $G \in \mathcal{F}$  e  $N \trianglelefteq G$ , então  $G/N \in \mathcal{F}$ ;
- (ii) Se  $N_1, N_2 \trianglelefteq G$  com  $N_1 \cap N_2 = 1$  e  $G/N_i \in \mathcal{F}$  para  $i = 1, 2$ , então  $G \in \mathcal{F}$ .

*Demonstração.* A equivalência das primeiras condições foi observada em 1.2.48. Vejamos então que a condição (2) da Definição 1.3.5, para famílias não vazias, é equivalente a (ii). Se  $G$  é produto subdireto de elementos  $G_1$  e  $G_2$  de  $\mathcal{F}$ , i.e., existe um mergulho  $\phi : G \hookrightarrow G_1 \times G_2$  tal que cada projeção induzida  $\pi_i : G \rightarrow G_i$  é sobrejetiva, então  $\ker \pi_i \trianglelefteq G$  e  $G/\ker \pi_i \cong G_i \in \mathcal{F}$  para  $i = 1, 2$ . Além disso, como  $G$  se mergulha no produto direto,  $\ker \pi_1 \cap \ker \pi_2 = \{1\}$  e, por hipótese, segue que  $G \in \mathcal{F}$  como pretendíamos. Reciprocamente, se  $N_1, N_2 \trianglelefteq G$  com  $N_1 \cap N_2 = 1$  e  $G/N_i \in \mathcal{F}$  para  $i = 1, 2$ , então  $G$  é produto subdireto de  $G/N_1$  e  $G/N_2$ , donde segue que  $G$  pertence a  $\mathcal{F}$ .  $\square$

Dados um grupo  $G$  e uma família de grupos  $(G_i)_{i=1, \dots, n}$  pertencentes a uma variedade  $\mathcal{V}$  de grupos, se  $G$  se mergulha no produto direto  $\prod_{i=1}^n G_i$  então  $G$  é isomorfo a um subgrupo  $H$  de  $\prod_{i=1}^n G_i$ . Como  $\prod_{i=1}^n G_i \in \mathcal{V}$ , temos  $H \in \mathcal{V}$  e portanto  $G \in \mathcal{V}$ . Consequentemente, toda a variedade de grupos é uma formação de grupos, uma vez que também é fechada para produtos subdiretos, o que vai de encontro ao que foi enunciado para variedades e formações de álgebras finitas. No entanto observe-se que uma formação não é necessariamente uma variedade. Uma formação é variedade se e só se é fechada para subgrupos.

**Exemplo 1.3.7.** A formação gerada pelo grupo alternado  $A_5$  de ordem 5 é conhecida como sendo a classe de todos os produtos diretos de cópias de  $A_5$  [11, II. Exemplo 2.13], que não é variedade mas é formação [4].

Consideremos agora outro tipo de classe de grupos.

**Definição 1.3.8.** Dada uma classe de grupos finitos  $\mathcal{C}$ , dizemos que  $\mathcal{C}$  é uma *classe de Fitting de grupos finitos* se satisfaz as seguintes condições:

1. Se  $G \in \mathcal{C}$  e  $H \trianglelefteq G$ , então  $H \in \mathcal{C}$ ;
2. Se  $G = \langle N_1, N_2 \rangle$  com  $N_1, N_2 \trianglelefteq G$  e  $N_1, N_2 \in \mathcal{C}$ , então  $G \in \mathcal{C}$ .

Relembremos que se  $N_1, N_2 \trianglelefteq G$  se tem  $\langle N_1, N_2 \rangle = N_1 N_2$ . Portanto, a condição (2) pode ser enunciada para produtos de dois subgrupos normais  $N_1$  e  $N_2$ .

Podemos ainda enunciar a condição (2) para produtos de um número finito de subgrupos normais  $N_1, \dots, N_n$ . Tal prova-se por indução em  $n$  e reparando que se  $N_1, \dots, N_n \trianglelefteq G$  então  $N_1 \dots N_n \trianglelefteq G$ .

É claro que a interseção de variedades, de formações, ou de classes de Fitting de grupos, é, respectivamente, uma variedade, uma formação ou uma classe de Fitting de grupos, o que permite falar em variedade, formação ou classe de Fitting gerada por um conjunto de grupos, uma vez que 1 pertence a qualquer classe destes tipos.

**Exemplo 1.3.9.** [10], [11], [26]

1. A classe de todos os grupos finitos  $\mathcal{G}$  é variedade, formação e classe de Fitting.
2. A classe de todos os grupos finitos solúveis  $\mathcal{S}$  é variedade, formação e classe de Fitting.
3. A classe de todos os  $p$ -grupos finitos solúveis  $\mathcal{S}_p$  é variedade, formação e classe de Fitting.
4. A classe de todos os grupos finitos nilpotentes  $\mathcal{N}$  é variedade, formação e classe de Fitting.
5. A classe de todos os  $\pi$ -grupos finitos solúveis  $\mathcal{S}_\pi$  é classe de Fitting.
6. A classe de todos os  $\pi$ -grupos finitos nilpotentes  $\mathcal{N}_\pi$  é classe de Fitting.
7. A classe de todos os grupos finitos  $p$ -nilpotentes  $\mathcal{N}^p$  é variedade e formação de grupos.

Note-se que apesar de haver uma ligação direta entre variedades e formações, no sentido em que toda a variedade é formação, o mesmo não acontece no que diz respeito às classes de Fitting.

*Observação 1.3.10.* Uma classe de Fitting não é necessariamente uma formação (variedade) e, reciprocamente, uma formação (variedade) não é necessariamente uma classe de Fitting. Por exemplo, a classe  $\mathcal{A}$  de todos os grupos finitos abelianos é uma formação mas não é uma classe de Fitting [3].

No entanto, repare-se que há classes que são simultâneamente formações e classes de Fitting. Naturalmente tais classes são chamadas de *formações Fitting*. Por exemplo, as classes  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{S}$  são exemplos de formações Fitting de grupos.

### 1.3.2 Operadores de fecho

Nesta secção veremos que se pode definir formação e classe de Fitting de grupos em termos de operadores de fecho, conceito que passamos a apresentar.

**Definição 1.3.11.** Um *operador* é uma aplicação entre classes de grupos  $C : \mathcal{X} \mapsto C\mathcal{X}$  tal que:

1.  $\mathcal{X} \subseteq C\mathcal{X}$ ,
2. se  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ , então  $C\mathcal{X} \subseteq C\mathcal{Y}$ .

**Definição 1.3.12.** Dados um operador  $C$  e uma classe  $\mathcal{X}$ , se  $\mathcal{X} = C\mathcal{X}$  dizemos que a classe  $\mathcal{X}$  é  *$C$ -fechada*.

Segue da definição de operador que a classe de todos os grupos finitos  $\mathcal{G}$  é  $C$ -fechada para qualquer operador  $C$ .

Entre operadores é possível considerar uma ordem parcial  $\leq$ : dados  $C_1$  e  $C_2$  operadores, definimos  $C_1 \leq C_2$  se  $C_1\mathcal{X} \subseteq C_2\mathcal{X}$  para toda a classe de grupos  $\mathcal{X}$ . Podemos também definir o produto  $C_1C_2$  de dois operadores  $C_1$  e  $C_2$  por  $(C_1C_2)\mathcal{X} = C_1(C_2\mathcal{X})$  para qualquer classe  $\mathcal{X}$ .

**Definição 1.3.13.** Um operador  $C$ , diz-se um *operador de fecho* se for idempotente, i.e., se  $C = CC$ .

Repare-se que se  $C$  é um operador de fecho e  $\mathcal{X}$  uma classe, então a classe  $C\mathcal{X}$  é a menor classe  $C$ -fechada que contém  $\mathcal{X}$ .

Enunciamos agora alguns dos operadores de fecho mais importantes neste estudo de classes que pretendemos fazer.

**Definição 1.3.14.** Dada uma classe de grupos  $\mathcal{X}$ , definimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\mathcal{X} &= (H : H \leq G, G \in \mathcal{X}), \\ \mathcal{Q}\mathcal{X} &= (G/N : N \trianglelefteq G, G \in \mathcal{X}), \\ \mathcal{S}_n\mathcal{X} &= (H : HsnG, G \in \mathcal{X}), \\ \mathcal{R}_0\mathcal{X} &= (G : \exists N_i \trianglelefteq G (i = 1, \dots, r), G/N_i \in \mathcal{X}, \cap_{i=1}^r N_i = 1), \\ \mathcal{N}_0\mathcal{X} &= (G : \exists N_i snG (i = 1, \dots, r), N_i \in \mathcal{X}, G = \langle N_1, \dots, N_r \rangle). \end{aligned}$$

À semelhança do provado na Proposição 1.3.6, vemos o seguinte:

**Proposição 1.3.15.** Uma classe  $\mathcal{F}$  de grupos finitos é uma formação se e só se  $\mathcal{F} = \mathcal{Q}\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F} = \mathcal{R}_0\mathcal{F}$ .

Além disso, uma classe de Fitting também pode ser caracterizada utilizando operadores de fecho.

**Proposição 1.3.16.** Uma classe  $\mathcal{C}$  de grupos finitos é uma classe de Fitting se e só se  $\mathcal{C} = \mathcal{S}_n\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C} = \mathcal{N}_0\mathcal{C}$ .

*Demonstração.* Se  $\mathcal{C} = \mathcal{S}_n\mathcal{C} = \mathcal{N}_0\mathcal{C}$ , então  $\mathcal{C}$  é classe de Fitting pois qualquer subgrupo normal é também subnormal.

Reciprocamente, seja  $H$  um subgrupo subnormal de um grupo  $G \in \mathcal{C}$ . Então existe uma cadeia finita

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G,$$

donde  $H_i \in \mathcal{C}$ , para qualquer  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Em particular,  $H \in \mathcal{C}$ . Como  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}_n\mathcal{C}$ , temos  $\mathcal{C} = \mathcal{S}_n\mathcal{C}$ .

Provemos agora a igualdade  $\mathcal{C} = \mathcal{N}_0\mathcal{C}$ . Claramente  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}_0\mathcal{C}$ . Seja então  $G$  um grupo tal que existem  $N_1, N_2 snG$ ,  $N_1, N_2 \in \mathcal{C}$  e  $G = \langle N_1, N_2 \rangle$ . É suficiente provar que  $G \in \mathcal{C}$  e o resto seguirá por indução no número  $r$  de subsemigrupos subnormais  $N_1, \dots, N_r$  na definição de  $\mathcal{N}_0\mathcal{C}$ .

Podemos assumir que  $N_i \neq G$  para  $i = 1, 2$ , caso contrário a demonstração ficaria concluída. Suponhamos ainda, de modo a alcançar uma contradição, que  $G$  é o menor grupo nas condições acima descritas tal que  $G \notin \mathcal{C}$ . Para  $i = 1, 2$ , sejam  $K_i := N_i^G$ . Como  $N_i snG$  e  $N_i \neq G$ , temos  $K_i \neq G$ . Além disso, como  $N_i snG$ , existe uma série de subgrupos

$$N_i = H_0^i \trianglelefteq H_1^i \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_k^i = G.$$

Então, para  $g \in G$ ,

$$gN_i g^{-1} \cap K_i = gH_0^i g^{-1} \cap K_i \trianglelefteq gH_1^i g^{-1} \cap K_i \trianglelefteq \dots \trianglelefteq gH_k^i g^{-1} \cap K_i = G \cap K_i = K_i.$$

Por outro lado,  $gN_i g^{-1} \cong N_i \in \mathcal{C}$ , logo  $gN_i g^{-1} \in \mathcal{C}$ . Consequentemente,  $K_i \in \mathcal{N}_0\mathcal{C}$  uma vez que  $K_i$  é gerado por subgrupos subnormais  $gN_i g^{-1}$  que pertencem a  $\mathcal{C}$ . Pela minimalidade de  $G$ , temos  $K_i \in \mathcal{C}$ . Agora, como  $N_1, N_2 \subseteq K_1 K_2$ , temos  $G = \langle N_1, N_2 \rangle = K_1 K_2$  onde  $K_1, K_2 \trianglelefteq G$  e  $K_1, K_2 \in \mathcal{C}$ . Portanto  $G \in \mathcal{C}$ , o que contradiz a hipótese como pretendíamos.  $\square$

### 1.3.3 Operações

É importante ter presente os resultados desta secção, uma vez que terão o papel de guia no próximo capítulo quando tentarmos generalizar o conceito de classe produto de grupos, tanto para formações como para classes de Fitting, a semigrupos inversos.

**Definição 1.3.17.** Dadas duas classes de grupos  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ , definimos *classe produto* do seguinte modo:

$$\mathcal{X}\mathcal{Y} := (G : \exists N \trianglelefteq G \text{ tal que } N \in \mathcal{X} \text{ e } G/N \in \mathcal{Y}).$$

Repare-se que esta operação não é associativa nem comutativa. Basta considerarmos, por exemplo, o grupo alternado  $A_4$  de ordem 4 e a classe de todos os grupos cíclicos  $\mathcal{C}$ :  $A_4 \in (\mathcal{C}\mathcal{C})\mathcal{C}$  mas, como  $A_4$  não tem subgrupos normais cíclicos não triviais,  $A_4 \notin \mathcal{C}(\mathcal{C}\mathcal{C})$ . Logo  $(\mathcal{X}\mathcal{Y})\mathcal{Z} \not\subseteq \mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{Z})$ .

Por outro lado, a inclusão  $\mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{Z}) \subseteq (\mathcal{X}\mathcal{Y})\mathcal{Z}$  é universalmente válida e, de facto, sai directamente da definição de classe produto. No entanto, observe-se que foi provado por H. Neumann que esta multiplicação de classes torna-se associativa para variedades de grupos [21].

Podemos também tomar potências de uma classe  $\mathcal{X}$ , definindo

$$\mathcal{X}^0 = (1),$$

e indutivamente para  $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{X}^{n+1} = (\mathcal{X}^n)\mathcal{X},$$

por esta ordem uma vez que o produto não é associativo. A um grupo em  $\mathcal{X}^2$  damos o nome de *meta- $\mathcal{X}$* .

**Exemplo 1.3.18.** Já definimos em 1.2.6 um grupo metabeliano  $G$  como sendo um grupo onde existe um subgrupo normal  $N \trianglelefteq G$  tal que tanto  $N$  como o quociente  $G/N$  são abelianos. Portanto, um grupo metabeliano é um grupo meta- $\mathcal{A}$ .

A classe produto de duas variedades de grupos é uma variedade de grupos [21] mas a classe produto de duas formações não é uma formação, em geral [11, Exemplo IV.1.6]. No entanto, a definição de produto pode ser modificada de modo a garantir que o correspondente produto de duas formações seja também uma formação.

Dada uma formação de grupos  $\mathcal{F}$  e um grupo  $G$ , existe em  $G$  um subgrupo normal  $N$  que é mínimo entre aqueles cujo quociente  $G/N$  pertence a  $\mathcal{F}$ . Trata-se do  $\mathcal{F}$ -residual de  $G$ ,  $G^{\mathcal{F}}$ .

*Observação 1.3.19.*  $G^{\mathcal{F}} = 1$  se e só se  $G \in \mathcal{F}$ .

**Proposição 1.3.20.** Dada  $\mathcal{F}$  uma formação de grupos e um grupo  $G$ , se  $N \trianglelefteq G$ , então

- (i)  $(G/N)^{\mathcal{F}} = G^{\mathcal{F}}N/N$ ;
- (ii) Se  $U$  é um subgrupo de  $G = UN$ , então  $U^{\mathcal{F}}N = G^{\mathcal{F}}N$ ;
- (iii) Se  $N$  é nilpotente e  $G = UN$ , então  $U^{\mathcal{F}} \subseteq G^{\mathcal{F}}$ .

*Demonstração.* Consultar [3, Proposição 2.2.8]. □

**Definição 1.3.21.** Dadas  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  formações de grupos, definimos

$$\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 := (G : G^{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1)$$

e chamamos a  $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$  a *formação produto* de  $\mathcal{F}_1$  com  $\mathcal{F}_2$ .

Este produto desfruta agora de várias propriedades, entre elas a de dar origem a outra formação e de ser associativo.

**Proposição 1.3.22.** *Sejam  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  e  $\mathcal{F}_3$  formações de grupos. Então:*

- (i)  $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2$ ;
- (ii)  $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$ ;
- (iii) Se  $\mathcal{F}_1$  é  $S_n$ -fechado, então  $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2$ ;
- (iv)  $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$  é uma formação;
- (v)  $G^{\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2} = (G^{\mathcal{F}_2})^{\mathcal{F}_1}$  para qualquer grupo  $G$ ;
- (vi)  $(\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2) \circ \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \circ (\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_3)$ .

*Demonstração.* Consultar [11, Teorema IV.1.8]. □

Dado  $\mathcal{C}$  uma classe de Fitting de grupos e  $G$  um grupo, então existe o maior subgrupo normal de  $G$  que pertence a  $\mathcal{C}$ , o  $\mathcal{C}$ -radical de  $G$ ,  $G_{\mathcal{C}}$ .

**Proposição 1.3.23.** *Sejam  $\mathcal{C}$  uma classe de Fitting e  $G$  um grupo. Então*

$$G_{\mathcal{C}} = \langle N : N \text{sn} G, N \in \mathcal{C} \rangle .$$

*Em particular,  $G_{\mathcal{C}}$  é o maior subgrupo subnormal de  $G$  que pertence a  $\mathcal{C}$ .*

*Demonstração.* É claro que  $G_{\mathcal{C}} \subseteq \langle N : N \text{sn} G, N \in \mathcal{C} \rangle$ . Seja então  $N \text{sn} G$  tal que  $N \in \mathcal{C}$ . Se  $N \trianglelefteq G$  a demonstração fica concluída. Assim, suponhamos que  $N \not\trianglelefteq G$ . Então, existe um subgrupo normal  $R \trianglelefteq G$  tal que  $N \text{sn} R \trianglelefteq G$ . Por indução em  $|G|$  podemos assumir que  $N \leq R_{\mathcal{C}}$ . Como  $R_{\mathcal{C}}$  é um subgrupo característico de  $R$ , podemos considerar, para cada  $g \in G$ , o automorfismo de  $R$

$$\begin{aligned} \phi_g : R &\longrightarrow R \\ r &\longmapsto g^{-1} r g, \end{aligned}$$

e obtemos que  $R_{\mathcal{C}} \phi_g = R_{\mathcal{C}}$ . Consequentemente,  $R_{\mathcal{C}}$  é normal em  $G$ . Além disso,  $R_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$  e portanto  $R_{\mathcal{C}} \leq G_{\mathcal{C}}$ . Como  $N \leq R_{\mathcal{C}}$ , temos  $N \leq G_{\mathcal{C}}$  como pretendíamos. □

*Observação 1.3.24.* Atendendo à Proposição 1.3.23, se  $N$  é um subgrupo normal de um grupo  $G$  e  $\mathcal{C}$  é uma classe de Fitting de grupos, então  $N_{\mathcal{C}} = N \cap G_{\mathcal{C}}$ .

Tal como no caso das formações de grupos, em geral a classe produto de classes de Fitting não é necessariamente uma classe de Fitting [11, Exemplo IX. 2.14 (b) (7)]. No entanto, também pode ser definido um outro produto, dual ao definido em 1.3.21 para formações. Este produto vai preservar a propriedade de classe de Fitting e também é associativo.

**Definição 1.3.25.** *Sejam  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  classes de Fitting de grupos. À classe  $\mathcal{C}_1 \diamond \mathcal{C}_2$  definida por*

$$\mathcal{C}_1 \diamond \mathcal{C}_2 := (G : {}^G/G_{\mathcal{C}_1} \in \mathcal{C}_2)$$

damos o nome de *produto de Fitting* de  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ .

**Proposição 1.3.26.** *Sejam  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  e  $\mathcal{C}_3$  classes de Fitting de grupos. Então*

- (i)  $\mathcal{C}_1 \diamond \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2$ ;
- (ii)  $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_1 \diamond \mathcal{C}_2$ ;
- (iii) *Se a classe  $\mathcal{C}_2$  é fechada para quocientes, então  $\mathcal{C}_1 \diamond \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2$ ;*
- (iv)  $\mathcal{C}_1 \diamond \mathcal{C}_2$  é uma classe de Fitting;
- (v) *Para qualquer grupo  $G$ , o  $\mathcal{C}_2$ -radical de  $G/G_{\mathcal{C}_1}$  é  $G_{\mathcal{C}_1 \diamond \mathcal{C}_2}/G_{\mathcal{C}_1}$ ;*
- (vi)  $(\mathcal{C}_1 \diamond \mathcal{C}_2) \diamond \mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_1 \diamond (\mathcal{C}_2 \diamond \mathcal{C}_3)$ .

*Demonstração.* Consultar [11, Teorema IX.1.12]. □

## Capítulo 2

# Semigrupos

Neste capítulo apresentamos os conceitos e resultados sobre semigrupos inversos de que necessitaremos posteriormente. Deste modo, a escolha das demonstrações apresentadas relaciona-se com a necessidade de aplicação dos resultados mais à frente.

Começamos por recordar algumas definições básicas mas fundamentais na secção 2.1 e, em particular, a definição das relações de Green; as quais não têm significado em grupos por serem aí a relação inversa. Na secção 2.2 introduzimos os semigrupos completamente regulares e, em particular, os semigrupos de Clifford, os quais irão desempenhar um papel importante no tratamento e construção de certas classes de inversos no próximo capítulo. Na secção 2.3 descreveremos congruências em termos do seu traço e kernel. Duas congruências em particular irão ter um papel mais importante, nomeadamente a menor congruência de grupo e a maior congruência que separa idempotentes. Segue-se a secção 2.4, onde discutiremos o conceito de conjugado num semigrupo e, conseqüentemente, o conceito de subsemigrupo normal. Será nesta secção que introduziremos os subsemigrupos  $i$ -normais. Na secção 2.5 recordaremos a existência de semigrupos inversos fundamentais e, por fim, introduziremos os semigrupos ortodoxos na secção 2.6.

Para uma leitura mais detalhada sobre este tema, indicamos por exemplo [18] e [23].

### 2.1 Definições básicas

**Definição 2.1.1.** Seja  $S$  um semigrupo. Um elemento  $e$  de  $S$  diz-se *idempotente* se  $e^2 = e$ . Denotamos o conjunto de todos os idempotentes de um subconjunto  $A$  de  $S$  por  $E(A)$ .

**Definição 2.1.2.** Um semigrupo diz-se um *semigrupo idempotente*, ou uma *banda*, se todos os seus elementos forem idempotentes.

**Definição 2.1.3.** Um *semi-reticulado*  $Y$  é um semigrupo idempotente comutativo. Denotamos a classe de todos os semi-reticulados por  $SI$ .

Um semi-reticulado também pode ser definido como um  $\wedge$ -*semi-reticulado*, i.e. um conjunto com uma ordem parcial  $\leq$  tal que dados elementos  $a, b$  existe o ínfimo  $a \wedge b$ . Pensando em  $Y$  com a Definição 2.1.3, temos

$$a \wedge b = ab,$$

$$a \leq b \iff a = ab = ba.$$

Podemos ainda definir  $\vee$ -*semi-reticulado* como um conjunto com uma ordem parcial  $\leq$  tal que dados elementos  $a, b$  existe o supremo  $a \vee b$ , e dizer que um conjunto com uma ordem parcial  $\leq$  é um *reticulado*

se for simultâneamente  $\wedge$ - e  $\vee$ -semi-reticulado. Um *reticulado modular* é um reticulado  $L$  que satisfaz

$$x \leq y \implies x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z), \forall x, y, z \in L.$$

É fundamental ter presente o próximo resultado para futuras aplicações.

**Proposição 2.1.4.** *Todo o elemento de um semigrupo finito  $S$  tem uma potência que é um idempotente.*

Tal facto resulta de dado  $a \in S$ , o subsemigrupo de  $S$  gerado por  $a$  conter um grupo cíclico.

*Demonstração.* Consultar [18, Proposição 1.2.3]. □

Em seguida introduziremos as relações de Green, mas primeiro necessitamos das seguintes definições.

**Definição 2.1.5.** Um semigrupo  $S$  com identidade diz-se um *monóide*.

**Definição 2.1.6.** Dado um semigrupo  $S$ , definimos o monóide

$$S^1 = \begin{cases} S, & \text{se } S \text{ tem identidade,} \\ S \cup \{1\}, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

no segundo caso 1 é tomado como identidade.

**Definição 2.1.7.** Seja  $S$  um semigrupo. Definimos o produto de subconjuntos  $I$  e  $J$  de  $S$  por

$$IJ = \{ij : i \in I, j \in J\}.$$

**Definição 2.1.8.** Uma parte  $I$  de um semigrupo  $S$  diz-se *ideal esquerdo* se  $SI \subseteq I$  e *ideal direito* se  $IS \subseteq I$ .  $I$  diz-se um *ideal* se for um ideal esquerdo e direito.

Dado  $a \in S$ , o conjunto  $Sa \cup \{a\}$  é o menor ideal esquerdo de  $S$  que contém  $a$ . A este ideal chamamos *ideal principal esquerdo* gerado por  $a$ , e vemos que corresponde ao produto  $S^1a$ . Definimos agora a equivalência  $\mathcal{L}$  pela regra: para  $a, b \in S$ ,

$$a\mathcal{L}b \iff S^1a = S^1b.$$

Analogamente se define em  $S$  *ideal principal direito* gerado por  $a$ , que será  $aS^1$ , e a equivalência  $\mathcal{R}$  pela regra: para  $a, b \in S$ ,

$$a\mathcal{R}b \iff aS^1 = bS^1.$$

*Observação 2.1.9.* Sejam  $a, b$  elementos num semigrupo  $S$ . Então  $a\mathcal{L}b$  se e só se existem  $x, y \in S^1$  tais que  $xa = b, yb = a$ . Dualmente,  $a\mathcal{R}b$  se e só se existem  $u, v \in S^1$  tais que  $au = b, bv = a$ .

**Proposição 2.1.10.** *As relações  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{R}$  comutam.*

*Demonstração.* Consultar [18, Proposição 2.1.3]. □

**Definição 2.1.11.** Seja  $S$  um semigrupo. Uma relação de equivalência  $\rho$  diz-se uma *congruência direita* se absorve produtos à direita:

$$(\forall a, b, c \in S) a\rho b \implies ac\rho bc;$$

e diz-se uma *congruência esquerda* se absorve produtos à esquerda:

$$(\forall a, b, c \in S) apb \implies capcb.$$

Uma relação  $\rho$  em  $S$  que seja tanto uma congruência direita como esquerda diz-se uma *congruência*.

*Observação 2.1.12.* É claro que a interseção de duas congruências é também uma congruência.

Outra propriedade de  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{R}$  é a seguinte.

**Proposição 2.1.13.**  $\mathcal{L}$  é uma congruência direita e  $\mathcal{R}$  é uma congruência esquerda.

*Demonstração.* Consultar [18, Proposição 2.1.2]. □

Dadas duas equivalências num conjunto, podemos considerar a sua interseção e o seu supremo, os quais ainda são equivalências. Definimos então

$$\mathcal{H} := \mathcal{L} \cap \mathcal{R},$$

$$\mathcal{D} := \mathcal{L} \vee \mathcal{R}.$$

Definimos ainda a equivalência  $\mathcal{J}$  pela regra: para  $a, b \in S$ ,

$$a \mathcal{J} b \iff S^1 a S^1 = S^1 b S^1,$$

onde  $S^1 a S^1$  é o *ideal principal* gerado pelo elemento  $a$ . Equivalentemente,  $a \mathcal{J} b$  se e só se existe  $x, y, u, v \in S^1$  tais que  $xay = b, ubv = a$ .

É imediato que  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}$  e  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$ , donde  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$ , uma vez que  $\mathcal{D}$  é a menor equivalência que contém  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{R}$ . Note-se ainda que esta inclusão pode ser estrita e um exemplo disso foi dado por Green em 1951 [16]. A igualdade  $\mathcal{D} = \mathcal{J}$  é obtida para todo o semigrupo finito [18, Proposição 2.14].

*Observação 2.1.14.* Denotaremos por  $L_a$  ( $R_a, H_a, D_a$  ou  $J_a$ ) a  $\mathcal{L}$ -classe ( $\mathcal{R}$ -classe,  $\mathcal{H}$ -classe,  $\mathcal{D}$ -classe ou a  $\mathcal{J}$ -classe) que contem um elemento  $a$ .

*Observação 2.1.15.* Todo o idempotente  $e$  num semigrupo  $S$  é uma identidade esquerda em  $R_e$ , uma identidade direita em  $L_e$  e uma identidade em  $H_e$ , i.e.,

$$e \mathcal{R} a \implies a = ea,$$

$$e \mathcal{L} a \implies a = ae,$$

$$e \mathcal{H} a \implies a = ea = ae.$$

**Definição 2.1.16.** As relações  $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{J}$  são chamadas *relações de Green*.

Repare-se agora que como  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{R}$  comutam, podemos mais facilmente descrever a equivalência  $\mathcal{D}$ , uma vez que se obtém

$$\mathcal{D} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}.$$

Note-se ainda que cada  $\mathcal{D}$ -classe num semigrupo  $S$  é união de  $\mathcal{L}$ -classes e também é união de  $\mathcal{R}$ -classes. A interseção de uma  $\mathcal{L}$ -classe com uma  $\mathcal{R}$ -classe, contidas numa mesma  $\mathcal{D}$ -classe, é uma  $\mathcal{H}$ -classe. Além disso,

$$a \mathcal{D} b \iff R_a \cap L_b \neq \emptyset \iff L_a \cap R_b \neq \emptyset.$$

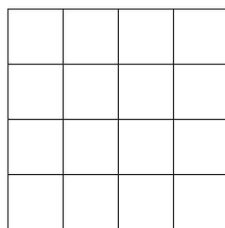


Figura 2.1: "Caixa de ovos"

É conveniente visualizar uma  $\mathcal{D}$ -classe, tal como sugerido por Clifford e Preston (1961), como uma “caixa de ovos”, na qual cada linha representa uma  $\mathcal{R}$ -classe, cada coluna representa uma  $\mathcal{L}$ -classe, e cada célula representa uma  $\mathcal{H}$ -classe. Obviamente que é possível que a “caixa de ovos” contenha apenas uma única fila ou uma única coluna ou que contenha até uma única célula.

Com os próximos resultados vemos que as  $\mathcal{H}$ -classes quando contêm idempotentes são grupos mas que em geral uma  $\mathcal{H}$ -classe pode não ser fechada para o produto.

**Teorema 2.1.17** (Teorema de Green). *Dados um semigrupo  $S$  e uma  $\mathcal{H}$ -classe  $H$  em  $S$ , então  $H^2 \cap H = \emptyset$  ou  $H^2 = H$  e  $H$  é um subgrupo de  $S$ .*

*Demonstração.* Consultar [18, Teorema 2.2.5]. □

**Corolário 2.1.17.1.** *Dados um semigrupo  $S$  e um idempotente  $e \in E(S)$ , então  $H_e$  é um subgrupo de  $S$ . Além disso,  $H_e$  é um subgrupo maximal de  $S$ .*

**Definição 2.1.18.** Um elemento  $a$  num semigrupo  $S$  diz-se *regular* se existe  $x \in S$  tal que  $axa = a$ . Um semigrupo  $S$  diz-se um *semigrupo regular* se todos os seus elementos forem regulares.

O próximo resultado mostra que  $\mathcal{D}$ -classes que contenham elementos regulares admitem algumas caracterizações interessantes.

**Lema 2.1.19.** *Dada uma  $\mathcal{D}$ -classe  $D$  de um semigrupo  $S$ , as seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $D$  contém um idempotente.
- (ii) Cada  $\mathcal{L}$ - e  $\mathcal{R}$ -classe de  $D$  contém um idempotente.
- (iii) Todo elemento de  $D$  é regular.
- (iv)  $D$  contém um elemento regular.

*Demonstração.* Consultar [23, Lema I.7.2]. □

O conceito de inverso de um elemento num semigrupo  $S$  usado habitualmente generaliza o conceito de inverso em grupos.

**Definição 2.1.20.** Dado um elemento  $a$  de um semigrupo  $S$ , dizemos que  $a'$  é um *inverso* de  $a$  se

$$aa'a = a \text{ e } a'ad' = a.$$

No entanto, contrariamente ao que acontece em grupos, um elemento de um semigrupo pode ter mais do que um inverso ou não ter nenhum. Iremos denotar o conjunto de todos os inversos de um elemento  $a$  por  $V(a)$ .

**Definição 2.1.21.** Um semigrupo  $S$  diz-se um *semigrupo inverso* se para todo o elemento  $a \in S$  existe um único elemento  $a^{-1} \in S$  inverso de  $a$ .

Note-se que os semigrupos inversos são obviamente semigrupos regulares e que se  $a$  é regular então  $a$  tem pelo menos o inverso  $xax$ .

É ainda importante ter presente o próximo resultado.

**Proposição 2.1.22.** Um semigrupo  $S$  é inverso se para todo o elemento  $a \in S$  existe  $d' \in S$  tal que  $ad'a = a$  e os idempotentes de  $S$  comutam.

*Demonstração.* Sejam  $S$  um semigrupo inverso e  $e, f \in E(S)$ . Seja  $a$  o único inverso de  $ef$ . Temos

$$\begin{aligned}(ef)(fae)(ef) &= ef^2ae^2f = efaef = ef, \\ (fae)(ef)(fae) &= fae^2f^2ae = f(aefa)e = fae,\end{aligned}$$

donde  $fae$  é também um inverso de  $ef$ . Pela unicidade obtemos que  $a = fae$ . Por outro lado, como  $(fae)^2 = f(aefa)e = fae$ , então  $a$  é um idempotente. Além disso, como  $ef$  e  $a$  são inversos de  $ef$ , temos ainda que  $a = ef$  e, consequentemente,  $ef$  é um idempotente. De um modo análogo se consegue provar que  $fe$  é um idempotente e, portanto, como

$$\begin{aligned}(ef)(fe)(ef) &= ef^2e^2f = (ef)^2 = ef, \\ (fe)(ef)(fe) &= fe^2f^2e = (fe)^2 = fe,\end{aligned}$$

concluimos que tanto  $fe$  como  $ef$  são inversos de  $ef$ , donde  $ef = fe$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $S$  é um semigrupo regular e que os seus idempotentes comutam. Sejam  $d', d'' \in V(a)$ . É claro que  $d'a, d''a \in E(S)$ . Repare-se agora que  $d'a \mathcal{L} a \mathcal{L} d''a$  e, consequentemente,  $d'a \mathcal{L} d''a$ . Como os idempotentes comutam e todo o idempotente é uma identidade direita na sua  $\mathcal{L}$ -classe pela Observação 2.1.15, obtemos

$$d'a = d'ad''a = d''ad'a = d''a.$$

Analogamente se prova que  $ad' = ad''$  recorrendo à relação  $\mathcal{R}$ . Por fim, temos

$$d' = d'ad' = d''ad' = d''ad'' = d'',$$

e, consequentemente,  $a$  tem um único inverso em  $S$  como se pretendia. □

Com esta última caracterização pode-se verificar que para  $a$  e  $b$  elementos de um semigrupo inverso  $S$  e para  $e \in E(S)$ , se tem

$$\begin{aligned}e^{-1} &= e, \\ (ab)^{-1} &= b^{-1}a^{-1}.\end{aligned}$$

Além disso,  $a^{-1}a, aa^{-1}, aea^{-1} \in E(S)$ .

*Observação 2.1.23.* Num semigrupo inverso  $S$ , dados  $a, b \in S$ , então

$$\begin{aligned}a \mathcal{L} b &\iff a^{-1}a = b^{-1}b, \\ a \mathcal{R} b &\iff aa^{-1} = bb^{-1},\end{aligned}$$

e, portanto,

$$a\mathcal{H}b \iff a^{-1}a = b^{-1}b, aa^{-1} = bb^{-1}.$$

Observe-se ainda que se  $e \in E(S)$ ,

$$e\mathcal{H}a \iff a^{-1}a = aa^{-1} = e.$$

**Definição 2.1.24.** Dado um semigrupo inverso  $S$ , a relação definida por

$$a \leq b \iff a = be, \text{ para algum } e \in E(S)$$

é uma ordem parcial em  $S$  compatível com o produto, chamada a *ordem natural* ou *canónica*.

**Definição 2.1.25.** Um semigrupo inverso  $S$  diz-se *E-unitário* se

$$\forall a \in S, e, ea \in E(S) \implies a \in E(S).$$

Esta definição é equivalente a dizer que se  $ae \in E(S)$  então  $a \in E(S)$ , ou ainda a dizer que se  $f \in E(S)$  e  $f \leq a$  então  $a \in E(S)$ .

**Definição 2.1.26.** Dado  $\theta : S \rightarrow T$  um morfismo entre semigrupos, dizemos que o morfismo  $\theta$  *separa idempotentes* se, para  $e, f \in S$ , se  $e\theta = f\theta$  então  $e = f$ .

**Teorema 2.1.27** (Teorema de McAlister). *Todo o semigrupo inverso é imagem por um morfismo que separa idempotentes de um semigrupo inverso E-unitário.*

*Demonstração.* Consultar [23, Corolário VII.4.6]. □

Os próximos resultados serão indispensáveis para o nosso estudo.

**Lema 2.1.28** (Lema de Lallement). *Seja  $\theta : S \rightarrow T$  um morfismo sobrejetivo entre semigrupos regulares. Se  $f$  for um idempotente de  $T$ , então existe um idempotente  $e$  em  $S$  tal que  $f = e\theta$ .*

*Demonstração.* Sejam  $f \in E(T)$  e  $a \in S$  tais que  $a\theta = f$ . Seja ainda  $x \in V(a^2)$ . Então

$$(axa)(axa) = a(xa^2x)a = axa$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} (axa)\theta &= (a\theta)(x\theta)(a\theta) = (a^2\theta)(x\theta)(a^2\theta) \\ &= (a^2xa^2)\theta = (a^2)\theta = a\theta = f. \end{aligned}$$

Logo, existe  $e := axa \in E(S)$  tal que  $f = e\theta$ . □

**Teorema 2.1.29.** *Sejam  $S$  um semigrupo inverso,  $T$  um semigrupo e  $\phi : S \rightarrow T$  um morfismo sobrejetivo. Então  $T$  é um semigrupo inverso.*

*Demonstração.* Sejam  $t \in T$  e  $s \in S$  tais que  $s\phi = t$ . Então,

$$t = s\phi = (ss^{-1}s)\phi = (s\phi)(s^{-1}\phi)(s\phi) = t(s^{-1}\phi)t.$$

e notemos ainda que  $s^{-1}\phi = (s^{-1}\phi)t(s^{-1}\phi)$ . Por outro lado, dados  $f_1, f_2 \in E(T)$ , pelo Lema de Lalle-ment 2.1.28, existem  $e_1, e_2 \in E(S)$  tal que  $e_1\phi = f_1$  e  $e_2\phi = f_2$ . Assim,

$$\begin{aligned} f_1f_2 &= (e_1\phi)(e_2\phi) = (e_1e_2)\phi \\ &= (e_2e_1)\phi = (e_2\phi)(e_1\phi) = f_2f_1. \end{aligned}$$

Daqui se conclui que  $T$  é um semigrupo inverso. □

## 2.2 Semigrupos completamente regulares

Vamos agora considerar a classe dos semigrupos completamente regulares, que veremos serem uniões de grupos.

**Definição 2.2.1.** Um elemento  $a$  num semigrupo  $S$  diz-se *completamente regular* se  $a = axa$  e  $xa = ax$  para algum  $x$  em  $S$ . Um semigrupo  $S$  diz-se um *semigrupo completamente regular* se todos os seus elementos forem completamente regulares.

Um semigrupo completamente regular  $S$  pode também ser visto como um semigrupo onde existe uma operação unária  $a \mapsto a^{-1}$ , com as seguintes três propriedades:

$$\begin{aligned} (a^{-1})^{-1} &= a, \\ aa^{-1}a &= a, \\ aa^{-1} &= a^{-1}a, \end{aligned}$$

sendo  $a^{-1}$  um inverso especial de  $a \in S$ .

**Proposição 2.2.2.** Dada uma  $\mathcal{H}$ -classe  $H$  de um semigrupo  $S$ , as seguintes condições são equivalentes:

- (i)  $H$  contém um idempotente;
- (ii) Todo o elemento de  $H$  é completamente regular;
- (iii)  $H$  contém um elemento completamente regular.

*Demonstração.* Consultar [23, Lema I.7.5.]. □

**Teorema 2.2.3.** Dado um semigrupo  $S$ , são equivalentes as seguintes condições:

- (i)  $S$  é completamente regular;
- (ii) Todo o elemento de  $S$  pertence a um subgrupo de  $S$ ;
- (iii) Toda a  $\mathcal{H}$ -classe de  $S$  é um grupo.

*Demonstração.* Consultar [18, Proposição 4.1.1]. □

Segue, portanto, que

**Corolário 2.2.3.1.** Um semigrupo  $S$  é completamente regular se e só se união disjunta dos seus subgrupos maximais.

**Lema 2.2.4.** Seja  $T$  um subsemigrupo regular de um semirgrupo completamente regular  $S$ . Então  $T$  é completamente regular.

*Demonstração.* Seja  $a \in T$  e  $x$  um inverso de  $a^2$  em  $T$ . Então  $axa \in E(T)$  e, claramente,  $axa \in aT \cap Ta$ . Por outro lado, considere-se o inverso  $a^{-1}$  de  $a$  tal que  $aa^{-1} = a^{-1}a$ . Então,

$$a = aa^{-1}a = a^{-1}a^2 = a^{-1}a^2xa^2 = (axa)a$$

e, analogamente,  $a = a(axa)$ , donde  $a \in axaT \cap Taxa$ . Assim  $a \in \mathcal{H}axa$  em  $S$  e, portanto,  $H_a$  contém um idempotente. Pela Proposição 2.2.2, obtemos que  $a$  é completamente regular.  $\square$

**Definição 2.2.5.** Um *semigrupo de Clifford* é um semigrupo inverso completamente regular.

Um semigrupo de Clifford pode também ser considerado como um semigrupo completamente regular  $S$ , no qual

$$(xx^{-1})(yy^{-1}) = (yy^{-1})(xx^{-1}), \forall x, y \in S.$$

Além disso, os semigrupos de Clifford são exatamente os semi-reticulados fortes de grupos, que passamos a descrever.

Primeiro, seja  $S$  um semigrupo e  $\rho$  um congruência em  $S$ . Então, definindo em  $S/\rho$  um produto por, dados  $a, b \in S$ ,

$$(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho,$$

obtemos um semigrupo, e definindo a aplicação

$$\begin{aligned} \rho^\sharp : S &\longrightarrow S/\rho \\ a &\longmapsto a\rho \end{aligned}$$

obtemos um morfismo entre semigrupos.

Se  $S/\rho$  é um semi-reticulado, então cada classe  $a\rho$  é um subsemigrupo de  $S$ . Além disso,

$$(ab)\rho = (ba)\rho, \forall a, b \in S.$$

Se  $Y := S/\rho$  então, neste caso,  $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$  em que  $S_\alpha$  é uma  $\rho$ -classe, e dizemos que  $S$  é um semi-reticulado  $Y$  de semigrupos  $S_\alpha, \alpha \in Y$ .

Sejam agora  $Y$  um semi-reticulado e  $\{S_\alpha\}_{\alpha \in Y}$  um conjunto de semigrupos tais que  $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$  se  $\alpha \neq \beta$ . Suponhamos que, para  $\alpha, \beta \in Y$  com  $\alpha \geq \beta$ , existe um morfismo  $\phi_{\alpha, \beta} : S_\alpha \longrightarrow S_\beta$ , tal que  $\phi_{\alpha, \alpha}$  é o morfismo identidade  $id_{S_\alpha}$  e

$$\phi_{\alpha, \beta} \phi_{\beta, \gamma} = \phi_{\alpha, \gamma}, \text{ se } \alpha \geq \beta \geq \gamma. \quad (2.1)$$

Defina-se uma multiplicação no conjunto  $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$  em termos das multiplicações nos componentes  $S_\alpha$  e nos morfismos  $\phi_{\alpha, \beta}$  pela regra

$$ab = (a\phi_{\alpha, \alpha\beta})(b\phi_{\beta, \alpha\beta})$$

para cada  $a \in S_\alpha$  e  $b \in S_\beta$ .

Se  $a \in S_\alpha, b \in S_\beta$  e  $c \in S_\gamma$  então, pelas propriedades dos morfismos e pela condição de transitividade 2.1, temos

$$\begin{aligned} (ab)c &= (a\phi_{\alpha, \alpha\beta})(b\phi_{\beta, \alpha\beta})c \\ &= [((a\phi_{\alpha, \alpha\beta})(b\phi_{\beta, \alpha\beta}))\phi_{\alpha\beta, \alpha\beta\gamma}](c\phi_{\gamma, \alpha\beta\gamma}) \\ &= (a\phi_{\alpha, \alpha\beta\gamma})(b\phi_{\beta, \alpha\beta\gamma})(c\phi_{\gamma, \alpha\beta\gamma}), \end{aligned}$$

que se prova ser igual a  $a(bc)$ . Assim, a multiplicação definida é associativa e portanto  $S$  é um semigrupo que se denota por

$$S = [Y; S_\alpha, \phi_{\alpha, \beta}]$$

e se chama um *semi-reticulado forte de semigrupos*.

Os semigrupos de Clifford podem então ser caracterizados como sendo semi-reticulados fortes de grupos [18], ou ainda como semigrupos regulares em que os idempotentes são centrais.

**Definição 2.2.6.** Entendemos por *elemento central* de um semigrupo  $S$  um elemento  $c$  tal que  $cs = sc$  para qualquer  $s \in S$ .

O conjunto de todos os elementos centrais de um semigrupo  $S$  forma um subsemigrupo, que se denota por  $Z(S)$  e é chamado o *centro de  $S$* . Mais geralmente,

**Definição 2.2.7.** Dado  $A$  um subconjunto não vazio de  $S$ , definimos o *centralizador de  $A$  em  $S$*  como sendo o conjunto

$$A\xi = \{s \in S : sa = as \forall a \in A\}.$$

Em particular,  $S\xi = Z(S)$ .

Como exemplos de semigrupos inversos até agora mencionámos os grupos, os semi-reticulados e os semigrupos de Clifford. Entre os semigrupos inversos encontramos também o semigrupo inverso simétrico que na teoria dos semigrupos inversos tem o papel de grupo simétrico na teoria dos grupos.

Dado um conjunto não vazio  $X$ , o conjunto  $\mathcal{S}(X)$  constituído por todas as aplicações parciais injetivas de  $X$  e munido da operação composição de relações  $\circ$ : se  $\alpha, \beta \in \mathcal{S}(X)$ , então  $(x, y) \in \alpha \circ \beta$  se e só se existe  $z$  em  $X$  tal que  $(x, z) \in \alpha$  e  $(z, y) \in \beta$ , forma um semigrupo inverso, chamado *semigrupo inverso simétrico* em  $X$ .

**Exemplo 2.2.8.** Se  $X = \{1, 2\}$ , então  $\mathcal{S}(X)$  consiste nas aplicações

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

juntamente com a aplicação vazia  $\emptyset$ , tendo-se  $E(\mathcal{S}(X)) = \{1_U : U \subseteq X\}$ .

Como dissemos este semigrupo tem o papel do grupo simétrico sendo possível obter o análogo do Teorema de Cayley. Wagner (1952) e, independentemente, Preston (1954) mostraram que:

**Teorema 2.2.9.** *Seja  $S$  um semigrupo inverso. Então existe um semigrupo inverso simétrico  $\mathcal{S}(X)$  e um morfismo injetivo  $\phi$  de  $S$  em  $\mathcal{S}(X)$ .*

*Demonstração.* Tomando  $X = S$ , defina-se  $\phi : S \rightarrow \mathcal{S}(S)$  por: para cada  $a \in S$ , seja  $a\phi = \lambda_a$  onde

$$\lambda_a : Saa^{-1} \rightarrow Sa^{-1}a$$

$$x \mapsto xa.$$

As relações  $\lambda_a$  são de facto aplicações parciais injetivas em  $S$  e  $\phi$  um morfismo injetivo [18, Teorema 1.1.2]. □

## 2.3 Congruências

Nesta secção tratamos congruências em semigrupos inversos começando com alguns resultados num semigrupo arbitrário.

**Teorema 2.3.1** (1º Teorema do isomorfismo). *Sejam  $S$  e  $T$  semigrupos e  $\phi : S \rightarrow T$  um morfismo. Então a relação*

$$\ker \phi = \phi \circ \phi^{-1} = \{(a, b) \in S \times S : a\phi = b\phi\}$$

*é uma congruência em  $S$ , e existe um morfismo injetivo  $\alpha : S/\ker \phi \rightarrow T$  tal que  $\text{im} \alpha = \text{im} \phi$  e o diagrama abaixo comuta. Em particular, se  $\phi$  é sobrejetivo então  $T \cong S/\ker \phi$ .*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\phi} & T \\ (\ker \phi)^{\natural} \downarrow & \nearrow \alpha & \\ S/\ker \phi & & \end{array}$$

Figura 2.2: Diagrama comutativo

*Demonstração.* Consultar [18, Teorema 1.5.2]. □

Iremos também necessitar de ter presente o seguinte:

**Teorema 2.3.2** (3º Teorema do isomorfismo). *Para quaisquer duas congruências  $\rho$  e  $\tau$  num semigrupo  $S$  tais que  $\rho \subseteq \tau$ , define-se a relação  $\tau/\rho$  em  $S/\rho$  por, para  $a, b \in S$ ,*

$$(a\rho)(\tau/\rho)(b\rho) \iff a\tau b.$$

*Então  $\tau/\rho$  é uma congruência em  $S/\rho$  e  $(S/\rho)/(\tau/\rho) \cong S/\tau$ .*

*Demonstração.* Consultar [18, Teorema 1.5.4]. □

Em seguida mostramos como uma congruência  $\rho$  num semigrupo inverso  $S$  fica completamente determinada pela união de  $\rho$ -classes que contêm idempotentes e pela sua restrição ao semi-reticulado de idempotentes  $E(S)$ . Para tal, iremos caracterizar este par de parâmetros de uma congruência, o qual chamaremos par de congruência e, reciprocamente, construiremos a única congruência associada a um tal par.

O próximo lema será usado frequentemente e sem referência explícita.

**Lema 2.3.3.** *Seja  $\rho$  uma congruência num semigrupo inverso  $S$ . Para quaisquer  $x, y \in S$ , se  $x\rho y$  então  $x^{-1}\rho y^{-1}$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.1.29, o quociente  $S/\rho$  é um semigrupo inverso, uma vez que  $\rho^{\natural}$  é um morfismo sobrejetivo. Consequentemente, para cada  $x \in S$ ,  $x^{-1}\rho$  é um inverso de  $x\rho$  em  $S/\rho$  e, portanto,  $x^{-1}\rho = (x\rho)^{-1}$ , pela unicidade de inversos. Logo, se  $x\rho y$  então  $x^{-1}\rho = (x\rho)^{-1} = (y\rho)^{-1} = y^{-1}\rho$ , donde  $x^{-1}\rho y^{-1}$ . □

**Definição 2.3.4.** Dada uma congruência  $\rho$  num semigrupo inverso  $S$  definimos o *kernel* (ou *núcleo*) e o *traço* de  $\rho$ , respetivamente, por

$$\begin{aligned} \ker \rho &= \{a \in S : a\rho e \text{ para algum } e \in E(S)\}, \\ \text{tr } \rho &= \rho|_{E(S)}. \end{aligned}$$

*Observação 2.3.5.* Percebemos que pode haver ambiguidade na notação  $\ker$ , uma vez que tanto a usamos para definir kernel de uma congruência como kernel de um morfismo, no entanto, pensamos que o leitor distinguirá os dois casos quando estes forem empregues.

Assim, podemos associar a cada congruência  $\rho$  em  $S$  um par  $(\ker \rho, \text{tr } \rho)$ .

**Definição 2.3.6.** Seja  $S$  um semigrupo inverso. Um subconjunto  $N$  de  $S$  diz-se *cheio* se  $E(S) \subseteq N$ . Dados  $a, b \in S$ ,  $b^{-1}ab$  diz-se um *conjugado* de  $a$ . Um subsemigrupo inverso cheio  $N$  de  $S$  tal que  $s^{-1}Ns \subseteq N$ , para qualquer  $s \in S$ , diz-se um *subsemigrupo normal* de  $S$ , escrevendo-se  $N \trianglelefteq S$ .

**Definição 2.3.7.** Seja  $S$  um semigrupo inverso. Uma congruência  $\tau$  em  $E(S)$  diz-se uma *congruência normal* se para quaisquer  $e, f \in E(S)$  e  $s \in S$ , se  $e\tau f$  então  $s^{-1}es\tau s^{-1}fs$ .

**Definição 2.3.8.** Seja  $S$  um semigrupo inverso. Um par  $(N, \tau)$  diz-se um *par de congruência* em  $S$  se  $N$  é um subsemigrupo normal de  $S$ ,  $\tau$  é uma congruência normal em  $E(S)$  e satisfazem:

1. se  $e\tau a^{-1}a$  e  $ae \in N$  então  $a \in N$ , em que  $a \in S$ ,  $e \in E(S)$ ;
2. se  $n \in N$ , então  $nn^{-1}\tau n^{-1}n$ .

Repare-se que dada uma congruência  $\rho$  o par  $(\ker \rho, \text{tr } \rho)$  é um par de congruência. Além disso, dado um par de congruência  $(N, \tau)$  podemos definir a relação  $\rho_{(N, \tau)}$  em  $S$  por, para  $a, b \in S$ ,

$$a\rho_{(N, \tau)}b \iff a^{-1}a\tau b^{-1}b, ab^{-1} \in N.$$

No lema seguinte enunciamos alguns resultados que se usam na demonstração do próximo Teorema.

**Lema 2.3.9.** Para um par de congruência  $(N, \tau)$  de um semigrupo inverso  $S$  e para  $a, b \in S$ ,  $e \in E(S)$ ,

- (i) se  $e\tau a^{-1}a$  e  $aeb \in N$ , então  $ab \in N$ ;
- (ii) se  $ab \in N$ , então  $aeb \in N$ ;
- (iii) se  $ab^{-1} \in N$  e  $a^{-1}a\tau b^{-1}b$ , então  $a^{-1}ea\tau b^{-1}eb$ .

*Demonstração.* Sejam  $a, b \in S$  e  $e \in E(S)$ .

- (i) Se  $aeb \in N$  e  $e\tau a^{-1}a$ , então

$$aeb = (ae)(bb^{-1})b = ab(b^{-1}eb)$$

e

$$(ab)^{-1}(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b \tau b^{-1}eb.$$

Logo, pela alínea (1) da Definição 2.3.8 de par de congruência,  $ab \in N$ .

(ii) Se  $ab \in N$ , então  $aeb = (ab)(b^{-1}eb) \in N$ , uma vez que  $b^{-1}eb \in E(S)$  e  $N$  é cheio.

(iii) Suponhamos que  $ab^{-1} \in N$  e  $a^{-1}a\tau b^{-1}b$ . Então  $ba^{-1} \in N$ , donde  $eba^{-1} \in N$ . Assim, usando em particular a alínea (2) da Definição 2.3.8 de par de congruência, temos

$$\begin{aligned}
a^{-1}ea &= (a^{-1}ea)(a^{-1}a)(a^{-1}ea) \tau (a^{-1}ea)(b^{-1}b)(a^{-1}ea) \\
&= (a^{-1}e)(ab^{-1})(ab^{-1})^{-1}(ea) \tau (a^{-1}e)(ab^{-1})^{-1}(ab^{-1})(ea) \\
&= a^{-1}eba^{-1}ab^{-1}ea \\
&= a^{-1}(eba^{-1})(eba^{-1})^{-1}a \tau a^{-1}(eba^{-1})^{-1}(eba^{-1})a \\
&= a^{-1}(ab^{-1}e)(eba^{-1})a \\
&= (a^{-1}a)b^{-1}eb(a^{-1}a) \tau (b^{-1}b)b^{-1}eb(b^{-1}b) \\
&= b^{-1}eb.
\end{aligned}$$

□

Com o auxílio destes conceitos, apresentamos então uma caracterização das congruências em semigrupos inversos, que foi desencadeada pelo trabalho de H. E. Scheiblich [27], sendo que uma descrição detalhada desta abordagem pode ser encontrada em [23].

**Teorema 2.3.10.** *Seja  $S$  um semigrupo inverso. Se  $(N, \tau)$  é um par de congruência em  $S$ , então  $\rho_{(N, \tau)}$  é a única congruência  $\rho$  em  $S$  para a qual  $\ker \rho = N$  e  $\text{tr } \rho = \tau$ . Reciprocamente, se  $\rho$  é um congruência em  $S$ , então  $(\ker \rho, \text{tr } \rho)$  é um par de congruência em  $S$  e  $\rho_{(\ker \rho, \text{tr } \rho)} = \rho$ .*

*Demonstração.* Sejam  $(N, \tau)$  um par de congruência em  $S$  e  $\rho = \rho_{(N, \tau)}$ . Então, como  $N$  é cheio e  $\tau$  é reflexiva,  $\rho$  é reflexiva; como  $\tau$  é simétrica e  $N$  é um semigrupo inverso,  $\rho$  é simétrica. Suponhamos agora que  $a\rho b$  e  $b\rho c$ . Então

$$a^{-1}a \tau b^{-1}b \tau c^{-1}c$$

e  $ab^{-1}, bc^{-1} \in N$ , donde,  $a(b^{-1}b)c^{-1} \in N$ . Como  $a^{-1}a \tau b^{-1}b$ , pelo Lema 2.3.9 (i) vem que  $ac^{-1} \in N$ . Assim,  $a\rho c$  e portanto  $\rho$  é transitiva.

Sejam  $a\rho b$  e  $c \in S$ . Então

$$(ac)^{-1}(ac) = c^{-1}(a^{-1}a)c \tau c^{-1}(b^{-1}b)c = (bc)^{-1}(bc),$$

uma vez que  $a^{-1}a \tau b^{-1}b$  e  $\tau$  é uma congruência normal em  $E(S)$ . Pela alínea (ii) do Lema 2.3.9,  $(ac)(bc)^{-1} = a(cc^{-1})b^{-1} \in N$ . Segue que  $ac \rho bc$  e, por 2.3.9 (iii),

$$(ca)^{-1}(ca) = a^{-1}(c^{-1}c)a \tau b^{-1}(c^{-1}c)b = (cb)^{-1}(cb),$$

uma vez que  $a^{-1}a \tau b^{-1}b$  e  $ab^{-1} \in N$ ; temos ainda  $(ca)(cb)^{-1} = cab^{-1}c^{-1} \in N$ , uma vez que  $ab^{-1} \in N$  e  $N$  é um subsemigrupo normal. Assim,  $\rho$  é um congruência em  $S$ .

Se  $a\rho e$  para  $e \in E(S)$ , então  $a^{-1}a \tau e$  e  $ae \in N$ , o que pela Definição 2.3.8 (1) implica que  $a \in N$ . Além disso, se  $a \in N$ , então claramente  $a\rho a^{-1}a$ . Consequentemente,  $\ker \rho = N$ ; e obviamente  $\text{tr } \rho = \tau$ , já que  $N$  é cheio.

Tomemos agora uma congruência  $\lambda$  em  $S$  tal que  $\ker \lambda = N$  e  $\text{tr } \lambda = \tau$ . Suponhamos primeiro que  $a\lambda b$ . Então  $a^{-1}\lambda b^{-1}$  e, portanto,  $a^{-1}a\lambda b^{-1}b$  e  $ab^{-1}\lambda bb^{-1}$ . Logo  $a^{-1}a \tau b^{-1}b$  e  $ab^{-1} \in N$ , e, consequentemente,  $a\rho b$ . Por outro lado, se  $a\rho b$ , então  $a^{-1}a\rho b^{-1}b$  e  $ab^{-1}\rho bb^{-1}$ . Seja  $e = bb^{-1}$ . Então

$a^{-1}a \tau b^{-1}b$  e  $ab^{-1} \in \ker \rho$ . Como  $\ker \rho = N = \ker \lambda$ , existe  $e = e^2$  tal que  $ab^{-1} \lambda e$ . Então

$$\begin{aligned} a &= a(a^{-1}a) \lambda a(b^{-1}b) = (ab^{-1}b \lambda eb, \\ b &= b(b^{-1}b) \lambda b(a^{-1}a) = (ba^{-1}a) \lambda ea, \end{aligned}$$

donde  $eb\lambda eea = ea$  e, portanto,  $a\lambda eb\lambda ea\lambda b$ . Consequentemente,  $\rho = \lambda$  o que prova a unicidade.

Reciprocamente, se  $\rho$  é uma congruência em  $S$ , é claro que  $(\ker \rho, \text{tr} \rho)$  é um par de congruência em  $S$ . Pelo que acabámos de ver tem-se  $\ker \rho_{(\ker \rho, \text{tr} \rho)} = \ker \rho$  e também  $\text{tr} \rho_{(\ker \rho, \text{tr} \rho)} = \text{tr} \rho$ . Além disso, tem-se  $\rho_{(\ker \rho, \text{tr} \rho)} = \rho$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

Tenhamos presente que dada uma congruência  $\rho$  em  $S$ , então

$$a\rho b \iff a^{-1}a \text{tr} \rho b^{-1}b, ab^{-1} \in \ker \rho,$$

para  $a, b \in S$ . Além disso, temos também

$$a\rho b \iff aa^{-1} \text{tr} \rho bb^{-1}, a^{-1}b \in \ker \rho.$$

**Definição 2.3.11.** Seja  $\rho$  um congruência num semigrupo inverso  $S$ . Definimos duas relações  $\rho_{\max}$  e  $\rho_{\min}$  em  $S$  por

$$\begin{aligned} a\rho_{\max} b &\iff a^{-1}eapb^{-1}eb, \forall e \in E(S), \\ a\rho_{\min} b &\iff \begin{cases} aa^{-1} \rho bb^{-1} \\ e\rho aa^{-1}, ea = eb \end{cases} \text{ para algum } e \in E(S). \end{aligned}$$

**Proposição 2.3.12.** Sejam  $S$  um semigrupo inverso e  $\tau$  uma congruência normal em  $E(S)$ . Então a relação  $\tau_{\max}$  é a maior congruência em  $S$  com traço  $\tau$ .

*Demonstração.* A verificação que  $\tau_{\max}$  é uma relação de equivalência é clara. Para vermos que é uma congruência, suponhamos  $a\tau_{\max} b$  e seja  $c \in S$ . Então, usando a normalidade de  $\tau$  temos, para  $e$  em  $E(S)$ ,

$$(ac)^{-1}e(ac) = c^{-1}(a^{-1}ea)c \tau c^{-1}(b^{-1}eb)c = (bc)^{-1}e(bc)$$

e portanto  $ac\tau_{\max} bc$ . Ainda, como  $c^{-1}ec \in E(S)$  para cada  $e \in E(S)$ , temos,

$$(ca)^{-1}e(ca) = a^{-1}(c^{-1}ec)a \tau b^{-1}(c^{-1}ec)b = (cb)^{-1}e(cb)$$

e portanto  $ca\tau_{\max} cb$ .

Suponhamos agora que  $e\tau f$ . Então, para  $g \in E(S)$ ,

$$e^{-1}ge = ge \tau gf = f^{-1}gf$$

e portanto  $(e, f) \in \text{tr} \tau_{\max}$ . Reciprocamente, se  $(e, f) \in \tau_{\max} \cap (E(S) \times E(S))$ , então  $ge \tau gf$  para qualquer  $g \in E(S)$ . Em particular,

$$\begin{aligned} e &= ee \tau ef, \\ f &= ff \tau fe. \end{aligned}$$

Segue-se que  $e\tau f$ , donde  $tr\tau = \tau_{max}$  como pretendíamos.

Finalmente, iremos mostrar que  $\tau_{max}$  é a maior congruência com traço  $\tau$ . Seja  $\rho$  uma congruência em  $S$  cujo traço é  $\tau$  e suponhamos que  $a\rho b$ . Então  $a^{-1}\rho b^{-1}$ , e portanto, para  $e$  em  $E(S)$ ,

$$(a^{-1}ea, b^{-1}eb) \in \rho \cap (E(S) \times E(S)) = \tau.$$

Logo  $a\tau_{max}b$ , pelo que  $\rho \subseteq \tau_{max}$ . □

**Proposição 2.3.13.** *Seja  $\rho$  uma congruência num semigrupo inverso  $S$ . Então  $S/\rho$  é um grupo se e só se  $tr\rho = E(S) \times E(S)$ .*

*Demonstração.* Suponhamos primeiro que  $S/\rho$  é um grupo. Então  $\rho^\natural$  aplica todo o idempotente de  $S$  na identidade de  $S/\rho$  e, portanto,  $E(S) \times E(S) \subseteq tr\rho$ , mas  $tr\rho \subseteq E(S) \times E(S)$ , donde se tem a igualdade. Reciprocamente, suponhamos que  $tr\rho = E(S) \times E(S)$ . Pelo Lema de Lallement 2.1.28, todo o idempotente de  $S/\rho$  é imagem por  $\rho^\natural$  de um idempotente de  $S$ . Então  $S/\rho$  é um semigrupo inverso com apenas um idempotente, e, portanto,  $S/\rho$  é um grupo. □

**Proposição 2.3.14.** *Sejam  $S$  um semigrupo inverso e  $\tau$  uma congruência normal em  $E(S)$ . Então a relação  $\tau_{min}$  é a menor congruência em  $S$  com traço  $\tau$ .*

*Demonstração.* Sejam  $(a,b), (b,c) \in \tau_{min}$ . Então  $aa^{-1}\tau bb^{-1}$  e existem  $e, f \in E(S)$  tais que  $e\tau aa^{-1}\tau f$ ,  $ea = eb$  e  $fb = fc$ . Assim,  $ef\tau aa^{-1}$  e  $efa = efc$ , donde se conclui que  $(a,c) \in \tau_{min}$ , e portanto que  $\tau_{min}$  é transitiva. A reflexividade e a simetria de  $\tau_{min}$  são imediatas.

Tomemos agora  $(a,b) \in \tau_{min}$  e  $c \in S$ . Então,  $aa^{-1}\tau bb^{-1}$  e existe  $e \in E(S)$  tal que  $e\tau aa^{-1}$  e  $ea = eb$ . Como  $\tau$  é normal,

$$(ca)(ca)^{-1} = c(aa^{-1})c^{-1}\tau c(bb^{-1})c^{-1} = (cb)(cb)^{-1}$$

e portanto, temos  $cec^{-1}\tau(ca)(ca)^{-1}$  tal que

$$(cec^{-1})ca = cea = ceb = (cec^{-1})cb.$$

Logo  $(ca, cb) \in \tau_{min}$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} (ac)(ac)^{-1} &= a(cc^{-1})a^{-1} \\ &= aa^{-1}a(cc^{-1})a^{-1}\tau eacc^{-1}a^{-1} \\ &= eacc^{-1}a^{-1}e \\ &= ebcc^{-1}b^{-1}e \\ &= ebcc^{-1}b^{-1}\tau bb^{-1}bcc^{-1}b^{-1} \\ &= (bc)(bc)^{-1}. \end{aligned}$$

Então,  $e(ac)(ac)^{-1}\tau aa^{-1}(ac)(ac)^{-1} = (ac)(ac)^{-1}$ . Além disso,

$$e(ac)(ac)^{-1}(ac) = (ac)(ac)^{-1}(ea)c = (ac)(ac)^{-1}(eb)c = e(ac)(ac)^{-1}(bc),$$

i.e.  $f(ac) = f(bc)$  para o idempotente  $f := e(ac)(ac)^{-1}$ . Assim  $(ac, bc) \in \tau_{min}$  e fica provado que  $\tau_{min}$  é uma congruência em  $S$ .

Verifiquemos agora que  $tr \tau_{min} = \tau$ . Para isso sejam  $(e, f) \in \tau$ . Então  $ee^{-1}\tau ff^{-1}$  e existe o idempotente  $ef$  tal que

$$\begin{aligned} ef &\tau ee^{-1}, \\ (ef)e &= (ef)f. \end{aligned}$$

Logo  $(e, f) \in tr \tau_{min}$ . Reciprocamente seja  $(e, f) \in \tau_{min} \cap (E(S) \times E(S))$ . Então  $e = ee^{-1}\tau ff^{-1} = f$ .

Por último, vejamos que  $\tau_{min}$  é a menor congruência com traço  $\tau$ . Sejam  $\rho$  uma congruência em  $S$  com traço  $\tau$  e  $(a, b) \in \tau_{min}$ . Então  $aa^{-1}\rho bb^{-1}$  e existe um idempotente  $e$  tal que  $e\rho aa^{-1}$  e  $ea = eb$ . Logo

$$\begin{aligned} a &= aa^{-1}a \rho ea \\ &= eb \rho bb^{-1}b = b. \end{aligned}$$

Portanto,  $\tau_{min} \subseteq \rho$  como pretendíamos. □

Sendo  $S$  um semigrupo inversos e  $\tau = E(S) \times E(S)$  a congruência universal em  $E(S)$ , pela Proposição 2.3.13, vemos que

$$\tau_{min} = \{(a, b) \in S \times S : (\exists e \in E(S)) ea = eb\}$$

é a menor congruência  $\rho$  em  $S$  tal que  $S/\rho$  é um grupo. A esta congruência damos o nome de *menor congruência de grupo em  $S$*  e denotamo-la por  $\sigma$ . Dito de outra forma,  $S/\sigma$  é o maior quociente de grupo de  $S$ , i.e., para toda a congruência  $\rho$  de  $S$  tal que  $S/\rho$  é um grupo, existe um morfismo  $\phi : S/\sigma \rightarrow S/\rho$  tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\sigma} & S/\sigma \\ \rho \downarrow & \swarrow \phi & \\ S/\rho & & \end{array}$$

Figura 2.3: Diagrama comutativo

Outra congruência que devemos ter presente para os resultados que se seguem é a congruência sintática.

**Definição 2.3.15.** Seja  $H$  um subconjunto não vazio de um semigrupo  $S$ . Definimos a relação  $\tau^H$  em  $S$  por

$$a\tau^H b \iff (xay \in H \iff xby \in H, \forall x, y \in S^1),$$

à qual damos o nome de *congruência sintática de  $H$* .

**Definição 2.3.16.** Sejam  $H$  um subconjunto e  $\rho$  uma congruência num semigrupo  $S$ . Dizemos que  $\rho$  *satura  $H$*  se  $H$  é união de algumas  $\rho$ -classes.

**Proposição 2.3.17.** Para um subconjunto não vazio  $H$  de um semigrupo  $S$ , a congruência  $\tau^H$  é a maior congruência em  $S$  que satura  $H$ .

*Demonstração.* Consultar [23, Proposição III.4.4]. □

**Definição 2.3.18.** Seja  $S$  um semigrupo inverso. Um subsemigrupo inverso cheio  $K$  de  $S$  diz-se um *kernel em  $S$*  se, para  $a, b \in S$ , satisfaz

$$ab \in K \implies aKb \subseteq K.$$

Em particular, para  $a \in S$ , temos  $a^{-1}a \in K$  e portanto  $a^{-1}Ka \subseteq K$ . Consequentemente,

*Observação 2.3.19.* Todo o kernel num semigrupo  $S$  é um subsemigrupo normal de  $S$ .

**Teorema 2.3.20.** *Seja  $S$  um semigrupo inverso. Um subconjunto  $K$  de  $S$  é um kernel em  $S$  se e só se  $K$  é o kernel de alguma congruência em  $S$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\rho$  uma congruência em  $S$ ,  $k \in \ker \rho$  e  $a, b \in S$  tais que  $ab \in \ker \rho$ . Então  $abpe$  e  $k\rho f$  para alguns  $e, f \in E(S)$ . Portanto,

$$akb \rho afb = a(fbb^{-1})b = (ab)(b^{-1}fb) \rho e(b^{-1}fb)$$

o que prova que  $akb \in \ker \rho$ . Consequentemente,  $\ker \rho$  é um kernel em  $S$ .

Reciprocamente seja  $K$  um kernel em  $S$ . Pela Proposição 2.3.17,  $\tau^K$  é a maior congruência que satura  $K$  e portanto, como  $K$  é cheio, temos  $\ker \tau^K \subseteq K$ . Sejam agora  $k \in K$  e  $x, y \in S$ . Então  $k, k^{-1} \in K$ , e por definição de kernel em  $S$  temos

$$xky \in K \implies (xk)y \in K \implies (xk)k^{-1}y \in K \implies xkk^{-1}y \in K.$$

Por outro lado,

$$xkk^{-1}y \in K \implies (xkk^{-1})ky \in K \implies x(kk^{-1}k)y \in K \implies xky \in K.$$

Consequentemente,  $k\tau^K kk^{-1}$ , donde  $k \in \ker \tau^K$ . Portanto  $K = \ker \tau^K$ , o que termina a demonstração.  $\square$

### 2.3.1 Congruências que separam idempotentes

Nesta secção definimos o conceito de congruência que separa idempotentes, introduzindo a maior destas congruências  $\mu$ . Trata-se de uma secção importante no nosso estudo e que desencadeia a secção que lhe sucede, no sentido em que introduz os subsemigrupos normais de um semigrupo  $S$  contidos no centralizador  $E(S)\xi$  - os quais iremos denominar por *i-normais*.

No que se segue  $\Delta_S$  denota a *congruência identidade* num semigrupo  $S$ , e  $\nabla_S$  a *congruência universal*. Podemos escrever apenas  $\Delta$  ou  $\nabla$  se for claro o semigrupo a que nos referimos.

**Definição 2.3.21.** Uma congruência  $\rho$  num semigrupo  $S$  diz-se uma *congruência que separa idempotentes* se, para cada  $e, f \in E(S)$ ,  $e\rho f$  implica  $e = f$ .

As congruências num semigrupo inverso  $S$  que separam idempotentes, ou seja, cujo traço é a relação igualdade  $\Delta$  em  $E(S)$ , formam um *reticulado modular completo* - um reticulado modular  $L$  tal que para todo o subconjunto  $X \subseteq L$  existe  $\wedge X$ , ou equivalentemente, existe  $\vee X$  - isomorfo ao reticulado de todos os subsemigrupos normais de  $S$  contidos no centralizador de  $E(S)$  em  $S$ . Estas congruências coincidem com as congruências arbitrárias num grupo.

Repare-se agora que atendendo à Definição 2.3.8 de par de congruência,  $(N, \Delta)$  é um par de congruência se e só se  $N$  é um subsemigrupo normal de  $S$  tal que se  $n \in N$  então  $nn^{-1} = n^{-1}n$ . Além disso,

se  $\rho$  é uma congruência que separa idempotentes, então  $\rho = \rho_{(N,\Delta)}$  para certo  $N$ , donde para  $a, b \in S$ ,

$$a\rho b \iff a^{-1}a = b^{-1}b, ab^{-1} \in N$$

e denotamos  $\rho$  por  $\rho_N$ . Consequentemente, para um dado semigrupo inverso  $S$ , poderemos falar no semigrupo inverso  $S/\rho_N$ . Estes semigrupos vão então surgir no estudo que se seguirá de formações e classes de Fitting de semigrupos inversos, e será ainda necessário ter presente as seguintes observações.

*Observação 2.3.22.* Dadas duas congruências que separam idempotentes  $\rho_N$  e  $\rho_M$  num semigrupo inverso  $S$  tais que  $\rho_N \subseteq \rho_M$ , podemos considerar duas congruências  $\rho_{(M/\rho_N)}$  e  $\rho^M/\rho_N$  no semigrupo inverso  $S/\rho_N$  e observar que

$$\rho_{(M/\rho_N)} = \rho^M/\rho_N.$$

*Demonstração.* Em primeiro lugar, vejamos que  $M/\rho_N$  é normal em  $S/\rho_N$  e que, se  $m\rho_N \in M/\rho_N$  então  $(m\rho_N)(m\rho_N)^{-1} = (m\rho_N)^{-1}(m\rho_N)$ . Para tal, consideremos o morfismo sobrejetivo

$$\begin{aligned} \theta : M &\rightarrow M/\rho_N \\ m &\mapsto m\rho_N. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema 2.1.29 e pelo Lema de Lallement 2.1.28,  $M/\rho_N$  é um semigrupo inverso cheio. Tomemos agora  $s \in S$  e  $m \in M$ , então  $(s\rho_N)(m\rho_N)(s\rho_N)^{-1} = (sms^{-1})\rho_N \in M/\rho_N$ , uma vez que  $M$  é um subsemigrupo normal de  $S$ . Além disso, como  $mm^{-1} = m^{-1}m$  para  $m \in M$ , temos

$$\begin{aligned} (m\rho_N)(m\rho_N)^{-1} &= (m\rho_N)(m^{-1}\rho_N) = (mm^{-1})\rho_N \\ &= (m^{-1}m)\rho_N = (m^{-1}\rho_N)(m\rho_N) = (m\rho_N)^{-1}(m\rho_N), \end{aligned}$$

como se pretendia.

Sejam agora  $a, b \in S$ . Então,

$$\begin{aligned} (a\rho_N)^{\rho^M/\rho_N} (b\rho_N) &\iff a\rho_M b \text{ (pelo Teorema 2.3.2)} \\ &\iff a^{-1}a = b^{-1}b, ab^{-1} \in M \\ &\iff (a^{-1}a)\rho_N = (b^{-1}b)\rho_N, (ab^{-1})\rho_N \in M/\rho_N \text{ (uma vez que } \rho_N \text{ separa idempotentes)} \\ &\iff (a\rho_N)^{-1}(a\rho_N) = (b\rho_N)^{-1}(b\rho_N), (a\rho_N)(b\rho_N)^{-1} \in M/\rho_N \\ &\iff (a\rho_N)\rho_{(M/\rho_N)}(b\rho_N). \end{aligned}$$

□

*Observação 2.3.23.* Nas condições da Observação 2.3.22, podemos observar que pelo 3º Teorema do isomorfismo 2.3.2 temos

$$({}^S/\rho_N)/\rho_{(M/\rho_N)} \cong S/\rho_M.$$

*Observação 2.3.24.* Para um semigrupo inverso  $S$ , a congruência que separa idempotentes  $\rho_{E(S)}$  é a congruência identidade  $\Delta_S$ .

É costume denotar por  $\mu_S$ , ou simplesmente  $\mu$  se for claro o semigrupo  $S$  em questão, a maior congruência que separa idempotentes, i.e.  $\Delta_{max}$ . Assim, pela Proposição 2.3.11, temos

$$\mu = \{(a, b) \in S \times S : \forall e \in E(S) \ a^{-1}ea = b^{-1}eb\}.$$

**Teorema 2.3.25.** *Seja  $S$  um semigrupo inverso. Então  $\ker \mu = E(S)\xi$  e*

$$\mu = \{(a, b) \in S \times S : a^{-1}a = b^{-1}b \text{ e } ab^{-1} \in E(S)\xi\}.$$

*Demonstração.* Seja  $a \in E(S)\xi$ . Então, para cada  $e \in E(S)$ ,

$$a^{-1}ea = a^{-1}ae = a^{-1}aea^{-1}a = (a^{-1}a)^{-1}ea^{-1}a.$$

Assim  $a\mu a^{-1}a$ , e portanto  $a \in \ker \mu$ .

Reciprocamente, seja  $a \in \ker \mu$ . Então  $a\mu f$  para algum  $f \in E(S)$ , donde

$$a^{-1}\mu f^{-1} = f = f^2\mu a^{-1}a.$$

Logo  $a^{-1}\mu a^{-1}a$  e, conseqüentemente,  $a\mu a^{-1}a$ . Portanto, para  $e \in E(S)$ , temos

$$a^{-1}ea = a^{-1}aea^{-1}a = a^{-1}ae.$$

Assim,  $aa^{-1}ea = ae$ , donde  $ea = ae$ . Portanto,  $a \in E(S)\xi$ .

A última parte deste Teorema resulta do Teorema 2.3.10. □

**Proposição 2.3.26.** *Seja  $S$  um semigrupo inverso. Então  $\mu = \mathcal{H}^b$ , a maior congruência em  $S$  contida em  $\mathcal{H}$ .*

*Demonstração.* Provemos primeiro que  $\mu \subseteq \mathcal{H}$  e, para tal, seja  $a\mu b$ . Então  $a^{-1}a = b^{-1}b$  e, como  $a^{-1}\mu b^{-1}$ , também temos  $aa^{-1} = bb^{-1}$ . Logo,  $a\mathcal{H}b$ .

Para vermos que  $\mu$  é a maior congruência contida em  $\mathcal{H}$ , consideremos uma congruência  $\rho \subseteq \mathcal{H}$ , e suponhamos que  $a\rho b$ . Então  $a^{-1}\rho b^{-1}$ , e, portanto,  $(a^{-1}ea, b^{-1}eb) \in \rho \subseteq \mathcal{H}$  para cada  $e \in E(S)$ . Como nenhuma  $\mathcal{H}$ -classe pode conter mais que um idempotente, deduzimos que  $a^{-1}ea = b^{-1}eb$  para qualquer  $e \in E(S)$ . Conseqüentemente,  $a\mu b$  como pretendíamos. □

*Observação 2.3.27.* Note-se que se  $\rho$  é uma congruência tal que  $\ker \rho \subseteq E(S)\xi$  então  $\rho \subseteq \mu$ , e portanto  $\rho$  separa idempotentes.

Se  $S$  é um semigrupo inverso e  $N_1, N_2$  são subsemigrupos inversos de  $S$ , então o subsemigrupo  $\langle N_1, N_2 \rangle$  gerado por  $N_1 \cup N_2$  é ainda inverso. Além disso, se  $N_1$  e  $N_2$  são subsemigrupos normais em  $S$  tais que  $N_1, N_2 \subseteq E(S)\xi$ , então o próximo resultado também nos diz que  $\langle N_1, N_2 \rangle = N_1N_2$ .

**Proposição 2.3.28.** *Seja  $S$  um semigrupo inverso. Sejam  $N$  e  $L$  subsemigrupos normais de  $S$  contidos em  $E(S)\xi$ . Então,  $\langle N, L \rangle = NL = LN$ .*

*Demonstração.* Sejam  $n \in N, l \in L$ . Então  $n \in E(S)\xi$  e, portanto,

$$ln = l(l^{-1}l)n = ln(l^{-1}l) = (lnl^{-1})l \in NL,$$

o que mostra que  $LN \subseteq NL$ . Analogamente se conclui que  $NL \subseteq LN$ , e portanto  $NL = LN$ . Segue que  $NL$  é subsemigrupo de  $S$  contendo tanto  $N$  como  $L$ . Ora como  $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$  em  $S$ , então  $NL$  é inverso visto  $N, L$  serem inversos. Portanto  $\langle N, L \rangle \subseteq NL$ , mas é obvio que  $NL \subseteq \langle N, L \rangle$ , pelo que são iguais. □

**Proposição 2.3.29.** *Sejam  $S$  um semigrupo inverso e  $N$  um subsemigrupo normal de  $S$  contido em  $E(S)\xi$ . Então,*

$$a\rho_N b \iff a\mathcal{H}b, Na = Nb.$$

*Demonstração.* Se  $a\rho_N b$ , então  $a\mathcal{H}b$  pela Proposição 2.3.26, e portanto

$$a = a(a^{-1}a) = (ab^{-1})b \in Nb,$$

donde  $Na \subseteq Nb$ . Do mesmo modo,  $Nb \subseteq Na$ , donde se obtém a igualdade. Reciprocamente, admitamos que  $a\mathcal{H}b$  e  $Na = Nb$ . Então  $a = nb$  para algum  $n \in N$  e assim,  $ab^{-1} = n(bb^{-1}) \in N$ . Portanto,  $a\rho_N b$ .  $\square$

*Observação 2.3.30.* Note-se que num semigrupo de Clifford  $S$  tem-se  $E(S)\xi = S$ . Então, pela Proposição 2.3.29,  $\rho_S = \mu = \mathcal{H}$  e tem-se  $S/\mathcal{H} \cong E(S)$ .

## 2.4 Conjugação e subsemigrupos normais

Ao generalizar um conceito, pode ser tentador pensar que deveria haver uma única forma correta de o fazer. A visão que se adota em [1] é a de que, como a teoria dos semigrupos é muito vasta, provavelmente não é razoável esperar uma noção única de conjugação adequada a todas as classes. Aconselha-se a considerar uma noção de acordo com o fim que se pretende; quer seja, por exemplo, para semigrupos livres, para monóides de transição de automatos, ou até mesmo para o nosso estudo. É um pouco sobre isto que recai esta secção, uma breve discussão sobre qual a noção "certa" de conjugação que deveremos adotar e, conseqüentemente, qual a noção de subsemigrupo normal que deveremos escolher. A escolha deve ser feita de acordo com a nossa necessidade de, no próximo capítulo, associar a cada subsemigrupo normal de um semigrupo  $S$  um kernel de uma congruência  $\rho$ , de modo a podermos tomar quocientes da forma  $S/\rho$ .

Entendemos por *conjugação* de uma classe de semigrupos uma relação de equivalência definida na linguagem dessa classe e que coincida com a noção de conjugação em teoria dos grupos, sempre que esse semigrupo for um grupo [1].

Para elementos  $a$  e  $b$  de um grupo  $G$ ,  $a$  e  $b$  dizem-se conjugados se  $g^{-1}ag = b$  para algum  $g \in G$ . Repare-se que a conjugação em grupos é uma relação de equivalência e admite diferentes formulações que evitam inversos, o que permite a sua generalização a qualquer semigrupo. Por exemplo, se  $G$  é um grupo, então  $a, b \in G$  satisfazem  $b = g^{-1}ag$  se e só se  $a = uv$  e  $b = vu$  para alguns  $u, v \in G$  (nomeadamente  $u = g$  e  $v = g^{-1}a$ ). Pode-se tentar considerar esta última formulação para um semigrupo arbitrário ou mesmo um monóide, mas em geral a relação não vem transitiva. Porém, num semigrupo livre  $A^+$  - um semigrupo cujos elementos (letras) são seqüências finitas de elementos de um alfabeto  $A$  com a operação de concatenação associada - podemos definir uma relação,  $\sim_p$ , do seguinte modo:

$$a \sim_p b \iff \exists u, v \in A^+ a = uv, b = vu.$$

Neste caso,  $\sim_p$  é uma relação de equivalência em  $A^+$  e, portanto, pode ser considerada como uma noção de conjugação. Como dissemos, num semigrupo arbitrário  $S$ , a relação  $\sim_p$  não é transitiva apesar de ser reflexiva e simétrica, mas se considerarmos o fecho transitivo  $\sim_p^*$  de  $\sim_p$ , então  $\sim_p^*$  é uma relação de conjugação num semigrupo qualquer. Esta relação  $\sim_p^*$  foi creditada por Lallement a Lyndon e a Schützenberger [19].

Tomando novamente a conjugação em grupos como modelo, para  $a$  e  $b$  num grupo  $G$ , temos  $b = g^{-1}ag$  para algum  $g \in G$  se e só se  $gb = ag$  para algum  $g \in G$  se e só se  $bh = ha$  para algum  $h \in G$  (nomeadamente,  $h = g^{-1}$ ). Face a esta outra formulação, Otto [22] definiu uma relação de equivalência  $\sim_{\circ}$  para qualquer semigrupo  $S$ , portanto, uma relação de conjugação, por:

$$a \sim_{\circ} b \iff \exists g, h \in S^1 \text{ } gb = ag, \text{ } bh = ha.$$

No entanto, esta relação tem a desvantagem de ser a relação universal em qualquer semigrupo com zero.

Para mais informações sobre o estudo da conjugação num semigrupo arbitrário remetemos o leitor para [1]. Notemos novamente que os resultados obtidos mostram que parece não ser possível obter uma definição de conjugação que abranja qualquer tipo de semigrupo, sendo necessário tomar definições diferentes de acordo com o tipo de semigrupo em causa.

No caso particular dos semigrupos inversos existe uma operação unária que corresponde ao inverso no caso dos grupos e, conseqüentemente, o conjugado de grupo pode ser estendido a semigrupos inversos de uma maneira natural. Para  $a$  e  $b$  num semigrupo inverso  $S$ , dizemos que  $a$  é conjugado de  $b$  se  $t^{-1}at = b$  e  $tbt^{-1} = a$  para algum  $t \in S$ . Note-se que ao contrário do que sucede num grupo precisamos de tomar as duas condições. Esta definição leva-nos à de subsemigrupo normal estabelecida em 2.3.6: um subsemigrupo inverso cheio  $N$  de  $S$  tal que  $s^{-1}Ns \subseteq N$  para  $s \in S$ .

Num semigrupo inverso  $S$ , vimos que todo o subsemigrupo  $N$  da forma  $N = \ker \rho$  para alguma congruência  $\rho$  é um subsemigrupo normal, e é, em particular, um kernel em  $S$  pelo Teorema 2.3.20. Porém, nem todo o subsemigrupo normal é um kernel em  $S$  [23, Exemplo III.4.10], ao contrário do que sucede para grupos. Se no entanto considerarmos congruências que separam idempotentes estas estão perfeitamente definidas pelos seus núcleos, o que nos levou a considerar a seguinte definição.

**Definição 2.4.1.** Dado  $S$  um semigrupo inverso, dizemos que um subsemigrupo inverso  $N$  de  $S$  é um *subsemigrupo  $i$ -normal* em  $S$ , e denotamo-lo por  $N \triangleleft_i S$ , se  $N$  é um subsemigrupo normal de  $S$  e está contido no centralizador de  $E(S)$ .

Equivalentemente,

**Proposição 2.4.2.** Dado  $S$  um semigrupo inverso, um subsemigrupo inverso  $N$  de  $S$  é  $i$ -normal se e só se  $N$  é um subsemigrupo normal de  $S$  tal que, para  $n \in N$ ,

$$nn^{-1} = n^{-1}n.$$

*Demonstração.* Se  $N$  é  $i$ -normal, então  $N \subseteq E(S)\xi$ , donde, para  $n \in N$ ,

$$\begin{aligned} nn^{-1} &= n(n^{-1}n)n^{-1} = (n^{-1}n) \underbrace{(nn^{-1})}_{\in E(S)}, \\ n^{-1}n &= n^{-1}(nn^{-1})n = (nn^{-1}) \underbrace{(n^{-1}n)}_{\in E(S)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} nn^{-1} &\leq n^{-1}n, \\ n^{-1}n &\leq nn^{-1}, \end{aligned}$$

e portanto  $nn^{-1} = n^{-1}n$ .

Reciprocamente, se  $N$  é normal em  $S$  e satisfaz  $nn^{-1} = n^{-1}n$ , então  $\rho_N$  separa idempotentes e, consequentemente,  $\rho_N \subseteq \mu$ . Então  $N \subseteq \ker \mu$ . Ora  $\ker \mu = E(S)\xi$ , pelo Teorema 2.3.25, donde  $N \subseteq E(S)\xi$ .  $\square$

Concluimos do que vimos na secção 2.3.1 que os subsemigrupos i-normais são exatamente os núcleos das congruências que separam idempotentes. Consequentemente, para um dado subsemigrupo i-normal  $N$  de semigrupo inverso  $S$ , vamos poder tomar o semigrupo inverso  $S/\rho_N$ .

## 2.5 Semigrupos inversos fundamentais

Os semigrupos inversos fundamentais, que passaremos a definir, serão importantes na secção 3.2 no sentido em que permitirão definir produto de duas formações.

**Definição 2.5.1.** Um semigrupo inverso no qual a maior congruência que separa idempotentes é a congruência identidade  $\Delta$  diz-se um *semigrupo inverso fundamental*.

Denotamos a classe de todos os semigrupos fundamentais por  $\mathcal{Fund}$ .

*Observação 2.5.2.* É claro que qualquer semi-reticulado é fundamental.

**Teorema 2.5.3.** *Sejam  $S$  um semigrupo inverso e  $\mu$  a maior congruência que separa idempotentes em  $S$ . Então  $S/\mu$  é fundamental e tem semi-reticulado de idempotentes isomorfo a  $E(S)$ .*

*Demonstração.* Todo o idempotente em  $S/\mu$  é da forma  $e\mu$ , onde  $e \in E(S)$ . Se  $(a\mu, b\mu) \in \mu_{S/\mu}$ , então, para cada  $e \in E(S)$ ,

$$(a\mu)^{-1}(e\mu)(a\mu) = (b\mu)^{-1}(e\mu)(b\mu),$$

e portanto,  $(a^{-1}ea)\mu(b^{-1}eb)$ . Como  $\mu$  separa idempotentes, segue-se que  $a^{-1}ea = b^{-1}eb$ , i.e.  $a\mu b$ . Logo  $S/\mu$  é fundamental. Como o morfismo  $\mu^\sharp$  separa idempotentes, o resto da demonstração é imediato.  $\square$

O facto de  $S/\mu$  ser um semigrupo inverso fundamental também pode ser visto como uma consequência do próximo Teorema.

**Teorema 2.5.4.** *Seja  $\rho$  uma congruência num semigrupo inverso  $S$ . Então  $\rho = \rho_{\max}$  se e só se  $S/\rho$  é um semigrupo inverso fundamental.*

*Demonstração.* Consultar [23, Corolário III.3.10].  $\square$

Dados um semi-reticulado  $E$  e um elemento  $e$  de  $E$ , o conjunto  $Ee = \{i \in E : i \leq e\}$  é um ideal principal de  $E$ . Definimos a relação de uniformidade  $\mathcal{U}$  em  $E$  por  $\mathcal{U} = \{(e, f) \in E \times E : Ee \cong Ef\}$  e, para cada  $(e, f)$  em  $\mathcal{U}$ , consideramos  $T_{e,f}$  como sendo o conjunto de todos os isomorfismos de  $Ee$  em  $Ef$ . O conjunto

$$T_E := \cup \{T_{e,f} : (e, f) \in \mathcal{U}\}$$

constitui um subsemigrupo inverso do semigrupo inverso  $\mathcal{S}(E)$  das aplicações parciais injetivas em  $E$ , a que chamamos *semigrupo de Munn* do semi-reticulado  $E$ .

**Teorema 2.5.5.** *Para cada semi-reticulado  $E$ , o semigrupo de Munn  $T_E$  é um semigrupo inverso cujo reticulado de idempotentes é isomorfo a  $E$ .*

*Demonstração.* Consultar [18, Teorema 5.4.1].  $\square$

**Exemplo 2.5.6.** Seja  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ , com a ordem natural dada por  $0 < 1 < 2 < \dots$ . Então, para cada  $n$ , temos  $En = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  e, portanto,  $Em \cong En$  se e só se  $m = n$ . Neste caso,  $\mathcal{U} = \Delta_E$  e o único isomorfismo em  $T_{n,n}$  é a identidade  $id_{En}$ . Logo  $T_E = \{id_{E0}, id_{E1}, id_{E2}, \dots\} \cong E$ .

**Teorema 2.5.7.** *Sejam  $S$  um semigrupo inverso e  $E = E(S)$ . Existe um morfismo  $\phi : S \rightarrow T_E$  cujo kernel é  $\mu$ , a maior congruência que separa idempotentes.*

*Demonstração.* Consultar [18, Teorema 5.4.4]. □

Quando  $S$  é um semigrupo inverso fundamental, o morfismo obtido no Teorema anterior é injetivo e, portanto,  $S$  mergulha-se em  $T_E$ .

**Teorema 2.5.8.** *Um semigrupo inverso é fundamental se e só se é isomorfo a um subsemigrupo inverso cheio de  $T_E$ .*

*Demonstração.* Consultar [18, Teorema 5.4.5]. □

**Corolário 2.5.8.1.** *O semigrupo inverso  $T_E$  é fundamental, para todo o semi-reticulado  $E$ .*

## 2.6 Semigrupos ortodoxos

Nesta secção iremos introduzir os semigrupos ortodoxos que irão surgir novamente no último capítulo, mas primeiro iremos definir o conjunto sandwich de dois idempotentes de um semigrupo regular.

**Definição 2.6.1.** *Sejam  $S$  um semigrupo regular e  $e, f \in E(S)$ . Definimos o conjunto sandwich  $S(e, f)$  de  $e$  e  $f$  por*

$$S(e, f) := \{g \in V(e, f) \cap E(S) : ge = fg = g\}.$$

Podemos ainda dar uma definição alternativa mas equivalente deste conjunto:

$$S(e, f) := \{g \in E(S) : ge = g = fg, egf = ef\}.$$

**Proposição 2.6.2.** *Seja  $S$  um semigrupo regular e sejam  $e, f \in E(S)$ . Então o conjunto sandwich  $S(e, f)$  é não vazio.*

*Demonstração.* Sejam  $x \in V(e, f)$  e  $g = fxe$ . Então

$$\begin{aligned} (ef)g(ef) &= ef^2xe^2f = efxef = ef, \\ g(ef)g &= fxe^2f^2xe = f(xefx)e = fxe = g, \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,  $g \in V(e, f)$ . Além disso,

$$g^2 = f(xefx)e = fxe = g$$

e, claramente,  $ge = fg = g$ . Logo  $g \in S(e, f)$  como pretendíamos. □

Com o próximo resultado podemos observar a relação que existe entre as equivalências de Green e o conjunto sandwich.

**Proposição 2.6.3.** *Sejam  $S$  um semigrupo regular e  $e, f, g \in E(S)$ .*

(i) Se  $e\mathcal{L}f$ , então  $S(e, g) = S(f, g)$ ;

(ii) Se  $e\mathcal{R}f$ , então  $S(g, e) = S(g, f)$ .

*Demonstração.* Consultar [18, Proposição 2.5.2] □

**Teorema 2.6.4.** *Sejam  $S$  um semigrupo regular,  $a' \in V(a)$ ,  $b' \in V(b)$  e  $g \in S(a'a, bb')$ . Então*

$$b'ga' \in V(ab).$$

*Demonstração.* Temos

$$\begin{aligned} (ab)(b'ga')(ab) &= a(bb'g)a'ab = a(ga'a)b \\ &= agb = aa'agbb'b = a(a'agbb')b \\ &= a(a'abb')b = ab, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b'ga')(ab)(b'ga') &= b'(ga'a)(bb'g)a' \\ &= b'g^2a' = b'ga', \end{aligned}$$

e portanto,  $b'ga' \in V(ab)$  como pretendido. □

**Proposição 2.6.5.** *Seja  $H$  um subsemigrupo regular cheio de um semigrupo regular  $S$ . Então, para cada  $a \in H$ ,  $V(a) \subseteq H$*

*Demonstração.* Seja  $a \in H$ . Como  $H$  é regular, existe  $a' \in V(a) \cap H$ . Seja  $x \in V(a)$ . Então

$$x = xax = xad'ax = (xa)a'(ax).$$

Como  $xa, ax$  são idempotentes e  $H$  é cheio, temos que  $(xa)a'(ax) \in H$  e, consequentemente,  $x \in H$ . □

**Definição 2.6.6.** Um semigrupo regular  $S$  diz-se um *semigrupo ortodoxo* se o seu conjunto de idempotentes  $E(S)$  forma um subsemigrupo de  $S$ .

**Teorema 2.6.7.** *Seja  $S$  um semigrupo regular. São equivalentes as seguintes condições:*

- (i)  $S$  é ortodoxo;
- (ii) Para todos  $e, f \in E(S)$ ,  $fe \in S(e, f)$ ;
- (iii) Para todos  $a, b \in S$ ,  $V(b)V(a) \subseteq V(ab)$ ;
- (iv) Para todos  $e \in E(S)$ ,  $V(e) \subseteq E(S)$ .

*Demonstração.* (i)  $\implies$  (ii): Suponhamos que  $S$  é um semigrupo ortodoxo e sejam  $e, f \in E(S)$ . Então

$$(fe)e = fe^2 = fe = f^2e = f(fe),$$

e  $e(fe)f = (ef)^2 = ef$  uma vez que  $S$  é ortodoxo. Portanto,  $fe \in S(e, f)$ .

(ii)  $\implies$  (iii): Sejam  $a, b \in S$ ,  $a' \in V(a)$  e  $b' \in V(b)$ . Então, pelo Teorema 2.6.4,  $b'ga' \in V(ab)$  para qualquer  $g \in S(a'a, bb')$ . Como  $bb'a'a \in S(a'a, bb')$  pela alínea (ii), então  $b'a' = b'(bb'a'a)a' \in V(ab)$ .

(iii)  $\implies$  (iv): Sejam  $e \in E(S)$  e  $x \in V(e)$ . Então  $ex, xe \in E(S)$ , donde  $ex \in V(ex)$  e  $xe \in V(xe)$ . Pela alínea (iii), temos  $(ex)(xe) \in V((xe)(ex))$  e, como  $(xe)(ex) = xe^2x = xex = x$ , temos  $ex^2x = (ex)(xe) \in V(x)$ . Assim,

$$x = x(ex^2e)x = (xex)(xex) = x^2,$$

e, conseqüentemente,  $x$  é um idempotente como se pretendia.

(iv)  $\implies$  (i): Sejam  $e, f \in E(S)$ . Pela Proposição 2.6.2, existe  $g \in S(e, f)$  e, portanto, existe um idempotente  $g$  em  $V(e, f)$ . Assim, como  $ef \in V(g)$  e  $g$  é idempotente, pela alínea (iv) segue que  $ef$  é idempotente. Logo  $S$  é ortodoxo, o que conclui a demonstração.  $\square$

Note-se que a propriedade (iii) é uma generalização da propriedade dos semigrupos inversos dada por  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ . Com esta condição, podemos obter para semigrupos ortodoxos um resultado conhecido para semigrupos inversos.

**Proposição 2.6.8.** *Dados  $S$  um semigrupo ortodoxo,  $a \in S$ ,  $e \in E(S)$  e  $a' \in V(a)$ , o elemento  $aea'$  é idempotente.*

*Demonstração.* Basta reparar que

$$\begin{aligned} (aea')^2 &= aea'aea' = aea'aea'ad' \\ &= a(ea'a)^2a' = aea'ad' = aea'. \end{aligned}$$

$\square$

## Capítulo 3

# Formações e classes de Fitting de semigrupos inversos finitos

Neste capítulo, e em particular na secção 3.1, recordamos os conceitos de variedade e de formação de semigrupos inversos, os quais generalizam os de grupos, e iremos construir certas classes de inversos a partir de classes de grupos correspondentes. À semelhança do que sucede na teoria dos grupos ([11] e [3]), vamos querer definir produto de classes, de modo a que, por exemplo na secção 3.2, o produto de formações seja ainda uma formação. Tal vai levar-nos a considerar classes que são "mais" do que formações, uma vez que pediremos para serem fechadas apenas para imagens por morfismos que separam idempotentes. Estas formações receberão o nome de *i*-formações.

No caso particular das classes de Fitting, surgiram diversas complicações. Naturalmente perguntámo-nos se se podia considerar classes de Fitting de semigrupos inversos e o correspondente produto. Neste caso, várias questões foram deixadas em aberto, questões estas que planeamos continuar a explorar. Veremos então algumas destas dificuldades encontradas para semigrupos inversos e, em particular para semigrupos de Clifford na secção 3.4.

### 3.1 Formações

Os semigrupos inversos (finitos) não formam uma variedade de semigrupos (finitos), pois um subsemigrupo de um semigrupo inverso pode não ser inverso. Formam no entanto uma variedade de álgebras de tipo  $(2, 1)$  onde a operação unária é dada pelo inverso. No que diz respeito ao comportamento dos morfismos note-se que todo o morfismo entre semigrupos inversos é um morfismo de tipo  $(2, 1)$ . Além disso, já vimos no Teorema 2.1.29 que dados  $S$  um semigrupo inverso,  $T$  um semigrupo e  $\phi : S \rightarrow T$  um morfismo sobrejetivo entre semigrupos, então  $T$  é um semigrupo inverso.

Tendo em mente estes comentários, iremos agora enunciar as definições de variedade e de formação no contexto dos semigrupos inversos.

**Definição 3.1.1.** Uma classe  $\mathcal{V}$  de semigrupos inversos finitos diz-se uma *variedade de semigrupos inversos finitos* se

1. Qualquer subsemigrupo inverso de um semigrupo inverso de  $\mathcal{V}$  pertence a  $\mathcal{V}$ ;
2. Qualquer quociente de um semigrupo inverso de  $\mathcal{V}$  pertence a  $\mathcal{V}$ ;
3. O produto direto de qualquer família finita de semigrupos inversos de  $\mathcal{V}$  também pertence a  $\mathcal{V}$ .

Note-se que se verifica por indução no número de fatores que a definição 3.1.1 se pode reescrever para produtos diretos de dois fatores.

Além disso, uma vez que dadas duas variedades de semigrupos inversos  $\mathcal{V}_1$  e  $\mathcal{V}_2$ , se pode verificar que a interseção  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$  é também uma variedade de semigrupos inversos, podemos falar na variedade gerada por um semigrupo inverso finito  $S$ , a menor que contém  $S$ , ou seja, a interseção de todas as que contêm  $S$ , designada por  $Var(S)$ .

**Exemplo 3.1.2.** A classe de todos os semigrupos inversos finitos  $\mathcal{Inv}$  constitui uma variedade (consequentemente uma formação como veremos adiante) de semigrupos inversos.

Antes de definirmos formação de semigrupos inversos, é necessário ajustar a definição de produto subdireto.

**Definição 3.1.3.** Um semigrupo  $S$  diz-se *produto subdireto* do produto de uma família de semigrupos inversos  $(S_i)_{i=1,\dots,n}$  se existir um mergulho  $\phi : S \hookrightarrow \prod_{i=1}^n S_i$  tal que cada projeção induzida  $\pi_i : T \rightarrow S_i$  é sobrejetiva.

Não havendo perigo de confusão pode-se assumir que  $S$  é  $S\phi$ .

**Definição 3.1.4.** Uma *formação de semigrupos inversos*  $\mathcal{F}$  é uma classe de semigrupos inversos finitos tal que:

1. Qualquer quociente de um semigrupo inverso de  $\mathcal{F}$  pertence a  $\mathcal{F}$ ;
2. O produto subdireto de qualquer família finita de semigrupos inversos de  $\mathcal{F}$  também pertence a  $\mathcal{F}$ .

Tal como vimos para grupos, podemos observar que toda a variedade de semigrupos inversos é formação de semigrupos inversos. No entanto, uma formação de semigrupos inversos não é necessariamente uma variedade e veremos exemplos deste facto adiante.

Observe-se ainda que a Definição 3.1.4 também pode ser reescrita para produtos subdiretos de dois fatores.

**Proposição 3.1.5.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma classe de semigrupos inversos finitos. A classe  $\mathcal{F}$  é fechada para produtos subdiretos de dois fatores se e só se  $\mathcal{F}$  é fechada para produtos subdiretos finitários.*

*Observação 3.1.6.* Entendemos por produto (sub)direto finitário um produto (sub)direto sobre um conjunto finito em que esse conjunto é não vazio.

*Demonstração.* Trivialmente se  $\mathcal{F}$  é fechada para produtos subdiretos finitários, então  $\mathcal{F}$  é fechada para produtos subdiretos de dois fatores. O recíproco é verificado por indução no número de fatores do produto direto  $n \in \mathbb{N}$ .

Para  $n = 2$  o resultado vem por hipótese. Para  $n > 2$ , seja  $T$  produto subdireto de  $S_1, S_2, \dots, S_n, S_{n+1} \in \mathcal{F}$ . Então existe um mergulho  $\phi : T \hookrightarrow S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \times S_{n+1}$  tal que cada projeção induzida  $\pi_i : T \rightarrow S_i$  é sobrejetiva. Então  $T$  é isomorfo a um subsemigrupo inverso  $T\phi$  do produto direto  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \times S_{n+1}$ . Considere-se agora o semigrupo inverso

$$M := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n : \exists a_{n+1} \in S_{n+1}, (a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) \in T\phi\}.$$

Então,  $M$  é um produto subdireto de  $S_1, S_2, \dots, S_n$  e, por hipótese de indução,  $M \in \mathcal{F}$ . Por outro lado, considerando o mergulho

$$\begin{aligned} \psi : T &\hookrightarrow M \times S_{n+1} \\ t &\longmapsto ((a_1, a_2, \dots, a_n), a_{n+1}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que  $t\phi = (a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$ , temos que  $T$  é um produto subdireto de  $M$  e  $S_{n+1}$ , ambos elementos de  $\mathcal{F}$  e, portanto,  $T \in \mathcal{F}$  e a demonstração está completa.  $\square$

**Proposição 3.1.7.** *Uma classe de grupos  $\mathcal{F}$  é formação de semigrupos inversos se e só se é formação de grupos.*

*Demonstração.* Se  $\theta : G \rightarrow H$  é um morfismo sobrejetivo entre grupos tal que  $G \in \mathcal{F}$ , então,  $\theta$  é um morfismo sobrejetivo entre semigrupos inversos e, como  $\mathcal{F}$  é formação de semigrupos inversos,  $H \in \mathcal{F}$ . Se  $G_1$  e  $G_2$  são elementos de  $\mathcal{F}$  e  $H$  é produto subdireto de  $G_1$  e  $G_2$  tal que cada projeção entre grupos  $\pi_i : H \rightarrow G_i$ , induzida pelo mergulho de  $H$  em  $G_1 \times G_2$ , é sobrejetiva para  $i = 1, 2$ , então  $H$  é isomorfo a um subsemigrupo inverso de  $G_1 \times G_2$  na formação de semigrupos inversos  $\mathcal{F}$  tal que cada projeção entre semigrupos inversos  $\pi_i : H \rightarrow G_i$  é sobrejetiva para  $i = 1, 2$ , e, portanto,  $H \in \mathcal{F}$ . Consequentemente,  $\mathcal{F}$  é formação de grupos, como pretendíamos.

O recíproco segue do facto de um subsemigrupo inverso de um grupo ser um grupo.  $\square$

É claro que dadas duas formações de semigrupos inversos  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$ , a interseção  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  é também uma formação de semigrupos inversos. Portanto, tal como para variedades, dado um semigrupo inverso finito  $S$  podemos falar na formação gerada por  $S$ , designada por  $For(S)$ .

No que se segue convém ter presente o seguinte resultado sobre relações de Green num semigrupo finito.

**Proposição 3.1.8.** *Sejam  $S$  e  $T$  semigrupos finitos e  $\phi : S \rightarrow T$  um morfismo sobrejetivo. Seja ainda  $J'$  uma  $\mathcal{J}$ -classe de  $T$ . Então,*

- (i)  $J'\phi^{-1} = J_1 \cup \dots \cup J_k$  é união de  $\mathcal{J}$ -classes de  $S$ ;
- (ii) se, para algum  $i = 1, \dots, k$ ,  $J_i$  é uma  $\mathcal{J}$ -classe minimal em  $\{J_1, \dots, J_k\}$ , então  $J_i\phi = J'$ ;
- (iii) se  $J'$  é regular, então qualquer  $\mathcal{J}$ -classe  $J_i$  minimal em  $\{J_1, \dots, J_k\}$  é regular;
- (iv) se  $J'$  é regular, então existe uma única  $\mathcal{J}$ -classe  $J_i$  minimal em  $\{J_1, \dots, J_k\}$ .

*Demonstração.* Consultar [25, Lema 4.6.10].  $\square$

Repare-se agora que, pela alínea (iv), se  $J'$  é uma  $\mathcal{J}$ -classe regular de  $T$  e  $J$  é a única  $\mathcal{J}$ -classe minimal de  $S$  tal que  $J\phi = J'$ , então toda a  $\mathcal{H}$ -classe de  $J$  aplica-se sobrejetivamente numa  $\mathcal{H}$ -classe de  $J'$  que contenha a sua imagem. Em particular, como os subgrupos maximais de um semigrupo são as  $\mathcal{H}$ -classes de idempotentes, a Proposição 3.1.8 diz-nos que, se  $J'$  é regular, então  $\phi$  leva subgrupos maximais de  $S$  contidos em  $J$  para subgrupos maximais de  $T$  contidos em  $J'$ , e, reciprocamente, qualquer subgrupo maximal de  $T$  contido em  $J'$  é imagem por  $\phi$  de algum subgrupo maximal de  $S$  contido em  $J$ . Este conhecimento será útil nas demonstrações que se seguirão.

**Definição 3.1.9.** Para uma classe de grupos  $\mathcal{F}$ , definimos as classes

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\mathcal{F}} &:= (S \text{ semigrupo inverso} : \forall e = e^2, H_e \in \mathcal{F}), \\ \mathcal{U}_{\mathcal{F}} &:= (S \text{ semigrupo inverso} : S/\sigma \in \mathcal{F}), \\ \mathcal{L}_{\mathcal{F}} &:= (S \text{ semigrupo inverso} : \text{se } T \text{ é subgrupo de } S, \text{ então } T \in \mathcal{F}).\end{aligned}$$

**Proposição 3.1.10.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma classe de grupos. Então,*

- (i)  $\mathcal{F} = \mathcal{W}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$ ;
- (ii)  $\mathcal{F} = \mathcal{U}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$ ;
- (iii)  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  é fechada para quocientes se e só se  $\mathcal{F}$  é fechada para quocientes. Se  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  é formação de semigrupos inversos, então  $\mathcal{F}$  é variedade de grupos;
- (iv)  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  é variedade de semigrupos inversos se e só se  $\mathcal{F}$  é variedade de grupos;
- (v)  $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  é formação de semigrupos inversos se e só se  $\mathcal{F}$  é formação de grupos;
- (vi)  $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  é variedade de semigrupos inversos então  $\mathcal{F}$  é variedade de grupos.

*Demonstração.* Os resultados (i) e (ii) seguem do facto de todo o grupo  $G$  ser semigrupo inverso e de só ter um idempotente  $1_G$  sendo  $H_{1_G} = G$  e, de num grupo  $G$  a relação  $\sigma$  ser a relação identidade, logo  $G/\sigma \cong G$ .

- (iii) É claro que se  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  é fechada para quocientes então  $\mathcal{F}$  é fechada para quocientes, uma vez que  $\mathcal{F} = \mathcal{W}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$ . Reciprocamente, sejam  $S \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  e  $\theta : S \rightarrow T$  um morfismo sobrejetivo. Seja  $e \in E(T)$ . Pela Proposição 3.1.8, existe  $f \in E(S)$  tal que  $H_f^S \theta = H_e^T$ . Por hipótese,  $H_f^S \in \mathcal{F}$  e, como  $\mathcal{F}$  é fechado para quocientes, segue que  $H_e^T \in \mathcal{F}$ . Logo  $T \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ .

Suponhamos agora que  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  é formação de semigrupos inversos. Então, como  $\mathcal{F} = \mathcal{W}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$ ,  $\mathcal{F}$  é formação de semigrupos inversos. Além disso, pela Proposição 3.1.7,  $\mathcal{F}$  é formação de grupos. Para garantir que  $\mathcal{F}$  é variedade de grupos basta verificar que  $\mathcal{F}$  é fechada para subgrupos: Sejam  $G \in \mathcal{F}$  e  $H$  um subgrupo de  $G$ . Seja ainda  $H'$  um grupo tal que existe um isomorfismo  $\alpha : H' \rightarrow H$  e  $H' \cap G = \emptyset$ . Defina-se agora em  $\mathcal{U}_1(H, G) := H' \cup G$  um produto  $\cdot$  estendendo os produtos em  $H'$  e  $G$  e tal que, para  $h \in H', g \in G$ , se tem  $g \cdot h = g(h\alpha), h \cdot g = (h\alpha)g$ . Note-se que  $\mathcal{U}_1(H, G)$  é um monóide inverso com identidade  $1_{H'}$ . Além disso, vemos que  $\mathcal{U}_1(H, G)$  é um produto subdireto de  $G$  e  $U_1$  tomando o mergulho  $\psi : \mathcal{U}_1(H, G) \hookrightarrow G \times U_1$  definido por: se  $x \in H', x\psi = (x\alpha, 1)$ ; se  $x \in G, x\psi = (x, 0)$ . Agora, como  $U_1$  tem subgrupos maximais triviais,  $U_1 \in \mathcal{F}$ . Por outro lado, como  $G \in \mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}$  é formação de semigrupos inversos, segue-se que  $\mathcal{U}_1(H, G) \in \mathcal{F}$ . Consequentemente,  $H \in \mathcal{F}$  como pretendíamos, uma vez que  $H$  é um subgrupo maximal de  $\mathcal{U}_1(H, G)$ .

*Observação 3.1.11.* Nesta demonstração  $U_1$  denota o  $\wedge$ -semi-reticulado  $\{0, 1\}$ , onde a operação  $\wedge$  é dada por:

$$\begin{array}{ccc} \wedge & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}$$

Figura 3.1: "Operação em  $U_1$ "

*Observação 3.1.12.* Esta demonstração segue das proposições 2.7 e 4.1 de [15].

- (iv) Suponhamos que  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  é variedade de semigrupos inversos. Então,  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  é formação de semigrupos inversos e, conseqüentemente,  $\mathcal{F}$  é variedade de grupos pela alínea anterior.

Reciprocamente, se  $\mathcal{F}$  é uma variedade de grupos, então  $\mathcal{F}$  é fechada para quocientes, donde, pela alínea anterior,  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  é fechada para quocientes. Sejam agora  $S \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ ,  $T$  um subsemigrupo inverso de  $S$  e  $e \in E(T)$ . Então  $e \in E(S)$  e  $H_e^S \in \mathcal{F}$ . Como  $H_e^T \leq H_e^S$  e  $\mathcal{F}$  é variedade de grupos, segue-se que  $H_e^T \in \mathcal{F}$ . Portanto,  $T \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ . Por último, sejam  $S_1, S_2 \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ . Seja ainda  $e \in E(S_1 \times S_2)$ . Então  $e = (e_1, e_2)$  para alguns  $e_1 \in E(S_1)$ ,  $e_2 \in E(S_2)$ . Além disso,  $H_e = H_{e_1} \times H_{e_2}$ . Por hipótese,  $H_{e_1}, H_{e_2} \in \mathcal{F}$  e, como  $\mathcal{F}$  é variedade de grupos, segue que  $H_e \in \mathcal{F}$ , donde  $S_1 \times S_2 \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ . Logo  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  é variedade de semigrupos inversos como pretendíamos.

- (v) Sejam  $S \in \mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  e  $\theta : S \rightarrow T$  um morfismo sobrejetivo. Consideremos o morfismo

$$\begin{aligned} \theta_{\sigma} : S/\sigma_S &\longrightarrow T/\sigma_T \\ s\sigma_S &\longmapsto (s\theta)\sigma_T. \end{aligned}$$

Atendendo à definição de  $\sigma$  e a que  $\theta$  é sobrejetiva, é claro que  $\theta_{\sigma}$  está bem definida e é sobrejetiva. Como  $S/\sigma_S \in \mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}$  é formação de grupos, vem que  $T/\sigma_T \in \mathcal{F}$ . Portanto,  $T \in \mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ .

Seja agora  $T$  um produto subdireto de  $S_1$  e  $S_2$  elementos de  $\mathcal{F}$  e  $\phi$  o respetivo mergulho de  $T$  em  $S_1 \times S_2$ . Então, para qualquer  $a, b \in T$ ,

$$a\sigma_T b \iff (a\pi_i)\sigma_{S_i}(b\pi_i), \text{ para } i = 1, 2,$$

onde  $\pi_i$  representa a projeção induzida. De facto, se  $a\sigma_T b$  então existe  $e \in E(T)$  tal que  $ae = be$ , donde  $(a\phi)(e\phi) = (b\phi)(e\phi)$ . Portanto, existe  $f_i := e\pi_i \in E(S_i)$  tal que  $(a\pi_i)f_i = (b\pi_i)f_i$  para  $i = 1, 2$  e obtemos  $(a\pi_i)\sigma_{S_i}(b\pi_i)$ . Reciprocamente, se  $(a\pi_i)\sigma_{S_i}(b\pi_i)$  para  $i = 1, 2$ , então existem  $f_i \in E(S_i)$  tais que  $(a\pi_i)f_i = (b\pi_i)f_i$ . Pelo Lema de Lallement 2.1.28, como cada  $\pi_i : T \rightarrow S_i$  é sobrejetivo, existem  $e_i \in E(T)$  tais que  $e_i\pi_i = f_i$ . Logo  $(ae_i)\pi_i = (be_i)\pi_i$ . Tomemos o idempotente  $e = e_1e_2 = e_2e_1$  de  $T$ . Então

$$\begin{aligned} (ae)\pi_i &= (ae_1e_2)\pi_i = (ae_1)\pi_i(e_2)\pi_i \\ &= (be_1)\pi_i(e_2)\pi_i = (be_1e_2)\pi_i = (be)\pi_i. \end{aligned}$$

Assim  $(ae)\phi = (be)\phi$  e como  $\phi$  é injetivo vem  $ae = be$  em  $T$  e, portanto,  $a\sigma_T b$ .

Podemos agora considerar o seguinte morfismo injetivo

$$\begin{aligned} \psi : T/\sigma_T &\hookrightarrow S_1/\sigma_{S_1} \times S_2/\sigma_{S_2} \\ a\sigma_T &\longmapsto ((a\pi_1)\sigma_{S_1}, (a\pi_2)\sigma_{S_2}). \end{aligned}$$

Então  $T/\sigma_T$  é um produto subdireto dos grupos  $S_1/\sigma_{S_1}$  e  $S_2/\sigma_{S_2}$  pertencentes a  $\mathcal{F}$ , donde  $T/\sigma_T \in \mathcal{F}$ . Conseqüentemente,  $T \in \mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  e confirma-se assim que  $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  é formação de semigrupos inversos.

Reciprocamente, suponhamos que  $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  é formação de semigrupos inversos, então, como  $\mathcal{F} = \mathcal{U}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$ ,  $\mathcal{F}$  é formação de semigrupos inversos. Pela Proposição 3.1.7,  $\mathcal{F}$  é formação de grupos.

- (vi) Suponhamos que  $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  é variedade de semigrupos inversos. Então  $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  é formação de semigrupos inversos e, conseqüentemente,  $\mathcal{F}$  é formação de grupos. Para garantir que  $\mathcal{F}$  é variedade de

grupos basta verificar que  $\mathcal{F}$  é fechada para subgrupos: Se  $H$  é um subgrupo de um grupo  $G \in \mathcal{F}$ , então  $H$  é subsemigrupo inverso de  $G$  na variedade de inversos  $\mathcal{F} = \mathcal{U}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$  e, portanto,  $H \in \mathcal{F}$ . □

*Observação 3.1.13.*  $\mathcal{U}_{\mathcal{G}} = \{S \text{ semigrupo inverso} : S/\sigma \in \mathcal{G}\} = \mathcal{I}nv$ . Além disso,  $\mathcal{I}nv$  é a formação  $Form(\mathcal{G}, \mathcal{F}und)$  gerada pela classe de todos os grupos finitos  $\mathcal{G}$  e pela classe de todos os semigrupos inversos finitos fundamentais  $\mathcal{F}und$ , o que é consequência de todo o semigrupo inverso  $S$  ser um quociente de um produto subdireto de um grupo  $G$  e de um semigrupo inverso fundamental  $F$ . Se observarmos a demonstração [23] vemos que de facto se  $S$  é finito podemos tomar  $G$  e  $F$  finitos.

*Observação 3.1.14.* Um produto semidirecto  $Y * G$  de um semi-reticulado  $Y$  por um grupo  $G$ , em particular um produto directo  $Y \times G$ , é tal que  $Y * G / \sigma \cong G$ . Então, para uma classe  $\mathcal{F}$  de grupos, temos  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  e, mais geralmente,  $Y * G \in \mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  para qualquer  $Y \in \mathcal{S}l, G \in \mathcal{F}$ .

Note-se ainda que na condição (vi) da Proposição 3.1.10 não conseguimos garantir que, se  $\mathcal{F}$  é variedade de grupos então  $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  é variedade de semigrupos inversos. Para verificar tal facto vejamos um exemplo.

**Exemplo 3.1.15.** Consideremos o conjunto  $X = \{1, 2, 3\}$  e o semigrupo inverso  $S = \mathcal{I}(X)$  com zero  $\emptyset$ . Como  $\sigma_S = S \times S$ , então  $S/\sigma_S = \{1\}$ . Seja agora  $T = \mathcal{G}(X)$  o grupo simétrico. Então  $T$  é subsemigrupo inverso de  $S$  e  $\sigma_T$  é a relação identidade, i.e.,  $T/\sigma_T \cong T$ . Como,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

vem que  $T \notin \mathcal{A}$  mas  $S/\sigma_S = \{1\} \in \mathcal{A}$ , sendo  $\mathcal{A}$  a classe dos grupos abelianos. Assim, apesar de  $\mathcal{A}$  ser variedade, temos  $S \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$  mas  $T \notin \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$  e, portanto,  $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$  não é variedade.

**Proposição 3.1.16.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma classe de grupos.*

(i) *Se  $\mathcal{F}$  é formação de grupos então  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  é formação de semigrupos inversos.*

(ii) *Se  $\mathcal{F}$  é variedade de grupos então  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  é variedade de semigrupos inversos.*

*Demonstração.* (i) Sejam  $S \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  e  $\theta : S \rightarrow M$  um morfismo sobrejetivo entre semigrupos inversos. Seja  $T$  um subgrupo de  $M$ . Então  $T \subseteq H_e^M$  para algum  $e \in E(T)$ . Pelo Lema de Lallement 2.1.28, existe  $f \in E(S)$  tal que  $f\theta = e$ . Além disso, pela Proposição 3.1.8,  $H_f\theta = H_e$ . Como  $T\theta^{-1} \subseteq H_f$  e  $T\theta^{-1}$  é claramente subgrupo de  $S$ , segue-se que  $T\theta^{-1} \in \mathcal{F}$ . Logo,  $T \in \mathcal{F}$ , e, consequentemente,  $M \in \mathcal{L}$ .

Sejam agora  $M$  um produto subdireto de  $S_1$  e  $S_2$  elementos de  $\mathcal{L}$  e  $T$  um subgrupo de  $M$ . Então, existe um mergulho  $\phi : M \hookrightarrow S_1 \times S_2$  tal que cada projecção induzida  $\pi_i : M \rightarrow S_i$  é sobrejetiva. Considere-se agora os subgrupos

$$T_1 := \{a_1 \in S_1 : \exists a_2 \in S_2, (a_1, a_2) \in T\phi\},$$

$$T_2 := \{a_2 \in S_2 : \exists a_1 \in S_1, (a_1, a_2) \in T\phi\}$$

de  $S_1$  e  $S_2$ , respetivamente. Então o grupo  $T\phi$  é um produto subdireto de  $T_1$  e  $T_2$ . Assim, como  $T$  é isomorfo a  $T\phi$ , podemos escrever  $T$  como produto subdireto de  $T_1$  e  $T_2$  elementos de  $\mathcal{F}$  e, portanto,  $T \in \mathcal{F}$ , donde  $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ . Logo  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  é formação de semigrupos inversos.

- (ii) Seja agora  $\mathcal{F}$  uma variedade de grupos. Em particular,  $\mathcal{F}$  é formação de grupos e, consequentemente,  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  é formação de grupos. Assim, basta provar que  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  é fechado para subsemigrupos inversos: Sejam então  $S \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ ,  $M$  um subsemigrupo inverso de  $S$  e  $T$  um subgrupo de  $M$ . Em particular,  $T$  é subgrupo de  $S$  e, portanto,  $T \in \mathcal{F}$ , donde  $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ , o que conclui a demonstração.

*Observação 3.1.17.*  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  até é fechada para subsemigrupos, não necessariamente inversos.

□

*Observação 3.1.18.* Para uma classe de grupos  $\mathcal{F}$ , temos  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ .

Comparemos agora a definição de formação de semigrupos inversos com a de grupos. Olhemos de novo para a definição de formação de grupos 1.3.5 e para a Proposição 1.3.6 que nos dá uma caracterização de formação. Em causa estão os subgrupos normais, i.e., os núcleos de congruências. Em semigrupos inversos porém, para uma congruência  $\rho$  arbitrária, não temos um subsemigrupo que só por si determine  $\rho$ . Vimos que precisamos de pares de congruência ou na descrição de G. Preston [9] de uma coleção de subsemigrupos que são as classes dos idempotentes. Este facto leva naturalmente a perguntarmo-nos se se conhecem congruências que sejam completamente determinadas por subsemigrupos específicos. Ora este é o caso das congruências que separam idempotentes e portanto dos morfismos associados, os quais também separam idempotentes. Assim surge o conceito de *i*-formação.

**Definição 3.1.19.** Uma *i*-formação de semigrupos inversos finitos  $\mathcal{F}$  é uma classe de semigrupos inversos finitos tal que:

1. Qualquer quociente que separe idempotentes de um semigrupo inverso de  $\mathcal{F}$  pertence a  $\mathcal{F}$ ;
2. O produto subdireto  $T$  de qualquer família finita de semigrupos inversos  $S_1, \dots, S_n$  de  $\mathcal{F}$  tal que cada projeção induzida pelo mergulho de  $T$  no produto direto  $S_1 \times \dots \times S_n$  separa idempotentes, também pertence a  $\mathcal{F}$ .

**Proposição 3.1.20.** Uma classe de semigrupos inversos finitos  $\mathcal{F}$  é uma *i*-formação de semigrupos inversos finitos se:

- (i)  $S \in \mathcal{F}$  e  $N \trianglelefteq_i S$ , então  $S/\rho_N \in \mathcal{F}$ ;
- (ii)  $N_1, N_2 \trianglelefteq_i S$  com  $N_1 \cap N_2 = E(S)$  e  $S/\rho_{N_i} \in \mathcal{F}$  para  $i = 1, 2$ , então  $S \in \mathcal{F}$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $\mathcal{F}$  é uma classe de semigrupos inversos finitos que satisfaz as condições (i) e (ii) de 3.1.20. Sejam  $S$  um semigrupo inverso em  $\mathcal{F}$  e  $\theta : S \rightarrow T$  um morfismo sobrejetivo que separa idempotentes. Então  $\ker \theta$  é uma congruência em  $S$  que separa idempotentes e, como  $S/\ker \theta \cong T$  pelo primeiro Teorema do isomorfismo 2.3.1, segue-se que  $T \in \mathcal{F}$ . Por outro lado, dado  $S$  produto subdireto de elementos  $T_1$  e  $T_2$  de  $\mathcal{F}$  tal que cada projeção  $\pi_i : S \rightarrow T_i$  induzida pelo mergulho de  $T$  em  $S_1 \times S_2$  separa idempotentes, para  $i = 1, 2$ , temos que  $S/\ker \pi_i \cong T_i \in \mathcal{F}$ , onde  $\ker \pi_i$  é uma congruência em  $S$  que separa idempotentes. Tomemos  $N_i := \ker(\ker \pi_i)$ . Como  $\pi_i$  separa idempotentes para  $i = 1, 2$ , se  $a \in N_i$  então existe  $e_i \in E(S)$  tal que  $a\pi_i = e_i\pi_i$  sendo  $e_i = (e_i^1, e_i^2)$ . Obtemos para  $a \in N_1 \cap N_2$  que  $a = (e_1^1, e_2^2)$ , donde  $a \in E(S)$ . Então por (ii),  $S \in \mathcal{F}$ .

Reciprocamente, sejam  $S$  um semigrupo inverso em  $\mathcal{F}$  e  $N$  um subsemigrupo *i*-normal de  $S$ . Então existe um morfismo sobrejetivo que separa idempotentes de  $S$  em  $S/\rho_N$ , o morfismo sobrejetivo  $\rho_N^h$ , donde  $S/\rho_N \in \mathcal{F}$ . Por outro lado, admitamos que  $S$  é inverso e que  $N_1$  e  $N_2$  são subsemigrupos *i*-normais

de  $S$  tais que  $N_1 \cap N_2 = E(S)$  e  $S/\rho_{N_i} \in \mathcal{F}$  para  $i = 1, 2$ . Então  $\theta : S \rightarrow S/\rho_{N_1} \times S/\rho_{N_2}$  definido por  $a \mapsto (a\rho_{N_1}, a\rho_{N_2})$ , é morfismo. Além disso,  $\theta$  é injetivo pois se  $a, b \in S$ , temos

$$\begin{aligned} (a\rho_{N_1}, a\rho_{N_2}) = (b\rho_{N_1}, b\rho_{N_2}) &\implies a\rho_{N_1}b, a\rho_{N_2}b \\ &\implies a^{-1}a = b^{-1}b, ab^{-1} \in N_1 \cap N_2 \\ &\implies a^{-1}a = b^{-1}b, ab^{-1} \in E(S) \\ &\implies a\Delta b \\ &\implies a = b. \end{aligned}$$

Como cada projeção de  $S$  em  $S/\rho_{N_i}$  induzida por  $\theta$ , para  $i = 1, 2$ , é sobrejetiva e separa idempotentes, e como  $\mathcal{F}$  é  $i$ -formação, concluímos que  $S \in \mathcal{F}$  como pretendíamos.  $\square$

*Observação 3.1.21.* Toda a formação de semigrupos inversos é uma  $i$ -formação de semigrupos inversos.

Consequentemente, como pela Proposição 3.1.7 toda a formação de grupos é formação de semigrupos inversos, em particular, toda a formação de grupos é uma  $i$ -formação de semigrupos inversos.

Daqui em diante usaremos a definição ou a caracterização de  $i$ -formação de semigrupos inversos conforme for mais conveniente para as provas. Vamos agora definir também  $i$ -variedade do seguinte modo:

**Definição 3.1.22.** Uma  $i$ -variedade de semigrupos inversos finitos  $\mathcal{V}$  é uma classe de semigrupos inversos finitos tal que:

1. Qualquer subsemigrupo inverso de um semigrupo inverso de  $\mathcal{V}$  pertence a  $\mathcal{V}$ ;
2. Qualquer quociente que separa idempotentes de um semigrupo inverso de  $\mathcal{V}$  pertence a  $\mathcal{V}$ ;
3. O produto direto de qualquer família finita de semigrupos inversos de  $\mathcal{V}$  também pertence a  $\mathcal{V}$ .

Note-se que toda a variedade de semigrupos inversos é também uma  $i$ -variedade, e que toda a  $i$ -variedade de semigrupos inversos é  $i$ -formação.

*Observação 3.1.23.* Os resultados 3.1.10 e 3.1.16 são ainda verdadeiros se tomarmos as definições de  $i$ -formação e  $i$ -variedade e, em particular, se tomarmos quocientes que separam idempotentes na alínea (iii) da Proposição 3.1.10.

## 3.2 Produto de formações

Nesta secção iremos generalizar o conceito de classe produto definido na secção 1.3.3 a semigrupos inversos finitos. Em particular, iremos definir o produto de duas formações especiais, chamadas  $f$ -formações.

**Definição 3.2.1.** Se  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  são classes de semigrupos inversos, definimos a *classe produto*  $\mathcal{X}\mathcal{Y}$  do seguinte modo:

$$\mathcal{X}\mathcal{Y} = \{S : \exists N \trianglelefteq_i S \text{ tal que } N \in \mathcal{X} \text{ e } S/\rho_N \in \mathcal{Y}\}.$$

*Observação 3.2.2.* Para grupos a definição de  $i$ -normal coincide com a de normal. Logo, a classe produto  $\mathcal{X}\mathcal{Y}$  definida acima quando aplicada a grupos é compatível com o produto já definido em 1.3.17.

Como se observou na secção 1.3.3 esta operação não é associativa nem comutativa para classes de grupos, logo não o é para classes de semigrupos inversos. Por outro lado, a inclusão  $\mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{Z}) \subseteq (\mathcal{X}\mathcal{Y})\mathcal{Z}$  é novamente válida.

Tal como em grupos, as potências de uma classe  $\mathcal{X}$  são definidas por  $\mathcal{X}^0 = (1)$ , e para  $n \in \mathbb{N}$  definimos indutivamente  $\mathcal{X}^n = (\mathcal{X}^{n-1})\mathcal{X}$ .

**Proposição 3.2.3.** *Sejam  $\mathcal{V}_1$  e  $\mathcal{V}_2$  i-variedades de semigrupos inversos. Então a classe produto  $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2$  é uma i-variedade de semigrupos inversos, chamada i-variedade produto de semigrupos inversos.*

*Demonstração.* Sejam  $S \in \mathcal{V}_1\mathcal{V}_2$  e  $T$  um subsemigrupo inverso de  $S$ . Então existe um subsemigrupo i-normal  $N$  de  $S$  tal que  $N \in \mathcal{V}_1$  e  $S/\rho_N \in \mathcal{V}_2$ . Consideremos o semigrupo  $N \cap T$ . Então  $E(T) \subseteq N \cap T \trianglelefteq_i T$ . Além disso, como  $N \in \mathcal{V}_1$ , temos  $N \cap T \in \mathcal{V}_1$ . Considere-se agora a aplicação

$$\begin{aligned} \theta : T/\rho_{N \cap T} &\longrightarrow S/\rho_N \\ t\rho_{N \cap T} &\longmapsto t\rho_N. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Trata-se claramente de um morfismo injetivo e portanto,  $T/\rho_{N \cap T}$  é isomorfo a um subsemigrupo inverso de  $S/\rho_N$ , donde  $T/\rho_{N \cap T} \in \mathcal{V}_2$ . Consequentemente,  $T \in \mathcal{V}_1\mathcal{V}_2$  como pretendíamos.

Sejam agora  $S$  um semigrupo inverso em  $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2$  e  $\theta : S \rightarrow T$  um morfismo sobrejetivo que separa idempotentes. Seja ainda  $N$  um subsemigrupo i-normal de  $S$  tal que  $N \in \mathcal{V}_1$  e  $S/\rho_N \in \mathcal{V}_2$ . Então  $N\theta \trianglelefteq_i T$  e  $N\theta \in \mathcal{V}_1$ . Além disso,  $\phi : S/\rho_N \rightarrow T/\rho_{N\theta}$  definido por  $s\rho_N \mapsto (s\theta)\rho_{N\theta}$ , é um morfismo sobrejetivo que separa idempotentes, donde  $T/\rho_{N\theta} \in \mathcal{V}_2$ , e portanto  $T \in \mathcal{V}_1\mathcal{V}_2$ .

Finalmente, sejam  $S_1$  e  $S_2$  semigrupos inversos de  $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2$  e  $N_1$  e  $N_2$  subsemigrupos i-normais de  $S_1$  e  $S_2$ , respetivamente, tais que  $N_1, N_2 \in \mathcal{V}_1$  e  $S_1/\rho_{N_1}, S_2/\rho_{N_2} \in \mathcal{V}_2$ . Então  $N_1 \times N_2 \trianglelefteq_i S_1 \times S_2$  e  $N_1 \times N_2 \in \mathcal{V}_1$ . Além disso, a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : S_1 \times S_2 / \rho_{N_1 \times N_2} &\longrightarrow S_1 / \rho_{N_1} \times S_2 / \rho_{N_2} \\ (a_1, a_2)\rho_{N_1 \times N_2} &\longmapsto (a_1\rho_{N_1}, a_2\rho_{N_2}), \end{aligned}$$

é um isomorfismo e, como  $S_1/\rho_{N_1} \times S_2/\rho_{N_2} \in \mathcal{V}_2$ , temos  $S_1 \times S_2 / \rho_{N_1 \times N_2} \in \mathcal{V}_2$ . Consequentemente,  $S_1 \times S_2 \in \mathcal{V}_1\mathcal{V}_2$  o que conclui a demonstração.  $\square$

Como vimos na secção 1.3.3 em geral o produto de duas formações de grupos não é uma formação de grupos, portanto o mesmo se passa com formação de semigrupos inversos e, até mesmo com i-formações. No entanto, veremos que também no contexto dos semigrupos inversos existe outro produto que pode ser definido e que preserva a propriedade de formação. Para tal, vamos considerar apenas certas classes de semigrupos inversos.

**Definição 3.2.4.** Uma i-formação de semigrupos inversos finitos que contenha todos os semigrupos inversos fundamentais finitos diz-se uma *f-formação*.

**Exemplo 3.2.5.** A classe de todos os semigrupos inversos fundamentais finitos  $\mathcal{Fund}$  é uma f-formação.

*Demonstração.* Sejam  $S \in \mathcal{Fund}$  e  $N \trianglelefteq_i S$ . Atendendo a que  $\mu_S$  é trivial e é a maior congruência que separa idempotentes em  $S$ , então, para  $a, b \in S$ , se  $a\rho_N b$  temos  $a\mu_S b$  e, consequentemente,  $a = b$ . Assim,  $\rho_N = \Delta_S$  e  $S/\rho_N \cong S$ , donde  $S/\rho_N$  é fundamental.

Seja agora  $S$  um produto subdireto de fundamentais  $N_1$  e  $N_2$ . Seja  $\phi : S \hookrightarrow N_1 \times N_2$  um mergulho tal que cada projeção induzida  $\pi_i : S \rightarrow N_i$  é sobrejetiva e separa idempotentes. Repare-se primeiro

que, recorrendo ao Lema de Lallement 2.1.28, obtemos  $E(S\phi) = E(S)\phi$ . Recordemos ainda que num semigrupo inverso  $S$ , a maior relação que separa idempotentes pode ser caracterizada por  $\mu = \rho_{E(S)\xi}$  ou, para  $a, b \in S$ ,

$$a\mu b \iff a^{-1}ea = b^{-1}eb, \forall e \in E(S).$$

Assim, sejam  $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in S\phi$  tais que  $a\mu_{S\phi}b$ . Então

$$a^{-1}ea = b^{-1}eb, \forall e = (e_1, e_2) \in E(S\phi).$$

Seja  $f_1 \in E(N_1)$  qualquer. Então, aplicando o Lema de Lallement 2.1.28 ao morfismo sobrejetivo  $\pi_1$ , existe  $f \in E(S)$  tal que  $f\pi_1 = f_1$ . Suponhamos que  $f\phi = (f_1, f_2)$  para algum  $f_2 \in N_2$ . Então, como  $f\phi \in E(S\phi)$ , temos  $a^{-1}(f\phi)a = b^{-1}(f\phi)b$ . Logo  $a_1^{-1}f_1a_1 = b_1^{-1}f_1b_1$  e, como  $f_1$  é qualquer em  $E(N_1)$ , temos  $a_1\mu_{N_1}b_1$ , donde  $a_1 = b_1$  porque  $N_1$  é fundamental. O mesmo raciocínio pode ser aplicado a  $g_2 \in E(N_2)$ , donde obtemos  $a_2 = b_2$ . Logo  $a = b$  e  $S\phi$  é fundamental. Como  $S\phi \cong S$ , segue que  $S$  é fundamental, como pretendíamos.  $\square$

**Exemplo 3.2.6.** 1. A classe dos semigrupo inversos finitos  $\mathcal{I}nv$  é f-formação.

2. A classe dos grupos finitos  $\mathcal{G}$  não é f-formação.

Dados  $S$  um semigrupo inverto e  $\mathcal{F}$  uma f-formação, então, pelo Teorema 2.5.3,  $S/\mu \in \mathcal{F}$ , o que nos vai permitir definir o  $\mathcal{F}$ -residual de  $S$ .

**Definição 3.2.7.** Sejam  $\mathcal{F}$  uma f-formação e  $S$  um semigrupo inverso. Definimos o  $\mathcal{F}$ -residual de  $S$  como o mais pequeno subsemigrupo i-normal de  $S$  cujo quociente pertence a  $\mathcal{F}$  e denotamos por  $S^{\mathcal{F}}$ .

**Proposição 3.2.8.** Sejam  $\mathcal{F}$  uma f-formação e  $S$  um semigrupo inverso. Então

$$S^{\mathcal{F}} = \cap \{N \trianglelefteq_i S : S/\rho_N \in \mathcal{F}\}.$$

*Demonstração.* Seja  $M := \cap \{N \trianglelefteq_i S : S/\rho_N \in \mathcal{F}\}$ . Claramente  $M \trianglelefteq_i S$ . Por outro lado, se considerarmos o morfismo  $\phi$  de  $S/\rho_M$  no produto direto da família dos semigrupos inversos  $S/\rho_N$ , tais que  $N \trianglelefteq_i S$  e  $S/\rho_N \in \mathcal{F}$ , definido por

$$\begin{aligned} \phi : S/\rho_M &\longrightarrow \prod \{S/\rho_N : N \trianglelefteq_i S, S/\rho_N \in \mathcal{F}\} \\ a\rho_M &\longmapsto (a\rho_N)_{N \trianglelefteq_i S, S/\rho_N \in \mathcal{F}} \end{aligned}$$

verificamos que  $\phi$  é um mergulho, e que as projeções induzidas de  $S/\rho_M$  em cada um dos semigrupos inversos  $S/\rho_N$  são sobrejetivas. Como  $\rho_N$  separa idempotentes e o morfismo  $\phi$  é injetivo, obtemos ainda que as projeções induzidas separam idempotentes. Portanto,  $S/\rho_M$  é produto subdireto dos semigrupos inversos  $S/\rho_N$ , donde, pela Definição 3.1.19, temos  $S/\rho_M \in \mathcal{F}$ .

Por fim, pela forma como  $M$  está definido, obtemos que  $M$  é o mais pequeno subsemigrupo i-normal de  $S$  cujo quociente pertence a  $\mathcal{F}$  e, portanto,  $M = S^{\mathcal{F}}$ .  $\square$

Consequentemente,  $S^{\mathcal{F}} = E(S)$  se e só se  $S \in \mathcal{F}$ , uma vez que  $\rho_{E(S)} = \Delta_S$ .

Seguindo o exemplo da secção 1.3.3, pretendemos agora modificar a definição de produto de classes de modo a garantir que o correspondente produto de duas f-formações seja também uma f-formação e, para tal, os próximos resultados serão úteis.

**Proposição 3.2.9.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma  $f$ -formação e  $\theta : S \rightarrow W$  um morfismo sobrejetivo de semigrupos inversos que separa idempotentes. Então  $W^{\mathcal{F}} = (S\theta)^{\mathcal{F}} = (S^{\mathcal{F}})\theta$ .*

*Demonstração.* Sejam  $T := W^{\mathcal{F}}$  e  $N := T\theta^{-1}$ . Então  $N \trianglelefteq_i S$  e, como  $\theta$  separa idempotentes, temos ainda  $N \trianglelefteq_i S$ . Sejam agora  $a, b \in S$ . Então, como  $\theta$  separa idempotentes, temos

$$\begin{aligned} a\rho_N b &\iff a\rho_{T\theta^{-1}} b \iff a^{-1}a = b^{-1}b, ab^{-1} \in T\theta^{-1} \\ &\iff (a^{-1}a)\theta = (b^{-1}b)\theta, (ab^{-1})\theta \in T \\ &\iff (a\theta)^{-1}(a\theta) = (b\theta)^{-1}(b\theta), (a\theta)(b\theta)^{-1} \in T \\ &\iff (a\theta)\rho_T(b\theta) \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \phi : S/\rho_N &\longrightarrow W/\rho_T \\ a\rho_N &\longmapsto (a\theta)\rho_T, \end{aligned}$$

é uma aplicação injetiva que é claramente um isomorfismo. Como  $W/\rho_T \in \mathcal{F}$ , temos  $S^{\mathcal{F}} \leq N$ , donde  $(S^{\mathcal{F}})\theta \leq N\theta = (T\theta^{-1})\theta = T$ . Por outro lado consideremos o morfismo sobrejetivo

$$\begin{aligned} \phi : S/\rho_{S^{\mathcal{F}}} &\twoheadrightarrow W/\rho_{(S^{\mathcal{F}})\theta} \\ a\rho_{S^{\mathcal{F}}} &\longmapsto (a\theta)\rho_{(S^{\mathcal{F}})\theta}. \end{aligned}$$

Como  $S/\rho_{S^{\mathcal{F}}} \in \mathcal{F}$ , temos  $W/\rho_{(S^{\mathcal{F}})\theta} \in \mathcal{F}$ . Portanto,  $T \leq (S^{\mathcal{F}})\theta$ . Logo  $T = (S^{\mathcal{F}})\theta$  como pretendido.  $\square$

**Proposição 3.2.10.** *Dados  $S$  um semigrupo inverso,  $N$  um subsemigrupo  $i$ -normal e  $R$  um subsemigrupo  $i$ -normal de  $S/\rho_N$ , existe um subsemigrupo  $i$ -normal  $T$  de  $S$  tal que  $N \subseteq T$  e  $R = T/\rho_N$ .*

*Demonstração.* Consideremos o morfismo sobrejetivo  $\rho_N^{\natural} : S \twoheadrightarrow S/\rho_N$  e seja  $W = R\rho_N^{\natural^{-1}}$ . Verifiquemos primeiro que  $W \trianglelefteq_i S$ . Como  $(s\rho_N)R(s\rho_N)^{-1} \subseteq R$  para  $s \in S$ , segue que  $sWs^{-1} \subseteq W$ . Por outro lado se tomarmos  $e \in E(S)$ , então  $e\rho_N \in E(S/\rho_N) \subseteq R$  e, conseqüentemente,  $e \in W$ . Seja agora  $w \in W$ . Então, como  $R \trianglelefteq_i S/\rho_N$ , temos

$$\begin{aligned} (ww^{-1})\rho_N &= (w\rho_N)(w\rho_N)^{-1} \\ &= (w\rho_N)^{-1}(w\rho_N) = (w^{-1}w)\rho_N, \end{aligned}$$

onde  $ww^{-1} = w^{-1}w$ , uma vez que  $\rho_N$  separa idempotentes. Logo  $W \trianglelefteq_i S$ .

Tomemos agora  $T := NW$ . Pela Proposição 2.3.28,  $NW$  é subsemigrupo inverso de  $S$  e contém  $N$ . Por outro lado, é claro que  $E(S) \subseteq NW$  e  $NW \subseteq E(S)\xi$ . Para além disso, se  $s \in S$ , como  $N, W \trianglelefteq_i S$ , temos  $sNWs^{-1} = sNs^{-1}sWs^{-1} \subseteq NW$ , donde  $NW \trianglelefteq_i S$ .

Agora repare-se que, por definição de kernel de uma congruência, se  $n \in N = \ker \rho_N$  então  $n\rho_N \in E(S/\rho_N) \subseteq R$ . Portanto, para  $nw \in T$ , temos  $nw\rho_N = n\rho_N w\rho_N \in R$  e, conseqüentemente,  $T/\rho_N = R$ .  $\square$

**Proposição 3.2.11.** *Dados  $S$  um semigrupo inverso e  $T$  e  $N$  subsemigrupos  $i$ -normais, temos*

$$T/\rho_{(T \cap N)} \cong TN/\rho_N.$$

*Demonstração.* Começemos por observar que tanto  $TN$  como  $T \cap N$  são subsemigrupos  $i$ -normais de  $S$ .

Assim, consideremos o morfismo

$$\begin{aligned}\theta : T &\longrightarrow TN/\rho_N \\ t &\longmapsto t\rho_N.\end{aligned}$$

Pelo que vimos na demonstração da Observação anterior, para  $n \in N$ ,  $n\rho_N \in E(S/\rho_N)$ . Por outro lado, pelo Lema de Lallement 2.1.28, temos  $E(S/\rho_N) = E(S)/\rho_N$ , donde  $n\rho_N = e\rho_N$  para algum  $e \in E(S)$ . Assim, para  $t \in T$ ,  $n \in N$  e para algum  $e \in E(S)$  temos

$$\begin{aligned}(tn)\rho_N &= (t\rho_N)(n\rho_N) \\ &= (t\rho_N)(e\rho_N) = \underbrace{(te)}_{\in T}\rho_N,\end{aligned}$$

donde segue que  $\theta$  é sobrejetiva. Logo, pelo primeiro Teorema do isomorfismo 2.3.1, temos

$$TN/\rho_N \cong T/\ker \theta.$$

Como  $\ker \theta = \{(a,b) \in T \times T : a\rho_N b\}$ , então  $\ker \theta = \nabla_T \cap \rho_N$ , donde  $TN/\rho_N \cong T/\nabla_T \cap \rho_N$ . Repare-se ainda que  $T/\nabla_T \cap \rho_N \cong T/\rho_{T \cap N}$ , basta considerar o isomorfismo definido por  $t(\nabla_T \cap \rho_N) \longmapsto t\rho_{T \cap N}$ . Consequentemente, obtemos  $TN/\rho_N \cong T/\rho_{T \cap N}$  como pretendíamos.  $\square$

**Proposição 3.2.12.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma  $f$ -formação e seja  $S$  um semigrupo inverso. Se  $N$  é um subsemigrupo  $i$ -normal de  $S$ , temos*

$$(i) \quad (S/\rho_N)^{\mathcal{F}} = S^{\mathcal{F}}N/\rho_N;$$

(ii) *se  $T$  é um subsemigrupo  $i$ -normal de  $S$  e  $S = TN$ , então  $T^{\mathcal{F}}N = S^{\mathcal{F}}N$ .*

*Demonstração.* (i) Pela Proposição 3.2.10 podemos tomar  $R/\rho_N := (S/\rho_N)^{\mathcal{F}}$  o menor subsemigrupo  $i$ -normal de  $S/\rho_N$  cujo quociente  $(S/\rho_N)/\rho_{(R/\rho_N)}$  pertence a  $\mathcal{F}$ . Pela Observação 2.3.23 temos

$$S/\rho_N/\rho_{(R/\rho_N)} \cong S/\rho_R,$$

donde  $S/\rho_R \in \mathcal{F}$ . Como  $S^{\mathcal{F}}$  é o menor subsemigrupo  $i$ -normal de  $S$  tal que o quociente  $S/\rho_{S^{\mathcal{F}}} \in \mathcal{F}$ , temos  $S^{\mathcal{F}} \leq R$ . Por outro lado,  $N \leq R$ , donde  $S^{\mathcal{F}}N \leq R$ . Além disso, como  $S^{\mathcal{F}} \leq S^{\mathcal{F}}N$ , podemos tomar o morfismo sobrejetivo

$$\begin{aligned}\theta : S/\rho_{S^{\mathcal{F}}} &\longrightarrow S/\rho_{S^{\mathcal{F}}N} \\ a\rho_{S^{\mathcal{F}}} &\longmapsto a\rho_{S^{\mathcal{F}}N},\end{aligned}$$

observar que sabemos que  $S/\rho_{S^{\mathcal{F}}} \in \mathcal{F}$  e obter que  $S/\rho_{S^{\mathcal{F}}N} \in \mathcal{F}$ . Consequentemente, pela Observação 2.3.23,

$$(S/\rho_N)/\rho_{(S^{\mathcal{F}}N/\rho_N)} \in \mathcal{F}$$

e, portanto,  $R/\rho_N \leq S^{\mathcal{F}}N/\rho_N$ . Assim,  $R \leq S^{\mathcal{F}}N$  e obtemos a igualdade  $R = S^{\mathcal{F}}N$ .

(ii) Pela Proposição 3.2.11 podemos considerar o isomorfismo

$$\begin{aligned}\theta : T/\rho_{T \cap N} &\longrightarrow TN/\rho_N = S/\rho_N \\ t\rho_{T \cap N} &\longmapsto t\rho_N.\end{aligned}$$

Então, pela alínea (i) e pela Proposição 3.2.9,

$$\begin{aligned} (T^{\mathcal{F}}(T \cap N) / \rho_{T \cap N}) \theta &= ((T / \rho_{T \cap N})^{\mathcal{F}}) \theta \\ &= (S / \rho_N)^{\mathcal{F}} \\ &= S^{\mathcal{F}} N / \rho_N. \end{aligned}$$

Por outro lado, pode-se verificar que

$$(T^{\mathcal{F}}(T \cap N) / \rho_{T \cap N}) \theta = T^{\mathcal{F}} N / \rho_N.$$

Logo  $T^{\mathcal{F}} N / \rho_N = S^{\mathcal{F}} N / \rho_N$ , donde  $T^{\mathcal{F}} N = S^{\mathcal{F}} N$ .

□

Podemos finalmente definir o produto de duas f-formações.

**Definição 3.2.13.** Sejam  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$  f-formações. Definimos

$$\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 = (S : S^{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1),$$

e denominamos  $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$  por *f-formação produto* de  $\mathcal{F}_1$  com  $\mathcal{F}_2$ .

Vejamos agora que este produto goza de diversas propriedades, entre elas a de ser uma f-formação como pretendido.

**Proposição 3.2.14.** Sejam  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  e  $\mathcal{F}_3$  f-formações de semigrupos inversos. Temos:

- (i)  $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2$ ;
- (ii)  $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$ ;
- (iii) Se  $\mathcal{F}_1$  é fechado para subsemigrupos *i*-normais, então  $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2$ ;
- (iv)  $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$  é uma f-formação;
- (v)  $S^{\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2} = (S^{\mathcal{F}_2})^{\mathcal{F}_1}$  para qualquer semigrupo inverso  $S$ ;
- (vi)  $(\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2) \circ \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \circ (\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_3)$ .

*Demonstração.* (i) Seja  $S \in \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$ . Então  $S^{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1$  tendo-se  $S^{\mathcal{F}_2} \trianglelefteq_i S$  e  $S / \rho_{S^{\mathcal{F}_2}} \in \mathcal{F}_2$ , donde  $S \in \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2$ .

(ii) Seja  $S \in \mathcal{F}_2$ . Então  $S^{\mathcal{F}_2} = E(S) \in \mathcal{F}_1$ , pois  $\mathcal{F}_1$  contém os semi-reticulados.

(iii) Já vimos que  $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2$ . Se  $S \in \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2$ , então existe  $N \trianglelefteq_i S$  tal que  $N \in \mathcal{F}_1$  e  $S / \rho_N \in \mathcal{F}_2$ . Logo  $S^{\mathcal{F}_2} \trianglelefteq_i N$  e, além disso,  $S^{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1$  atendendo à hipótese. Portanto  $S \in \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$ .

(iv) Sejam  $S \in \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$  e  $\theta : S \twoheadrightarrow H$  um morfismo sobrejetivo que separa idempotentes. Então, pela Proposição 3.2.9,  $H^{\mathcal{F}_2} = (S^{\mathcal{F}_2}) \theta$  e segue que  $H^{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1$  pois  $S^{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1$ . Por outro lado, sejam  $N_1$  e  $N_2$  subsemigrupos *i*-normais de um semigrupo inverso  $S$  tais que  $N_1 \cap N_2 = E(S)$  e  $S / \rho_{N_i} \in \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$ , para  $i = 1, 2$ . Então, pela Proposição 3.2.11 e pela Proposição 3.2.12,

$$S^{\mathcal{F}_2} / \rho_{S^{\mathcal{F}_2} \cap N_i} \cong S^{\mathcal{F}_2} N_i / \rho_{N_i} = (S / \rho_{N_i})^{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1.$$

Assim, temos dois subsemigrupos i-normais  $S^{\mathcal{F}_2} \cap N_1$  e  $S^{\mathcal{F}_2} \cap N_2$  de um semigrupo inverso  $S^{\mathcal{F}_2}$  tais que  $(S^{\mathcal{F}_2} \cap N_1) \cap (S^{\mathcal{F}_2} \cap N_2) = E(S)$  e  $S^{\mathcal{F}_2} / \rho_{S^{\mathcal{F}_2} \cap N_i} \in \mathcal{F}_1$ , para  $i = 1, 2$ . Portanto, como  $\mathcal{F}_1$  é f-formação, temos  $S^{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1$ , donde  $S \in \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$ . Por último, é claro que  $\mathcal{F}und \subseteq \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$ , uma vez que  $\mathcal{F}und \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$ .

- (v) Primeiro observe-se que pela alínea (ii) temos  $S^{\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2} \leq S^{\mathcal{F}_2}$ , uma vez que  $S / \rho_{S^{\mathcal{F}_2}} \in \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$  e  $S^{\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2}$  é o menor subsemigrupo i-normal de  $S$  tal que  $S / \rho_{S^{\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2}} \in \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$ . Assim, recorrendo à Proposição 3.2.12, temos

$$(S / \rho_{S^{\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2}})^{\mathcal{F}_2} = S^{\mathcal{F}_2} / \rho_{S^{\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2}}.$$

Como  $S / \rho_{S^{\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2}} \in \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$  temos ainda que  $(S / \rho_{S^{\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2}})^{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1$  e, conseqüentemente,

$$S^{\mathcal{F}_2} / \rho_{S^{\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2}} \in \mathcal{F}_1.$$

Logo  $(S^{\mathcal{F}_2})^{\mathcal{F}_1} \leq S^{\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2}$ . Por outro lado, como  $(S^{\mathcal{F}_2})^{\mathcal{F}_1} \leq S^{\mathcal{F}_2}$ , pela Proposição 3.2.12, temos

$$(S / \rho_{(S^{\mathcal{F}_2})^{\mathcal{F}_1}})^{\mathcal{F}_2} = S^{\mathcal{F}_2} / \rho_{(S^{\mathcal{F}_2})^{\mathcal{F}_1}} \in \mathcal{F}_1.$$

Conseqüentemente,  $S / \rho_{(S^{\mathcal{F}_2})^{\mathcal{F}_1}} \in \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$  e, portanto,  $S^{\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2} \leq (S^{\mathcal{F}_2})^{\mathcal{F}_1}$ . O que prova que  $S^{\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2} = (S^{\mathcal{F}_2})^{\mathcal{F}_1}$ .

- (vi) Pela Definição 3.2.13,  $S \in (\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2) \circ \mathcal{F}_3$  se e só se  $S^{\mathcal{F}_3} \in \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$  se e só se  $(S^{\mathcal{F}_3})^{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1$ . Por outro lado, pela alínea (v),  $(S^{\mathcal{F}_3})^{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1$  se e só se  $S^{\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_3} \in \mathcal{F}_1$ . Novamente pela Definição 3.2.13,  $S^{\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_3} \in \mathcal{F}_1$  se e só se  $S \in \mathcal{F}_1 \circ (\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_3)$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

### 3.3 Classes de Fitting

Neste capítulo iremos generalizar o conceito de classe de Fitting de grupos [3] a semigrupos inversos.

**Definição 3.3.1.** Dado  $\mathcal{C}$  uma classe de semigrupos inversos finitos, dizemos que  $\mathcal{C}$  é uma *classe de Fitting de semigrupos inversos finitos* se:

1. Se  $S \in \mathcal{C}$  e  $N \trianglelefteq S$ , então  $N \in \mathcal{C}$ ;
2. Se  $S = \langle N_1, N_2 \rangle$  com  $N_1, N_2 \trianglelefteq S$  e  $N_1, N_2 \in \mathcal{C}$ , então  $S \in \mathcal{C}$ .

*Observação 3.3.2.* Uma classe de grupos  $\mathcal{C}$  é uma classe de Fitting de semigrupos inversos se e só se é uma classe de Fitting de grupos.

*Demonstração.* Seja  $G \in \mathcal{C}$  e  $H$  um subgrupo normal de  $G$ . Em particular,  $H$  é subsemigrupo inverso normal de  $G$  na classe de Fitting de inversos  $\mathcal{C}$ , e portanto  $H \in \mathcal{C}$ . Seja agora  $G = \langle H_1, H_1 \rangle_{(2)} = H_1 H_2$  com  $H_1, H_2 \trianglelefteq G$  e  $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$ . Então,  $G = \langle H_1, H_1 \rangle_{(2,1)}$  com  $H_1, H_2 \trianglelefteq G$  e  $H_1, H_2$  na classe de Fitting de inversos  $\mathcal{C}$ . Logo,  $G \in \mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}$  é classe de Fitting de grupos.

O recíproco segue do facto de um subsemigrupo inverso de um grupo ser um grupo e de um subsemigrupo inverso gerado por dois grupos  $H_1$  e  $H_2$  ser o grupo  $H_1 H_2$ .  $\square$

Como observamos em 1.3.10, uma formação (variedade) de inversos definida como em 3.1.4 (3.1.1) não é necessariamente uma classe de Fitting de semigrupos inversos e, reciprocamente, uma classe de

Fitting também não precisa de ser uma formação (variedade). No entanto, também vimos que há classes de grupos que são simultaneamente formações e classes de Fitting, pelo que as correspondentes classes de semigrupos inversos também são o que chamamos de *formações Fitting de semigrupos inversos*.

Vemos imediatamente que dadas duas classes de Fitting de semigrupos inversos  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ , a interseção  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$  é também uma classe de Fitting de semigrupos inversos.

À semelhança dos exemplos encontrados na secção 3.1 podemos provar que dada uma classe  $\mathcal{C}$  de grupos,  $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$  ser classe de Fitting dependerá de  $\mathcal{U}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{G}$  o ser.

**Proposição 3.3.3.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma classe de grupos. Então,*

(i)  $\mathcal{C} = \mathcal{U}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{G}$ ;

(ii)  $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$  é classe de Fitting de semigrupos inversos se e só se  $\mathcal{C}$  é classe de Fitting de grupos.

*Demonstração.* (i) Foi demonstrado em 3.1.10 (ii).

(ii) Suponhamos que  $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$  é classe de Fitting de semigrupos inversos. Como  $\mathcal{C} = \mathcal{U}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{G}$ , então  $\mathcal{C}$  também é classe de Fitting de semigrupos inversos. Consequentemente, pela Observação 3.3.2,  $\mathcal{C}$  é classe de Fitting de grupos.

Reciprocamente, suponhamos que  $\mathcal{U}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{G}$  é classe de Fitting de grupos. Seja  $S \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}}$  e  $T$  um subsemigrupo normal de  $S$ . Então  $S/\sigma_S$  é um grupo e podemos considerar

$$\bar{T} = \{t\sigma_S \in S/\sigma_S : t \in T\}.$$

Se  $t, t_1, t_2 \in T$ , então  $t^{-1}\sigma_S \in \bar{T}$  e  $(t_1\sigma_S)(t_2\sigma_S) = (t_1t_2)\sigma_S \in \bar{T}$ . Além disso,  $(t\sigma_S)(t^{-1}\sigma_S) = (tt^{-1})\sigma_S \in \bar{T}$  é identidade em  $S/\sigma_S$ . Logo,  $\bar{T}$  é subgrupo de  $S/\sigma_S$ . Por outro lado, para  $a \in S$  e  $t \in T$ , como  $T \trianglelefteq S$ , temos

$$(a\sigma_S)(t\sigma_S)(a\sigma_S)^{-1} = (a\sigma_S)(t\sigma_S)(a^{-1}\sigma_S) = (ata^{-1})\sigma_S \in \bar{T},$$

donde  $\bar{T}$  é subgrupo normal de  $S/\sigma_S$  e  $\bar{T} \in \mathcal{C}$ , uma vez que  $S/\sigma_S \in \mathcal{C}$ . Seja agora  $\theta : T/\sigma_T \longrightarrow \bar{T}$  definido por  $t\sigma_T \longmapsto t\sigma_S$ . Então,  $\theta$  está bem definido e é um morfismo sobrejetivo. Além disso, como  $T$  é cheio,  $\theta$  é injetivo. Logo,  $T/\sigma_T \cong \bar{T}$ . Assim, como  $\bar{T} \in \mathcal{C}$ , vem que  $T/\sigma_T \in \mathcal{C}$  e, portanto,  $T \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}}$ , como queríamos.

Por último, tomemos  $S = \langle N_1, N_2 \rangle$  onde  $N_1, N_2 \trianglelefteq S$  e  $N_1, N_2 \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}}$ . Tal como anteriormente, podemos construir grupos  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$  e concluir que  $\bar{N}_1 \cong N_1/\sigma_{N_1} \in \mathcal{C}$  e  $\bar{N}_2 \cong N_2/\sigma_{N_2} \in \mathcal{C}$ . Logo  $\bar{N}_1, \bar{N}_2 \in \mathcal{C}$  e  $\bar{N}_1, \bar{N}_2 \trianglelefteq S/\sigma_S$ . É claro que  $\langle \bar{N}_1, \bar{N}_2 \rangle = \overline{N_1 N_2} \subseteq S/\sigma_S$ . Por outro lado, dado  $a \in S$ ,  $a$  é produto finito de elementos  $m, n \in N_1 \cup N_2$ , e, portanto,  $a\sigma_S$  é produto finito de elementos  $m\sigma_S, n\sigma_S \in \bar{N}_1 \cup \bar{N}_2$ . Consequentemente,  $S/\sigma_S \subseteq \langle \bar{N}_1, \bar{N}_2 \rangle$ . e a igualdade  $S/\sigma_S = \langle \bar{N}_1, \bar{N}_2 \rangle$  é obtida, donde  $S/\sigma_S \in \mathcal{C}$ . Portanto,  $S \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}}$ . Logo  $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$  é classe de Fitting de semigrupos inversos, o que conclui a demonstração. □

**Questão 3.3.4.** Será verdade que se  $\mathcal{C}$  é uma classe de Fitting de grupos então as classes  $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$  e  $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$  são classes de Fitting de semigrupos inversos?

### 3.4 Formações e classes de Fitting de semigrupos de Clifford

Nesta secção iremos estender os conceitos de formação e de classe de Fitting de semigrupos inversos a semigrupos de Clifford. Naturalmente, perguntámo-nos se se poderia considerar o produto de classes de Fitting de semigrupos inversos e construir uma secção semelhante à 3.2, tendo começado por tentar perceber primeiro se se podia definir este produto para semigrupos de Clifford. Para tal, recordemos que num semigrupo inverso  $S$ , um subconjunto  $K$  de  $S$  se diz um kernel em  $S$  se e só se  $K$  é um kernel de uma congruência em  $S$ . Observámos que todo o kernel em  $S$  é um subsemigrupo normal de  $S$ , no entanto, nem todo o subsemigrupo de  $S$  é necessariamente um kernel em  $S$ . Porém, se considerarmos subsemigrupos  $i$ -normais, que em particular também são normais, estes são sempre kernels de congruências que separam idempotentes.

No caso particular dos semigrupos de Clifford, como os idempotentes são centrais, todo o subsemigrupo normal é  $i$ -normal. Consequentemente, todo o subsemigrupo normal  $N$  é kernel de uma congruência, em particular da congruência  $\rho_N$  que separa idempotentes.

Uma classe  $\mathcal{F}$  de semigrupos de Clifford finitos diz-se então uma formação de semigrupos de Clifford se for uma  $i$ -formação, i.e. uma classe  $\mathcal{F}$  de semigrupos de Clifford finitos tal que

- Qualquer quociente que separe idempotentes de um semigrupo inverso de  $\mathcal{F}$  pertence a  $\mathcal{F}$ ;
- O produto subdireto  $T$  de qualquer família finita de semigrupos inversos  $S_1, \dots, S_n$  de  $\mathcal{F}$  tal que cada projecção induzida pelo mergulho de  $T$  no produto direto  $S_1 \times \dots \times S_n$  separa idempotentes, também pertence a  $\mathcal{F}$ ;

ou, equivalentemente, tal que

- Se  $S \in \mathcal{F}$  e  $N \trianglelefteq S$ , então  $S/\rho_N \in \mathcal{F}$ ;
- Se  $N_1, N_2 \trianglelefteq S$  com  $N_1 \cap N_2 = E(S)$  e  $S/\rho_{N_i} \in \mathcal{F}$  para  $i = 1, 2$ , então  $S \in \mathcal{F}$ .

Recordemos agora que para um grupo  $G$ , dados  $N_1$  e  $N_2$  subgrupos normais de  $G$ , o subgrupo gerado por  $N_1 \cup N_2$  é  $\langle N_1, N_2 \rangle = N_1 N_2$  mas que no entanto, para semigrupos, mesmo que inversos, em geral  $N_1 N_2$  não é subsemigrupo. Porém, vimos na Proposição 2.3.28 que se tomarmos subsemigrupos  $i$ -normais então  $\langle N_1, N_2 \rangle = N_1 N_2$  é um subsemigrupo  $i$ -normal.

No caso dos semigrupos de Clifford, como todo o subsemigrupo normal é  $i$ -normal, se  $N_1$  e  $N_2$  são subsemigrupos normais, então  $N_1 N_2$  é o subsemigrupo inverso de  $S$  gerado por  $N_1 \cup N_2$ . Consequentemente, a Definição 3.3.1 pode ser reescrita para semigrupos de Clifford do seguinte modo:

Dado  $\mathcal{C}$  uma classe de semigrupos de Clifford finitos, dizemos que  $\mathcal{C}$  é uma classe de Fitting se:

- Se  $S \in \mathcal{C}$  e  $N \trianglelefteq S$ , então  $N \in \mathcal{C}$ ;
- Se  $S = N_1 N_2$  com  $N_1, N_2 \trianglelefteq S$  e  $N_1, N_2 \in \mathcal{C}$ , então  $S \in \mathcal{C}$ .

**Proposição 3.4.1.** *Sejam  $\mathcal{F}$  uma classe de grupos e*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mathcal{F}} &:= (S \text{ semigrupo de Clifford} : \forall e = e^2, H_e \in \mathcal{F}), \\ \mathcal{U}_{\mathcal{F}} &:= (S \text{ semigrupo de Clifford} : S/\sigma \in \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Então,

$$(i) \quad \mathcal{F} = \mathcal{W}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{U}_{\mathcal{F}};$$

- (ii)  $\mathcal{F} = \mathcal{U}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$ ;
- (iii)  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  é fechada para quocientes se e só se  $\mathcal{F}$  é fechada para quocientes. Se  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  é formação de semigrupos de Clifford, então  $\mathcal{F}$  é variedade de grupos;
- (iv)  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  é variedade de semigrupos de Clifford se e só se  $\mathcal{F}$  é variedade de grupos;
- (v)  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  é classe de Fitting de semigrupos de Clifford se e só se  $\mathcal{F}$  é classe de Fitting de grupos;
- (vi)  $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  é formação de semigrupos de Clifford se e só se  $\mathcal{F}$  é formação de grupos;
- (vii) Se  $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  é variedade de semigrupos de Clifford então  $\mathcal{F}$  é variedade de grupos;
- (viii)  $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  é classe de Fitting de semigrupos de Clifford se e só se  $\mathcal{F}$  é classe de Fitting de grupos.

*Demonstração.* Basta demonstrar a alínea (v), uma vez que as restantes alíneas são verificadas recorrendo às provas efetuadas no caso dos semigrupos inversos, reparando que na prova da alínea (iii) da Proposição 3.1.10 o monóide  $\mathcal{U}_1(H, G)$  é de Clifford.

Suponhamos que  $\mathcal{C} = \mathcal{W}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$  é classe de Fitting de grupos. Sejam  $S \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ ,  $N$  um subsemigrupo normal de  $S$  e  $e \in E(N)$ . Então  $H_e^N \subseteq H_e^S$ , donde  $H_e^N \leq H_e^S$ . Se  $H_e^N \trianglelefteq H_e^S$ , como  $H_e^S \in \mathcal{C}$ , teremos que  $H_e^N \in \mathcal{C}$  e portanto  $N \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  como pretendemos. De facto, para  $a \in H_e^S$  e  $x \in H_e^N$ , como  $N \trianglelefteq S$  e  $H_e^N = H_e^S \cap N$ , temos  $axa^{-1} \in H_e^N$ , e portanto,  $H_e^N \trianglelefteq H_e^S$ .

Recordemos que num semigrupo de Clifford  $S$  se tem, para cada  $a \in S$ ,  $aa^{-1} = a^{-1}a$ , uma vez que  $a \in H_e$  para algum  $e \in E(S)$ . Sejam agora  $N_1, N_2 \in \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  e  $S = N_1N_2$  tais que  $N_1, N_2 \trianglelefteq S$ . Seja ainda  $e \in E(S)$ . Claramente  $H_e^{N_1}H_e^{N_2} \subseteq H_e^S$ . Provemos que  $H_e^S \subseteq H_e^{N_1}H_e^{N_2}$ . Se  $a = mn \in H_e^S$ , com  $m \in N_1$  e  $n \in N_2$ , então  $a = eae = emne$ . Como  $S$  é finito, existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $a^p$  é idempotente. Trivial se  $p = 1$ , uma vez que  $a \in H_e^S$  e portanto  $a = e = ee \in H_e^{N_1}H_e^{N_2}$ . Se  $p > 1$ , como  $a^p \in H_e^S$ , obtemos  $e = (mn)^p$  e  $(mn)^{-1} = (mn)^{p-1}$ . Além disso,

$$\begin{aligned} (em)^{-1}em &= em(em)^{-1} = emm^{-1}e \\ &= emm^{-1}(mn)^p = e(mm^{-1}m)n(mn)^{p-1} \\ &= e(mn)^p = ee = e, \end{aligned}$$

donde,  $e\mathcal{H}^{N_1}em$ . Analogamente se tem

$$\begin{aligned} ne(ne)^{-1} &= (ne)^{-1}ne = en^{-1}ne \\ &= (mn)^p n^{-1}ne = (mn)^p e = e. \end{aligned}$$

Logo  $ne\mathcal{H}^{N_2}e$ , donde  $a = mn = em \cdot ne \in H_e^{N_1}H_e^{N_2}$ .

O recíproco segue da Observação 3.3.2 e da alínea (i). □

Note-se que não conseguimos garantir que se  $\mathcal{F}$  é variedade de grupos então a classe  $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  é variedade de semigrupos de Clifford. Tal facto pode ser verificado com o seguinte exemplo.

**Exemplo 3.4.2.** Seja  $G$  um grupo não abeliano, por exemplo o grupo simétrico  $S_3$  de ordem 3, e defina-se  $G^0 := G \sqcup \{0\}$ . Então  $G$  é um subgrupo, e portanto um subsemigrupo inverso, de  $G^0$ . No entanto,  $G^0 / \sigma_{G^0} = \{1\} \in \mathcal{A}$  mas  $G / \sigma_G \cong G \notin \mathcal{A}$ . Consequentemente,  $G^0 \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$  mas  $G \notin \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ , donde segue que, apesar de  $\mathcal{A}$  ser variedade,  $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$  não o é.

Recorrendo novamente às provas efetuadas no caso dos semigrupos inversos, verifica-se ainda a validade dos resultados que se seguem.

**Proposição 3.4.3.** *Sejam  $\mathcal{F}$  uma classe de grupos e*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}} := (S \text{ semigrupo de Clifford: se } T \text{ é subgrupo de } S, \text{ então } T \in \mathcal{F}).$$

Então,

(i) *Se  $\mathcal{F}$  é variedade de grupos, então  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  é variedade de semigrupos de Clifford;*

(ii) *Se  $\mathcal{F}$  é formação de grupos, então  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  é formação de semigrupos de Clifford.*

**Questão 3.4.4.** Será verdade que se  $\mathcal{F}$  é uma classe de Fitting de grupos então a classe  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  é classe de Fitting de semigrupos de Clifford?

Como se pode esperar, a classe produto de classes de Fitting também pode não ser uma classe de Fitting para semigrupos de Clifford. No entanto, tal como fizemos para i-formações, poderíamos tentar definir uma classe de Fitting especial que nos permitisse definir um produto que desse origem a uma classe de Fitting, para tal, precisávamos poder definir o  $\mathcal{C}$ -radical de um semigrupo de Clifford para uma dada classe de Fitting  $\mathcal{C}$ . Assim, pensámos em definir o seguinte.

**Definição 3.4.5.** Uma classe de Fitting de semigrupos de Clifford que contenha a classe dos semi-reticulados  $\mathcal{SI}$  diz-se uma *classe de s-Fitting*.

Observe-se que toda a classe de Fitting  $\mathcal{C}$  de semigrupos de Clifford contém alguns semi-reticulados, pois se  $S \in \mathcal{C}$  então  $E(S) \in \mathcal{C}$ .

**Exemplo 3.4.6.** 1. A classe dos semi-reticulados  $\mathcal{SI}$  é uma classe de s-Fitting.

2. Qualquer classe de Fitting de grupos não é uma classe de s-Fitting.

**Definição 3.4.7.** Seja  $\mathcal{C}$  uma classe de s-Fitting e  $S$  um semigrupo de Clifford. Definimos o  $\mathcal{C}$ -radical de  $S$  como sendo o semigrupo

$$S_{\mathcal{C}} := \langle N : N \trianglelefteq S, N \in \mathcal{C} \rangle = \prod \{N : N \trianglelefteq S, N \in \mathcal{C}\}.$$

Note-se que como  $\mathcal{C}$  contém os semi-reticulados, temos pelo menos que  $E(S) \in \mathcal{C}$ . Além disso,  $E(S) \trianglelefteq S$  e, conseqüentemente,  $S_{\mathcal{C}}$  está bem definido.

Repare-se agora que é claro que  $S_{\mathcal{C}}$  é o maior subsemigrupo normal de  $S$  que pertence a  $\mathcal{C}$  e que num certo sentido podemos dizer que este  $\mathcal{C}$ -radical é mais "simpático" do que um possível  $\mathcal{C}$ -radical que tentássemos definir para semigrupos inversos, uma vez que a segunda igualdade na Definição 3.4.7 não seria válida no caso inverso, mas para semigrupos de Clifford é natural.

Presumivelmente, definiríamos agora um produto similar ao obtido para grupos em 1.3.25 e correspondentes propriedades 1.3.26.

**Definição 3.4.8.** Sejam  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  classes de s-Fitting. Definimos

$$\mathcal{C}_1 \diamond \mathcal{C}_2 := (S : S / \rho_{S_{\mathcal{C}_1}} \in \mathcal{C}_2).$$

No entanto, quando chegamos aqui, deparámo-nos com a necessidade de se ter a seguinte propriedade: se  $N$  é um subsemigrupo normal de  $S$  e  $\mathcal{C}$  é uma classe de s-Fitting, então  $N_{\mathcal{C}} = N \cap S_{\mathcal{C}}$ .

Para grupos, esta propriedade é obtida porque podemos definir classe de Fitting de grupos e  $\mathcal{C}$ -radical de um grupo utilizando subgrupos subnormais, como vimos nas proposições 1.3.16 e 1.3.23. Porém, para semigrupos inversos ou mesmo de Clifford, não conseguimos até à data provar a veracidade desta condição.

Embora gostássemos de ter alcançado uma conclusão relativamente às classes ou definições que devemos tomar para podermos alcançar um produto de classes de Fitting que seja por sua vez uma classe de Fitting, tal não sucedeu. Esperamos no entanto poder continuar este estudo no futuro.



## Capítulo 4

# Formações de outras classes de semigrupos finitos

Neste capítulo pretendemos explorar a possibilidade de definir formação e classe de Fitting de outras classes de semigrupos finitos, em particular de semigrupos completamente regulares na secção 4.1, e de semigrupos regulares e semigrupos ortodoxos na última secção desta dissertação, 4.2. Apresentamos alguns resultados mas sobretudo colocamos várias questões.

### 4.1 Semigrupos completamente regulares

É um resultado conhecido que dada uma variedade de grupos  $\mathcal{V}$ , a classe

$$\mathcal{L}_{\mathcal{V}} := (S \text{ completamente regular} : \text{ se } T \text{ é subgrupo de } S, \text{ então } T \in \mathcal{V})$$

é uma variedade de semigrupos completamente regulares quando considerados como álgebras de tipo  $(2, 1)$ , tendo em conta que em  $S$  completamente regular, dado  $a \in S$ , se define  $a^{-1}$  como sendo o único inverso de  $a$  tal que  $aa^{-1} = a^{-1}a$ , i.e.,  $a^{-1}$  é o inverso de  $a$  no subgrupo  $S_{\alpha}$  a que  $a$  pertence, sendo  $S = \dot{\cup} S_{\alpha}$  união disjunta de grupos (que podem ser tomados como sendo as  $\mathcal{H}$ -classes ou os subgrupos maximais). Daqui em diante, sempre que escrevermos  $a^{-1}$  referimo-nos a este inverso "especial".

Recordemos que dado  $T$  um subsemigrupo regular de um semigrupo completamente regular  $S$ , pelo Lema 2.2.4,  $T$  é completamente regular, tendo-se  $a_T^{-1} = a_S^{-1}$  para  $a \in T$ . Além disso,

**Proposição 4.1.1.** *Um subsemigrupo  $T$  de um semigrupo completamente regular finito  $S$  é completamente regular.*

*Demonstração.* Seja  $a \in T$ . Como  $T$  é finito, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a^n = f$  para algum  $f \in E(T)$ . Por outro lado, como  $S$  é completamente regular, existe  $e \in E(S)$  tal que  $a \in H_e$ . Como  $a^n \in H_e$ , então  $e = f$ . Além disso, como  $e = a^n \in H_e$  e  $a \in H_e$ , temos  $a^{-1} = a^{n-1} \in T$ . Consequentemente,  $T$  é completamente regular.  $\square$

Notemos ainda que se  $\theta : S \rightarrow T$  é um morfismo sobrejetivo de um semigrupo completamente regular  $S$  num semigrupo  $T$ , então dado  $a \in S$  temos  $a^{-1}\theta \in V(a\theta)$  com

$$(a^{-1}\theta)(a\theta) = (a^{-1}a)\theta = (aa^{-1})\theta = (a\theta)(a^{-1}\theta),$$

donde  $T$  é completamente regular, tendo-se  $(a\theta)^{-1} = a^{-1}\theta$ . Logo  $\theta$  também respeita a operação unária  $^{-1}$ .

A classe dos semigrupos completamente regulares finitos  $\mathcal{CR}$  é obviamente fechada para produtos diretos e, portanto, é também uma (pseudo)variedade de semigrupos finitos. Podemos então definir variedade de semigrupos completamente regulares do seguinte modo.

**Definição 4.1.2.** Uma classe de semigrupos completamente regulares finitos  $\mathcal{V}$  diz-se uma *variedade de semigrupos completamente regulares finitos* se satisfaz:

1. Se  $T$  é um subsemigrupo de  $S \in \mathcal{V}$ , então  $T \in \mathcal{V}$ ;
2. Se  $S \in \mathcal{V}$  e  $T$  é quociente de  $S$ , então  $T \in \mathcal{V}$ ;
3. Se  $S_1, S_2 \in \mathcal{V}$ , então  $S_1 \times S_2 \in \mathcal{V}$ .

Naturalmente a condição (3) na presença de (2) equivale a dizer que a classe  $\mathcal{V}$  é fechada para o produto direto de qualquer família finita de semigrupos de  $\mathcal{V}$ , e o mesmo pode ser dito da condição (2) da definição de formação de semigrupos completamente regulares que passaremos a enunciar.

**Definição 4.1.3.** Uma classe de semigrupos completamente regulares finitos  $\mathcal{F}$  diz-se uma *formação de semigrupos completamente regulares finitos* se satisfaz:

1. Se  $S \in \mathcal{F}$  e  $T$  é quociente de  $S$ , então  $T \in \mathcal{F}$ ;
2. Se  $S_1, S_2 \in \mathcal{F}$  e  $T$  é produto subdireto de  $S_1$  e  $S_2$ , então  $T \in \mathcal{F}$ .

Naturalmente surge a questão de saber se, dada uma classe  $\mathcal{V}$  de grupos, as classes

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mathcal{V}} &:= (S \text{ completamente regular} : \forall e = e^2, H_e \in \mathcal{V}), \\ \mathcal{U}_{\mathcal{V}} &:= (S \text{ completamente regular} : S/\sigma \in \mathcal{V}) \end{aligned}$$

serão variedade ou formação de semigrupos completamente regulares quando  $\mathcal{V}$  é variedade ou formação de grupos. E será que

$$\mathcal{L}_{\mathcal{V}} := (S \text{ completamente regular: se } T \text{ é subgrupo de } S, \text{ então } T \in \mathcal{V})$$

é formação de completamente regulares quando  $\mathcal{V}$  é formação de grupos?

**Proposição 4.1.4.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma classe de grupos.*

- (i)  $\mathcal{F} = \mathcal{W}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{G}$ ;
- (ii)  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  é fechada para quocientes se e só se  $\mathcal{F}$  é fechada para quocientes. Se  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  é formação de semigrupos completamente regulares, então  $\mathcal{F}$  é variedade de grupos;
- (iii) Se  $\mathcal{F}$  é variedade de grupos, então  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  é variedade de semigrupos completamente regulares.

*Demonstração.* Tal como anteriormente, a alínea (i) segue do facto de todo o grupo  $G$  ser um semigrupo completamente regular e de só ter um idempotente  $1_G$  sendo  $H_{1_G} = G$ .

As demonstrações de (ii) e (iii) são obviamente semelhantes às realizadas nas alíneas (iii) e (iv) da Proposição 3.1.10, reparando que o monóide  $\mathcal{U}_1(H, G)$  é completamente regular.  $\square$

**Proposição 4.1.5.** *Seja  $\mathcal{F}$  uma classe de grupos.*

(i) Se  $\mathcal{F}$  é formação de grupos, então  $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  é formação de semigrupos completamente regulares.

*Demonstração.* A demonstração é análoga à prova 3.1.10 (v).  $\square$

**Questão 4.1.6.** Será verdade que se  $\mathcal{F}$  é uma variedade de grupos então a classe  $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$  é variedade de semigrupos completamente regulares?

**Proposição 4.1.7.** Dada  $\mathcal{F}$  uma formação de grupos, a classe  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$  é uma formação de semigrupos completamente regulares.

*Demonstração.* A demonstração é análoga à prova 3.1.16 (i) efetuada no caso dos semigrupos inversos, tendo em mente que um semigrupo completamente regular é união disjunta de subgrupos maximais.  $\square$

Poderíamos pensar agora em definir classe de Fitting de semigrupos completamente regulares. No entanto, apesar da abordagem kernel-traço ser ainda válida no tratamento de congruências em semigrupos regulares, se tomarmos uma congruência  $\rho$  num semigrupo completamente regular  $S$ ,  $\ker \rho$  pode não ser um subsemigrupo de  $S$ , mesmo quando  $\rho$  separa idempotentes, como veremos a seguir.

Tal como na Definição 2.3.4, dada uma congruência  $\rho$  num semigrupo regular  $S$ , definimos o kernel e o traço de  $\rho$ , respetivamente, por

$$\begin{aligned} \ker \rho &:= \{a \in S : a\rho e \text{ para algume } e \in E(S)\}, \\ \text{tr } \rho &:= \rho|_{E(S)}. \end{aligned}$$

Tal como no caso dos semigrupos inversos, podemos ainda definir par de congruência e associar a cada par uma congruência. Em particular, num semigrupo completamente regular  $S$ , existe uma expressão simples para descrever uma congruência  $\rho$  em termos do seu kernel e do seu traço. Por exemplo, esta definição de kernel enunciada é equivalente a definir

$$\ker \rho := \{a \in S : a\rho a^0\},$$

onde  $a^0$  denota a identidade em  $H_a$ .

Podemos ainda definir subconjunto normal de um semigrupo completamente regular e reparar que um subconjunto é normal se e só se é kernel de alguma congruência.

**Definição 4.1.8.** Um subconjunto  $N$  de um semigrupo completamente regular  $S$  diz-se um *subconjunto normal* se satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $E(S) \subseteq N$ ;
- (ii) se  $n \in N$ , então  $n^{-1} \in N$ ;
- (iii) se  $xy \in N$ , então  $yx \in N$ , para  $x, y \in S$ ;
- (iv) se  $x, x^0y \in N$ , então  $xy \in N$ , para  $x, y \in S$ .

**Teorema 4.1.9.** Dado um subconjunto  $N$  de um semigrupo completamente regular  $S$ ,  $N$  é normal se e só se  $N = \ker \rho$  para alguma congruência  $\rho$  em  $S$ .

*Demonstração.* Consultar [24, Teorema VI.1.4.].  $\square$

Repare-se no entanto que, para  $x, y \in S$ , se  $xy \in E(S)$  então, pela Observação 2.1.15,

$$\begin{aligned} yx &= (yx)(yx)^{-1}(yx) = (yx)(yx)(yx)^{-1} \\ &= y(xy)x(yx)^{-1} = y(xy)^2x(yx)^{-1} \\ &= (yx)^2(yx)^0 = (yx)^2. \end{aligned}$$

É claro que  $E(S)$  satisfaz as condições da Definição 4.1.8 e, portanto,  $E(S)$  é sempre um subconjunto normal, mas  $E(S)$  pode não ser um subsemigrupo e, conseqüentemente, os subconjuntos normais podem não ser subsemigrupos, o que se torna um problema.

Assim, tendo em mente estas dificuldades encontradas para definir classe de Fitting de completamente regulares, poderíamos tentar ver o que acontece em *ortogrupos* - semigrupos ortodoxos completamente regulares - considerando núcleos de congruências que separam idempotentes que serão da forma apresentada em 4.1.8, mas desta vez conseguimos garantir que estes núcleos são de facto subsemigrupos.

## 4.2 Semigrupos regulares e semigrupos ortodoxos

Repare-se que um subsemigrupo  $T$  de um semigrupo regular  $S$  não precisa de ser regular e, por essa razão, a classe  $\mathcal{R}eg$  dos semigrupos regulares não constitui uma variedade de semigrupos. O mesmo acontece se tomarmos  $T$  produto subdireto de semigrupos regulares  $S_1$  e  $S_2$ ,  $T$  não é necessariamente regular e, portanto, a classe  $\mathcal{R}eg$  também não é formação de semigrupos, mesmo que finitos. No entanto, um quociente de um semigrupo regular é um semigrupo regular.

A classe dos semigrupos regulares  $\mathcal{R}eg$  vai então constituir o que J. Kadourek e M. B. Szendrei chamaram de bivariedade e o que T.E. Hall chamou de e-variedade.

**Definição 4.2.1.** Uma *e-variedade*  $\mathcal{V}$  é uma classe de semigrupos regulares finitos tal que:

1. Qualquer subsemigrupo regular de um semigrupo de  $\mathcal{V}$  pertence a  $\mathcal{V}$ ;
2. Qualquer quociente de um semigrupo de  $\mathcal{V}$  pertence a  $\mathcal{V}$ ;
3. O produto direto de qualquer família finita de semigrupos de  $\mathcal{V}$  também pertence a  $\mathcal{V}$ .

**Exemplo 4.2.2.** Atendendo ao Lema 2.2.4 e ao que foi observado na secção 4.1, a classe  $\mathcal{C}\mathcal{R}$  é uma e-variedade.

Podemos pensar no conceito análogo para formações e definir e-formação.

**Definição 4.2.3.** Uma *e-formação*  $\mathcal{F}$  é uma classe de semigrupos regulares finitos tal que:

1. Qualquer quociente de um semigrupo de  $\mathcal{F}$  pertence a  $\mathcal{F}$ ;
2. Se  $T$  é um semigrupo regular e é um produto subdireto de uma família finita de semigrupos de  $\mathcal{F}$ , então  $T$  também pertence a  $\mathcal{F}$ .

É claro que toda a e-variedade é e-formação e, conseqüentemente, as classes  $\mathcal{R}eg$  e  $\mathcal{C}\mathcal{R}$  são também e-formações.

Viremos agora a nossa atenção para semigrupos ortodoxos. A classe  $\mathcal{O}rt$  dos semigrupos ortodoxos, tal como a classe  $\mathcal{R}eg$ , não é uma variedade de semigrupos, é, no entanto, uma e-variedade

**Proposição 4.2.4.** A classe  $\mathcal{O}rt$  dos semigrupos ortodoxos finitos é uma e-variedade.

*Demonstração.* Sejam  $S \in \mathcal{O}rt$  e  $T$  um subsemigrupo regular de  $S$ . Sejam ainda  $e, f \in E(T)$ . Como  $E(T) \subseteq E(S)$ , temos  $ef \in E(S)$ , e, como  $ef \in T$ , segue que  $ef \in E(T)$ , o que prova que  $T \in \mathcal{O}rt$ .

Seja agora  $S \in \mathcal{O}rt$  e  $\theta : S \rightarrow T$  um morfismo sobrejetivo entre semigrupos. Então  $T$  é semigrupo regular. Sejam ainda  $e_1, e_2 \in E(T)$ . Pelo Lema de Lallement 2.1.28, existem  $f_1, f_2 \in E(S)$  tais que  $f_1\theta = e_1, f_2\theta = e_2$ . Como  $S$  é ortodoxo, temos  $f_1f_2 \in E(S)$ , donde  $e_1e_2 = (f_1\theta)(f_2\theta) = (f_1f_2)\theta \in E(T)$  e, conseqüentemente,  $T \in \mathcal{O}rt$ .

Por último, sejam  $S_1, S_2 \in \mathcal{O}rt$ . Como todo o idempotente de  $S_1 \times S_2$  é da forma  $(e_1, e_2)$  com  $e_1 \in E(S_1)$  e  $e_2 \in E(S_2)$  e  $S_1, S_2 \in \mathcal{O}rt$ , pode-se verificar que  $S_1 \times S_2 \in \mathcal{O}rt$ .  $\square$

**Corolário 4.2.4.1.** *A classe  $\mathcal{O}rt$  dos semigrupos ortodoxos finitos é uma e-formação.*

O passo natural seguinte seria tentar definir agora uma classe de e-Fitting. Para tal precisamos de recordar a definição subsemigrupo normal de um semigrupo ortodoxo.

**Definição 4.2.5.** Seja  $N$  um subconjunto de um semigrupo ortodoxo  $S$ .  $N$  é um *subsemigrupo normal* de  $S$  se  $N$  é um subsemigrupo regular de  $S$  tal que  $E(S) \subseteq N$  e, para  $a \in S$  e  $a' \in V(a)$ ,  $aNa' \subseteq N$ .

Conseqüentemente,  $N$  é um semigrupo ortodoxo e, pela Proposição 2.6.5, para  $a \in N$ , temos  $V(a) \subseteq N$ , i.e.,  $N$  é um *subsemigrupo totalmente regular* de  $S$ .

Idealmente, gostaríamos de ter não apenas um subsemigrupo normal mas um subsemigrupo que fosse um kernel de uma congruência. Assim, podemos pensar em definir subsemigrupo i-normal de um semigrupo ortodoxo, tendo em mente a definição de par de congruência num semigrupo ortodoxo de [14] para uma congruência que separa idempotentes que enunciamos a seguir.

**Definição 4.2.6.** Seja  $S$  um semigrupo ortodoxo. Uma congruência  $\tau$  em  $E(S)$  diz-se uma *congruência normal* se, para  $e, f \in E(S)$ ,  $a \in S$ ,  $a' \in V(a)$ ,

$$e\tau f \implies d'ea\tau d'fa$$

sempre que  $d'ea$  é idempotente.

**Definição 4.2.7.** Seja  $S$  um semigrupo ortodoxo. Um par  $(N, \tau)$ , onde  $N$  é um subsemigrupo normal de  $S$  e  $\tau$  é uma congruência normal em  $E(S)$ , diz-se um *par de congruência* em  $S$  quando, para  $a \in S$ ,  $a' \in V(a)$ ,  $e \in E(S)$ ,

(i) se  $ea \in N$ ,  $e\tau aa'$ , então  $a \in N$ ;

(ii) se  $a \in N$ , então  $d'ea\tau d'aea$ .

Assim, poderíamos considerar a seguinte definição.

**Definição 4.2.8.** Um subconjunto  $N$  de um semigrupo ortodoxo  $S$  diz-se um *subsemigrupo i-normal* de  $S$  se é normal e, se para  $a \in N$ ,  $a' \in V(a)$ ,  $e \in E(S)$ , se tem  $d'ea = d'aea$ .

Um tal subsemigrupo i-normal  $N$  corresponde a  $\ker \rho$  para alguma congruência  $\rho$  que separa idempotentes. No entanto, observe-se que, ao contrário do que acontece para semigrupos inversos, a condição

$$a \in N \implies \forall a' \in V(a), \forall e \in E(S), d'ea = d'aea \tag{4.1}$$

não corresponde a dizer que  $N \subseteq E(S)\xi$ . Porém, poderíamos melhorar esta condição se considerássemos um semigrupo ortodoxo  $\mathcal{R}$ -unipotentente.

**Definição 4.2.9.** Um semigrupo regular  $S$  diz-se  $\mathcal{R}$ -unipotente se cada  $\mathcal{R}$ -classe contém um único idempotente.

**Lema 4.2.10.** Seja  $S$  um semigrupo regular. São equivalentes as seguintes condições:

- (i)  $S$  é  $\mathcal{R}$ -unipotente;
- (ii)  $e f e = e f$ , para  $e, f \in E(S)$ ;
- (iii)  $a a' = a a''$ , para  $a \in S, a, a'' \in V(a)$ ;
- (iv)  $a e d' = a e d''$ , para  $a \in S, e \in E(S), d', d'' \in V(a)$ ;
- (v)  $a e d' a = a e$ , para  $a \in S, d' \in V(a), e \in E(S)$ .

*Demonstração.* Consultar [28, Teorema 1]. □

Assim, dado  $S$  um semigrupo  $\mathcal{R}$ -unipotente e  $N$  um subsemigrupo  $i$ -normal de  $S$ , pela condição 4.1 temos em particular que  $a e d' = a a e d' a'$ , para  $a \in N, d' \in V(a), e \in E(S)$ . Então, pelo Lema 4.2.10,

$$\begin{aligned} a e d' = a a e d' a' &\iff a e d' \cdot a = a a e d' a' \cdot a \\ &\iff a e d' a = (a d' a) a e d' a' a = a (d' a) (a e d') (a' a) \\ &\iff a e d' \cdot a = (a d' a) a e d' = a \cdot a e d'. \end{aligned}$$

Consequentemente, num semigrupo ortodoxo  $\mathcal{R}$ -unipotente a condição 4.1 é equivalente à condição:

$$a \in N \implies \forall d' \in V(a), \forall e \in E(S), a e d' \cdot a = a \cdot a e d'.$$

Neste caso, não temos exatamente que  $a e = e a$  para  $a \in N, e \in E(S)$  (i.e.,  $N \subseteq E(S)\xi$ ), mas como  $a e d' \in E(S)$ , podemos dizer que estamos "mais próximos" das definições dadas para semigrupos inversos se considerarmos semigrupos  $\mathcal{R}$ -unipotentes em vez de apenas semigrupos ortodoxos.

**Questão 4.2.11.** Poderemos desenvolver para e-formações de semigrupos ortodoxos, e para  $\mathcal{R}$ -unipotentes em particular, um estudo similar ao realizado para semigrupos inversos?

Embora gostássemos de explorar várias das questões que deixámos em aberto, é necessário terminar a dissertação e assim esperamos, no futuro, continuar este estudo.

# Bibliografia

- [1] J. Araújo et al. “Four notions of conjugacy for abstract semigroups”. Em: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics* 147.6 (2017), pp. 1169–1214.
- [2] A. Ballester Bolinches et al. “Formations of Monoids, Congruences, and Formal Languages”. Em: *Scientific Annals of Computer Science* 25.2 (2015), pp. 171–209.
- [3] A. Ballester-Bolinches e L. M. Ezquerro. *Classes of Finite Groups*. Vol. 584. Springer Science & Business Media, 2006.
- [4] A. Ballester-Bolinches, J. E. Pin e X. Soler-Escrivà. “Formations of finite monoids and formal languages: Eilenberg’s variety theorem revisited”. Em: *Forum Mathematicum*. Vol. 26. 6. De Gruyter. 2012, pp. 1737–1761.
- [5] C. Bergman. *Universal algebra: Fundamentals and selected topics*. Chapman e Hall/CRC, 2012.
- [6] G. Birkhoff. “On the structure of abstract algebras”. Em: *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*. Vol. 31. 4. Cambridge University Press. 1935, pp. 433–454.
- [7] R. Carter e T. Hawkes. “The  $\mathcal{F}$ -normalizers of a finite soluble group”. Em: *Journal of Algebra* 5.2 (1967), pp. 175–202.
- [8] E. Clement A., S. Majewicz e M. Zyman. *The Theory of Nilpotent Groups*. Springer, 2017.
- [9] Alfred H. Clifford, Arthur H. Clifford e G. B. Preston. *The algebraic theory of semigroups, Volume II*. Vol. 7. American Mathematical Soc., 1961.
- [10] J. Cossey. “Products of Fitting classes”. Em: *Mathematische Zeitschrift* 141.3 (1975), pp. 289–295.
- [11] K. Doerk e T. Hawkes. *Finite Soluble Groups*. Walter de Gruyter, 1992.
- [12] S. Eilenberg. *Automata, languages, and machines*. Academic press, 1974.
- [13] W. Gaschütz. “Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen”. Em: *Mathematische Zeitschrift* 80.1 (1962), pp. 300–305.
- [14] G. M. S. Gomes. “Orthodox congruences on regular semigroups”. Em: *Semigroup Forum*. Vol. 37. 1. Springer. 1988, pp. 149–166.
- [15] G.M.S Gomes et al. “On formations of monoids”. Em: (Submetido em 2019).
- [16] J. A. Green. “On the structure of semigroups”. Em: *Annals of Mathematics* (1951), pp. 163–172.
- [17] P. Hall. “A Contribution to the Theory of Groups of Prime-Power Order”. Em: *Proceedings of the London Mathematical Society* 2.1 (1934), pp. 29–95.
- [18] J. M. Howie. *Fundamentals of Semigroup Theory*. Vol. 12. Oxford University Press, 1995.

- 
- [19] R. C. Lyndon, M. P. Schützenberger et al. “The equation  $a^M = b^N c^P$  in a free group.” Em: *The Michigan Mathematical Journal* 9.4 (1962), pp. 289–298.
- [20] B. H. Neumann. “Identical relations in groups. I”. Em: *Mathematische Annalen* 114.1 (1937), pp. 506–525.
- [21] H. Neumann. “On varieties of groups and their associated near-rings”. Em: *Mathematische Zeitschrift* 65.1 (1956), pp. 36–69.
- [22] F. Otto. “Conjugacy in monoids with a special Church-Rosser presentation is decidable”. Em: *Semigroup forum*. Vol. 29. 1. Springer. 1984, pp. 223–240.
- [23] M. Petrich. *Inverse Semigroups*. 1. Wiley-Interscience, 1984.
- [24] M. Petrich e N. R. Reilly. *Completely regular semigroups*. John Wiley & Sons, 1999.
- [25] J. Rhodes e B. Steinberg. *The q-theory of finite semigroups*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [26] D. J. S. Robinson. *A Course in the Theory of Groups*. Vol. 80. Springer Science & Business Media, 1996.
- [27] H. E. Scheiblich. “Kernels of inverse semigroup homomorphisms”. Em: *Journal of the Australian Mathematical Society* 18.3 (1974), pp. 289–292.
- [28] P. S. Venkatesan. “Right (left) inverse semigroups”. Em: *Journal of Algebra* 31.2 (1974), pp. 209–217.
- [29] G. Wenbin e K. Shum. “Minimal formations of universal algebras”. Em: *Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications* 21.2 (2001), pp. 201–205.
- [30] E. Witt. “Treue Darstellung Liescher Ringe.” Em: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 177 (1937), pp. 152–160.