UNIVERSIDADE DE LISBOA
Instituto de Educação

A COMPREENSÃO DE NÚMEROS RACIONAIS: O PAPEL DA REPRESENTAÇÃO DECIMAL

Cristina Maria da Silva Morais

Orientadores: Professora Doutora Maria de Lurdes Marquês Serrazina
Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação, especialidade de Didática da Matemática

2019

UNIVERSIDADE DE LISBOA

Instituto de Educação

A COMPREENSÃO DE NÚMEROS RACIONAIS: O PAPEL DA REPRESENTAÇÃO DECIMAL

Cristina Maria da Silva Morais

Orientadores: Professora Doutora Maria de Lurdes Marquês Serrazina
Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Tese especialmente elaborada para a obtenção do grau de Doutor em Educação, especialidade de Didática da Matemática.

Júri:

Presidente: Doutora Cecília Galvão Couto, Professora Catedrática e membro do Conselho Científico do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Vogais:

- Doutora Maria de Lurdes Marquês Serrazina, Professora Coordenadora Aposentada da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, orientadora;
- Doutora Maria de Fátima Pista Calado Mendes, Professora Coordenadora da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal;
- Doutora Neusa Cristina Vicente Branco, Professora Adjunta da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Santarém;
- Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos, Professora Associada com Agregação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutor Henrique Manuel Alonso da Costa Guimarães, Professor Associado do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira, Professora Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Este trabalho foi financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa com a referência SFRH/BD/108341/2015.

2019

Resumo

Este estudo tem como objetivo compreender como alunos do 1.º ciclo constroem a compreensão dos números racionais, numa perspetiva de continuidade partindo da compreensão dos números inteiros, e enfatizando a representação em numeral decimal.

O enquadramento teórico é desenvolvido tendo como base a perspetiva de sentido de número, em que o conceito de número é entendido como sendo continuadamente ampliado pelos alunos. Os conhecimentos relativos a números inteiros são entendidos como parte integrante e potenciadora da aprendizagem dos números racionais. Enquadrada na teoria integrada de desenvolvimento numérico, a grandeza de um número constitui-se como uma noção central na continuidade entre o conjunto dos números inteiros e o dos números racionais, sendo igualmente reconhecidas as especificidades de cada conjunto, como a propriedade densidade do conjunto dos números racionais. É dada particular atenção a processos de raciocínio matemático, como forma de inferir a compreensão de número racional dos alunos, bem como a transformações de e entre representações. Por fim, são elaborados os processos envolvidos na compreensão da estrutura decimal subjacente à representação em numeral decimal.

O estudo segue a modalidade de investigação baseada em design, tendo sido realizada uma intervenção onde participaram 25 alunos de uma turma e respetiva professora, nos 3.º e 4.º anos de escolaridade. Foram selecionados quatro alunos para uma recolha e análise de dados mais aprofundadas. A intervenção envolveu um total de 18 tarefas, geralmente resolvidas em aulas de 90 minutos, num total de 16 semanas. No final da intervenção, foram realizadas entrevistas individuais aos quatro alunos.

A recolha de dados foi realizada através da observação participante apoiada por gravações vídeo e áudio das aulas, entrevistas individuais aos quatro alunos no final da intervenção, e registos escritos dos alunos e professora. A análise de dados centrou-se em transformações de e entre representações; processos de raciocínio, nomeadamente generalizações ao conjunto dos números racionais de condições válidas no conjunto dos números inteiros; estrutura decimal; grandeza de um número e densidade do conjunto dos números racionais.

Os resultados mostram que tipos de transformações de representações foram realizadas pelos alunos a partir da representação em numeral decimal e como estas contribuíram para a compreensão da noção de grandeza de um número e de densidade como propriedade do conjunto dos números racionais. São identificadas generalizações realizadas a partir de conhecimentos dos números inteiros e que se revelaram inválidas quando estendidas ao conjunto dos números racionais, especificamente na comparação de números racionais na sua representação em numeral decimal. Os resultados evidenciam como as generalizações desencadearam justificações e de que forma o envolvimento dos alunos nestes processos de raciocínio contribuiu para a compreensão dos números racionais. Os resultados destacam também a complexidade da compreensão da estrutura decimal subjacente ao numeral decimal e como foi construída na relação com outras representações.

Deste estudo resulta um conjunto de princípios de design que sustentam uma conjetura sobre como promover a compreensão de números racionais na representação em numeral decimal, no 1.º ciclo.

Palavras-chave: Números racionais; Numeral decimal; Representações; Processos de raciocínio matemático; Grandeza de um número; 1.º ciclo do ensino básico.

Abstract

This study aims to understand how elementary school students build their understanding of rational numbers, in a perspective of continuity starting from the understanding of the whole numbers, and emphasizing the representation in decimal numeral.

The theoretical framework is developed based on the number sense perspective, in which the concept of number is understood as being continuously widened by the students. Knowledge about whole numbers is understood as an integral part and with potential for the learning of rational numbers. Within the integrated theory of numerical development, the magnitude of one number is emphasized as central in the continuity between the whole numbers and rational numbers, and the specificities of each set are also recognized, as the density property of the set of rational numbers. Particular attention is given to the mathematical reasoning processes as a way to infer the students' understanding of rational numbers, as well as transformations of and between representations. Finally, the processes involved in understanding the decimal structure, underlying the decimal representation, are elaborated.

The study follows a design research approach, and an intervention was carried out in a class of 25 students and their teacher, in grades 3 and 4. Four students were selected for the collection and analysis of in-depth data. The intervention involved a total of 18 tasks, usually solved in 90-minutes lessons, for a total of 16 weeks. At the end of the intervention the four students were individually interviewed.

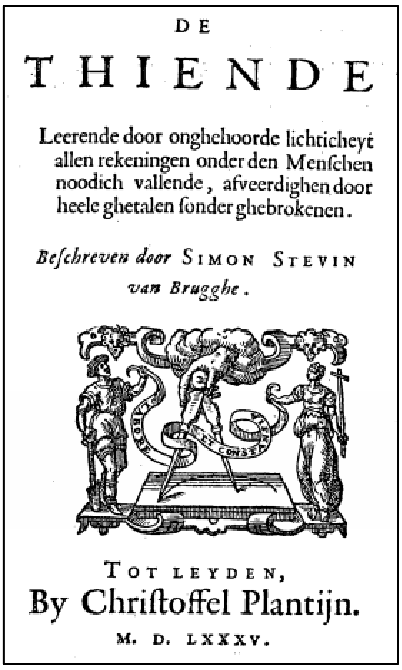
Data collection was carried out through participant observation supported by video and audio recordings of the lessons, individual interviews to the four students at the end of the intervention, and written records of the students and teacher. Data analysis focused on transformations of and between representations; reasoning processes, namely generalizations to the set of rational numbers of valid conditions on the set of whole numbers; decimal structure; the magnitude of a number and density of the rational numbers set.

The results show the types of transformations that were performed by students, carried out from the decimal number representation, and how they contributed to the understanding of the notion of magnitude of a number and density as property of the set of rational numbers. Generalizations supported by knowledge of the whole numbers which revealed to be invalid when extended to the set of rational numbers are identified, specifically in the comparison of rational numbers in their decimal representation. The results reveal how the generalizations lead to justifications and how the involvement of students in these reasoning processes contributed to the understanding of rational numbers. The results also highlight the complexity of understanding the decimal structure underlying the decimal representation and how it was constructed in its relation to other representations.

From this study results a set of design principles that support a conjecture about how to promote the understanding of rational numbers in the decimal representation, in the elementary school years.

Keywords: Rational numbers; Decimal representation; Representations; Mathematical reasoning processes; Magnitude of a number; Elementary school.

Prefácio



DE

THIENDE

Leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menſchen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetalen ſonder ghebrokenen.

Beſchreven door SIMON STEVIN *van Brugghe.*

TOT LEYDEN,

By Chriſtoffel Plantijn.

M. D. LXXXV.

Em 1585, na capa do seu livro “De Thiende” (na figura à direita) ou, em Português, “A décima”, Simon Stevin anuncia que irá “Ensinar a realizar com grande facilidade, inédita, todos os cálculos necessários entre os homens usando números inteiros, sem frações” (Struik, 1959, p. 476). Dedicando o seu livro a todos os “Astrónomos, medidores de terras, medidores de tapeçarias, medidores em geral, mestres de dinheiro, e a todos os mercadores” (Stevin, 1585/1958, p. 389), Stevin sugere uma forma de realizar as quatro operações aritméticas com toda a facilidade, usando uma representação apoiada no sistema de numeração decimal. Tomando como exemplo o numeral 28,651, e seguindo a proposta de Stevin, seria escrito como 28⓪, 6①, 5②, 1③, onde ⓪ representa o “início” (unidades), ① designa o “primo” (primeiro ou a décima), ② designa o “segundo” (a centésima), e assim sucessivamente (Stevin, 1585/1958; Struik, 1959).

Stevin trouxe um primeiro olhar, no mundo ocidental, sobre as vantagens do uso desta representação, fortemente apoiadas na semelhança entre a representação proposta e a representação usada para os números inteiros. Viajando no tempo e no espaço, até à sala de aula, a semelhança entre a representação em numeral decimal de números inteiros e de números racionais é facilmente identificada pelos alunos desde os primeiros anos, contudo, a compreensão que lhe está subjacente reveste-se de desafios que é necessário desvendar. Movida pela vontade de estudar estes desafios de modo aprofundado, dei início a este percurso de doutoramento.

O percurso que vivi revestiu-se de várias aprendizagens, refletidas no meu desenvolvimento enquanto jovem investigadora e enquanto professora. Enquanto jovem investigadora, percorri vários estudos, estudei diferentes perspetivas sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais sem, no entanto, perder a minha própria convicção sobre ensinar e aprender, mas procurando transformá-la numa convicção sustentada. O estudo aprofundado sobre números racionais e, em particular, sobre a representação em numeral decimal, levou-me também a desenvolver uma compreensão mais profunda sobre esta temática, clarificando conceitos e estabelecendo relações que antes não me eram imediatas.

Assim, esta aprendizagem reflete-se também na minha prática enquanto professora. A experiência vivida com os alunos, que de forma entusiástica participaram neste estudo, na sua relação com as conclusões que dele emergem, será certamente adaptada e desenvolvida com os meus alunos no futuro. Não só esta aprendizagem resulta do estudo do tema e da experiência com os alunos, como também do trabalho realizado em conjunto com a minha colega “Maria”, professora participante, que prontamente se disponibilizou para participar no estudo. Deixo aqui o meu agradecimento a “Maria”, por ter confiado em mim para entrar na sua sala de aula, munida de câmara e gravadores, e para partilhar o processo por nós vivido. Agradeço todo o apoio e enorme vontade em participar nesta “aventura”, essenciais na realização deste estudo.

A realização de uma tese de doutoramento por artigos trouxe também vários desafios. Implicou uma mudança do que eu própria esperava que viesse a ser o produto final deste trabalho. Implicou um conjunto de decisões, tomadas em diferentes momentos do percurso, e que foram ficando contidas na forma de artigos. As decisões tomadas passaram também pela seleção dos episódios de sala de aula a incluir nos artigos e ao olhar que sobre eles fui tendo, tendo vindo a tomar consciência da seleção necessária, embora difícil, dos momentos que ilustram todo um percurso que gostaria de partilhar. Deste modo, cada artigo capta uma etapa deste estudo e reflete também uma etapa da minha aprendizagem ao longo do estudo. Também o *kappa* é representativo de um outro momento, posterior à escrita dos artigos e resultante dessa escrita.

Tive oportunidade de partilhar este desafio de realizar uma tese por artigos com a Helena, a Joana e a Marisa. Agradeço em especial à Helena e à Joana pelos nossos “dias D”, que foram determinantes para ir discutindo todas as dúvidas que foram surgindo e também para ganhar fôlego para cada nova etapa do caminho. Muito obrigada pela “gentil” e contínua pressão!

O facto de se tratar de uma tese de doutoramento por artigos significa que o trabalho resultante foi olhado sob diferentes perspetivas. Para além de ser discutido junto dos professores orientadores, Professora Lurdes Serrazina e Professor João Pedro da Ponte, também foi submetido à crítica da comunidade de investigação em educação matemática. As críticas recebidas contribuíram para o aprofundamento das ideias reunidas nos artigos e, consequentemente, para o próprio estudo. A par dos artigos,

também as partilhas e discussões deste trabalho, em diferentes momentos da sua realização, em encontros nacionais e internacionais foi extremamente importante, constituindo-se como novas oportunidades de trazer diferentes olhares sobre o trabalho realizado. Destaco as discussões aprofundadas, muitíssimo enriquecedoras, dos seminários de doutoramento onde tive oportunidade de discutir o meu trabalho e o trabalho de outros colegas doutorandos.

Este foi, sem dúvida, o maior e mais gratificante desafio do meu percurso académico. Este balanço deve-se, em grande parte, às pessoas que me acompanharam ao longo do percurso e a quem quero deixar o meu agradecimento. Sinto-me privilegiada por ter tido como orientadores a Professora Lurdes e o Professor João Pedro. Agradeço à Professora Lurdes, que me acompanha desde a experiência no mestrado, e que contribuiu em grande medida para a minha visão do que é investigar e participar na comunidade de investigação. Obrigada pela disponibilidade constante, e por vezes fora de horas, pela presença ao longo de todo o percurso, pela exigência, pela confiança que depositou em mim, e por tantas outras coisas... muito obrigada por tudo. Agradeço ao Professor João Pedro, por todas as sugestões e todas as críticas que me ajudaram a desenvolver o trabalho, pela disponibilidade, pela exigência, firmada nas palavras "o estudo deve ser sóbrio e assertivo", como referiu num dos seminários de doutoramento, e pelos constantes desafios que me levaram a aprender para além da minha própria investigação.

Tive também a oportunidade de trabalhar e partilhar o gabinete 210 com colegas que enriqueceram este percurso, colocando questões, trazendo diferentes pontos de vista, ouvindo "crises" típicas de um doutorando, sempre num ambiente de boa disposição. Obrigada Helena, "terapeuta" em vários momentos, por todas as palavras de força e carregadas de energia positiva. Agradeço-te todas conversas que contribuíram muito para este estudo. Obrigada Marisa, pelos IMPULSos dados ao longo do percurso, na forma de questões difíceis e novas experiências. Agradeço também à Joana, cujo rigor e ritmo de trabalho foram um verdadeiro incentivo. Obrigada pelo apoio, especialmente nesta fase final.

Deixo também o meu agradecimento aos colegas da ESELx, com quem ia discutindo ideias ou, por vezes, partilhando apenas novas etapas do trabalho.

Ao diretor da minha escola, a quem muito agradeço o apoio, especialmente por encorajar uma dedicação exclusiva ao doutoramento, pelo interesse sempre manifestado pelos contributos da investigação, e em querer sempre mais e melhor para a sua escola e para os seus alunos.

I also want to thank my dear friend Yan. Thank you for sharing the joys, anxieties, and doubts of a Ph.D. student. Even though we had almost two thousand kilometers between us, we have shared this journey together. Thank you for all the good energy, calm and support throughout the way!

Aos meus amigos, que tantas vezes me colocaram a temível e repetida pergunta “Quando é que acabas?”, mas que compreenderam as minhas ausências e me encorajaram sempre a continuar.

E, por fim, um agradecimento especial à minha família que, ao longo de todo o percurso, foi uma fonte de apoio incondicional, sendo igualmente um porto de abrigo, fundamental para renovar energias. Caminharam sempre ao meu lado neste percurso, compreendendo a falta de disponibilidade para, simplesmente, poder *estar*. Muito obrigada.

Termino com a certeza de que não terminei, mas antes com a consciência de que este trabalho assinala o final de uma etapa e início de outra, de um percurso que, enquanto jovem investigadora, ainda agora iniciei.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

1 Apresentação do estudo

Motivação para o estudo

A motivação para este estudo surge do cruzamento do meu percurso enquanto professora do 1.º ciclo do ensino básico com o meu percurso académico. Desde que iniciei a minha prática docente, procurei complementar a minha formação inicial participando em encontros de professores que, ao permitirem partilhar a minha prática, muito contribuíram para que pudesse refletir sobre ela. Este trajeto conduziu-me ao mestrado, que possibilitou uma primeira experiência de investigação. O estudo que realizei no âmbito do mestrado centrou-se no cálculo mental, especificamente nas estratégias de cálculo mental usadas por alunos do 1.º ano na resolução de problemas (Morais, 2011; Morais & Serrazina, 2013). Neste estudo aprofundei questões relacionadas com o desenvolvimento de sentido de número, que se tornou um dos grandes objetivos orientadores do trabalho realizado em sala de aula, com os meus alunos.

Aquando do início da aprendizagem formal de números racionais[1], os mesmos alunos que haviam participado no estudo de mestrado e nos quais reconhecia grande flexibilidade no trabalho com números inteiros[2], revelaram interpretações de números racionais na representação em numeral decimal que, na altura, me surpreenderam. Era comum, em sala de aula, ouvir questões dos alunos como: "Mas porque é que não há o mesmo que as unidades depois da vírgula?" ou "Isto engana, décima lembra dezena, mas é logo a primeira unidade depois da vírgula". Este tipo de questões ilustra tentativas de atribuir significado à escrita do numeral decimal, contudo, pouco ou nada revela relativamente ao conhecimento dos alunos sobre o número representado, mostrando que a compreensão de números racionais na representação em numeral decimal é consideravelmente mais complexa do que aparenta. A (ilusória) facilidade em prolongar o sistema de numeração decimal para a escrita do numeral decimal tende a ofuscar a complexidade da construção da compreensão dos números racionais representados. Os alunos recorriam aos seus conhecimentos dos números inteiros para dar sentido aos

[1] Ao longo deste trabalho, sempre que me referir a "números racionais" estarei a considerar números racionais positivos com o zero.
[2] Ao longo deste trabalho, sempre que me referir a "números inteiros" estarei a considerar números naturais com o zero.

"novos" números que lhes eram apresentados, particularmente no trabalho com a representação em numeral decimal. Contudo, a mobilização destes conhecimentos nem sempre os conduzia a conclusões corretas.

Apesar de procurar informação para apoiar os meus alunos, pouco encontrei especificamente sobre números racionais em numeral decimal que me permitisse estruturar um caminho para o seu ensino e aprendizagem. Entre colegas professores, as dificuldades dos alunos na compreensão dos números racionais, independentemente da sua representação, parecem ser muitas vezes caracterizadas como expectáveis e até próprias da aprendizagem. Surgiu assim a minha motivação para este estudo.

O trabalho que realizei no âmbito do mestrado, envolvendo números inteiros, convergiu naturalmente na necessidade de estudar aprofundadamente a compreensão dos números racionais, com particular atenção sobre a representação em numeral decimal, com a convicção de que esta deve ser enquadrada numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, e na continuidade da compreensão dos números inteiros.

Pertinência do estudo

A aprendizagem dos números racionais assinala uma mudança significativa no modo como o número é conceptualizado pelos alunos. Até então, os alunos reúnem um conjunto de experiências envolvendo números inteiros que estruturam o seu conceito de número, conceito este que será ampliado com as experiências resultantes do trabalho com números racionais (Siegler, Thompson, & Schneider, 2011). Naturalmente, com esta mudança surgem desafios na aprendizagem de números racionais, constituindo-se um dos tópicos mais complexos do ensino básico (Monteiro & Pinto, 2005) e que alicerça aprendizagens futuras em álgebra, geometria, estatística, química ou física (e.g., Bailey, Siegler, & Geary, 2014; Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983).

Com as exigências de uma sociedade cada vez mais digital e tecnológica, reforça-se a importância do desenvolvimento do pensamento crítico sustentado num conhecimento robusto, como forma de intervir com sucesso na sociedade atual (European Comission, 2018; ME, 2017). Barnett-Clarke, Fisher, Marks e Ross (2010) consideram que o numeral decimal é a representação de número racional mais presente na sociedade, não só no sistema métrico de medidas, como na ciência e tecnologia, sendo uma representação bastante vantajosa pela simplicidade que oferece na realização de cálculos (Lortie-Forgues, Tian, & Siegler, 2015).

Vários estudos têm sido realizados em torno das dificuldades manifestadas pelos alunos envolvendo números racionais na representação em numeral decimal. As mesmas dificuldades associadas à mobilização de números inteiros para comparar números racionais em numeral decimal identificadas há cerca de 30 anos (e.g., Nesher & Peled, 1986; Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson & Peled, 1989) continuam a ser identificadas em estudos que envolvem alunos de diferentes faixas etárias (e.g., Baturo & Cooper, 1995; Desmet, Grégoire, & Mussolin, 2010; Durkin & Rittle-Jonhson, 2015); estudantes universitários (e.g., Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2012); futuros professores (e.g., Stacey, Helme, Steinle, Baturo, Irwin, & Bana, 2001); e mesmo profissionais de outras áreas (Pierce, Steinle, Stacey, & Widjaja, 2008). As dificuldades têm sido categorizadas bem como a sua prevalência ao longo dos anos de escolaridade (e.g., Moloney & Stacey, 1997; Steinle & Stacey, 2003). Grande parte do levantamento das dificuldades dos alunos tem sido realizada usando como principal instrumento de recolha de dados questionários de comparação de números racionais em numeral decimal. Estes, embora permitam reunir um conjunto de informações importante sobre a identificação de diferentes tipos de dificuldade, não possibilitam o estudo aprofundado do que, de facto, são os conhecimentos dos alunos sobre números racionais.

A literatura remete para a necessidade de integrar e mobilizar diferentes representações de forma flexível de modo a desenvolver uma compreensão sólida dos números racionais (e.g., Ponte & Quaresma, 2011a; Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1993; Tian & Siegler, 2018). Os estudos realizados envolvendo diferentes representações de números racionais tendem a centrar-se em fração e numeral decimal, e revelam as dificuldades dos alunos em reconhecer o mesmo número racional expresso em representações diferentes (e.g., DeWolf, Bassok, & Holyoak, 2015; Moseley & Okamoto, 2008; Reinup, 2010; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Wang & Siegler, 2013). De referir ainda, o estudo realizado por Moss e Case (1999) onde é apresentado um currículo experimental bastante detalhado que envolve um trabalho inicial em torno dos números racionais na sua representação em percentagem, seguido da representação em numeral decimal e, por fim, da representação em fração.

A mobilização de diferentes representações é considerada fundamental na própria atividade matemática (Duval, 2006), na medida em que a coordenação entre diferentes representações é necessária para o desenvolvimento do raciocínio matemático (Mata-Pereira & Ponte, 2012; NCTM, 2007, 2014). Num estudo recente centrado na compreensão dos números racionais na representação em fração, Nicolaou e Pitta-Pantazi

(2016) referem que o estabelecimento de conexões entre diferentes representações e, particularmente, o envolvimento em processos de raciocínio não só é essencial para a compreensão de números racionais, como é evidência de uma compreensão mais sólida. No entanto, foi escassa a investigação que consegui identificar que se centrasse no modo como os alunos compreendem números racionais na representação em numeral decimal na sua interligação com outras representações, e no modo como os processos de raciocínio podem contribuir e evidenciar a compreensão de números racionais. Acresce que, dadas as diferenças a nível curricular entre diferentes países, são igualmente reduzidos os estudos que envolvam alunos do 1.º ciclo, uma vez que a representação decimal de número racional é abordada em vários países em anos de escolaridade que correspondem ao 2.º ciclo. A nível nacional, as orientações curriculares preveem a abordagem aos números racionais desde os primeiros anos em diferentes representações, embora o modo como essa abordagem deve ser realizada tenha vindo a sofrer alterações.

Diferentes representações de número racional explicitam diferentes relações subjacentes ao número representado (Tripathi, 2008). No caso do numeral decimal, o facto de ser escrito de acordo com o sistema de numeração decimal, já usado na representação de números inteiros, pode ajudar a explicitar relações entre cada uma das partes representadas e a unidade considerada, assim como relações entre as diferentes unidades da parte não inteira do numeral. Estas relações são fundamentais para a conceptualização da unidade necessária não só na compreensão dos números racionais nesta representação como, de um modo geral, dos números racionais. Um trabalho em torno desta representação pode ainda promover a construção da noção de densidade enquanto propriedade no conjunto dos números racionais, ao acrescentar-se continuamente o número de algarismos na parte não inteira do numeral (Wheeler, 1987). O reconhecimento de aspetos que caracterizam o conjunto dos números racionais ou que são específicos do conjunto dos números inteiros é fundamental para o desenvolvimento numérico (Siegler et al., 2011). Deste modo, destaca-se a relevância do estudo em torno da construção da compreensão dos números racionais na representação em numeral decimal, nos anos de escolaridade iniciais, bem como o seu contributo para a construção de uma compreensão global dos números racionais.

Objetivo e questões do estudo

Este estudo, enquadrado na modalidade de investigação baseada em design, tem como objetivo compreender como alunos do 1.º ciclo constroem a compreensão dos números racionais, numa perspetiva de continuidade partindo da compreensão dos números inteiros, e enfatizando a representação em numeral decimal.

Do objetivo definido decorrem as seguintes questões de investigação:

1. Como constroem os alunos as noções de grandeza de um número racional e de densidade no conjunto dos números racionais, apoiados por transformações de e entre representações?
2. Que processos de raciocínio mobilizam os alunos, partindo da representação em numeral decimal, e como estes contribuem para a compreensão dos números racionais?
3. Quais os contributos da representação em numeral decimal para a compreensão dos números racionais?

Kappa e artigos

Este estudo de doutoramento é constituído por quatro artigos de investigação e pelo *kappa*. O *kappa* tem como propósito apresentar a fundamentação teórica geral que sustenta os artigos realizados, bem como questões metodológicas centrais neste estudo dada a modalidade de investigação considerada. O *kappa* apresenta ainda a discussão dos resultados apresentados nos artigos de forma interrelacionada, possibilitando a resposta às questões de investigação, e indica as conclusões do estudo realizado relativamente à sua contribuição para a investigação sobre o ensino e aprendizagem de números racionais.

Os artigos do estudo. Apresento, de seguida, os artigos a partir dos quais o *kappa* foi construído, bem como as revistas em que foram publicados ou aceites para publicação.

Artigo I (Anexo 1)	Morais, C., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018b). Números racionais no 1.º ciclo: Compreensão de grandeza e densidade apoiada pelo uso de modelos. *Quadrante XXVII*(1), 25–45.	*Indexada em: Qualis (B1)*

Artigo II (Anexo 2)	Morais, C. & Serrazina, M. L. (2018b). Extensões de conhecimentos na construção da compreensão de numeral decimal. *BOLEMA, 32*(61), 631–652. doi: 10.1590/1980-4415v32n61a16	*Indexada em: Scopus Qualis (A1)*
Artigo III (Anexo 3)	Morais, C., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018a). Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. *Acta Scientiae, 20*(4), 552–570. doi: 10.17648/acta.scientiae.v20iss4id3892	*Indexado em: Qualis (A2)*
Artigo IV (Anexo 4)	Morais, C. & Serrazina, M. L. (2018a). A compreensão da estrutura da representação decimal de número racional por alunos do 3.º e 4.º ano. *Boletim GEPEM.* (aceite em 27 de setembro de 2018)	*Indexado em: Qualis (B1)*

Todos os artigos contribuem, no seu conjunto, para o objetivo do estudo. Cada artigo[3] contribui especificamente para a resposta a uma questão do estudo, contribuindo de forma menos expressiva para a resposta a outras questões.

A estrutura do kappa. O *kappa* é constituído pela presente secção onde apresento globalmente o estudo. Na secção 2 desenvolvo e relaciono as ideias teóricas que norteiam os artigos, discutindo em particular ideias em torno da compreensão de número racional (i) na continuidade da compreensão de números inteiros; (ii) suportada por processos de raciocínio matemático; (iii) apoiada num uso flexível de diferentes representações; e (iv) apoiada na representação em numeral decimal. Na secção 3 discuto as características da investigação baseada em design realizada, apresento os princípios de design e conjetura que guiaram a intervenção, caracterizo os participantes, elaboro sobre os processos de recolha e análise de dados, e apresento o modo como atendi às questões éticas que se colocaram na realização deste estudo. Na secção seguinte apresento um resumo alargado dos artigos nos quais assenta o *kappa*, e explicito como se relacionam os artigos entre si e com as questões do estudo. Nas secções 5 e 6 discuto e relaciono as conclusões dos artigos, destacando que resposta permitem dar às questões de investigação e, consequentemente, ao objetivo, e como informam a reformulação da conjetura e princípios de design inicialmente definidos. Termino o *kappa* com uma reflexão final

[3] Cada artigo é identificado ao longo do *kappa* como Artigo I, II, III ou IV, sendo a paginação de cada artigo relativa à versão dos autores que se encontra em anexo.

onde destaco os contributos e implicações do estudo, bem como sugestões para investigação futura.

2 Compreender números racionais

Compreensão dos números racionais na continuidade dos números inteiros

A compreensão de números racionais é aqui enquadrada numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número (Brocardo, 2010; Castro & Rodrigues, 2008; McIntosh, Reys, & Reys, 1992), entendido como um conhecimento global dos números e operações, complementado com a capacidade de usar este conhecimento de forma flexível e crítica, desenvolvendo estratégias eficazes para lidar com os números e operações (McIntosh et al., 1992). O sentido de número desenvolve-se ao longo de todo o percurso escolar dos alunos, continuando a desenvolver-se ao longo de toda a vida, assumindo um papel central nos anos de escolaridade iniciais (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; Serrazina, 2002). Assim, e tal como referem McIntosh et al. (1992), o sentido de número constrói-se a partir dos conhecimentos dos números inteiros e desenvolve-se ao integrar conhecimentos dos números racionais.

A compreensão global de números e operações, tal como caracterizada por McIntosh et al. (1992), pode ser associada a conhecimento conceptual, entendido como o conhecimento de conceitos e operações, rico em relações (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; NCTM, 2014; Rittle-Johnson & Siegler, 1998; Skemp, 1976). O conhecimento conceptual é um conhecimento organizado num corpo coerente que permite aos alunos estabelecer relações entre ideias prévias e novas, o que se traduz em aprendizagem (Kilpatrick et al., 2001).

Desejavelmente, ancorado no conhecimento conceptual pode encontrar-se o conhecimento procedimental, constituído pelo conhecimento sobre protocolos de ações para resolver determinada situação, sendo caracterizado pelo uso de linguagem formal, algoritmos ou regras (Hiebert & Levefre, 1986; NCTM, 2014; Skemp, 1976). A relação entre o conhecimento conceptual e o conhecimento procedimental pode ser entendida como sendo bidirecional, isto é, um pode promover o desenvolvimento do outro, tal como referem Rittle-Johnson e Alibali (1999). Contudo, e como as autoras ressalvam, o conhecimento conceptual parece ter maior influência sobre o desenvolvimento do conhecimento procedimental do que o inverso. Assim, o conhecimento conceptual deve sustentar o conhecimento procedimental, e é com base na relação entre ambos que o conhecimento procedimental se torna realmente significativo, em oposição a um conhecimento isolado e desconectado do conhecimento conceptual dos alunos (Hiebert & Levefre, 1986). Tal como afirmam Abrantes et al. (1999) "Não basta aprender procedimentos: é necessário transformá-los em instrumentos de pensamento" (p. 46). Só quando o conhecimento procedimental assenta em conhecimento conceptual surge a fluência procedimental (NCTM, 2014), caracterizada pelo uso de procedimentos de forma eficaz, flexível e correta (Kilpatrick et al., 2001). Esta fluência procedimental remete para a capacidade de usar de forma flexível e crítica o conhecimento de números e operações e que leva ao desenvolvimento de estratégias de resolução eficazes, presente no entendimento de sentido de número assumido neste estudo (McIntosh et al., 1992).

Ao longo deste trabalho uso o termo compreensão associado ao conhecimento conceptual. Swan (2001) refere que este termo pode ser, incorretamente, associado a uma noção de compreensão como algo finalizado, algo que se atinge quando se reúne um conhecimento total ou completo sobre determinada ideia. Curiosamente, o autor usa a palavra portuguesa "aprender" para falar em compreensão, salientando que esta implica "agarrar" ou "prender" algo que, deste modo, passou a fazer parte do entendimento sobre determinada ideia, alterando o estado do conhecimento. Assim, compreensão está também associada a um sentido de transformação, sendo o termo "usado para descrever o estado do conhecimento quando nova informação matemática é devidamente relacionada ao conhecimento existente" (Hiebert & Lefevre, 1986, p. 4).

Desta forma, e numa perspetiva mais abrangente, a aprendizagem dos alunos caracteriza-se por uma transformação de conhecimento, e não como uma aquisição ou acomodação de conhecimentos de forma cumulativa (Greeno, Collins, & Resnick, 1996). Também o sentido de número se desenvolve com a evolução progressiva de ideias matemáticas e estabelecimento de relações (McIntosh et al., 1992), refletindo uma transformação do conceito de número pelos alunos.

A aprendizagem formal de números racionais possibilita o que Siegler et al. (2011) consideram ser a primeira grande oportunidade para os alunos compreenderem que as características que associam aos números inteiros não definem os números de um modo geral. Esta compreensão implica uma transformação do conceito de número pelos alunos, até então alicerçado nas suas experiências com números inteiros. Assim, a conceptualização de número pode ser descrita como dinâmica, em constante mudança e evolução (Swan, 2001), permeável às experiências que os alunos vão tendo com números pertencentes a diferentes conjuntos numéricos. A aprendizagem de números racionais pode ser assim perspetivada como um importante marco no desenvolvimento do sentido de número dos alunos.

O sentido de número desenvolvido pelos alunos até ao momento da aprendizagem formal de números racionais constitui-se como um corpo de conhecimentos que é convocado para dar sentido aos números racionais. Greeno et al. (1996) reconhecem neste corpo de conhecimentos prévios a base para o desenvolvimento de novo conhecimento, e acrescentam que devem ser encarados como ". . . um recurso essencial na aprendizagem dos alunos" (p. 18).

No entanto, a ideia de que os conhecimentos prévios dos alunos são essenciais para novas aprendizagens não é partilhada de igual forma na comunidade de investigação. Streefland (1991) refere a existência de *N-distractors*, entendidos como distratores que resultam da tendência em recorrer ao conhecimento relativo aos números inteiros aquando da aprendizagem dos números racionais. Esta tendência é designada por Ni e Zhou (2005) por enviesamento dos números inteiros (*whole number bias*) e entendida como um desvio sistemático do que é considerado norma. Por se poder revelar inadequado relativamente à aprendizagem dos números racionais, o conhecimento prévio é, por um lado, interpretado como incompatível com a aprendizagem (Posner, Strike, Hewson, & Gertzog, 1982), requerendo uma reorganização radical do conhecimento dos alunos (Stafylidou & Vosniadou, 2004). De acordo com esta perspetiva, o conhecimento relativo aos números inteiros é uma barreira à aprendizagem dos números racionais (Harnett & Gelman, 1998).

Por outro lado, e tal como Prediger (2006) sublinha, as diferenças entre o conhecimento dos alunos e o conhecimento esperado podem ser encaradas como fases necessárias no processo de reconstrução de conhecimento, e não como lacunas individuais. A autora enfatiza que a aprendizagem de números racionais deve ser pensada considerando não só as descontinuidades relativamente aos números inteiros, mas também as continuidades.

A teoria integrada de desenvolvimento numérico proposta por Siegler et al. (2011) vem reforçar uma perspetiva de continuidade entre a compreensão dos números inteiros e a dos números racionais. No cerne desta teoria está a noção de grandeza de um número, ou seja, o *tamanho* ou o *valor* de um número, convocada na comparação e ordenação de números no conjunto dos números racionais. Por se tratar de um conjunto ordenado (Caraça, 1998), os números pertencentes a este conjunto podem ser ordenados e localizados na reta numérica (Siegler & Braithwaite, 2017; Siegler et al., 2011). Desta forma, a noção de grandeza de um número assume-se como característica transversal ao conjunto dos números racionais e é apontada por vários autores como essencial na compreensão dos números racionais. Lamon (2007) refere que os alunos com sentido de número revelam um sentido intuitivo de grandeza dos números racionais. Também Clarke e Roche (2009) se referem à necessidade de desenvolver um sentido de grandeza, que designam por *feeling* para os números. Em investigações realizadas no âmbito do *Rational Number Project*, o reconhecimento da grandeza de um número racional é um dos aspetos que caracteriza o que Behr, Wachsmuth, Post e Lesh (1984) ou Post, Behr e Lesh (1986) designam por "noção quantitativa de número racional", que consideram essencial para a compreensão dos números racionais e onde também incluem o reconhecimento de que os números podem ser ordenados numa linha numérica. No estudo realizado por Torbeyns, Schneider, Xin e Siegler (2015), envolvendo alunos do 6.º e 8.º ano da Bélgica, China e Estados Unidos da América, foi identificada uma relação positiva entre o reconhecimento da grandeza de um número racional na representação em fração e um desempenho matemático geral considerado de nível superior entre os alunos dos três países. Apoiados nos resultados deste estudo, os autores destacam a importância da compreensão da noção de grandeza de um número racional aquando da abordagem aos números racionais.

Para além do foco do que é comum ao conjunto dos números racionais, a teoria integrada de desenvolvimento numérico enfatiza também o reconhecimento do que distingue os conjuntos numéricos (Siegler & Braithwaite, 2017; Siegler et al., 2011), como a propriedade densidade no conjunto dos números racionais. Uma ideia central desta teoria reside no entendimento de que possuímos uma reta numérica mental e dinâmica, gradualmente estendida de forma a representar números à medida que são abordados novos conjuntos numéricos, pertencentes ao conjunto dos números reais (Siegler & Braithwaite, 2017). Desta forma, a reta numérica mental é, inicialmente, estendida horizontalmente e para a direita à medida que os alunos vão compreendendo números inteiros progressivamente maiores, é também prolongada para a esquerda com a aprendizagem dos números inteiros negativos, e o espaço intersticial entre números inteiros é progressivamente atendido pelos alunos, que nele reconhecem a localização de números racionais (Siegler & Braithwaite, 2017).

Assim, e partindo do conhecimento de número até então construído, em torno do qual se começou a desenvolver o sentido de número, os alunos são chamados a reconhecer que algumas características válidas no conjunto dos números inteiros não são necessariamente válidas no conjunto dos números racionais.

Processos de raciocínio na compreensão de números racionais

É natural que os alunos recorram aos seus conhecimentos prévios para interpretarem números que ainda lhes são pouco familiares. Ao fazê-lo, nem sempre obtêm interpretações corretas. As extensões do conhecimento, realizadas pelos alunos, a novas situações são parte integrante da aprendizagem e evidência do desenvolvimento do conceito de número (Swan, 2001). As extensões de conhecimento podem ser entendidas como generalizações locais realizadas pelos alunos (Swan, 2001), evidenciando o seu envolvimento em processos de raciocínio matemático. Desta forma, permitem compreender que ideias matemáticas dos alunos desencadeiam tais generalizações (Lannin, Ellis, & Elliott, 2011).

O raciocínio matemático é entendido como o conjunto de processos através dos quais se constrói novo conhecimento a partir de conhecimento prévio (Oliveira, 2008). É "a essência da atividade matemática e sem raciocínio matemático não existe matemática" (Lannin et al., p. 7), pelo que compreender o raciocínio matemático dos alunos permite também compreender o conhecimento construído sobre números racionais. Os processos de raciocínio matemático dos alunos incluem a formulação de questões e estratégias de resolução, conjetura, generalização, teste e justificação de generalizações (Lannin et al., 2011; Mata-Pereira & Ponte, 2017).

A formulação de questões e estratégias de resolução (Mata-Pereira & Ponte, 2017) são processos de raciocínio particularmente importantes nos primeiros anos. Estas questões, específicas e gerais, apoiadas no conhecimento prévio dos alunos, podem levar à formulação e concretização de estratégias de resolução que, por sua vez, podem conduzir à construção ou desenvolvimento de conhecimento.

Conjeturar implica estabelecer relações matemáticas que conduzem a afirmações cuja veracidade não foi ainda estabelecida (Lannin et al., 2011; Mason, Burton, & Stacey, 2010). Estas afirmações são designadas por conjeturas e tratam-se de suposições informadas (NCTM, 2007), uma vez que emergem das relações estabelecidas pelos alunos. O processo de conjeturar pode levar os alunos a verificar ou refutar as conjeturas, levando-os a afastar-se de um caso particular para procurar semelhanças entre vários casos. Ao fazê-lo, as suas conjeturas inicialmente específicas, transformam-se em conjeturas gerais, ou seja, generalizações.

A generalização envolve estender o raciocínio dos casos particulares para padrões ou relações estabelecidas entre esses e outros casos (Kaput, 1999). Mason et al. (2010) descrevem as generalizações como vitais na Matemática, uma vez que, ainda que um olhar sobre casos particulares possa ser útil, a Matemática caracteriza-se por afirmações gerais, que abranjam classes de objetos (Mason et al., 2010; Mata-Pereira & Ponte, 2012). O envolvimento dos alunos em processos de generalização pode levá-los ao desenvolvimento de conceitos, símbolos e representações, em estreita relação com a comunicação usada na partilha de generalizações (Lannin et al., 2011; Mata-Pereira & Ponte, 2012). Tal como Ellis (2011) refere, a generalização é um processo socialmente situado, que é influenciado e influencia ações dos alunos e professores, tarefas e representações. Assim, a generalização é entendida num contexto sociomatemático específico, sendo neste estudo privilegiado um contexto em que os alunos têm um papel ativo na aprendizagem, construindo e partilhando as suas ideias matemáticas (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). A generalização pode ser entendida como uma atividade em que os alunos se envolvem em, pelo menos, uma de três ações: (i) identificação de semelhanças entre diferentes casos; (ii) extensão do raciocínio para além do domínio de que decorre; e (iii) obtenção de resultados gerais a partir de casos particulares (Ellis, 2011).

Desta forma, e de acordo com a segunda ação apontada por Ellis (2011), as extensões de conhecimento relativo aos números inteiros aos números racionais são entendidas como generalizações. Centro-me em três tipos de extensões de conhecimento relativas à generalização de condições para a comparação de números, que designo neste estudo por (i) *mais algarismos, maior grandeza*; (ii) *zero mais à esquerda*; e (iii) *mais algarismos, menor grandeza*.

A extensão *mais algarismos, maior grandeza*, muitas vezes identificada como *whole number rule* (e.g., Durkin & Rittle-Johnson, 2015; Resnick et al., 1989), emerge quando os alunos comparam números racionais usando as mesmas condições de comparação de números inteiros, especificamente que a grandeza de um número expresso por um numeral com maior número de algarismos é maior que a grandeza expressa por um numeral com menor número de algarismos. Esta extensão é identificada quando, por exemplo, os alunos consideram que 0,45 será maior que 0,7 uma vez que 45 é um número maior que 7.

A extensão *zero mais à esquerda* ocorre quando os alunos ignoram o valor de posição de zero quando colocado na ordem mais à esquerda da parte não inteira do numeral decimal, considerando, por exemplo, 0,05 como igual a 0,5. Este tipo de extensão resulta também do uso de conhecimentos relativos aos números inteiros, uma vez que com números inteiros o número expresso por 05 é igual a 5. Durkin e Rittle-Johnson (2015) incluem este tipo de extensão no que designam por *role of zero*, a par dos casos em que os alunos consideram que ao acrescentar zero na posição mais à direita do numeral irá aumentar a grandeza do número representado, indicando 0,30 como maior que 0,3. Neste estudo, entendo estes casos como ilustrativos da extensão do tipo *mais algarismos, maior grandeza*.

O terceiro tipo de extensão, *mais algarismos, menor grandeza*, é de natureza diferente das anteriores. Ocorre quando os alunos associam que quanto maior o número de algarismos na parte não inteira do numeral, menor será a grandeza do número, como na comparação entre 0,65 e 0,4 em que os alunos identificam que 0,65 representa uma grandeza menor que 0,4 uma vez que um numeral com centésimas será menor que um numeral com décimas. Este tipo de comparação é designado por Steinle (2004b) como *pensamento focado no denominador*, associado ao recurso de conhecimentos relativos a fração, uma vez que em frações com igual numerador, quanto maior o denominador menor será o número representado. Outros autores, como Resnick et al. (1989), também associam esta extensão ao uso de conhecimentos relativos a fração, designando este tipo de extensão como *fraction rule*. A realização desta extensão é habitualmente associada a alunos de países cujo currículo prevê iniciar a abordagem aos números racionais na representação em fração seguindo-se depois a representação em numeral decimal, como Estados Unidos da América ou Israel (e.g., Durkin & Rittle-Johnson, 2015; Nesher & Peled, 1986; Resnick et al., 1989; Steinle, 2004a). Também as orientações curriculares nacionais atuais preveem a mesma ordem a nível de representações de número racional, contudo, não identifiquei estudos nacionais que focassem este tipo de extensões de conhecimento.

De notar que vários estudos internacionais identificam a extensão *mais algarismos, menor grandeza* com maior incidência em anos de escolaridade mais avançados (Desmet et al., 2010; Nesher & Peled, 1986; Resnick et al., 1989; Steinle & Stacey, 2003), o que parece indicar que é uma extensão de conhecimento que ocorre após algum trabalho em torno de números racionais. Neste sentido, ao invés de ser um tipo de extensão diretamente relacionado com conhecimentos relativos à fração, é entendido neste estudo como associado à noção mais abrangente de conceptualização da unidade. Este tipo de extensão evidencia a ausência da coordenação entre unidade, número de partes em que esta é particionada e tamanho de cada uma das partes relativamente à unidade, essencial na interpretação de número racional, independentemente da representação que assuma. Tian e Siegler (2018) relacionam este tipo de extensão a conhecimentos relativos à representação em fração, mas também em numeral decimal, afirmando que o seu uso pode refletir um entendimento superficial da estrutura decimal, onde a partição de uma unidade num número de partes correspondente a uma potência de base 10 leva à constituição de unidades menores que a inicial.

A análise dos tipos de extensões de conhecimento realizados pelos alunos permite identificar mudanças na aprendizagem de números racionais (Desmet et al., 2010). Ao realizarem extensões de conhecimento, ou generalizações, os alunos tornam explícitas as suas ideias matemáticas e permitem que sejam analisadas e discutidas pelos colegas e professor (Carpenter & Franke, 2001). Confrey (1991) destaca que é nos momentos em que surgem conflitos que existe maior probabilidade de inferir sobre as ideias dos alunos. Assim, para além de ser necessário que os professores (re)conheçam extensões de conhecimento na aprendizagem de números racionais (Steinle, 2004b), é fundamental entendê-las como inerentes ao processo, devendo ser intencionalmente discutidas. Como Carpenter e Franke (2001) salientam, “o truque é encontrar problemas que forneçam um contexto que torne explícito o seu conhecimento implícito” (p. 156), tal como o uso de situações que sugiram extensões de conhecimento que levem a conclusões incorretas. Greeno et al. (1996) afirmam que o conhecimento dos alunos deve ser valorizado, mesmo que nem sempre seja válido, e destacam o seu envolvimento em discussões que impliquem a formulação de questões, conjeturas e justificação. Também Nicolaou e Pitta-Pantazi (2016) referem a importância de criar oportunidades em sala de aula para os alunos se envolverem em processos de raciocínio, uma vez que, no seu estudo realizado com alunos do 6.º ano, concluíram estarem associados a uma compreensão aprofundada de números racionais.

Na discussão de extensões de conhecimento, realizadas pelos alunos ou sugeridas através de tarefas, são criadas oportunidades para os alunos justificarem por que determinada situação é válida ou não. A justificação deve mostrar que a generalização realizada é válida em todos os casos possíveis, devidamente sustentada em relações matemáticas, implicando também a refutação de afirmações ou generalizações através, por exemplo, de contraexemplos (Lannin et al., 2011).

O processo de justificar implica recorrer a afirmações suficientemente convincentes não só para o próprio aluno, como para colegas e professor (Mason et al. 2010). Assim, é na interação social que os alunos legitimam a validade das justificações apresentadas (Yackel & Hanna, 2003), o que salienta a importância de uma cultura de sala de aula que privilegie normas sociomatemáticas que estabeleçam, por exemplo, o que torna uma justificação matematicamente válida ou aceitável (Yackel & Cobb, 1996). Deste modo, os processos de raciocínio matemático são entendidos neste estudo como socialmente situados, uma vez que a partilha e discussão entre os intervenientes da turma (alunos e professor) são promotoras do desenvolvimento de ideias matemáticas progressivamente mais complexas (Ponte, 2005; Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005).

Stylianides (2007) propõe dois princípios que permitem conceptualizar os processos de raciocínio matemático ao longo de diferentes níveis de ensino, sendo particularmente pertinentes nos primeiros anos: o princípio de honestidade-intelectual e o princípio de continuidade. O princípio de honestidade-intelectual refere-se ao entendimento dos processos de raciocínio tendo em conta não só o próprio entendimento de cada processo em si e o seu papel em Matemática, mas considerando também o conhecimento disponível aos alunos ao envolverem-se em processos de raciocínio (Stylianides, 2007). O segundo princípio diz respeito à continuidade que deve existir relativamente à conceptualização dos processos de raciocínio em diferentes anos de escolaridade, garantindo a coerência das experiências dos alunos nos diferentes processos, ao longo da sua escolaridade (Stylianides, 2007).

O envolvimento dos alunos em processos de raciocínio, bem como a sua partilha, acontece com o uso de representações. Duval (2000) refere mesmo que "Não há conhecimento sem representação" (p. 58). As representações são imprescindíveis para apoiar os processos de raciocínio (Greeno, 1991), mas é também ao aceder às representações e às ideias matemáticas nelas expressas que os alunos "ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (NCTM, 2007, p. 75). Deste modo, a compreensão dos processos de raciocínio matemático apenas se torna possível através da observação das representações usadas pelos alunos (NCTM, 2007).

Diferentes representações e suas transformações

O termo representação é entendido como uma configuração que expressa algo, podendo por isso assumir múltiplas formas (Duval, 2006; Goldin, 2003). As representações que podem ser observadas, designadas por representações externas (Goldin, 2003) podem ser idiossincráticas ou convencionais, escritas ou não. Seguindo a categorização de Bruner (1999), as representações podem ser ativas, icónicas e simbólicas. As representações ativas descrevem relações entre experiência e ações, referindo-se a ações sobre objetos ou gestos. As ideias podem ser expressas graficamente, através de representações icónicas. Nas representações simbólicas são manipulados símbolos abstratos que podem ser organizados em diferentes representações, tal como em numeral decimal, fração e percentagem. Nesta categoria está incluída a linguagem natural, oral ou escrita, contudo, nos primeiros anos de escolaridade, a linguagem natural é uma forma natural e intuitiva de representar ideias de modo pouco formal. Por este motivo, neste estudo, a linguagem natural é considerada como outra categoria de representações, tal como referido em Ponte e Serrazina (2000).

Todos os tipos de representações têm um papel importante na aprendizagem matemática (NCTM, 2007). Uma ideia central na aprendizagem matemática considerada neste estudo é de que a Matemática é uma atividade humana (Gravemeijer & Terwel, 2000; Freudenthal, 1991) que envolve um processo de organização matemática, ou seja, um processo de "tornar mais matemático", designado por Freudenthal (1991) por "matematização". Van den Heuvel-Panhuizen (2003) usa o termo "matematização progressiva", uma vez que este processo implica uma transição do mundo da realidade para o mundo dos símbolos, bem como um movimento no mundo dos símbolos. Desta forma, trata-se de um processo dinâmico, evolutivo e dependente do próprio aluno. Neste processo de matematização, as representações icónicas, cujas estruturas destacam determinadas ideias matemáticas, têm um papel central. Estas representações, entendidas como modelos, permitem estabelecer uma relação entre a realidade, criada em tarefas significativas para os alunos, e as ideias matemáticas envolvidas (Gravemeijer, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). À medida que os alunos progridem, também as representações usadas se vão tornando cada vez mais formais, conduzindo ao recurso, com compreensão, de diferentes representações simbólicas.

Uma representação não pode ser entendida como algo autossuficiente, uma vez que o seu significado surge na sua relação com várias ideias matemáticas integrantes de um sistema estruturado (Goldin & Shteingold, 2001). Sem a compreensão da ideia matemática expressa, a representação torna-se ininteligível (Ponte & Serrazina, 2000). McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen e Lehtinen (2015) referem que "a expansão de opções de representações de um número [racional] representa uma mudança fundamental de conceito de número" (p. 15), particularmente a nível de representações simbólicas, mudança esta habitualmente associada a dificuldades dos alunos na aprendizagem de números racionais (e.g., Barnett-Clarke et al., 2010).

No conjunto dos números inteiros, existe uma correspondência privilegiada entre *um* símbolo para *uma* grandeza numérica, no entanto, no conjunto dos números racionais existem vários símbolos que podem representar a mesma grandeza numérica, por exemplo, 0,2; $\frac{1}{5}$; 20%; ou ainda $\frac{2}{10} = \frac{4}{20} = \frac{8}{40} = \cdots$ (Prediger, 2006; Wang & Siegler, 2013). Diferentes representações realçam diferentes ideias matemáticas. Tal como Ponte e Serrazina (2000) afirmam, "o modo como as ideias matemáticas são representadas tem uma influência profunda na forma como elas são compreendidas e usadas" (p. 39). O uso de uma representação particular para estudar determinado objeto matemático pode comprometer a sua compreensão, uma vez que apenas destaca aspetos específicos desse objeto (Dreyfus & Eisenberg, 1996). Tripathi (2008) compara o uso de diferentes representações de um mesmo objeto ao olhar sobre o objeto através de uma variedade de lentes, em que cada uma fornece uma perspetiva diferente sobre o objeto. A autora refere que à medida que aumenta o número de perspetivas sobre o objeto, o conhecimento sobre este vai-se tornando mais rico e sólido.

O uso de múltiplas representações para expressar o mesmo objeto matemático promove o reconhecimento de que o objeto não pode ser confundido com a representação usada, assim como que um mesmo objeto pode ser identificado através de diferentes representações (Duval, 2006). O reconhecimento e uso de diferentes representações de números racionais é fundamental e evidencia uma integração de representações diferentes num mesmo conjunto numérico (Wang & Siegler, 2013). O uso de representações e o estabelecimento de relações entre elas é enfatizado por Post et al. (1993) que associam a compreensão de número racional à flexibilidade na transformação de e entre representações. Kilpatrick et al. (2001) referem ainda que "o grau de conhecimento conceptual dos alunos está relacionado com a riqueza e alcance das conexões realizadas" (p. 119). O movimento flexível entre representações é entendido por Duval (2006) como o centro da atividade matemática sendo distinguidos dois tipos de transformações no uso de representações: tratamentos e conversões.

Os tratamentos são transformações realizadas mantendo o registo da representação, evidentes quando, por exemplo, $\frac{1}{2}$ é transformado em $\frac{3}{6}$. Conversões são transformações entre representações diferentes, pertencentes a registos também diferentes, como no exemplo da transformação de $\frac{4}{5}$ em 0,8. Duval (2006) considera este tipo de transformação bastante mais complexo que os tratamentos, uma vez que implica o reconhecimento de um mesmo objeto, neste caso o número racional expresso em representações que diferem significativamente.

O estabelecimento de relações entre diferentes representações depende da própria compreensão dos alunos dos números expressos, como podem ser decompostos de forma a serem pensados de forma mais eficiente, como podem ser aproximados a números de referência, ou seja, a relação estabelecida entre representações está estreitamente associada ao sentido de número dos alunos. Desta forma, a flexibilidade revelada pelos alunos na transformação de e entre representações pode ser interpretada como indicador de sentido de número (Kilpatrick et al., 2001; Kalchman, Moss, & Case, 2001; Post, Wachsmuth, Lesh, & Behr, 1985). Como referem Post et al. (1985), trata-se de uma flexibilidade pensada, uma vez que caracteriza "a habilidade, perceção ou compreensão que a criança revela" (Post et al., 1985, p. 20) ao realizar as transformações de e entre representações. Deste modo, esta flexibilidade não caracteriza a mudança de 80% para 0,80 através de um conjunto de procedimentos que podem ser desprovidos de compreensão, como contar duas casas decimais da direita para a esquerda em 80% e colocar um zero e uma vírgula na posição mais à esquerda.

Número racional na representação em numeral decimal

A escrita de números racionais em numeral decimal decorre da extensão do sistema de numeração decimal usado na escrita de números inteiros. Trata-se de um sistema poderoso que permite, de forma bastante elegante, a escrita de uma expressão matemática que envolve uma complexa rede de relações (Ponte & Serrazina, 2000; Van Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Van Herpen, & Keijzer, 2008).

O prolongamento do funcionamento do sistema de numeração decimal ao conjunto dos números racionais, apesar de aparentemente simples, requer o estabelecimento de diferentes relações (Stacey, 2005). Este sistema é, nas palavras de Caraça (1998), "uma autêntica maravilha que permite, não só escrever muito simplesmente os números, como efetuar operações" (p. 6). De facto, o sistema de numeração decimal possibilita a tradução da expressão $2 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3}$ de forma simples, no numeral 28,651. Uma ideia-chave subjacente a esta representação é o valor de posição, ideia que distingue o numeral decimal de outras representações simbólicas de número racional como fração ou percentagem (Brocardo, 2010). Como Fosnot e Dolk (2002) afirmam, embora as crianças possuam um entendimento do valor de posição associado aos números inteiros, o prolongamento desta noção aos números racionais na representação em numeral decimal constitui um importante desafio.

O valor de posição associado a um algarismo traduz o número de unidades bem como a ordem que a unidade representa, por exemplo, no numeral 28,651, o algarismo 6 representa seis unidades correspondentes à ordem das décimas e o algarismo 5 representa cinco unidades correspondentes à ordem das centésimas. Neste estudo, centro-me essencialmente nesta estruturação de um número em grupos de unidades de base 10. Por este motivo, uso a expressão "estrutura decimal", e não "sistema de numeração decimal", uma vez que o entendimento do segundo inclui também convenções de escrita que, neste estudo, são menos relevantes.

A conceptualização da unidade é determinante para a compreensão da estrutura decimal, nomeadamente os processos de partição, unitização e reunitização. A partição implica a divisão da unidade num número de partes equivalentes (Lamon, 1996; Charalambos & Pitta-Pantazi, 2007), no caso do numeral decimal, numa quantidade correspondente a um número de base dez. A quantidade resultante da partição pode ser unitizada de diferentes formas, consoante a unidade de medida considerada (Baturo, 2004). Por exemplo, se a quantidade for gerada através de uma partição de um todo em 1000 partes iguais, pode ser unitizada como 1, se a unidade de medida corresponder a 1000 dessas partes ou como 10 se a unidade de medida corresponder a 100 partes.

Destaco o processo de reunitização realizado quando a mesma quantidade, unitizada usando determinada unidade de medida, é conceptualizada usando uma unidade de medida diferente. É um processo complexo, uma vez que implica a conceptualização de um número de formas diferentes (Baturo, 2000, 2004). Por exemplo, pensar no número representado por 0,01 como 1 décima de décima, 10 milésimas, ou ainda como 100 décimas de milésima. Por envolver a conceptualização de quantidades em unidades progressivamente mais complexas, a reunitização é considerada essencial para um raciocínio matemático mais sofisticado (Baturo, 2000; Lamon, 1996) e, consequentemente, para o desenvolvimento do sentido de número (Baturo & Cooper, 2000).

Baturo (1998) construiu um modelo onde identificou três níveis hierárquicos de conhecimento necessários para a compreensão de numerais decimais. A autora associa ao nível 1 as noções de posição, base e ordem, onde inclui o reconhecimento dos nomes e posições associadas no numeral, bem como por que ordem se identificam no numeral, o papel da vírgula e ainda o efeito de zero em diferentes posições. Baturo (1998, 2000) designa este nível por "conhecimentos base", por considerar que é a partir destes conhecimentos que os restantes se constroem. No nível 2, e decorrente na noção de base, a autora identifica a unitização e a equivalência, através dos quais uma quantidade é identificada de acordo com diferentes unidades. A autora denomina este nível por "conhecimentos de ligação", considerando que a unitização ou a equivalência, ou ambos, parecem ser necessários no nível seguinte. Por fim, o nível 3 é identificado como "conhecimentos estruturais", resultantes dos níveis anteriores. Neste terceiro nível encontra-se o reconhecimento da estrutura aditiva e multiplicativa do sistema de numeração decimal, onde se inclui o facto de se considerar a noção de valor de posição: (i) contínuo, uma vez que as unidades são de ordem menor aquando da leitura do numeral da esquerda para a direita, e de ordem maior quando a leitura é realizada da direita para a esquerda; (ii) bidirecional, pois na leitura da esquerda para a direita, as unidades tornam--se dez vezes menores ($\div 10$), e da direita para a esquerda, tornam-se dez vezes maiores, ($\times 10$); e (iii) exponencial, uma vez que as unidades se relacionam através de potências de base 10. É também no último nível que posiciona o processo de reunitização.

Este modelo possibilita uma análise bastante pormenorizada da representação decimal de número racional. Embora a compreensão de numeral decimal implique conhecimentos de níveis diferentes, neste estudo os níveis não são considerados como necessariamente hierárquicos. Do modelo proposto por Baturo (1998), centro-me essencialmente nos três tipos de reunitização identificados: partição, agrupamento e reagrupamento (Baturo, 1998, 2000; Baturo & Cooper, 1997).

A reunitização por partição implica a constituição de unidades menores (por exemplo, 5 décimas = 50 centésimas). A reunitização por agrupamento envolve a constituição de unidades maiores (por exemplo, 50 centésimas = 5 décimas). Por fim, a reunitização por reagrupamento refere-se à decomposição do número em que uma das parcelas é reunitizada de modo a gerar unidades menores (por exemplo, 5 décimas = 4 décimas + 10 centésimas). Estes três tipos de reunitização identificados por Baturo (1998, 2000) e por Baturo e Cooper (1997) constituem-se como tratamentos, tal como conceptualizados por Duval (2006), uma vez que implicam a transformação da representação do número mantendo a representação em numeral decimal.

Ao estender os diferentes tipos de reunitização a outras representações de número racional, como fração e percentagem, obtêm-se conversões na aceção de Duval (2006). Obtêm-se ainda dois tipos de tratamentos e conversões: envolvendo apenas uma representação ou uma composição de representações. Os tratamentos de representações em composições de representações refletem a transformação da representação implicando um processo de reunitização por reagrupamento, tal como descrita por Baturo (1998, 2000). Relativamente às conversões, ao envolverem composições de representações podem implicar relações aditivas ou multiplicativas.

Assim, podem ser considerados, por um lado, os processos de reunitização (partição, agrupamento e reagrupamento) e, por outro lado, os dois tipos de transformações no uso de representações (tratamentos e conversões). O cruzamento das duas perspetivas, que apresento na Tabela 1, possibilita a inferência sobre os conhecimentos que podem estar implícitos nas representações usadas.

Tabela 1.

Exemplos de representações categorizadas de acordo com processos de reunitização e tipos de transformações.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="4"></td><td colspan="5">Transformações de representações</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tratamentos</td><td colspan="3">Conversões</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Na mesma representação</td><td rowspan="2">Composição de representações</td><td rowspan="2">Entre representações</td><td colspan="2">Composição de representações</td></tr>
<tr><td>Relações aditivas</td><td>Relações multiplicativas</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Processos de reunitização</td><td>partição</td><td>0,6 = 0,60</td><td></td><td>0,6 = $\frac{60}{100}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>agrupamento</td><td>0,40 = 0,4</td><td></td><td>0,40 = $\frac{4}{10}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>reagrupamento</td><td></td><td>0,6=0,5+0,10</td><td></td><td>0,52 = $\frac{1}{2}$+0,02
ou
0,40 = 50%-0,1</td><td>0,4 = 4×10%
ou
0,01=$\frac{1}{10}$ × 0,1</td></tr>
</table>

Saliento que os exemplos usados na Tabela 1 não são completamente representativos do pensamento que lhes pode estar subjacente. Por exemplo, a transformação de 0,4 em 40% pode ser ilustrativa de uma conversão entre representações, envolvendo uma reunitização por partição. Neste caso, estará a assumir-se que a unidade de medida considerada em 0,4 é 1 unidade, e que esta unidade, através de partição, é transformada em 100%, convertendo-se a representação para 40%. No entanto, 0,4 pode ser associado a quatro vezes 1 décima, considerando como unidade 1 décima. Deste modo, e ao converter 0,4 em 40%, a unidade entendida como 1 décima ou 10% é mantida, sendo 40% considerado como quatro vezes 10%. Assim, esta conversão não implicaria uma reunitização por partição uma vez que a unidade de medida considerada não foi alterada. Os exemplos apresentados pretendem revelar a flexibilidade desejável no trabalho com números racionais e, apesar de envolverem números expressos, principalmente, na representação decimal, podem ser transpostos para outras representações.

A capacidade de constituir unidades progressivamente menores, essencial na compreensão do prolongamento do sistema de numeração decimal aos números racionais, implica também, indiretamente, a noção de densidade do conjunto dos números racionais. A compreensão de densidade envolve o reconhecimento de condições no conjunto dos números racionais que não se verificam no conjunto dos números inteiros. Os números inteiros expressam quantidades discretas (ou contáveis) que podem ser organizadas sequencialmente implicando a existência de um número sucessor e, consequentemente, a ausência de números inteiros entre quaisquer dois números inteiros consecutivos (McMullen et al., 2015; Ponte & Serrazina, 2000). Já os números racionais, suscitados pela necessidade de medir quantidades contínuas com progressivo rigor, constituem um conjunto denso. Neste conjunto numérico não se aplica o princípio do sucessor, uma vez que para cada número, não existe um único sucessor, mas sim infinitos números racionais entre quaisquer dois números racionais (Harnett & Gelman, 1998; McMullen et al., 2015; Monteiro & Pinto, 2005).

Associada à propriedade densidade, está a noção de infinito. Também esta noção é alargada no processo de aprendizagem dos números racionais, estando subjacente ao entendimento da reta numérica mental que é estendida à medida que o conceito de número é alargado, tal como proposto na teoria integrada de desenvolvimento numérico (Siegler et al., 2011). A noção de infinito começa por ser desenvolvida no conjunto dos números inteiros, entendido como constituído por infinitos elementos. Já no conjunto dos números racionais, esta noção relaciona-se com os infinitos elementos existentes num intervalo limitado por quaisquer dois números (inteiros ou racionais) (Hannula Pehknonen, Maijala, & Soro, 2006; McMullen et al., 2015; Wheeler, 1987). A noção de infinito revela-se complexa para os alunos, começando por ser reconhecida a existência de infinitos números inteiros e, posteriormente, o reconhecimento da densidade no conjunto dos números racionais (Hannula et al., 2006). Vários estudos evidenciam que alunos dos 1.º e 2.º ciclos não reconhecem a propriedade densidade no conjunto dos números racionais (e.g., McMullen et al., 2015; Smith, Solomon, & Carey, 2005). Também entre estudantes do ensino superior são identificadas dificuldades no reconhecimento desta propriedade (Giannakoulias, Souyoul, & Zachariades, 2007), incluindo entre futuros professores (Tirosh, Fischbein, Graeber, & Wilson, 1999).

O sistema de numeração decimal evidencia as duas perspetivas sobre a noção de infinito, refletindo que, por um lado, a contagem leva ao reconhecimento de que é possível obter números progressivamente maiores, sem qualquer limite. Por outro lado, permite a representação de números progressivamente menores que a unidade à medida que são realizadas sucessivas partições de uma determinada unidade, por menor que seja a sua ordem (Wheeler, 1987). Assim, o olhar que a representação decimal oferece sobre número racional pode contribuir para a compreensão da noção de densidade no conjunto dos números racionais.

É fundamental que as experiências dos alunos com números racionais na representação em numeral decimal contribuam para a compreensão da estrutura decimal subjacente. Como refere Serrazina (2002), ter sentido de número implica o reconhecimento de diferentes usos dos números devendo estes ser abordados na sua relação com diferentes contextos. Os contextos em que os números são usados devem ser significativos para os alunos (Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005) e cuidadosamente selecionados de acordo com a interpretação de número que se pretende privilegiar. Os números na representação em numeral decimal, fração ou percentagem assumem diferentes significados dependendo dos contextos envolvidos. Nos trabalhos desenvolvidos por Kieren (1976) e pela equipa do *Rational Number Project* (e.g., Behr et al., 1983; Behr, Harel, Post, & Lesh, 1992) são identificados cinco significados, ou subconstrutos, que devem ser compreendidos de forma interrelacionada: parte-todo, medida, quociente, operador e razão. Neste estudo, e considerando o seu foco no 1.º ciclo, centro-me nos significados parte-todo e medida, fundamentais na compreensão de números racionais na sua representação em numeral decimal (Baturo, 1998).

Behr et al. (1983) entendem o significado parte-todo como estando subjacente a todos os outros significados. Este significado implica um processo de partição de uma unidade ou um todo (Behr et al., 1983), assim como processos de unitização e reunitização, uma vez que envolve também a composição e recomposição das partes obtidas na unidade inicial (Baturo, 2004; Charalambos & Pitta-Pantazi, 2007). Destaca-se a importância da reconstrução da unidade, partindo de partes menores ou maiores que a unidade (Charalambos & Pitta-Pantazi, 2007; Cramer, Monson, Ahrendt, Wyberg, Pettis, & Fagerlund, 2018; Pitkethly & Hunting, 1996; Ponte & Quaresma, 2011b). Deste modo, os processos envolvidos na compreensão da estrutura decimal, anteriormente referidos, são necessários na compreensão do significado parte-todo. No que diz respeito ao numeral decimal, a especificidade está no número de partes em que a unidade é dividida, correspondente a potências de base 10, e na construção de novas unidades mantendo entre si uma relação expressa através de potências de base 10 (Behr & Post, 1992). Assim, destaca-se a importância da conceptualização da unidade na compreensão do significado parte-todo, sendo igualmente fundamental na compreensão dos restantes significados (Pitkethly & Hunting, 1996). Relacionado com a conceptualização da unidade está o reconhecimento de que quanto maior o número de partes em que a unidade se encontra dividida, menores serão as partes criadas, noção igualmente fundamental para a compreensão do significado parte-todo (Charalambos & Pitta-Pantazi, 2007). Esta noção encontra-se diretamente relacionada com a extensão de conhecimento *mais algarismos, menor grandeza* que pode ser realizada na comparação de números racionais na representação em numeral decimal, já referida.

De acordo com Behr et al. (1983), o significado de medida constitui-se como uma reconceptualização do significado parte-todo, uma vez que traduz a parte a considerar na sua relação com a unidade. A compreensão do significado de medida implica a partição da unidade de medida em partes iguais que se encontrem contidas um número inteiro de vezes na quantidade a medir (Monteiro & Pinto, 2005). Este processo de partição é continuamente realizado até esgotar a quantidade a medir, o que vem realçar a associação entre a compreensão do significado de medida e a noção de densidade no conjunto dos números racionais (Lamon, 2012). No caso do numeral decimal, podem ser realizadas partições sucessivas da unidade por 10, o que traduz um aumento progressivo de rigor na medida (Lamon, 2012; Van Galen et al., 2008). Por exemplo, a interpretação do numeral 0,64 no significado de medida, implica o reconhecimento que a unidade de medida, correspondente a 1, foi particionada em dez partes iguais (décimas). A décima é iterada seis vezes, sendo de seguida necessário realizar a sua partição em dez partes iguais. Criada a nova unidade de medida, a centésima, esta é iterada quatro vezes. Ao reunitizar a medida de acordo com a unidade de medida inicial (1), obtém-se 0,64.

Assim, a reta numérica surge naturalmente associada à interpretação do significado de medida, uma vez que permite a visibilidade e suporte a estes processos (Charalambos & Pitta-Pantazi, 2007; Keijzer, 2003). De realçar ainda que Charalambos e Pitta-Pantazi (2007) associam a este significado o reconhecimento do que designam por "personalidade quantitativa" da representação, ou seja, o reconhecimento de que a representação, quando interpretada no significado de medida, traduz o que neste estudo designo por grandeza de um número.

A diversificação dos contextos em que diferentes representações podem assumir significados diferentes é essencial na compreensão dos números racionais (Freudenthal, 1983; Lamon, 2007; Monteiro & Pinto, 2005). Como Freudenthal (1991) refere "Ver o contexto como barulho, que pode perturbar uma mensagem matemática clara, é errado; o contexto é em si próprio a mensagem, e a matemática um meio para a descodificar" (p. 75). É necessário proporcionar situações realistas que apelem à interpretação de representações num determinado significado e com sentido para os alunos. Desta forma, os alunos podem ser guiados num processo de matematização progressiva onde têm a oportunidade de construir e desenvolver as suas próprias ideias matemáticas (Freudenthal, 1991; Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005).

3 Considerações metodológicas

Uma Investigação Baseada em Design

Este estudo tem uma abordagem qualitativa e enquadra-se no paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994; Erickson, 1986; Merriam & Tisdell, 2016). Segue a modalidade de Investigação Baseada em Design (IBD) (Ponte, Carvalho, Mata-Pereira, & Quaresma, 2016), especificamente um tipo de IBD designada por Cobb, Jackson e Dunlap (2016) por estudo de design na sala de aula. A IBD assenta na perspetiva de que é necessário compreender as formas de aprendizagem de interesse para que seja possível promovê-las (Gravemeijer & Cobb, 2006). Assim, a IBD possibilita o estudo de novas formas de aprendizagem bem como o estudo de como as promover, considerando que são apoiadas e dependentes do sistema complexo que existe em sala de aula, que Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer e Schauble (2003) designam por “ecologia de aprendizagem”. A ecologia de aprendizagem é um sistema intrincado e volátil, passível de mudança com a alteração de apenas um dos elementos que o constituem (Brown, 1992; Cobb et al., 2003). Entre os elementos que constituem a ecologia de aprendizagem encontram-se as tarefas e outros recursos usados, a comunicação privilegiada, as normas de participação estabelecidas ou ainda o modo como são orquestradas as relações entre estes elementos (Cobb et al., 2003).

A IBD tem como propósito a conceção de ecologias de aprendizagem de modo a desenvolver uma teoria local através do estudo das formas de aprendizagem que essas ecologias de aprendizagem procuram suportar (Cobb et al., 2003; Gravemeijer & Cobb, 2013). Esta teoria local é, usando as palavras de Cobb et al. (2003), humilde, uma vez que é centrada num aspeto específico da aprendizagem, neste caso na compreensão de números racionais na representação em numeral decimal, num contexto também ele específico, uma turma onde o estudo é realizado (Bakker & Van Eerde, 2015). Ainda assim, deve ser suficientemente abrangente ou geral, de modo a fornecer orientações sobre como promover a aprendizagem dos alunos, noutros contextos e noutras salas de aula (Bakker & Van Eerde, 2015; Cobb et al., 2016).

É um estudo com carácter marcadamente intervencionista (Cobb et al., 2003; Cobb et al., 2016), uma vez que pretende estudar a compreensão de números racionais em numeral decimal através de uma intervenção desenhada para a promover. A intervenção é orientada por uma conjetura e um conjunto de princípios de design, sujeitos a revisões, e que constituem a teoria local. São estas revisões que permitem um refinamento da teoria local que se pretende desenvolver, e que decorre assim da própria prática no contexto de sala de aula (Barab & Squire, 2004). Deste modo, o desenvolvimento da teoria local é apoiado pela componente prática da investigação, resultando de um processo cumulativo de refinamento de ideias (Gravemeijer & Cobb, 2013). O contributo teórico da IBD toma forma num conjunto de princípios de design, apoiados em evidências empíricas, que podem informar adaptações a novos contextos.

Existe assim uma forte interdependência entre a componente teórica e prática. Por um lado, a base teórica que sustenta o estudo informou o design da intervenção realizada, sendo progressivamente adaptada ao longo da intervenção, através da comparação entre o que havia sido antecipado e o que foi efetivamente observado (Prediger, Gravemeijer, & Confrey, 2015). Desta forma, o refinamento da conjetura e princípios de design é o que Gravemeijer (1994) descreve sucintamente como um “. . . processo que é guiado pela teoria que cresce durante o processo” (p. 451).

Neste estudo, o processo de refinamento da conjetura ocorreu ao longo de um ciclo de design, constituído por três fases: (i) preparação do ciclo de design; (ii) intervenção (experimentação em sala de aula); e (iii) análise retrospetiva dos dados recolhidos (Cobb & Gravemeijer, 2008; Cobb et al., 2016; Gravemeijer & Cobb, 2006). A segunda fase do ciclo realizado, a intervenção, foi constituída por três microciclos (Figura 1). Cada um dos microciclos é igualmente constituído pela fase de preparação, intervenção e análise retrospetiva, que informou a preparação do microciclo seguinte.

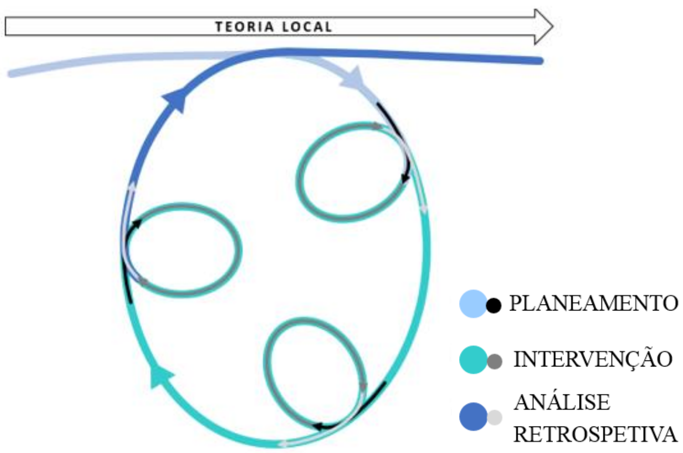


Figura 1. Esquema ilustrativo do ciclo de design, constituído por três microciclos.

Fase de preparação do ciclo de design

Os participantes. O estudo foi realizado na escola onde leciono, localizada em Lisboa. É uma escola de ensino particular e que abrange o ensino pré-escolar e todo o ensino básico. É frequentada por cerca de 700 alunos que, de um modo geral, pertencem a um meio socioeconómico médio-alto. No 1.º ciclo, existem duas turmas de cada ano de escolaridade, perfazendo um total de oito turmas neste ciclo do ensino básico.

Os participantes do estudo são 25 alunos de uma turma no 3.º e 4.º ano, constituída por 9 raparigas e 16 rapazes, a professora da turma e eu própria. A minha relação com os alunos iniciou-se quando estes frequentavam o 2.º ano, altura em que acompanhei o trabalho realizado na área de Matemática, uma vez por semana, em parceria com a professora titular. A parceria integrou uma prática iniciada na escola, em que todos os professores tinham um período semanal de 45 minutos para apoiar o trabalho dos alunos noutras turmas. Dada a relação já estabelecida com os alunos e o facto de irem então iniciar o estudo de números racionais na representação em numeral decimal, constituíram as razões porque propus à professora a participação neste estudo.

Até ao início da intervenção, a professora procurava promover a resolução de problemas, organizando a aula nos três momentos que caracterizam uma aula de abordagem exploratória. Contudo, reconhecia que, quando o fazia, o momento menos conseguido era o da discussão coletiva, sentindo-se insatisfeita por, por um lado, os alunos parecerem pouco motivados para a partilha e discussão de ideias e, por outro lado, nem sempre conseguir orquestrar o momento de discussão de forma a aprofundar a temática em estudo. Assim, a resolução de problemas acabava por não ser prática frequente na turma.

De entre os 25 alunos da turma, foram selecionados quatro para uma recolha e análise de dados mais detalhada. A seleção dos alunos contou com o auxílio da professora e seguiu os seguintes critérios: (i) igual número de raparigas e rapazes; (ii) resultados medianos no estudo diagnóstico realizado (apresentado de seguida); (iii) comunicação oral mediana; e (iv) desempenho académico em Matemática de nível "Médio". Com estes critérios procurei reunir um grupo de quatro alunos com um perfil que caracterizasse a maioria dos alunos da turma, embora sem pretender generalizar os resultados a todos os alunos.

A professora, aqui designada por Maria, é professora de 1.º ciclo, com 7 anos de serviço completos aquando da realização do estudo. Acompanhou a turma desde o 1.º ano. Maria sempre procurou melhorar a sua prática no ensino da Matemática, tendo aceite de imediato a proposta de participar neste estudo, ficando particularmente interessada por se tratar de um estudo centrado no ensino e aprendizagem dos números racionais, área em que sentia necessidade de melhorar a sua prática.

O estudo diagnóstico. Realizei um estudo diagnóstico na turma, no final do 2.º ano, constituído por seis tarefas resolvidas e discutidas na sala de aula. As tarefas foram planificadas de acordo com as orientações curriculares definidas para o 1.º e 2.º ano (ME, 2007), envolvendo também questões que trouxessem evidência de conhecimentos informais dos alunos sobre números racionais em representações que ainda não haviam sido abordadas formalmente em sala de aula, especificamente numeral decimal e percentagem. O estudo realizado permitiu identificar que, globalmente, os alunos (i) tinham algum conhecimento em torno de frações unitárias no significado parte-todo, embora com fragilidades em identificar o papel associado ao numerador e denominador; (ii) identificavam a unidade de referência com unidades contínuas com relativa facilidade; e (iii) reconheciam a existência de números representados em numeral decimal e em percentagem, havendo alguns alunos que relacionavam as representações $\frac{1}{2}$, 0,5 e 50%, embora sem serem ainda capazes de explicitar essas relações (Morais, Cerca, Quaresma, & Ponte, 2014).

Para além dos resultados obtidos relativamente ao conteúdo, o estudo diagnóstico permitiu também identificar que os alunos se envolveram ativamente na resolução das tarefas em pequenos grupos (de 2 ou 3 alunos). Por outro lado, eram pouco ou nada participativos nos momentos de discussão coletiva, apesar de serem constantemente chamados a intervir.

Os resultados do estudo diagnóstico permitiram assim definir que, na intervenção, seria importante privilegiar o uso de conhecimentos prévios dos alunos, de fração e percentagem, de modo a maximizar as relações entre representações estabelecidas, embora de forma ainda pouco sustentada, por parte de alguns alunos. Os resultados indicaram também a necessidade de promover um ambiente em sala de aula que privilegiasse momentos de trabalho autónomo em grupo e promovesse a participação ativa dos alunos principalmente no momento de discussão coletiva.

Após a realização do estudo diagnóstico, eu e a professora optámos por elaborar um guião de exploração para cada tarefa da intervenção, de modo a apoiar o trabalho da professora. Decidimos que este guião deveria incluir indicações relativas à organização dos alunos, aos objetivos da tarefa e sua relação com tarefas anteriores e posteriores. O guião incluía ainda sugestões para a exploração da tarefa e possíveis resoluções da mesma e antecipava dificuldades dos alunos.

Princípios de design e conjetura. Nesta fase de preparação do ciclo de design foram elaborados princípios de design, apoiados pela conceptualização teórica que sustenta o estudo (como discutido na secção anterior) sendo também considerados os resultados do estudo diagnóstico. Os princípios de design, norteadores da conjetura e da intervenção, foram: (1) usar tarefas cujo contexto apele ao uso de numerais decimais, nomeadamente nos seus significados de medida e parte-todo; (2) promover transformações entre numeral decimal e outras representações, enfatizando as suas relações; (3) promover o uso de representações que possam ser transformadas em modelos para pensar sobre numerais decimais; (4) apoiar o uso de conhecimentos prévios; (5) promover a discussão de extensões de conhecimento; e (6) estabelecer um ambiente de sala de aula onde os alunos são encorajados a participar e se sentem confiantes em partilhar e discutir as suas ideias matemáticas.

Partindo dos princípios de design elaborados, construí a seguinte conjetura inicial:

> *Os alunos constroem compreensão de número racional, em particular na sua representação em numeral decimal, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número, através de um percurso que (i) apoie o seu conhecimento prévio; (ii) envolva tarefas sequenciadas, não rotineiras, com contextos significativos; (iii) valorize o estabelecimento de relações entre diferentes representações de número racional; num ambiente de aprendizagem em que (iv) os alunos tenham um papel ativo; (v) seja privilegiado o trabalho em pequenos grupos; e (vi) se valorizem as discussões coletivas.*

Com base nos princípios de design e conjetura, foi delineado um percurso para o ensino e aprendizagem de números racionais em numeral decimal (Figura 2). O percurso era constituído por três fases que procuravam promover uma matematização progressiva de números racionais em numeral decimal. Contudo, importa referir que as três fases identificadas não devem ser entendidas como estanques, mas sim como três momentos que englobam um conjunto de ideias matemáticas pensadas como progressivamente complexas e dependentes da fase anterior.

Começaram por ser estruturadas tarefas sequenciadas que possibilitassem a modelação entre o contexto real sugerido pelas tarefas e a sua representação através de símbolos e, posteriormente, as tarefas centraram-se numa progressiva formalização de ideias matemáticas relativas a números racionais em numeral decimal, especificamente a nível da compreensão da estrutura decimal. Para apoiar a matematização, foi privilegiado o uso de representações com potencial para serem transformadas em modelos ao longo de todo o percurso.

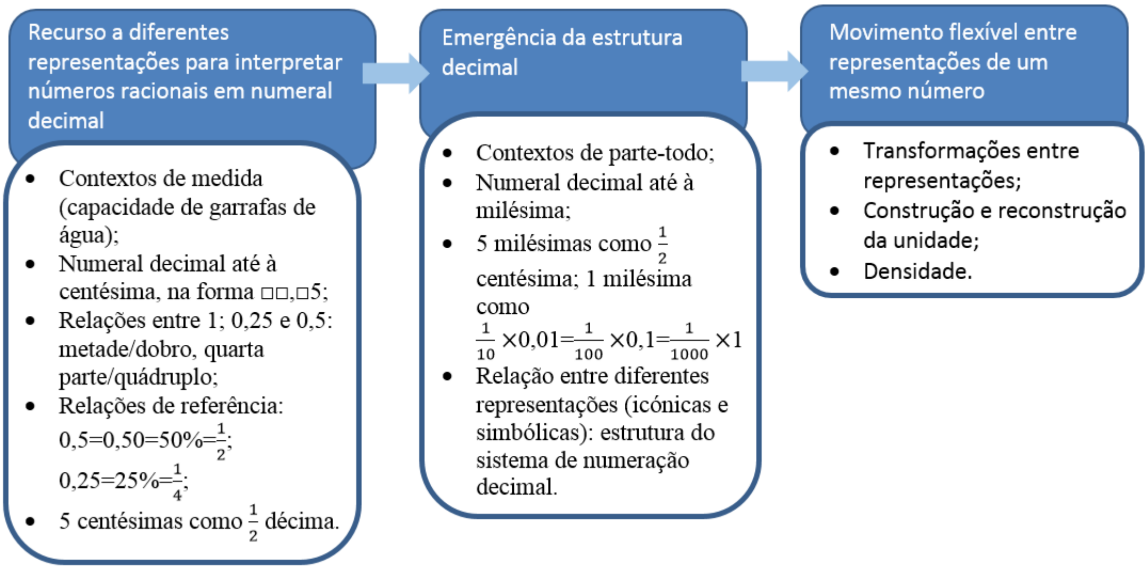


Figura 2. Percurso de ensino e aprendizagem delineado.

Assumindo ainda que os alunos devem ser guiados num processo de matematização progressiva, o percurso foi delineado de forma a provocar a necessidade de realizar divisões na unidade de medida, em contextos de medida significativos para os alunos, procurando criar a necessidade de usar números para identificar as partes obtidas relativamente às unidades consideradas. Numa segunda fase, foi contemplado o significado parte-todo em tarefas que procuravam explicitar as relações subjacentes à estrutura decimal. Por fim, numa terceira fase, foram previstas tarefas que promoviam a interpretação de números racionais nos significados de medida e parte-todo, privilegiando transformações entre diferentes representações, bem como um foco explícito na propriedade densidade no conjunto dos números racionais.

Fase de intervenção

Considerando o objetivo do estudo, centrado na compreensão de números racionais na representação em numeral decimal, o percurso delineado foi prolongado no tempo de forma a possibilitar uma recolha e documentação de mudanças relativamente à aprendizagem dos alunos (Prediger et al., 2015). A intervenção desenvolveu-se no 3.º e 4.º ano, envolvendo 18 tarefas que foram resolvidas em aulas geralmente de 90 minutos, num total de 16 semanas nos dois anos letivos. No 3.º ano foram realizadas 13 tarefas, entre fevereiro e junho de 2014. Entre fevereiro e abril do ano letivo seguinte, no 4.º ano, foram realizadas 5 tarefas e, em junho, foram feitas entrevistas individuais aos quatro alunos.

As tarefas foram elaboradas ou adaptadas por mim e apresentadas à professora da turma, analisadas e discutidas em reuniões conjuntas, sendo alteradas sempre que necessário. Tal como referido por Gravemeijer e Cobb (2006), a realização de reuniões com a professora, nomeadamente as que ocorreram imediatamente após as aulas, foram importantes para desenvolver interpretações partilhadas sobre o que havia acontecido em termos de trabalho dos alunos em sala de aula, tanto relativamente aos quatros alunos selecionados, como aos restantes alunos da turma. Foram igualmente importantes as reuniões mais longas, altura em que eram definidas adaptações ou alterações que era necessário realizar. O facto de a intervenção ter sido prolongada no tempo conduziu à necessidade de ir acompanhando o trabalho realizado pelos alunos nas aulas que não eram objeto do estudo. Nas reuniões conjuntas, a professora foi partilhando aspetos trabalhados pelos alunos fora dessas aulas bem como ideias que reconhecia serem produto do trabalho realizado na intervenção. Deste modo, procurei ir identificando possíveis influências na intervenção do trabalho realizado nas aulas fora da intervenção. Esta monitorização foi essencial de forma a compreender que os processos de aprendizagem dos alunos em análise foram promovidos pela intervenção realizada. É importante realçar que a intervenção marca o início do trabalho dos alunos em torno de números racionais na representação em numeral decimal. Nas aulas fora da intervenção, a partir de um momento próximo do final da segunda fase planeada, a professora abordou os números racionais na representação decimal nas suas aulas, essencialmente em situações de treino de algoritmos e de transformação de unidades de medida de comprimento e de massa. Nas suas aulas, a professora recorreu ainda aos modelos da reta numérica e da grelha 10×10 no apoio ao trabalho dos alunos.

Como já foi referido, as tarefas foram acompanhadas de um guião de exploração a que a professora recorria frequentemente durante as aulas. As aulas seguiram, na sua maioria, a organização de uma aula de abordagem exploratória em três momentos: momento inicial de lançamento da tarefa, seguido do momento de resolução da tarefa, geralmente realizada em pequenos grupos (de dois ou três alunos) e, por fim, o momento de discussão coletiva (Ponte, 2005). Participei nas diferentes fases da aula, sempre que considerei pertinente e, numa fase inicial da intervenção, assumi a dinamização dos momentos de discussão coletiva a pedido da professora. Contudo, à medida que a professora se foi apropriando do percurso delineado, foi assumindo a orquestração da discussão coletiva.

No final da intervenção, foi realizada uma entrevista individual aos quatro alunos selecionados, centrada em tarefas de representação, comparação e ordenação de números racionais, focando principalmente a representação em numeral decimal.

As três fases do percurso delineado apresentadas na Figura 2 relacionam-se com os três microciclos do ciclo de design (Figura 1), na medida em que foi pensado um momento de análise retrospetiva relativa a cada uma das fases planeadas de modo a realizar as adaptações necessárias na etapa seguinte, cuja implementação em sala de aula se concretizou no microciclo seguinte.

A recolha de dados. Considerando o objetivo do estudo bem como a modalidade de investigação seguida, foi necessário seguir vários processos de recolha de dados de modo a: (i) recolher múltiplas evidências que permitissem documentar a compreensão dos alunos relativamente à temática em estudo (Prediger et al., 2015); e (ii) conseguir captar as interações existentes numa sala de aula no seu ambiente natural (Bogdan & Biklen, 1994). A recolha de dados foi realizada por mim através de observação participante, apoiada por: (i) gravações áudio do trabalho realizado pelos quatro alunos selecionados e também das reuniões realizadas com a professora antes e após as aulas; (ii) gravações vídeo das aulas e das entrevistas individuais; (iii) recolha documental, apoiada por registo fotográfico, de produções dos alunos e registos realizados no quadro por alunos e pela professora; e (iv) notas de campo.

As reuniões realizadas com a professora foram audiogravadas de modo a poder ouvir as gravações para clarificar decisões tomadas relativas a alterações na intervenção ou interpretações partilhadas sobre episódios decorridos em sala de aula. Para as gravações áudio das aulas recorri a três gravadores. Ao longo da intervenção, foi mantido o grupo dos quatro alunos selecionados que iam mudando entre si a constituição dos pares de trabalho. Foi colocado um gravador áudio junto de cada par de alunos deste grupo, para que pudesse captar a discussão mantida entre eles, principalmente na fase resolução autónoma das tarefas, cuja análise seria fundamental para sustentar inferências sobre a compreensão de números racionais em representação decimal revelada pelos alunos em diferentes fases da intervenção. O terceiro gravador acompanhou a professora, de modo a captar a sua interação com os alunos da turma à medida que foi circulando pela sala de aula nos momentos de resolução autónoma. Desta forma, consegui recolher elementos que podiam complementar dados recolhidos através de gravação vídeo ou recolha documental.

Foi colocada uma câmara de filmar numa posição da sala de aula que permitiu captar, em primeiro plano, o grupo dos quatros alunos, assim como uma visão panorâmica da turma. A gravação vídeo tinha a intenção de captar gestos realizados pelos alunos e outros aspetos que a gravação áudio não permitia recolher, de forma a complementar a transcrição da gravação áudio. Uma vez que os gravadores junto dos quatro alunos e da professora impossibilitavam uma recolha com a qualidade necessária para fazer a transcrição dos momentos em grande grupo, estes foram também captados nas gravações vídeo das aulas. Nos momentos de discussão coletiva, manobrava a câmara de filmar de modo a garantir a recolha das participações dos alunos da turma e do trabalho realizado no quadro. As entrevistas individuais também foram videogravadas, de modo a permitirem a sua transcrição e posterior análise. Embora o uso de gravadores e câmara de vídeo tivessem sido, inicialmente, elementos distratores pois eram estranhos à sala de aula, rapidamente a sua presença passou a ser considerada normal pelos alunos.

A recolha documental dos registos realizados por todos os alunos teve a intenção de apoiar a análise de dados bem como evidenciar aspetos relativos ao trabalho realizado, relevantes para o estudo. Esta recolha foi complementada com registos fotográficos, realizados por mim durante as aulas, como forma de captar registos dos alunos antes de serem apagados ou alterados.

Ao longo das aulas, bem como no momento da entrevista final, elaborei notas de campo sobre episódios, registos ou mesmo expressões usadas que considerei particularmente revelantes, no sentido de orientar a sua posterior análise. Após a realização de cada aula, ainda no mesmo dia, elaborava um relatório mais detalhado sobre o desenrolar da aula onde destacava situações e sua interpretação, tendo como orientação as questões do estudo, e realizava a comparação entre o que havia sido antecipado, com base no guião de exploração de cada tarefa, e o que tinha acontecido em aula. As notas de campo incluíram também o registo das principais ideias discutidas com a professora na reunião após a aula.

Fase de análise retrospetiva

A análise de dados. Este estudo enquadra-se numa abordagem qualitativa, pelo que foi importante a realização de uma análise preliminar ao longo de todo o ciclo. Tal como referido por Merriam e Tisdell (2016), a análise preliminar, mesmo que pouco aprofundada, torna possível a realização de alterações de modo sustentado ao longo do estudo, aspeto particularmente pertinente numa IBD (e.g., Gravemeijer, 2004).

A análise preliminar realizou-se de modo contínuo, de aula para aula, provocando pequenos ajustes na intervenção; mas também entre as fases delineadas (apresentadas na Figura 2) altura em se antecipou um momento de análise retrospetiva, de modo a realizar as alterações necessárias na fase seguinte, dando origem aos três microciclos que constituem o ciclo de design.

Na interrupção de verão entre o 3.º e o 4.º ano, os dados até então recolhidos foram analisados de uma forma mais estruturada. Nesta fase, os dados foram analisados seguindo a ordem cronológica das tarefas na intervenção. Ouvi as gravações áudio dos quatro alunos, visualizei os excertos de momentos de discussão coletiva nas gravações vídeo, li as minhas notas de campo e os registos dos alunos. Esta análise permitiu identificar, de forma cronológica, alguns padrões e categorias gerais de análise.

Terminado o ciclo de design, seguiu-se a análise retrospetiva, realizada de forma aprofundada e sistemática. As gravações áudio das aulas relativas às discussões entre os quatro alunos foram transcritas assim como os excertos das gravações vídeo relativos a momentos de discussão coletiva. Estas transcrições foram complementadas com informações das notas de campo, registos dos alunos ou professora e, sempre que necessário, pelo registo áudio captado pelo gravador usado pela professora. Seguindo o processo de indução analítica (Goetz & LeCompte, 1984), os episódios de sala de aula e das entrevistas foram revistos com o objetivo de identificar categorias de análise emergentes dos dados. As categorias de análise foram sendo refinadas à medida que os episódios eram novamente lidos e que eram estabelecidas relações entre categorias, apoiadas pelo enquadramento teórico do estudo, num processo de comparação constante e de categorização em tipologias (Goetz & LeCompte, 1984). O processo de codificação dos dados foi apoiado pelo uso do *software* NVivo 11, de modo a garantir uma análise sistemática e rigorosa do avultado número de dados recolhidos. As categorias de análise, elaboradas nos respetivos artigos, centraram-se em: (i) extensões de conhecimento; (ii) processos de raciocínio; (iii) transformações de e entre representações; (iv) estrutura decimal; (v) grandeza de um número racional; e (vi) densidade no conjunto dos números racionais.

Partindo das categorias de análise definidas, a análise de dados teve ainda como objetivo sustentar a gramática argumentativa do estudo, tal como proposto por Cobb et al. (2016), procurando evidenciar: os processos de aprendizagem dos alunos na sua relação com os princípios de design orientadores da intervenção; mudanças sucessivas na compreensão dos alunos de números racionais na representação em numeral decimal; e os aspetos relativos ao ambiente de aprendizagem da turma que pareceram ter sido essenciais para promover essa compreensão.

Considerações éticas

Pelo facto de o estudo envolver a participação da professora e, em particular, de alunos menores de idade, foram vários os princípios éticos que procurei garantir (AERA, 2011; IE-ULisboa, 2016). Assim, foi obtido o consentimento informado do diretor da escola, da professora da turma e dos encarregados de educação dos alunos. Aquando do pedido do consentimento, foi clarificado que a participação no estudo seria voluntária, sendo disponibilizada informação sobre o objetivo do estudo; os processos de recolha de dados envolvidos, em particular o uso de gravação vídeo e áudio das aulas; os cuidados relativamente à proteção da identidade de todos os participantes, de modo a preservar o anonimato de alunos e professora; e ainda os meios previstos para disseminação do estudo. Foi garantido que os dados em formato digital (gravações áudio e vídeo) estariam apenas em minha posse, e disponibilizei o meu contacto para me endereçarem quaisquer questões. Também aos alunos foi sucintamente descrito o trabalho que iria ser desenvolvido, adaptando-se a linguagem à sua faixa etária, e de que forma se iriam recolher os dados.

É importante notar que o facto de ter realizado o estudo na escola onde leciono poderá comprometer o anonimato da escola, nomeadamente através da sua identificação associada à autoria de artigos ou outras formas de disseminação de resultados do estudo. Contudo, procurei minimizar esta limitação tomando todos os cuidados de modo a garantir o anonimato dos alunos e professora. Sempre que incluída informação caracterizadora da prática profissional da professora em documentos a divulgar à comunidade (como artigos ou o presente trabalho), e sem prejuízo do seu anonimato, a informação foi facultada à professora para que pudesse realizar as alterações ou omissões que sentisse necessárias.

Uma vez que o estudo implicou o envolvimento dos alunos e professora num percurso de ensino e aprendizagem que pode ser caracterizado como diferente do que habitualmente seria seguido, tomei todas as precauções de modo a garantir que, para além dos objetivos do percurso delineado, os objetivos de aprendizagem definidos nas orientações curriculares (ME, 2013) fossem atingidos.

Foram igualmente considerados princípios orientadores da minha conduta enquanto investigadora (AERA, 2011). A divulgação do estudo, na forma de artigos ou apresentações em encontros de investigação em Educação Matemática, sujeitou o trabalho à crítica da comunidade de investigação. Procurei desenvolver o estudo de forma transparente e o mais rigorosa possível, tratando com respeito todos os participantes.

4 Artigos

Os artigos nesta IBD

Este trabalho assenta em quatro artigos que resultaram da fase de análise retrospetiva do ciclo de design realizado. Cada artigo reúne um conjunto de dados, considerado mais relevante para o objetivo definido no artigo, e selecionado com a intenção de promover um olhar sobre diferentes momentos ao longo dos três microciclos que constituíram a intervenção. Os artigos III e IV incluem dados relativos a uma tarefa realizada no momento da entrevista individual, no final da intervenção.

Em cada artigo, a compreensão dos alunos dos números racionais na representação em numeral decimal é analisada tomando como orientação uma das questões de investigação. Do conjunto dos quatro artigos, resulta uma perspetiva global do objetivo do estudo e os quatro artigos permitem, na sua articulação, responder às questões de investigação.

De seguida, apresento sinteticamente os quatro artigos e, no final da secção, apresento qual a relação entre os artigos e como se relacionam com as questões de investigação.

Artigo I. Números racionais no 1.º ciclo: Compreensão de grandeza e densidade apoiada pelo uso de modelos

Autores: *Cristina Morais, Lurdes Serrazina e João Pedro da Ponte*
Publicado em: *Quadrante, vol. XXVII, n.º 1, 2018*

Numa perspetiva de desenvolvimento numérico integrado, a ampliação do conceito de número provocada pela aprendizagem inicial de números racionais passa pelo reconhecimento de características existentes no conjunto dos números inteiros e no conjunto dos números racionais, como a noção de grandeza de um número. Implica ainda o reconhecimento de características específicas de cada conjunto numérico, como a propriedade densidade do conjunto dos números racionais, inexistente no conjunto dos números inteiros.

Este artigo foca estas duas características consideradas basilares para a reconceptualização de número, a noção de grandeza de um número e a noção de densidade como propriedade do conjunto dos números racionais. Tem como objetivo compreender de que modo o uso de modelos contribui para a compreensão da: (i) noção de grandeza de um número racional; e (ii) densidade no conjunto dos números racionais.

No enquadramento teórico é ainda dada relevância às diferentes representações de número racional, entre as quais se focam representações icónicas, em particular as que podem ser transformadas em modelos, valorizadas na intervenção realizada.

São analisados episódios de sala de aula centrados em tarefas que envolvem o uso de diferentes modelos. Os dados são analisados focando o modo como o uso dos modelos contribuiu para a compreensão das noções de grandeza de um número e de densidade do conjunto dos números racionais, considerando um conjunto de indicadores de compreensão de número racional.

Os resultados mostram que o uso dos modelos, nos quais se centrou a análise, contribuiu para a compreensão da grandeza de um número, uma vez que promoveu a identificação da unidade de referência, a mudança de unidade (igualmente importante para a compreensão da propriedade densidade); o uso de diferentes representações para expressar um mesmo número; o recurso a números de referência; e o estabelecimento de relações de ordem. Relativamente aos contributos para a construção da propriedade densidade do conjunto dos números racionais, o artigo aponta para o reconhecimento da existência de um número racional entre dois números racionais, bem como da possibilidade de realizar progressivas divisões das unidades por 10, essenciais no sistema de numeração decimal.

Artigo II. Extensões de conhecimentos na construção da compreensão de numeral decimal

Autores: *Cristina Morais e Maria de Lurdes Serrazina*

Publicado em: *Bolema, vol. 32, n.º 61, 2018*

Este artigo centra-se em extensões de conhecimento dos alunos interpretadas como evidências do processo de mudança da sua conceptualização de número. As extensões de conhecimento ao conjunto dos números racionais, corretas ou não, são descritas como parte integrante da aprendizagem e, sugeridas através de situações pensadas para o efeito, oferecem oportunidades para os alunos refletirem sobre características do conjunto dos números racionais, que podem ser válidas ou não no conjunto dos números inteiros.

Neste sentido, o artigo tem como objetivo compreender que potencialidades têm situações que sugerem extensões de conhecimentos incorretas como meio para promover a construção da compreensão de numeral decimal.

A análise de dados centra-se na identificação de extensões de conhecimento realizadas pelos alunos, e nas suas justificações para a validação ou refutação das extensões de conhecimentos sugeridas pelas situações propostas, realizadas pelos próprios ou por colegas.

As conclusões do artigo remetem para as potencialidades do uso de situações que sugerem extensões de conhecimento incorretas a nível da compreensão de número racional, em numeral decimal, e também a nível do raciocínio matemático. Relativamente ao potencial para a compreensão de número racional, as situações propostas levaram os alunos a: (i) mobilizar modelos, como a reta numérica e as grelhas 10×10 e 10×100, facilitando a perceção da grandeza dos números de modo a compará-los, aspeto que enfatiza a grandeza enquanto característica comum ao conjunto dos números racionais; (ii) centrar a atenção na unidade considerada, transformando-a em unidades menores através da partição, contribuindo para a conceptualização da unidade, essencial na ampliação do conceito de número ao conjunto dos números racionais; e (iii) refletir sobre o valor de posição dos algarismos dos numerais, em particular de zero em diferentes posições na parte não inteira de numerais, contribuindo para uma perceção do funcionamento do sistema de numeração decimal que permite a representação de números inteiros e números racionais.

O tipo de situações propostas, aliada a uma valorização das interações sociais, revelou ter grande potencial no envolvimento dos alunos em processos de raciocínio matemático, em particular a justificação. Nos resultados apresentados, destaca-se o recurso dos alunos a contraexemplos para refutar a validade das justificações apresentadas pelos colegas ou sugeridas pelas situações propostas.

Artigo III. Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations

Autores: *Cristina Morais, Lurdes Serrazina e João Pedro da Ponte*

Publicado em: *Acta Scientiae, vol. 20, n.º 4, 2018*

Este artigo foca dois aspetos fundamentais para a atividade matemática: as transformações de e entre representações e o raciocínio matemático. Tem como objetivo compreender as transformações de e entre representações de números racionais realizadas por alunos e os seus processos de raciocínio.

O artigo elabora processos de raciocínio matemático, em particular a conjetura, generalização e justificação, à luz dos princípios de honestidade intelectual e continuidade, particularmente pertinentes para a compreensão de processos de raciocínio usados pelos alunos ao nível do 1.º ciclo. Destaca-se ainda a reorganização de dois tipos de transformações, tratamentos e conversões, conceptualizados como implicando a transformação de uma representação para outra (mantendo ou alterando o registo de representação) e a composição de representações (mantendo ou alterando o registo de representação), através de relações aditivas ou multiplicativas.

A análise de dados centra-se na identificação de processos de raciocínio realizados pelos alunos, bem como os tipos de transformações no uso de representações de número racional, de acordo com a reorganização apresentada.

De entre os tratamentos e conversões realizados pelos alunos, os resultados salientam as conversões envolvendo composições de representações através de relações multiplicativas. Este tipo de conversão revelou uma sólida conceptualização da unidade bem como coordenação de diferentes representações, indicadores de compreensão de número racional. Relativamente aos processos de raciocínio, os resultados apontam para o envolvimento dos alunos na formulação de estratégias de resolução, conjetura e justificação. Os resultados destacam também as interações sociais em sala de aula, fundamentais quer para a realização de transformações de e entre representações, apoiadas pelas transformações realizadas por colegas, quer no envolvimento em processos de raciocínio quando os alunos foram motivados a justificar, testar e validar as suas afirmações.

As conclusões do artigo remetem para uma relação intrincada e bidirecional entre a realização de transformações de representações e os processos de raciocínio dos alunos. Por um lado, a realização de transformações de representações levou os alunos a envolverem-se em processos de raciocínio e, por outro lado, as transformações foram realizadas para apoiar processos de raciocínio.

Artigo IV. A compreensão da estrutura da representação decimal de número racional por alunos do 3.º e 4.º ano

Autores: *Cristina Morais e Maria de Lurdes Serrazina*

Aceite para publicação em: *Boletim GEPEM*

O objetivo deste artigo é perceber como alunos do 1.º ciclo compreendem a estrutura subjacente à representação de número racional em numeral decimal e sua relação com outras representações.

A compreensão da estrutura decimal é caracterizada através de processos de partição, unitização e reunitização, fundamentais para a conceptualização da unidade. No processo de reunitização distinguem-se três tipos de estratégia: partição, agrupamento e reagrupamento através de relações aditivas e multiplicativas.

Na análise de dados são identificados os processos envolvidos na conceptualização da unidade e as representações convocadas pelos alunos no trabalho com numerais decimais.

Os resultados apontam que, numa fase inicial, as representações simbólicas, em particular a percentagem, foram mobilizadas pelos alunos para atribuir significado ao numeral decimal. Apoiando-se no uso de representações icónicas, os alunos realizaram maioritariamente reunitizações por partição, reconhecendo que as unidades do numeral, na leitura do numeral da esquerda para a direita, se tornam dez vezes menores. Numa fase posterior, e apoiando-se na estrutura decimal, os alunos realizaram a partição da unidade em cem partes iguais de modo a movimentarem-se de modo flexível entre a representação em numeral decimal, percentagem e fração. Os resultados mostram também que, nesta fase, os alunos reconheceram a possibilidade de realizar sucessivas partições por 10 das unidades não inteiras do numeral, noção essencial para a compreensão da propriedade densidade. Por fim, destaca-se que, ao revelarem compreensão da estrutura decimal, os alunos realizaram reunitizações por reagrupamento progressivamente mais complexas, envolvendo diferentes representações.

Relação entre os artigos e sua relação com as questões de investigação

Relação entre os artigos. No Artigo I, a compreensão de número racional em numeral decimal foi analisada considerando duas noções fundamentais na transição entre o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números racionais, a grandeza de um número e a densidade do conjunto dos números racionais, através do uso de modelos privilegiados na intervenção. Na transição entre os conjuntos numéricos ocorrem extensões de conhecimento do domínio dos números inteiros ao domínio dos números racionais. No Artigo II centrei-me nas extensões de conhecimento procurando compreender que potencial pode ter o uso de situações que as sugerem para a compreensão de número racional. As conclusões deste artigo salientaram o envolvimento dos alunos no processo de justificação e o recurso a diferentes representações de número racional para apoiar a justificação. Deste modo, no Artigo III focam-se processos de raciocínio matemático usados pelos alunos assim como a sua relação com as transformações realizadas de e entre representações. Por fim, no Artigo IV centrei-me especificamente na representação decimal de número racional, procurando destacar os processos implicados na compreensão de numeral decimal bem como os seus contributos para a compreensão de número racional.

Relação entre os artigos e as questões de investigação. O objetivo de cada artigo encontra-se relacionado com uma questão específica do estudo. No entanto, as conclusões dos artigos contribuem para a resposta às outras questões, ainda que com menor expressão.

O Artigo I visa contribuir diretamente para a resposta à primeira questão de investigação, uma vez que apresenta evidências da compreensão das noções de grandeza de um número racional e de densidade no conjunto dos números racionais, através de transformações de e entre representações promovidas pelo uso de modelos.

Os artigos II e III contribuem para a resposta à segunda questão de investigação. O Artigo II refere potencialidades de situações que sugerem extensões de conhecimento incorretas (ou generalizações) para a compreensão de número racional. Já o Artigo III relaciona os processos de raciocínio dos alunos com as transformações realizadas de e entre representações.

Por fim, o Artigo IV pretende responder à terceira questão de investigação, uma vez que os resultados mostram como os alunos compreendem a estrutura decimal subjacente ao numeral decimal e qual o seu contributo para a compreensão de número racional.

5 Discussão

Transformações a partir de numeral decimal para a compreensão dos números racionais

Transformações e grandeza de um número racional. Dois dos princípios de design que orientaram a intervenção visavam transformações de e entre representações, nomeadamente entre a representação em numeral decimal e outras representações simbólicas (princípio 2) e entre numeral decimal e representações icónicas com potencial para serem usadas como modelos pelos alunos (princípio 3). Revelaram-se ambos determinantes para a exploração em sala de aula, desde o início da intervenção, de transformações de e entre representações realizadas pelos alunos.

Os alunos começaram por realizar conversões entre a representação em numeral decimal e outras representações simbólicas de forma a terem uma perceção da grandeza do número expresso em numeral decimal (Artigo I; Artigo IV). Estas conversões apoiaram-se em conhecimentos prévios dos alunos sobre fração, designadamente das frações de referência como $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$, e, principalmente, em conhecimentos informais sobre percentagem, em particular 25%, 50%, 75% e 100%. A mobilização de conhecimentos prévios para apoiar a interpretação dos números racionais foi valorizada através do princípio de design 4, que se revelou fundamental nesta fase. O recurso à percentagem foi generalizado entre os alunos da turma e foi essencial para interpretarem a representação em numeral decimal, numa fase em que esta era ainda pouco familiar aos alunos, e também para mediar conversões entre numeral decimal e fração (e.g., Artigo III, p. 141).

O facto de a escrita em numeral decimal e percentagem incluir uma componente numérica escrita de acordo com o sistema de numeração decimal usado para representar números inteiros (por exemplo, 0,75; 75%, 75), foi facilitador das conversões realizadas. Os alunos associaram a unidade, ou o todo, a 100%, o que lhes permitiu recorrer a números inteiros para expressar a parte considerada dessa unidade. Desta forma, os alunos começaram a desenvolver uma noção da natureza relacional do número racional, apoiando-se no conhecimento relativo aos números inteiros. Esta noção, ainda bastante intuitiva, contribuiu também para que construíssem alguma perceção da grandeza dos números racionais.

Embora alguns autores apontem que os conhecimentos dos números inteiros interferem negativamente na aprendizagem dos números racionais (e.g., Vamvakoussi et al., 2012), este estudo afasta-se desta perspetiva, assumindo uma perspetiva idêntica à que surge nos estudos de Moss e Case (1999) e Hunter e Anthony (2003) e, a nível nacional, de Guerreiro, Serrazina e Ponte (2018) que apresentam o conhecimento dos números inteiros como facilitador de uma abordagem inicial aos números racionais, apoiando uma interpretação dos números racionais enquanto medida de uma parte na relação com uma unidade também ela entendida como número inteiro.

Destacam-se também as conversões realizadas entre numeral decimal e representações icónicas, em particular a reta numérica e as grelhas 10×10 e 10×100. A reta numérica assumiu um papel central na intervenção. Foi o modelo privilegiado numa fase inicial ligado a contextos que promoviam uma interpretação dos números racionais no significado de medida (visado pelo princípio 1). Tal como referem Siegler et al. (2011), a posição de um número racional na reta numérica traduz a medida da parte a considerar relativamente à unidade, enfatizando assim que a grandeza de um número racional assume uma determinada posição na reta numérica. No presente estudo, o recurso à reta numérica apoiou a compreensão da noção de grandeza de um número racional e, consequentemente, a comparação de números (Artigo I). Por exemplo, o número expresso por 0,25, correspondendo a metade de 0,5, foi compreendido como situado na posição correspondente a metade da medida entre 0 e 0,5 (Artigo I, p. 95). Reforça-se assim a medida como um significado a privilegiar na abordagem inicial aos números racionais, tal como igualmente referido por Keijzer (2003) e Lamon (2012).

Como afirmam, por exemplo, Bay (2001) e Clarke, Roche e Mitchell (2008), a reta numérica permitiu a integração de números inteiros e números racionais, salientando uma perspetiva de continuidade entre os conjuntos (Artigo I). Este modelo apoiou também conversões entre representações simbólicas dos números racionais (Artigo IV), o que contribuiu para a associação de diferentes representações a números racionais, importante para o seu reconhecimento enquanto representações de números pertencentes ao mesmo conjunto numérico (Wang & Siegler, 2013).

Os tratamentos e conversões apoiados nas grelhas 10×10 e 10×100 foram igualmente importantes para o reconhecimento da grandeza de um número racional em numeral decimal. O recurso aos modelos que privilegiavam a interpretação dos números racionais no significado parte-todo (também contemplado no princípio 1) (Artigo I) permitiu a construção de relações de base 10, subjacentes à estrutura decimal, em particular processos de reunitização por partição e agrupamento (Artigo IV). A grelha 10×100 possibilitou a visualização da milésima parte da unidade (Artigo I), não explícita na grelha 10×10, promovendo o reconhecimento pelos alunos da possibilidade de se realizarem partições sucessivas de unidades. A realização de tratamentos pelos alunos parece assim ter resultado da compreensão da relação entre unidades que caracteriza a estrutura decimal.

Como afirmam Cramer, Monson, Wyberg, Leavitt e Whitney (2009) e Cramer, Monson, Ahrendt, Colum, Wiley e Wyberg (2015), o recurso a modelos permitiu aos alunos comparar números racionais na representação em numeral decimal (e.g., Artigo I, pp. 98-99) e a reconhecer a sua equivalência (e.g., Artigo I, p. 99). Desta forma, a mobilização de modelos foi essencial para a compreensão dos números racionais em numeral decimal uma vez que, como afirmam Cramer et al. (2015), permitiu iluminar a estrutura decimal subjacente a esta representação.

A compreensão da estrutura decimal, promovida por tratamentos e conversões, levou os alunos a realizarem transformações progressivamente mais complexas (Artigo IV). Destacam-se as conversões em composições de representações através de relações aditivas e multiplicativas, envolvendo reunitizações por reagrupamento (Artigo III, Artigo IV). Este tipo de conversão é bastante complexo e ilustra vários aspetos considerados por diversos autores como evidência de compreensão dos números racionais: (i) mudam a unidade de referência conforme necessário (Baturo, 2000; Lamon, 1996); (ii) têm um sistema de números de referência no qual se apoiam para estabelecer relações de ordem (Behr et al., 1984; McIntosh, et al., 1992); e (iii) selecionam e coordenam diferentes representações de modo flexível (McIntosh et al., 1992; Duval, 2006; Post et al., 1993), refletindo que reconhecem diferentes representações dos números racionais como representações de números que integram um mesmo conjunto numérico (Owens & Super, 1993; Wang & Siegler, 2013).

Transformações e densidade no conjunto dos números racionais. Após revelarem noção de grandeza de um número, os alunos evidenciaram reconhecer a existência da propriedade densidade no conjunto dos números racionais (Artigo I), resultado que vai ao encontro de estudos como os realizados por Nicolaou e Pitta-Pantazi

(2016), McMullen et al. (2015) e Van Hoof, Degrande, Ceulemans, Verschaffel e Van Dooren (2018).

As conversões entre numeral decimal e representações icónicas permitiram aos alunos considerar a possibilidade da existência de, pelo menos, um número entre dois números racionais (Artigo I). Destacam-se, novamente, os modelos da reta numérica e das grelhas 10×10 e 10×100 por apoiarem sucessivas partições das unidades e que levaram os alunos a considerar que as poderiam realizar interminavelmente (e.g., Artigo IV, p. 165).

A progressiva flexibilidade revelada pelos alunos nos tratamentos e conversões de representações constituiu ainda um contributo para a construção da propriedade densidade no conjunto dos números racionais. Ao realizarem este tipo de transformações de representações, os alunos reconheceram a existência de números racionais entre dois números racionais, independentemente da sua representação (Artigo IV). Estes resultados contrariam estudos realizados com alunos com idades compreendidas entre os 12 e os 16 anos (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Vamvakoussi, Christou, Mertens, & Van Dooren, 2011) que, apesar de reconhecerem a existência de números num determinado intervalo, não dissociam o número da sua representação, considerando que, por exemplo, num intervalo delimitado por dois números representados em numeral decimal, apenas existem números representados desta forma. O presente estudo mostra que, mesmo numa fase inicial da aprendizagem dos números racionais, os alunos são capazes de começar a considerar a densidade no conjunto dos números racionais. Em particular, quando as situações propostas aos alunos proporcionam a realização de partições sucessivas e representação das unidades bem como o estabelecimento de relações entre as unidades criadas.

Processos de raciocínio mobilizados a partir de numeral decimal

Generalização na comparação de números racionais. A generalização envolve o prolongamento do raciocínio para além de um certo domínio (Ellis, 2011). Neste sentido, as extensões de conhecimento realizadas pelos alunos quando compararam números racionais na representação em numeral decimal são consideradas generalizações. Uma vez que as generalizações emergem das relações matemáticas estabelecidas pelos alunos (Lannin et al., 2011), a análise do tipo de extensões de conhecimento realizadas por eles possibilita uma inferência sobre o conhecimento que lhes parece estar subjacente.

Numa fase inicial, os alunos procuraram generalizar ao conjunto dos números racionais condições válidas no conjunto dos números inteiros, evidentes nas extensões de conhecimento usadas. O facto de terem sido identificadas inicialmente as extensões *mais algarismos, maior grandeza* (Artigo III; Artigo IV) e *zero mais à esquerda* (Artigo II; Artigo IV), é revelador da tentativa de generalização de condições para comparação de números. Nos estudos realizados por Desmet et al. (2010) ou Durkin e Rittle-Johnson (2015), os alunos associam que o algarismo zero, quando acrescentado na posição mais à direita da parte não inteira do decimal, torna maior a grandeza do número representado (por exemplo, 0,80 > 0,8). Desmet et al. (2010) referem que, para alunos do 5.º ano, é mais difícil interpretar o valor de zero nesta posição do que quando se encontra imediatamente à direita da vírgula. Os resultados deste estudo não confirmam este resultado, antes mostram que os alunos começaram por interpretar que zero, quando situado na posição mais à direita da parte não inteira do numeral, não representa alteração do número representado. Tal parece dever-se às conversões realizadas pelos alunos desde o início da intervenção, nomeadamente entre numeral decimal e percentagem (Artigo IV) e entre numeral decimal e representações icónicas, como a grelha 10×10 (Artigo I).

Numa fase posterior, identificou-se a extensão *mais algarismos, menor grandeza* (Artigo II; Artigo III). Este tipo de extensão de conhecimento parece refletir uma mudança na conceptualização de número pelos alunos, especificamente na relação entre a unidade considerada e as partes resultantes da sua partição. Tal como referem Tian e Siegler (2018), este tipo de extensão evidencia também um entendimento inicial da estrutura decimal estendida ao conjunto dos números racionais, pois os alunos relacionam a décima a uma parte maior da unidade, quando comparada com a centésima ou a milésima, concluindo que um numeral com centésimas ou milésimas será sempre menor que um numeral constituído por décimas (Artigo II; Artigo III). Quer o tipo de extensões identificadas ao longo da intervenção, quer o facto de terem sido identificadas inicialmente as extensões *mais algarismos, maior grandeza* e *zero mais à esquerda*; e posteriormente a extensão *mais algarismos, menor grandeza*, vai ao encontro de estudos como os realizados por Stacey (2005) e Durkin e Rittle-Johnson (2015), com alunos dos 1.º e 2.º ciclos, e também com alunos no ensino secundário.

Sendo extensões de conhecimento expectáveis numa fase inicial da aprendizagem dos números racionais, importa discutir o modo como a podem integrar e apoiar. O princípio de design 5 visava a valorização da discussão de extensões de conhecimento, usadas pelos alunos ou sugeridas pelas tarefas propostas. Neste sentido, os mesmos tipos de extensões de conhecimento realizados pelos alunos foram discutidos a partir de tarefas que sugeriam a sua utilização, o que desencadeou o envolvimento dos alunos no processo de justificação.

Justificação na comparação de números racionais. Ao serem chamados a posicionar-se perante situações que sugeriam extensões de conhecimento, os alunos envolveram-se em processos de raciocínio matemático, em particular a justificação, recorrendo ao uso de contraexemplos para as refutar (Artigo II, pp. 126-127; Artigo III, p. 144). Desta forma, e tal como referido por Große e Renkl (2007) e Siegler (2002), o conflito gerado pelas extensões de conhecimento em foco nas tarefas levou os alunos a justificarem a sua posição. O envolvimento no processo de justificação impeliu os alunos a reconhecer as suas próprias justificações como inválidas, podendo constituir evidências de reconceptualização de ideias matemáticas (e.g., Artigo I, p. 95; Artigo II, p. 124).

A integração da discussão de extensões de conhecimento foi fundamental para a compreensão da noção de grandeza de um número e, consequentemente, para a compreensão do número racional. No sentido de validar ou não a extensão de conhecimento em discussão, os alunos recorreram à transformação de representações, nomeadamente usando modelos (Artigo II), o que é interpretado por Post et al. (1993) como indicador de compreensão do número racional e, numa perspetiva mais abrangente, de sentido de número (McIntosh et al., 1992). Os alunos envolveram-se também em discussões em torno da unidade de referência e da mudança da unidade considerada como referência (Artigo II), essencial na compreensão dos números racionais (Lamon, 1996; Monteiro & Pinto, 2005). Foi ainda possível identificar que a discussão em torno de extensões de conhecimento promoveu a compreensão do valor de posição, noção basilar da representação dos números racionais em numeral decimal, em particular do algarismo zero situado em diferentes posições em numerais decimais (Artigo II).

As transformações de e entre representações (valorizadas nos princípios 2 e 3) assumiram um papel central na discussão de extensões de conhecimento. O estudo realizado apresenta evidências de que a realização de transformações e os processos de raciocínio se encontram bidireccionalmente relacionados (Artigo III). Por um lado, as transformações entre representações foram realizadas pelos alunos como forma de validar, ou não, as suas conjeturas e generalizações. Por exemplo, a extensão de conhecimento *zero mais à esquerda* foi refutada a partir de transformações do tipo tratamento (Artigo III) e conversões entre representações simbólicas e icónicas (Artigo II); a *extensão mais algarismos, maior grandeza* foi refutada através de conversões entre representações simbólicas e icónicas (Artigo I; Artigo II) e entre percentagem, fração e numeral decimal (Artigo III); a extensão de conhecimento *mais algarismos, menor grandeza* foi invalidada a partir de conversões realizadas entre representações simbólicas e icónicas (Artigo II; Artigo III).

Por outro lado, a realização de transformações de representações levou ao envolvimento dos alunos em processos de raciocínio, como a formulação de estratégias de resolução e a justificação e teste de generalizações (Artigo III). Importa destacar que à medida que os alunos foram construindo a compreensão dos números racionais e se envolveram em processos de raciocínio, foram revelando um progressivo sentido crítico perante as afirmações apresentadas para validar ou refutar uma generalização, reconhecendo a necessidade de que a justificação teria de verificar-se para todos os casos possíveis (Artigo III). Desta forma, e tal como Whitenack e Yackel (2008) referem, o envolvimento em processos de justificação, para além de promover uma compreensão mais aprofundada sobre as ideias envolvidas, levou também ao desenvolvimento de novas ideias, fundamental para o desenvolvimento do seu conhecimento conceptual (Kilpatrick et al., 2001; Lannin et al., 2011).

Destaca-se a importância das interações sociais, valorizadas pelo princípio 6, quer nas transformações de representações quer nos processos de raciocínio em que os alunos se envolveram. A partilha do modo como foram realizadas transformações de e entre representações levou outros alunos a estabelecer relações entre representações (Artigo III), revelando assim a importância da discussão coletiva como momento privilegiado para a construção conjunta de relações entre ideias matemáticas.

Também os processos de raciocínio matemático foram incentivados pelas interações sociais (Artigo III). À semelhança do que tem vindo a ser evidenciado em estudos realizados com alunos de outras faixas etárias (e.g., Henriques & Ponte, 2014; Segurado & Ponte, 1998), ao realizarem conjeturas e generalizações, os alunos não se envolveram autonomamente em processos de teste e/ou justificação. Contudo, no trabalho em pequenos grupos ou na discussão em coletivo, os alunos foram chamados a justificar as suas afirmações, tanto pelos colegas como pela professora e pela investigadora (Artigo III). As interações aluno-aluno e professor-aluno foram essenciais enquanto promotoras de conflitos (Artigo II; Artigo III). Tal como afirma Ellis (2011), o próprio ato de partilhar conjeturas e generalizações, criou um espaço para os alunos reagirem, aceitando-as ou não, permitindo o seu refinamento e a construção de ideias matemáticas robustas.

Os alunos foram assim desafiados a envolver-se em processos de justificação e teste de generalizações e, em conjunto com os restantes elementos da turma, estabeleceram relações entre ideias matemáticas desenvolvendo o seu conhecimento matemático. Os alunos revelaram uma necessidade crescente de justificar ou pedir a justificação para validar generalizações apresentadas, em todos os casos possíveis (Lannin et al., 2011), sendo construída a noção do que torna determinada afirmação matematicamente válida (Yackel & Cobb, 1996).

Os resultados sublinham ainda, o papel fundamental das interações sociais não só a nível da generalização, como refere Ellis (2011), mas também no envolvimento dos alunos em outros processos de raciocínio, como a justificação e teste de conjeturas. Este estudo vem reforçar que é possível e, acima de tudo, desejável que os alunos desde os primeiros anos se envolvam em processos de raciocínio matemático, entendidos à luz dos princípios de honestidade-intelectual e de continuidade (Stylianides, 2007), uma vez que se revelam essenciais para a construção da compreensão dos números racionais. O envolvimento dos alunos em processos de raciocínio matemático, desencadeados em discussões de extensões de conhecimento incorretas, a par da realização de transformações de e entre representações, promoveu o envolvimento dos alunos em discussões matematicamente poderosas.

Em síntese, apesar de existir a perspetiva de que as extensões de conhecimento incorretas realizadas pelos alunos são uma barreira na aprendizagem dos números racionais (e.g., Harnett & Gelman, 1998; Stafylidou & Vosniadou, 2004), os resultados deste estudo revelam que podem ter um papel de destaque nessa aprendizagem, criando oportunidades para os alunos transformarem o seu conceito de número (e.g., Booth, Lange, Koedinger, & Newton, 2013; Borasi, 1994; Swan, 2001).

De notar ainda que as tarefas que sugeriam determinadas extensões de conhecimento, propostas ao longo da intervenção, foram selecionadas com a intenção de focar a discussão em extensões realizadas pelos próprios alunos. Esta decisão foi fundamental para maximizar o potencial das tarefas, tal como em Große e Renkl (2007) ou Tsovaltzi, Melis, McLaren, Meyer, Dietrich e Goguadze (2010) que destacam que o potencial deste tipo de situações está no facto de os alunos as resolverem na altura mais adequada do processo de aprendizagem e com a abordagem correta. Assim, o início da aprendizagem formal dos números racionais é marcado por várias oportunidades para explorar situações em torno da comparação de números. Também, a necessidade de ter uma noção de grandeza de número é, desde o início, revelada pelos alunos, conduzindo-os a processos de generalização e justificação.

Tal como o presente estudo mostra, a discussão da validade das justificações apresentadas pelos alunos, centradas nos motivos que tornam incorretas determinadas extensões de conhecimento, é crucial para a construção de compreensão dos números racionais. Nestes processos, foram igualmente importantes os tratamentos e conversões realizados pelos alunos, que apoiaram mas também provocaram processos de raciocínio da sua parte. As transformações no uso de representações constituíram-se como uma janela sobre a compreensão dos números racionais pelos alunos, tornando-se mais complexas à medida que novas relações iam sendo estabelecidas por estes, tal como referido por Kilpatrick et al. (2001).

O numeral decimal na compreensão dos números racionais

A compreensão da estrutura decimal revelou-se complexa e, como Lachance e Confrey (2002) afirmam, decorreu também das relações estabelecidas entre esta e outras representações dos números racionais (Artigo IV). Os alunos começaram por mobilizar outras representações para dar significado aos números racionais na representação em numeral decimal. Nesta fase inicial, o recurso a números inteiros e a representações dos números racionais em fração e em percentagem apoiou a interpretação dos números racionais representados em numeral decimal, tal como foi referido anteriormente.

Após a interpretação, ainda que superficial, dos números racionais representados em numeral decimal, seguiu-se uma fase em que os alunos reconheceram que, na leitura da esquerda para a direita da parte não inteira de numeral decimal, os algarismos correspondiam a partes progressivamente menores da unidade, embora não reconhecessem a relação de base 10 entre essas partes. O estabelecimento destas relações foi sustentado pela mobilização de modelos, em particular modelos que privilegiaram a interpretação dos números racionais no significado parte-todo. O recurso aos modelos apoiou processos de reunitização por partição e agrupamento e, com a progressiva compreensão da estrutura decimal, os alunos foram generalizando a possibilidade de realizarem partições por 10 de unidades progressivamente menores. Deste modo, os alunos estabeleceram relações entre diferentes unidades (décima, centésima e milésima) visualmente, apoiados pelos modelos usados, e revelaram também reconhecer a possibilidade de continuar a dividir por dez as unidades obtidas (Artigo IV).

Posteriormente, seguiu-se uma fase em que os alunos selecionaram a representação dos números racionais que consideravam mais eficiente, de acordo com a situação, realizando transformações de numeral decimal e entre esta e outras representações dos números racionais, apoiando-se na compreensão da estrutura decimal (Artigo IV). Com a compreensão da estrutura decimal, nomeadamente na realização de processos de reunitização (partição, agrupamento e reagrupamento), os alunos efetuaram conversões envolvendo composições de representações bastante complexas, como discutido anteriormente. Desta forma, e tal como refere Brocardo (2010), a representação em numeral decimal revelou ter grande potencial para a realização de tratamentos e conversões entre representações dos números racionais.

A Figura 3 traduz a relação identificada entre os processos de reunitização, implicados na compreensão da estrutura decimal, e os tipos de transformações, tratamentos e conversões, mantendo a mesma representação ou envolvendo composições de representações. A figura sintetiza as relações identificadas na Tabela 1, elaborada na secção 2, e que foram identificadas no trabalho realizado pelos alunos neste estudo.

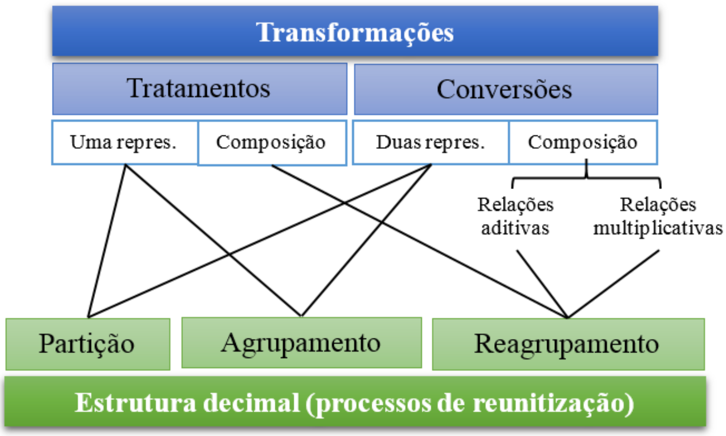


Figura 3. Relação entre processos de reunitização e transformações de e entre representações.

Os processos de reunitização realizados pelos alunos são, de acordo com Baturo (1998, 2000), evidência de uma compreensão mais sólida da estrutura decimal, uma vez que implicam a noção de conservação de número, envolvida na distinção entre número e representação (Duval, 2006), e a identificação da unidade a considerar de modo a criar novas unidades. No modelo proposto por Baturo (1998, 2000), a noção de valor de posição, em particular o reconhecimento do efeito do zero em diferentes posições na parte não inteira do numeral decimal, é considerado como conhecimento de base indispensável para a construção de relações mais complexas. Contudo, este estudo mostra que foi com a compreensão, mesmo que ainda superficial, das relações de base 10 entre as unidades, que Baturo (1998, 2000) associa no seu modelo ao nível mais complexo que designa por "conhecimento estrutural", que os alunos parecem ter reconhecido o valor de posição dos algarismos da parte não inteira dos numerais (Artigo IV). Este estudo revela ainda que, apesar da compreensão do numeral decimal implicar conhecimentos de grau de complexidade distinta, estes podem ser entendidos como interdependentes, ao invés de hierárquicos ou cumulativos.

Os resultados permitem destacar os contributos da representação decimal para a compreensão dos números racionais em duas dimensões interrelacionadas: (i) o envolvimento em processos de raciocínio, nomeadamente generalização e justificação, desencadeados por comparações de números racionais em numeral decimal; e (ii) a realização de tratamentos e conversões progressivamente mais complexos, apoiados pela estrutura decimal subjacente à representação decimal dos números racionais, mobilizados e desencadeados por processos de raciocínio dos alunos, e que contribuíram para a compreensão de grandeza de um número racional e de densidade no conjunto dos números racionais. A Figura 4 apresenta, resumidamente, as relações encontradas entre os aspetos discutidos, evidenciando de forma sintética, o percurso de aprendizagem vivido pelos alunos neste estudo.

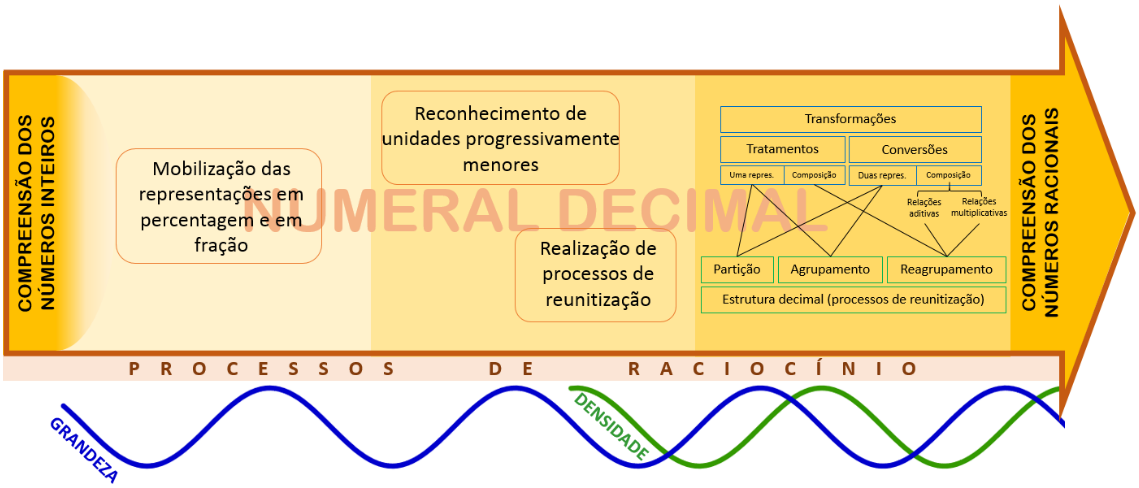


Figura 4. Percurso de aprendizagem dos números racionais na representação em numeral decimal vivido pelos alunos.

Partindo da compreensão dos números inteiros (à esquerda na Figura 4), a noção de grandeza constitui-se como central na continuidade entre este conjunto e o dos números racionais. Perante um número racional representado em numeral decimal, os alunos começaram por realizar transformações de numeral decimal para fração e, principalmente, percentagem, apoiando-se em conhecimentos dos números inteiros. Ao fazê-lo, começaram a construir a noção de grandeza de um número racional. Esta fase caracterizou-se também pela realização de extensões de conhecimento, ou generalizações, essencialmente em situações de comparação de números racionais. Estas generalizações, realizadas pelos alunos ou sugeridas por tarefas propostas, desencadearam justificações dos alunos.

Posteriormente, e através da mobilização de modelos, os alunos reconheceram unidades progressivamente menores na leitura do numeral decimal da esquerda para a direita. A par deste reconhecimento, identificou-se a realização da extensão *mais algarismos, menor grandeza*, tendo sido essencial a realização de tratamentos e conversões no processo de justificação dos alunos. As relações entre diferentes unidades da parte não inteira do numeral decimal foram estabelecidas através de processos de reunitização, que evidenciaram um reconhecimento, ainda que inicial, da densidade no conjunto dos números racionais. Por fim, com a compreensão da estrutura decimal, foi possível identificar a sua relação com tratamentos e conversões, bastante complexos, igualmente envolvidos em justificações apresentadas pelos alunos.

6 Conclusão

Refinamento dos princípios de design e conjetura

Foi estabelecida uma conjetura inicial, apoiada por um conjunto de princípios de design, sobre o modo como alunos do 1.º ciclo do ensino básico constroem a compreensão dos números racionais na representação em numeral decimal, numa perspetiva de continuidade partindo da compreensão dos números inteiros. A discussão realizada na secção anterior possibilita a reformulação dos princípios de design e, consequentemente, da conjetura inicialmente formulada.

As transformações de e entre representações dos números racionais realizadas pelos alunos foram essenciais na construção da compreensão dos números racionais em numeral decimal, confirmando-se a necessidade dos princípios de design 2 e 3. Foi possível identificar uma relação entre os processos de reunitização necessários à compreensão da estrutura decimal (adaptados de Baturo, 1998, 2000) e as transformações do tipo tratamento e conversão (Duval, 2006) realizadas pelos alunos. Desta relação resultou uma categorização de tratamentos e conversões onde se incluíram composições de representações que, no caso particular da conversão, tornou possível a identificação de conversões envolvendo composições através de relações aditivas e multiplicativas. Estas conversões, que não haviam sido antecipadas, revelam uma compreensão sólida dos números racionais, atendendo ao nível de escolaridade dos alunos. Pela complexidade dos conhecimentos envolvidos na sua realização, revela-se importante que este tipo de transformação entre representações seja promovida numa fase inicial da aprendizagem dos números racionais na representação em numeral decimal. Assim, o princípio 2 é reformulado de modo a incluir a valorização deste tipo de conversões: *Promover transformações de e entre representações dos números racionais, em particular conversões envolvendo composições de representações* (princípio de design final 2) [F2].

Relativamente ao uso de representações icónicas, visado pelo princípio de design 3, destaca-se o potencial de representações icónicas que se constituem como modelos e cujas características permitem a representação de unidades progressivamente menores. Modelos como a reta numérica ou a grelha 10×100, usados na intervenção, possibilitaram a representação de unidades até às milésimas, tornando explícitas relações entre unidades que constituem a parte não inteira do numeral decimal. Deste modo, o princípio 3 é reformulado para: *Valorizar o uso de modelos que possibilitem a representação de unidades progressivamente menores (da parte não inteira de numeral decimal)* [F3].

Relacionado com os princípios de design 2 e 3 encontra-se o princípio 1. O uso de tarefas cujos contextos privilegiavam uma interpretação dos números racionais nos significados de medida e parte-todo foi igualmente potenciador da compreensão da natureza relacional dos números racionais. A valorização da interpretação dos números racionais em numeral decimal nos significados de medida e parte-todo levou ao estabelecimento da relação entre a parte a ser considerada e a unidade de medida selecionada, bem como a partições sucessivas da unidade de medida que, por sua vez, possibilitou a construção de unidades progressivamente menores. Assim, e tal como também referido por Lamon (2001), a relação entre os dois significados numa fase inicial da abordagem revelou-se bastante promissora. Desta forma, o princípio de design 1 é mantido, sendo apenas clarificada a sua escrita: *Valorizar a interpretação dos números racionais em numeral decimal nos significados de medida e parte-todo, de forma interligada* [F1].

O princípio de design 5, que diz respeito à discussão de extensões de conhecimento, revelou-se de extrema importância ao longo de toda a intervenção, uma vez que desencadeou o envolvimento dos alunos no processo de justificação que se mostrou essencial na transição entre a compreensão dos números inteiros e dos números racionais. A discussão de extensões de conhecimento criou oportunidades para o alargamento do conceito de número dos alunos (Greeno et al., 1996; Smith, diSessa, & Roschelle, 1993; Swan, 2001), possibilitando um reconhecimento de características semelhantes e distintas entre o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números racionais, fundamental para o desenvolvimento numérico (Siegler et al., 2011). De modo a destacar a importância de discutir não só as extensões de conhecimento realizadas pelos alunos, mas também as oportunidades de aprendizagem criadas pela discussão provocada por tarefas intencionalmente criadas com esse objetivo, o princípio 5 foi refinado no princípio: *Fomentar a discussão de extensões de conhecimento, usadas pelos alunos ou sugeridas por tarefas, que conduzam a respostas corretas e/ou incorretas* [F5].

Relacionado com este princípio de design encontra-se o princípio 6, reescrito como: *Promover uma cultura de sala de aula onde os alunos são encorajados a participar e se sentem confiantes em partilhar as suas ideias matemáticas* [F6]. Este princípio foi indispensável na operacionalização do princípio de design 5. No entanto, e tal como discutido anteriormente, foram identificadas ações por parte da professora e da investigadora fundamentais quer na operacionalização do princípio 5, quer no envolvimento dos alunos na atividade matemática desencadeada pela discussão de extensões de conhecimento. Por este motivo, são estabelecidos dois novos princípios: *Incentivar o estabelecimento de conjeturas e generalizações* [F7]; *Incentivar a justificação e promover a validação de justificações em interação com os intervenientes da turma (alunos e professor)* [F8].

Neste estudo, o recurso ao conhecimento dos números inteiros revelou-se facilitador da compreensão dos números racionais, permitindo, nomeadamente, o estabelecimento de relações entre números racionais representados em numeral decimal e em percentagem, através da sua interpretação enquanto parte de uma unidade entendida como número inteiro. Estes resultados revelam a necessidade de reformular o princípio de design 4 que visava apoiar o uso de conhecimentos prévios pelos alunos, destacando-se a necessidade de valorizar o recurso a conhecimentos relativos aos números inteiros para apoiar a compreensão dos números racionais. Assim, o princípio 4 é reformulado para: *Proporcionar situações que permitam mobilizar conhecimentos dos números inteiros como facilitadores da compreensão dos números racionais* [F4].

Por fim, realço a construção de um novo princípio de design que remete para duas noções que, apesar de inicialmente contempladas no design das tarefas, se tornaram progressivamente mais relevantes ao longo da intervenção: a noção de grandeza de um número e a propriedade densidade no conjunto dos números racionais. Tratam-se de noções que se podem construir e desenvolver através dos princípios de design já identificados, contudo, considero ser importante formular um princípio de design específico para promover o seu desenvolvimento. Acresce que o facto de as tarefas terem sido enquadradas num contexto realista, isto é, num contexto significativo e passível de ser imaginado pelos alunos (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003), permitiu que os alunos atribuíssem significado aos números envolvidos. Desta forma, formulo o princípio de design F9: *Usar tarefas realistas que possibilitem a construção da noção de grandeza de um número racional e da propriedade densidade no conjunto dos números racionais.*

Em síntese, do estudo realizado resultam os seguintes princípios de design, cuja numeração tem como único objetivo facilitar a sua identificação:

- *Valorizar a interpretação dos números racionais em numeral decimal no significado de medida e parte-todo, de forma interligada* [F1];

- *Promover transformações de e entre representações de números racionais, em particular conversões envolvendo composições de representações* [F2];
- *Valorizar o uso de modelos que possibilitem a representação de unidades progressivamente menores (da parte não inteira de numeral decimal)* [F3];
- *Proporcionar situações que permitam mobilizar conhecimentos dos números inteiros como facilitadores da compreensão dos números racionais* [F4];
- *Fomentar a discussão de extensões de conhecimento, usadas pelos alunos ou sugeridas por tarefas, que conduzam a respostas corretas e incorretas* [F5];
- *Promover uma cultura de sala de aula onde os alunos são encorajados a participar e se sentem confiantes em partilhar as suas ideias matemáticas* [F6];
- *Incentivar o estabelecimento de conjeturas e generalizações* [F7];
- *Incentivar a justificação e promover a validação de justificações em interação com os intervenientes da turma (alunos e professor)* [F8];
- *Usar tarefas realistas que possibilitem a construção da noção de grandeza de um número racional e da propriedade densidade no conjunto dos números racionais* [F9].

Este conjunto de princípios de design finais conduz ao refinamento da conjetura inicialmente estabelecida dando lugar à seguinte conjetura: *A compreensão dos números racionais representados em numeral decimal, numa perspetiva de continuidade partindo da compreensão dos números inteiros, ocorre através do envolvimento em processos de generalização e justificação, socialmente situados, bem como através da realização de tratamentos e conversões, incluindo composições de representações, e com um foco na compreensão da noção de grandeza de um número racional e da propriedade densidade no conjunto dos números racionais.*

O conjunto dos princípios resultantes do ciclo de design realizado, bem como a conjetura final, constituem-se como a teoria local emergente para o ensino e aprendizagem dos números racionais na representação em numeral decimal, no 1.º ciclo. Embora resulte de um contexto situado, a teoria local emerge da especificidade deste estudo.

Reflexão final

Nesta secção final do trabalho, é o lugar para discutir os principais contributos deste estudo no campo da investigação em Educação Matemática bem como para o ensino e aprendizagem dos números racionais na representação em numeral decimal, nos primeiros anos.

A modalidade de IBD seguida, especificamente o estudo de design em sala de aula (Cobb et al., 2016), revelou o seu potencial em estabelecer uma ponte entre a investigação e o trabalho desenvolvido em sala de aula. A teoria local que emerge deste estudo foi sustentada pela ecologia de aprendizagem construída, o que lhe confere a possibilidade de: (i) poder ser operacionalizada em sala de aula e adaptada a novas situações (Cobb et al., 2003); (ii) contribuir para o desenvolvimento profissional de professores, sendo transformada em conjetura orientadora de outras intervenções (Gravemeijer & Van Eerde, 2009); (iii) informar investigação futura (Herrington, McKenney, Reeves, & Oliver, 2007; Van den Akker, 1999); e (iv) contribuir para orientações curriculares relativas ao ensino dos números racionais em representação decimal.

O facto de ter realizado o estudo com alunos com quem tinha estabelecido uma relação no ano letivo anterior à intervenção, foi bastante importante. Essa proximidade tornou natural a minha presença em sala de aula, minimizando alterações a nível do funcionamento da turma, como é desejável numa investigação na modalidade de estudo de design em sala de aula. De igual modo, a relação próxima com a professora da turma foi facilitadora de um trabalho conjunto desde a fase de preparação da intervenção. O trabalho realizado com a professora foi essencial para uma aproximação da orientação teórica do estudo à componente prática, igualmente importante para a emergência da teoria local.

Para além de terem sido recolhidos dados relativos aos alunos da turma, foi tomada a decisão de selecionar quatro alunos para uma recolha e análise de dados mais aprofundadas. Assim, foi recolhido um conjunto de dados que possibilitaram uma análise aprofundada do trabalho dos quatro alunos ao longo da intervenção, sendo igualmente analisado, embora com menor detalhe, o trabalho dos restantes alunos da turma. Esta decisão possibilitou uma caracterização geral da aprendizagem dos alunos da turma ao longo da intervenção, o que saliento como aspeto positivo. No entanto, os critérios definidos para a seleção dos quatro alunos, não permitiram uma análise aprofundada dos processos de aprendizagem dos números racionais na representação em numeral decimal de alunos com desempenho considerados inferiores ou superiores ao nível médio. Embora não tivesse sido objetivo deste estudo analisar eventuais diferenças nas aprendizagens reveladas pelos alunos ao longo da intervenção, uma recolha e análise de dados de alunos com desempenhos distintos na área de Matemática poderia ter possibilitado uma visão mais abrangente sobre a sua compreensão dos números racionais em numeral decimal.

Considerando o fenómeno em estudo, a compreensão dos números racionais em representação decimal, foi essencial a realização de uma intervenção prolongada no tempo. Tal como afirmam Gravemeijer e Van Eerde (2009) e Prediger et al. (2015), este aspeto permitiu a análise de mudanças graduais na compreensão dos alunos, possibilitando a realização de alterações ao longo da intervenção à medida que surgiam resultados inesperados (como a realização de determinadas generalizações pelos alunos). As alterações realizadas permitiram o teste de conjeturas mais específicas, procurando verificar se determinados episódios observados seriam ocasionais ou recorrentes. Contudo, o prolongamento no tempo da intervenção implicou a necessidade de acompanhar o trabalho realizado pelos alunos sobre a temática em estudo, de modo a possibilitar a compreensão de processos de aprendizagem na sua relação com a intervenção realizada. A duração da intervenção conduziu também a uma maior proximidade com os alunos. A relação estabelecida com os alunos no 2.º ano continuou a estreitar-se até ao 4.º ano, o que implicou cuidados a nível de um distanciamento na interpretação dos dados, de modo a evitar uma possível influência do conhecimento que tinha sobre cada aluno.

As conclusões do estudo apontam para uma compreensão sólida dos números racionais na representação em numeral decimal. O estudo destaca a complexidade associada à compreensão dos números racionais em representação decimal, mas salienta também como a compreensão da estrutura decimal subjacente a esta representação pode contribuir para a compreensão dos números racionais. As conclusões reforçam o potencial de uma abordagem aos números racionais nos primeiros anos na perspetiva integrada de desenvolvimento numérico (Siegler et al., 2011), focando, explicitamente, as noções de grandeza de um número e densidade no conjunto dos números racionais.

As conclusões do estudo remetem ainda para a mobilização de conhecimentos dos números inteiros como facilitadores da construção da compreensão dos números racionais na sua representação decimal. Este aspeto ganha especial relevância quando consideramos a aprendizagem dos números racionais nos primeiros anos, altura em que é expectável e natural que os alunos recorram aos seus conhecimentos dos números inteiros para dar significados aos números racionais. Por um lado, a sua mobilização permitiu uma noção inicial da natureza relacional dos números racionais (Moss & Case, 1999). Por outro lado, quando o recurso ao conhecimento dos números inteiros conduziu a generalizações inválidas (extensões de conhecimento), desencadeou justificações cuja validação contribuiu para uma aprendizagem dos números racionais em representação decimal com compreensão. Destaca-se o papel que as extensões de conhecimento, realizadas pelos alunos ou propostas em tarefas, podem ter para o desenvolvimento numérico dos alunos. Para tal, o professor deve ter conhecimento sobre as extensões de conhecimento que os alunos podem realizar, de modo não só a identificá-las, como também a provocar a sua discussão entre os alunos (Hunter, 2002).

Perspetivas sobre investigação futura

Este estudo destaca um percurso possível e bastante promissor para a compreensão global dos números racionais na representação em numeral decimal. A teoria local que dele emerge constitui-se como um "pedaço de compreensão resultante de um estudo individual" (Prediger et al., 2015, p. 886), sendo necessária a realização de outros estudos que foquem a aprendizagem dos números racionais em numeral decimal no 1.º ciclo, dada a escassez de investigação em torno da aprendizagem dos números racionais na representação em numeral decimal neste nível de escolaridade.

O presente estudo focou a compreensão dos números racionais numa perspetiva de continuidade da compreensão dos números inteiros, reconhecendo nos números inteiros um papel facilitador nesta transição, mesmo nas situações em que a sua mobilização pode conduzir a respostas incorretas. Os estudos realizados em torno desta temática tendem a mostrar dificuldades de alunos e jovens adultos na comparação e ordenação de números racionais devido ao enviesamento dos números inteiros (Zazkis & Mamolo, 2016). Por este motivo, é necessário realizar investigação que, tal como este estudo, foque um momento inicial da aprendizagem dos números racionais numa perspetiva de continuidade entre a compreensão dos números inteiros e números racionais. Seria interessante identificar que outras relações podem ser estabelecidas a partir dos conhecimentos dos números inteiros e que se revelam facilitadoras para a compreensão dos números racionais.

O estudo centrou-se essencialmente na dimensão de conhecimento e facilidade com os números do modelo proposto por McIntosh et al. (1992) para caracterizar sentido de número. Assim, seria pertinente estudar qual a influência de uma abordagem como a que se seguiu neste estudo no tipo e complexidade de relações entre conceitos estabelecidas pelos alunos, nomeadamente, na compreensão de números racionais na representação em percentagem e em fração; na compreensão das operações envolvendo números racionais na representação em numeral decimal; e também na resolução de problemas envolvendo números racionais.

Neste estudo, a recolha e análise aprofundadas dos dados relativos aos quatro alunos selecionados, permitiu reunir um conjunto de dados que poderia fornecer uma visão bastante detalhada sobre a aprendizagem de cada um destes alunos, ao longo de toda a intervenção. Embora este não tenha sido objetivo deste estudo, seria pertinente analisar os percursos individuais construídos pelos alunos, à semelhança do estudo realizado por Maher e Martino (1996), que apresentam o modo como uma aluna foi construindo a noção de justificação matemática do 1.º ao 5.º ano. Ainda que focado num número reduzido de alunos, este tipo de estudos pode fornecer uma análise extremamente detalhada sobre a aprendizagem dos números racionais útil não só como contributo sobre como os números racionais são compreendidos, mas também para informar o design de futuras investigações.

O envolvimento neste estudo teve impacto em todos os seus intervenientes: (i) nos alunos, em cujos processos de aprendizagem me centrei; (ii) em mim que, enquanto investigadora, fui responsável pelas decisões tomadas ao longo da intervenção, podendo, tal como refere Gravemeijer (1994), os microciclos que a constituem serem comparados a ciclos da minha própria aprendizagem; e (iii) na professora da turma, cujo papel neste estudo não pode ser desvalorizado. Para além dos dados analisados, recolhi outros, ao longo da intervenção, que não analisei em detalhe, nomeadamente as gravações áudio de todas as aulas recolhidas pelo gravador que acompanhava a professora, e das reuniões conjuntas realizadas antes e após as aulas. Uma investigação que considero bastante pertinente seria a que a par dos processos de aprendizagem dos alunos, também se centrasse na perspetiva de desenvolvimento profissional do professor, tirando partido daqueles dados. A modalidade de IBD pode ser usada com este duplo objetivo, seguindo a lógica da *dual design research* ou, em português, IBD dual (Gravemeijer & Van Eerde, 2009).

Finalizo o trabalho reforçando dois aspetos que me parecem essenciais. Por um lado, destaco o contributo teórico deste estudo pela sua potencialidade na orientação de novas intervenções e de desenvolvimento através de novos estudos. Por outro lado, realço que as evidências empíricas mostram que, nas salas de aula e desde os primeiros anos, encontramos verdadeiros “jovens matemáticos” (Fosnot & Dolk, 2002), capazes de construir uma compreensão dos números racionais robusta, atendendo ao nível de escolaridade, que é fundamental continuar a promover e a investigar.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

AERA (2011). Code of ethics. *Educational Researcher, 40*(3), 145–156. doi: 10.3102/0013189X11410403

Bailey, D. H., Siegler, R. S., & Geary, D. C. (2014). Early predictors of middle school fraction knowledge. *Developmental Science, 17*(5), 775–785. doi: 10.1111/desc.12155

Bakker, A., & Van Eerde, D. (2015). An introduction to design based research with an example from statistics education. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Doing qualitative research: Methodology and methods in mathematics education* (pp. 429–466). New York, NY: Springer.

Barab, S., & Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *The Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 1–14. doi: 10.1207/s15327809jls1301_1

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational number: Grades 3-5.* Reston, VA: NCTM.

Baturo, A. (2000). Construction of a numeration model: A theoretical analysis. In J. Bana, & A. Chapman (Eds.), *Proceedings 23rd annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (pp. 95–103). Fremantle, WA: MERGA.

Baturo, A. R. (1998). *Year 6 students' cognitive structures and mechanisms for processing tenths and hundredths*. (Doctoral dissertation, Queensland University of Tecnhology). Obtido de: https://eprints.qut.edu.au/14769/7/14769_Digitised%20Thesis.pdf

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 95–102). Bergen, Norway: PME.

Baturo, A. R., & Cooper, T. J. (1995). Strategies for comparing decimal numbers with the same whole-number part. In B. Atwed & S. Flavel (Eds.), *Proceedings of the 18th annual conference of the mathematics education research group of Australia* (pp. 73–79). Darwin: MERGA.

Baturo, A. R., & Cooper, T. J. (1997). Reunitising hundredths: Prototypic and nonprototypic representations. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 57–64). Lahti, Finland: PME.

Baturo, A. R., & Cooper, T. J. (2000). Year 6 students' idiosyncratic notions of unitising, reunitising, and regrouping decimal number places. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 57–64). Hiroshima, Japan: Nishiki Print Co.

Bay, J. M. (2001). Developing number sense on the number line. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *6*(8), 448–451.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 323–341. doi: 10.2307/748423

Behr, M., & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2nd Edition) (pp. 201–248). Boston, MA: Allyn and Bacon.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296–333). New York, NY: Macmillan.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91–125). New York: Academic Press.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Booth, J. L., Lange, K. E., Koedinger, K. R., & Newton, K. J. (2013). Using example problems to improve student learning in algebra: Differentiating between correct and incorrect examples. *Learning and Instruction, 25,* 24–34. doi: 10.1016/j.learninstruc.2012.11.002

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as 'springboards for inquiry': A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 166–208. doi: 10.2307/749507

Brocardo, J. (2010). Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento de sentido de número. *Educação e Matemática*, *109*, 15–23.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences, 2*(2), 141–178. doi: 10.1207/s15327809jls0202_2

Bruner, J. S. (1999). *The Process of Education*. Harvard University Press.

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos fundamentais da matemática* (2ª Ed.). Lisboa: Gradiva.

Carpenter, T. P., & Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 1, pp. 155–162). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Castro, J. P., & Rodrigues, M. (2008). O sentido de número no início da aprendizagem. In J. Brocardo, L. Serrazina & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 117–133). Lisboa: Escolar Editora.

Charalambos, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*(3), 293–316. doi: 10.1007/s10649-006-9036-2

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 127–138. doi: 10.1007/s10649-009-9198-9

Clarke, D. M., Roche, A., & Mitchell, A. (2008). 10 practical tips for making fractions come alive and make sense. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(7), 372–379.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A. E. Kelly, R. A. Lesh & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68–95). New York, NY: Routledge.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13. doi: 10.3102/0013189X032001009

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education* (3rd Edition) (pp. 481–503). New York, NY: Routledge.

Cramer, K. A., Monson, D. S., Wyberg, T., Leavitt, S., & Whitney, S. B. (2009). Models for initial decimal ideas. *Teaching Children Mathematics, 16*(2), 106–117.

Cramer, K., Monson, D., Ahrendt, S., Colum, K., Wiley, B., & Wyberg, T. (2015). 5 Indicators of decimal understandings. *Teaching Children Mathematics, 22*(3), 186–195.

Cramer, K., Monson, D., Ahrendt, S., Wyberg, T., Pettis, C., & Fagerlund, C. (2018). Reconstructing the unit on the number line: Tasks to extend fourth graders' fraction understandings (Advance online publication). *Investigations in Mathematics Learning*. doi: 10.1080/19477503.2018.1434594

Desmet, L., Grégoire, J., & Mussolin, C. (2010). Developmental changes in the comparison of decimal fractions. *Learning and Instruction, 20*(6), 521–532. doi: 10.1016/j.learninstruc.2009.07.004

DeWolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2015). Conceptual structure and the procedural affordances of rational numbers: Relational reasoning with fractions and decimals. *Journal of Experimental Psychology: General, 144*(1), 127–150. doi: 10.1037/xge0000034

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R. J. Stermberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The Nature of Mathematical Thinking* (pp. 253–284). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum

Durkin, K., & Rittle-Jonhson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction, 37*, 21–29. doi: 10.1016/j.learninstruc.2014.08.003

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Duval. R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 55–69). Hiroshima, Japan: Nishiki Print Co.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(4), 308–345. doi: 10.5951/jresematheduc.42.4.0308

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York, NY: MacMillan.

European Commission. (2018). *Proposal for a Council recommendation on key competences for lifelong learning* (Commission staff working document, 17.1.2018). Obtido de https://ec.europa.eu/education/sites/education/files/swd-recommendation-key-competences-lifelong-learning.pdf

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals, and percents.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel Publishing.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Kluwer Academic Publishers.

Giannakoulias, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the fifth congress of the European society for research in mathematics education* (pp. 416–425). Larnaca, Cyprus: ERME, Department of Education, University of Cyprus.

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. San Diego, CA: Academic Press.

Goldin, G. (2003). Representations in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275–286). Reston, VA: NCTM.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in school mathematics – 2001 Yearbook* (pp. 1–23). Reston, VA: NCTM.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 17–51). London: Routledge.

Gravemeijer, K. & Van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teaching in mathematics education. *The Elementary School Journal*, *109*(5), 510–524.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), 443–471. doi: 10.2307/749485

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155–177. doi: 10.1207/s15327833mtl0102_4

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 105–128. doi: 10.1207/s15327833mtl0602_3

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research, Part A: An introduction* (pp. 72–113). Enschede, The Netherlands: Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO).

Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies, 32*(6), 777–796. doi: 10.1080/00220270050167170

Greeno, J. C., Collins, A. M., & Resnick, L. B. (1996). Cognition and learning. In D. Berliner & R. Calfee (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 15–46). New York, NY: Macmillan.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 170–218. doi: 10.2307/749074

Große, C. S., & Renkl, A. (2007). Finding and fixing errors in worked examples: Can this foster learning outcomes?. *Learning and Instruction, 17*(6), 612–634. doi: 10.1016/j.learninstruc.2007.09.008

Guerreiro, H. G., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). Uma trajetória na aprendizagem dos números racionais através da percentagem. *Educação Matemática Pesquisa, 20*(1), 359–384. doi: 10.23925/1983-3156.2018v20i1p359-384

Hannula, M S., Pehknonen, E., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science, 4*(2), 317–337. doi: 10.5485/TMCS.2006.0129

Harnett, P., & Gelman, R. (1998). Early understandings of numbers: Paths or barriers to the construction of new understandings?. *Learning and Instruction, 8*(4), 341–374. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00026-1

Henriques, A., & Ponte, J. P. (2014). As representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de investigação. *BOLEMA, 28*(48), 276–298. doi: 10.1590/1980-4415v28n48a14

Herrington, J., McKenney, S., Reeves, T., & Oliver, R. (2007). Design-based research and doctoral students: Guidelines for preparing a dissertation proposal. In C. Montgomerie & J. Seale (Eds.), *Proceedings of world conference on educational multimedia, hypermedia and telecommunications 2007* (pp. 4089–4097).

Chesapeake, VA: Association for the Advancement of Computing in Education (AACE).

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–28). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hunter, R. K. (2002). *Constructing decimal concepts in an inquiry classroom* (Unpublished master's thesis). Massey University, New Zealand.

Hunter, R., & Anthony, G. (2003). 'Sensing': Supporting student understanding of decimal knowledge. N. A. Pateman, B. J. Dougherty, J. T. Zilliox (Eds), *Proceedings of the 27th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 41–48). Honolulu, HI: PME.

IE-ULisboa. (2016). *Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*. Obtido de http://www.ie.ulisboa.pt/download/carta-etica-e-regulamento-da-comissao-de-etica

Kalchman, M., Moss, J., & Case, R. (2001). Psychological models for the development of mathematical understanding: Rational numbers and functions. In S. M. Carver & D. Klahr (Eds.), *Cognition and Instruction: Twenty-five years of progress* (pp. 1–38). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Keijzer, R. (2003). *Teaching formal mathematics in primary education: Fraction learning as mathematising process.* (Doctoral dissertation). Utrecht: Utrecht University.

Kieren T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. A. Lesh & S. A. Bradbard (Eds.), *Number and measurement. Papers from a research workshop* (pp. 101–144). Columbus, OH: ERIC Information Analysis Center for Science, Mathematics and Environmental Education.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell. B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Lachance, A. & Confrey, J. (2002). Helping students build a path of understanding from ratio and proportion to decimal notation. *Journal of Mathematical Behavior, 20*(4), 503–526. doi: 10.1016/S0732-3123(02)00087-1

Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 170–193. doi: 10.2307/749599

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in school mathematics: 2001 Yearbook* (pp. 146–165). Reston, VA: NCTM.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629–667). Reston, VA: NCTM.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and rations for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* (3rd Edition). New York, NY: Routledge.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?. *Developmental Review, 38,* 201–221. doi: 10.1016/j.dr.2015.07.008

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 194–214. doi: 10.2307/749600

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically* (2nd Extended Edition). Harlow: Prentice Hall (Pearson).

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante, XXI*(2), 81–110.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 169–186. doi: 10.1007/s10649-017-9773-4

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2–8.

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M., & Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instruction, 37,* 14–20. doi: 10.1016/j.learninstruc.2013.12.004

ME (2007). *Programa de matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

ME (2013). *Programa e metas curriculares de matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

ME (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória.* Lisboa: Ministério da Educação, DGE.

Merriam, S. M. & Tisdell, E. J. (2016). *Qualitative research: A guide to design and implementation.* San Francisco, CA: John Wiley & Sons.

Moloney, K., & Stacey, K. (1997). Changes with age in students' conceptions of decimal notation. *Mathematics Education Research Journal, 9*(1), 25–38.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, XIV*(1), 89–108.

Morais, C. & Serrazina, M. L. (2018a). A compreensão da estrutura da representação decimal de número racional por alunos do 3.º e 4.º ano. *Boletim GEPEM.* (aceite em 27 de setembro de 2018)

Morais, C. & Serrazina, M. L. (2018b). Extensões de conhecimentos na construção da compreensão de numeral decimal. *BOLEMA, 32*(61), 631–652. doi: 10.1590/1980-4415v32n61a16

Morais, C. M. S. (2011). *O cálculo mental na resolução de problemas: Um estudo no 1.º ano de escolaridade*. Lisboa: APM.

Morais, C., & Serrazina, L. (2013). *O cálculo mental na resolução de problemas de subtração.* Quadrante, *XXII*(1), 53–76.

Morais, C., Cerca, R., Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2014). Os números racionais no 2.º ano: Um estudo diagnóstico. In M. Martinho, R. Ferreira, A. Boavida & L. Menezes (Eds.). *Atas do XXV seminário de investigação em educação matemática* (pp. 91–110). Braga: APM.

Morais, C., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018a). Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. *Acta Scientiae. 20*(4), 552–570. doi: 10.17648/acta.scientiae.v20iss4id3892

Morais, C., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018b). Números racionais no 1.º ciclo: Compreensão de grandeza e densidade apoiada pelo uso de modelos. *Quadrante XXVII*(1), 25–45.

Moseley, B., & Okamoto, Y. (2008). Identifying fourth graders' understanding of rational number representations: A mixed methods approach. *School Science and Mathematics, 108*(6), 238–250. doi: 10.1111/j.1949-8594.2008.tb17834.x

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122–147. doi: 10.2307/749607

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* Reston, VA: NCTM.

Nesher, P., & Peled, I. (1986). Shifts in reasoning (The case of extending number concepts). *Educational Studies in Mathematics, 17*(1), 67–79.

Ni, Y., & Zhou, Y. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias, *Educational Psychologist, 40*(1), 27–52. doi: 10.1207/s15326985ep4001_3

Nicolaou, A. A., & Pitta-Pantazi, D. (2016). Hierarchical levels of abilities that constitute fraction understanding at elementary school. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(4), 757–776. doi: 10.1007/s10763-014-9603-4

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*, *100*, 3–9.

Owens, D. T., & Super, D. B. (1993). Teaching and learning decimal fractions. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 137–158). Reston, VA: NCTM.

Pierce, R., U., Steinle, V., A., Stacey, K., C., & Widjaja, W. (2008). Understanding decimal numbers: A foundation for correct calculations. *International Journal of Nursing Education Scholarship*, *5*(1), 1–15. doi: 10.2202/1548-923X.1439

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics, 30*(1), 5–38. doi: 10.1007/BF00163751

Ponte, J. P. & Quaresma, M. (2011b). A construção das partes e a reconstrução da unidade na compreensão dos números racionais. In A. Henriques, C. Nunes, A. Silvestre,

H. Jacinto, H. Pinto, A. Caseiro & J. P. Ponte (Eds.), *Atas do XXII seminário de investigação em educação matemática* (pp. 253–268). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2011a). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante, XX*(1), 55–81.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante, XXV*(2), 77–98.

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education, 66*(2), 211–227. doi: 10.1002/sce.3730660207

Post, T., Behr, M. J., & Lesh, R. (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 8*(1), 39–48.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts* (pp. 327–362). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

Post, T., Wachsmuth, I., Lesh, R., & Behr, M. (1985). Order and equivalence of rational number: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 18–36. doi: 10.2307/748970

Prediger, S. (2006). Continuities and discontinuities for fractions: A proposal for analyzing in different levels. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 377–384). Prague: PME.

Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM, 47*(6), 877–891. doi: 10.1007/s11858-015-0722-3

Reinup, R. (2010). Teaching number line, fractions, decimals, and percentages as in integrated system. In C. Winsløw & R. Evans (Eds.), *Didactics as a Design Science* (pp. 71–81). Copenhagen: University of Copenhagen.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 8–27. doi: 10.2307/749095

Rittle-Johnson, B. & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology, 91*(1), 175–189. doi: 10.1037/0022-0663.91.1.175

Rittle-Johnson, B. & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Dolan (Ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 75–110). London: Psychology Press.

Segurado, I., & Ponte, J. P. (1998). Concepções sobre a Matemática e trabalho investigativo. *Quadrante, VII*(2), 5–40.

Serrazina, L. (2002). Competência matemática e competências de cálculo no 1.º ciclo. *Educação e Matemática, 69*, 57–60.

Siegler, R. S. (2002). Microgenetic studies of self-explanation. In N. Garnott & J. Parziale (Eds.), *Microdevelopment: A process-oriented perspective for studying development and learning* (pp. 31–58). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Siegler, R. S., & Braithwaite, D. W. (2017). Numerical development. *Annual Review of Psychology, 68*, 187–213. doi: 10.1146/annurev-psych-010416-044101

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*, 273–296.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20–26.

Smith, C. L., Solomon, G. E. A., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology, 51*(2), 101–140. doi: 10.1016/j.cogpsych.2005.03.001

Smith, J. P., diSessa, A. A., & Roschelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences, 3*(2), 115–163. doi: 10.1207/s15327809jls0302_1

Stacey, K. (2005). Travelling the road to expertise: A longitudinal study of learning. In In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th conference of the* *international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 19–36). Melbourne: PME.

Stacey, K. Helme, S., Steinle, V., Baturo, A.,Irwin, K. & Bana, J. (2001). Preservice teachers' knowledge of difficulties in decimal numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *4*(3), 205–225.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*(5), 503–518. doi: 10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Steinle, V. (2004a). *Changes with age in students' misconceptions of decimal numbers*. (Doctoral dissertation). Department of Science and Mathematics Education, University of Melbourne. Obtido de: https://minerva-access.unimelb.edu.au/bitstream/handle/11343/39024/66481_00001531_01_steinlethesis2004.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Steinle, V. (2004b). Detection and remediation of decimal misconceptions. In B. Tadich, S. Tobias, C. Brew, B. Beatty, & P. Sullivan (Eds.), *Towards excellence in mathematics* (pp. 460–478). Brunswick: The Mathematical Association of Victoria.

Steinle, V., & Stacey, K. (2003). Grade-related trends in the prevalence and persistence of decimal misconceptions. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, J. T. Zilliox (Eds), *Proceedings of the 27th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 259–266). Honolulu, HI: PME.

Stevin, S. (1585/1958). De Thiende. In E. Crone, E. J. Dijksterhuis, R. J. Forbes, M. G., Minnaert & A. Pannekoek (Eds.), *The principal works of Simon Stevin* (Vol. II A, pp. 386–455). Amsterdam: C. V. Swets & Zeitlinger. Obtido de: http://www.dwc.knaw.nl/pub/bronnen/Simon_Stevin-[II_A]_The_Principal_Works_of_Simon_Stevin,_Mathematics.pdf

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Struik, D. J. (1959). Simon Stevin and the decimal fractions. *The Mathematics Teacher*, *52*(6), 474–478.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(1), 1–20. doi: 10.1007/s10649-006-9038-0

Swan, M. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. In P. Gates (Ed.), *Issues in Mathematics Teaching* (pp. 147–165). London: Routledge/Falmer.

Tian, J., & Siegler, R. S. (2018). Which type of rational numbers should students learn first?. *Educational Psychology Review, 30*(2), 351–372. doi: 10.1007/s10648-017-9417-3

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O., & Wilson, J. W. (1999). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. Obtido de http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html.

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction, 37,* 5–13. doi: 10.1016/j.learninstruc.2014.03.002

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438–445.

Tsovaltzi, D., Melis, E., McLaren, B. M., Meyer, A-K., Dietrich, M. & Goguadze, G. (2010). Learning from erroneous examples: When and how do students benefit from them?. In M. Wolpers, P. A. Kirschner, M. Scheffel, S. Lindstaedt & V. Dimitrova (Eds.), *Proceedings of the 5td European conference on technology enhanced learning, sustaining TEL: From innovation to learning and practice* (pp. 357–373). Barcelona, Spain: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction, 28*(2), 181–209. doi: 10.1080/07370001003676603

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction, 21*(5), 676–685. doi: 10.1016/j.learninstruc.2011.03.005

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(3), 344–355. doi: 10.1016/j.jmathb.2012.02.001

Van den Akker, J. (1999). Principles and methods of development research. In J. Van den Akker, R. M. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen & T. Plomp (Eds.), *Design* *research approaches and tools in education and training* (pp. 1–14). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 9–35. doi: 10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *ZDM, 37*(4), 287–307. doi: 10.1007/BF02655816

Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Van Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences, 61*, 99–108. doi: 10.1016/j.lindif.2017.11.010

Wang, Y. Q., & Siegler, R. S. (2013). Representations of and translation between common fractions and decimal fractions. *Chinese Science Bulletin, 58*(36), 4630–4640. doi: 10.1007/s11434-013-6035-4

Wheeler, M. M. (1987) Children's understanding of zero and infinity. *Arithmetic Teacher, 35*(3), 42–47.

Whitenack, J., & Yackel, E. (2008). Construindo argumentações matemáticas nos primeiros anos: A importância de explicar e justificar ideias. *Educação e Matemática*, 100, 85–88.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458–477. doi: 10.2307/749877

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics*, (pp. 227–236). Reston, VA: NCTM.

Zazkis, R. & Mamolo, A. (2016). On numbers: Concepts, operations, and structure. In A. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: The journey continues* (pp. 39–71). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

ANEXOS

Anexo 1

Morais, C., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). Números racionais no 1.º ciclo: Compreensão de grandeza e densidade apoiada pelo uso de modelos. *Quadrante XXVII*(1), 25–45.

Artigo I

Versão dos autores

Números racionais no 1.º ciclo: Compreensão de grandeza e densidade apoiada pelo uso de modelos

Rational numbers in the elementary school: Understanding the magnitude and density supported by models

Cristina Morais
Externato da Luz
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
cristina.morais@campus.ul.pt

Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
lurdess@eselx.ipl.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo. Neste artigo procuramos compreender de que modo o uso de modelos contribui para a compreensão da noção de grandeza de número racional e de densidade como

propriedade do conjunto dos números racionais. Relatamos parte de um estudo que seguiu a modalidade de Investigação Baseada em Design, tendo sido realizada uma intervenção onde participaram 25 alunos de uma turma e respetiva professora, nos 3.º e 4.º anos de escolaridade. Analisamos episódios de sala de aula centrados no uso dos modelos da reta numérica, de grelhas 10×10 e 10×100 e da barra. Os resultados mostram que o recurso a estes modelos contribuiu para a compreensão da noção de grandeza de número racional, uma vez que promoveram a identificação e mudança de unidade de referência, o uso de diferentes representações para um mesmo número, a mobilização de números de referência, e relações de ordem entre diferentes números. O uso dos modelos apoiou o desenvolvimento da noção de densidade, ajudando a identificar a existência de um número racional entre dois números racionais e a reconhecer a possibilidade de progressivas divisões das unidades por 10.
Palavras-chave: Números racionais; Grandeza de um número; Densidade; Modelos; Representações.

Abstract. In this article we aim to understand how the use of models contributes to the understanding of the magnitude of a rational number and the density of the set of rational numbers. We report part of a broader study that follows a Design Based Research, within which a teaching experiment was carried out with 25 students and their teacher, in grades 3 and 4. We analyze classroom episodes where the number line model, 10×10 and 10×100 grids and the bar model were used. The results show that using these models contributed to the understanding of the magnitude of a rational number, as they promoted unit identification and unit change, association of different representations to the same number, call upon reference numbers, and order comparisons between different numbers. The use of models supported the development of the notion of density, supporting the identification of a rational number between two rational numbers and the recognition of the possibility to further partition units by 10.
Keywords: Rational numbers; Magnitude of a number; Density; Models; Representations.

Introdução

Na aprendizagem dos números racionais surgem questões e desafios que provocam uma transformação e ampliação do conceito de número até então construído pelos alunos com base nas características dos números inteiros[1] (Swan, 2001). Siegler, Thompson e Schneider (2011) propuseram uma teoria integrada de desenvolvimento numérico segundo a qual o processo de transformação do conceito de número ocorre, por um lado, com o reconhecimento pelo aluno de que todos os números racionais, incluindo os números inteiros, possuem grandeza. A grandeza de um número é entendida como o *tamanho* ou o *valor* de um número, estreitamente relacionada com a comparação e ordenação de números, pertencentes ao conjunto ordenado dos números racionais, e que permite a sua localização na reta numérica. Por outro lado, o processo de transformação do conceito de número passa também pelo reconhecimento, pelo aluno, das características que são específicas dos conjuntos numéricos, como a propriedade densidade do conjunto dos números racionais.

São vários os estudos que mostram as dificuldades dos alunos na compreensão da noção de grandeza de um número racional e da propriedade de densidade deste conjunto numérico. Os alunos tendem a considerar que, por exemplo, $\frac{1}{5}$ é maior que $\frac{1}{4}$ uma vez que cinco é maior que quatro (e.g., Stafylidou & Vosniadou, 2004), ou a comparar dois numerais decimais[2] interpretando a parte não inteira de cada numeral como se de um número inteiro se tratasse, afirmando, por exemplo, que 0,25 é superior a 0,5 uma vez que 25 é maior que 5 (e.g., Durkin & Rittle-Johnson, 2015).

De acordo com estudos recentes (McMullen, Laakkonen, Hannula-Sormunen, & Lehtinen, 2015; van Hoof, Degrande, Ceulemans, Verschaffel, & van Dooren, 2018), a identificação da grandeza de um número racional é um dos primeiros indicadores da compreensão de número racional pelos alunos. A compreensão da densidade deste conjunto numérico parece ser mais complexa. Por exemplo, no estudo de van Hoof et al. (2018), dos 201 alunos dos 4.º e 5.º anos, apenas cerca de 19% revelam alguma evidência de compreensão de densidade do conjunto dos números racionais. O facto de os números racionais poderem ser expressos através de diferentes representações simbólicas contribui para a complexidade na compreensão da densidade. De acordo com estudos realizados com alunos mais velhos (com idades compreendidas entre os 12 e os 16 anos) (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Vamvakoussi, Christou, Mertens, & van Dooren, 2011), estes tendem a interpretar as diferentes representações de número racional de modo isolado, isto é, consideram que num intervalo limitado por números racionais na representação em fração só existem frações, assim como num intervalo limitado por números racionais na representação em numeral decimal, só existem numerais decimais.

Torna-se necessário que os alunos trabalhem com diferentes representações de números racionais de modo a compreendê-las como representações de números pertencentes a um mesmo conjunto numérico (Owens & Super, 1993; Wang & Siegler, 2013). O recurso a modelos, enquanto representações cujas estruturas realçam determinadas ideias matemáticas, pode contribuir não só para o desenvolvimento da flexibilidade no uso de diferentes representações, mas também para a compreensão da noção de grandeza de um número e da densidade do conjunto numérico uma vez que permitem, por um lado, o desenvolvimento das ideias matemáticas e, por outro, o retorno ao contexto do problema se os alunos o necessitarem (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Assim, neste artigo procuramos compreender de que modo o uso de modelos por alunos do 1.º ciclo contribui para a compreensão da: (i) noção de grandeza de um número racional; e (ii) densidade do conjunto dos números racionais.

Grandeza de número racional e densidade do conjunto dos números racionais

A compreensão do número racional é aqui entendida numa perspetiva de sentido de número, descrito por McIntosh, Reys e Reys (1992) como um conhecimento dos números e operações, associado à capacidade e intuição de o usar de modo crítico e flexível em diferentes situações. É desenvolvido a partir das experiências com números inteiros e, depois, alargado aquando do estudo do conjunto dos números racionais.

Para o desenvolvimento do sentido de número, indissociável do desenvolvimento numérico tal como entendido por Siegler et al. (2011), é fundamental ter uma intuição ou *feeling* dos números (Clarke & Roche, 2009; Lamon, 2007; McIntosh et al., 1992), onde se inclui a noção de grandeza, referida por McIntosh et al. (1992) como um ". . . sentido de tamanho de um número"[3] (p. 6). O reconhecimento da grandeza de um número está fortemente associado à conceptualização da unidade, pois decorre da sua relação com a unidade tomada como referência. Este aspeto assume particular importância no conjunto dos números racionais (Lamon, 1996; Monteiro & Pinto, 2005), uma vez que uma mesma representação pode expressar uma grandeza diferente.

O facto de os números racionais poderem ser expressos em diferentes representações simbólicas, como numeral decimal, percentagem ou fração, torna complexa a perceção da grandeza do número (Siegler & Braithwaite, 2017). Para além da especificidade de cada representação, acresce o facto de, em certos casos, um mesmo número poder ser representado de infinitas formas num dado modo de representação (e.g., $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$). A compreensão de número racional implica assim um reconhecimento desse número em diferentes representações, sendo que é no conjunto das diferentes perspetivas fornecidas pelas diferentes representações que resulta a compreensão da ideia nelas expressa (Tripathi, 2008). A transformação de representações, mantendo ou alterando o tipo de representação, contribui ainda para a distinção necessária entre o que é o número representado e a sua representação (Duval, 2006). O reconhecimento de múltiplas formas de representação de um número racional pressupõe a identificação da grandeza desse número, e, numa perspetiva mais abrangente, é parte integrante do processo de ampliação do conceito de número (McMullen et al., 2015) e indicador de compreensão de número racional (Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1993).

Destacamos o papel que os modelos podem assumir para o desenvolvimento de flexibilidade no uso de diferentes representações e para a construção de uma visão holística de número racional (Tripathi, 2008). Os modelos podem ser entendidos como representações que refletem aspetos matemáticos e estruturas consideradas relevantes para a situação em que se utilizam, podendo assumir diferentes formas, como materiais, esquemas ou até mesmo símbolos (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Os modelos apoiam a transição entre o conhecimento associado à realidade, criada num problema significativo para os alunos, e o conhecimento subjacente a ideias matemáticas formais (van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Deste modo, surgem inicialmente dependentes do contexto o que significa que não são aplicáveis a outros contextos, sendo por isso designados como *modelos de* (Gravemeijer, 1999). Estes modelos evoluem para *modelos para* (Gravemeijer, 1999), utilizados em várias situações, independentemente do contexto específico do problema, quando a atenção recai sobre as relações matemáticas envolvidas e não na situação descrita no problema. Importa sublinhar que o potencial dos modelos, associado às estruturas matemáticas a eles subjacentes, é dependente de quem os utiliza (Lamon, 2001) e, por isso, devem ser intencionalmente focados pelo professor (Prediger, 2013).

Neste estudo, centramo-nos em três modelos: a reta numérica, a grelha 10×10 (que depois evoluiu para a grelha 10×100) e a barra. A reta numérica assume particular importância neste estudo pois este modelo permite a ordenação e localização de números inteiros e números racionais, cuja continuidade se pretende valorizar (Siegler et al., 2011). No uso deste modelo está subjacente a interpretação de número racional no significado de medida, para a qual é essencial a identificação da unidade de referência. De entre as diferentes formas em que a reta numérica pode ser apresentada, incluindo a reta numérica não graduada ou a reta numérica dupla, centramo-nos na reta numérica estruturada cujo intervalo relativo à unidade de referência é dividido num determinado número de partes iguais.

As características da grelha 10×10 enfatizam a estrutura do sistema de numeração decimal, fundamental para a compreensão de número racional representado em numeral decimal. À semelhança da reta numérica, este modelo apoia a representação de número racional em diferentes representações simbólicas (por exemplo, 0,25 = $\frac{25}{100}$ = 25%), contribuindo para a perceção da grandeza de um número e, deste modo, promovendo o estabelecimento de relações de ordem entre números racionais (Cramer, et al., 2015; Cramer, Monson, Wyberg, Leavitt, & Whitney, 2009). Este modelo privilegia a interpretação de números racionais no significado parte-todo, contribuindo para a compreensão de número racional que decorre também do entendimento dos diferentes significados poderá assumir (Lamon, 2007).

A barra é uma representação retangular, de dimensões variáveis e que não apresenta qualquer divisão. Por este motivo, permite uma utilização diferente por cada aluno, sendo dividida ou aumentada de acordo com o entendimento de número racional ou as relações que os alunos estabelecem entre números racionais (Middleton, van den Heuvel-Panhuizen, & Shew, 1998). Este modelo possibilita de forma intuitiva a interpretação de número racional no significado parte-todo e medida, uma vez que pode ser facilmente transformado numa representação que se aproxime do modelo da reta numérica ou ainda da reta numérica dupla, dando visibilidade à natureza relacional de número racional (Middleton et al., 1998).

Ao apoiarem uma perceção e estabelecimento de relações de ordem entre diferentes números racionais, estes modelos possibilitam também o reconhecimento da existência de um número racional situado entre dois números racionais representados. Este reconhecimento é um primeiro passo fundamental para a compreensão da densidade do conjunto dos números racionais.

Sendo uma propriedade que não é partilhada pelo conjunto dos números inteiros, a compreensão da densidade implica reconhecer que a sequenciação de números e a existência de um número sucessor são características específicas do conjunto dos números inteiros (McMullen et al., 2015; Ponte & Serrazina, 2000) e que não se estendem ao conjunto dos números racionais. Os números racionais constituem um conjunto denso uma vez que, para cada número, não existe um número sucessor, sendo que existem infinitos números racionais entre quaisquer dois números racionais (Harnett & Gelman, 1998; McMullen et al., 2015; Monteiro & Pinto, 2005).

Metodologia de investigação

Neste artigo reportamos parte de um estudo mais amplo que segue a modalidade de Investigação Baseada em Design (IBD) (Ponte, Carvalho, Mata-Pereira, & Quaresma, 2016). Especificamente, segue-se um tipo de IBD que é designado por Cobb, Jackson e Dunlap (2016) como estudo de design na sala de aula, uma vez que é uma investigação centrada nos processos de aprendizagem de um conteúdo específico, no contexto de sala de aula, neste caso a construção da compreensão de número racional na sua representação em numeral decimal, que contou com o envolvimento da professora da turma onde se realizou a investigação.

O enquadramento teórico apresentado na secção anterior permitiu suportar as decisões tomadas na preparação da intervenção, tendo sido revisitado em vários momentos da intervenção. Esta forte interligação entre as componentes teórica e pragmática conferem à IBD o seu carácter cíclico. A IBD realizada teve um ciclo de intervenção com três microciclos, cada um deles constituído pela (i) preparação da intervenção; (ii) experimentação em sala de aula; e (iii) análise retrospetiva dos dados recolhidos que informaram o microciclo seguinte (Cobb & Gravemeijer, 2008; Cobb et al., 2016; Gravemeijer & Cobb, 2006). Da análise realizada sobre a fase de experimentação de um dos microciclos resultaram elementos que apoiaram a fase de preparação do microciclo seguinte.

Na preparação do primeiro microciclo foi considerado que os alunos tinham trabalhado anteriormente com números racionais em fração, maioritariamente frações unitárias, com um significado parte-todo. Tendo estes elementos como ponto de partida, e considerando as ideias teóricas previamente apresentadas, foram planeadas tarefas cujo contexto privilegiasse uma interpretação de número racional no significado de medida, valorizando-se o uso da reta numérica.

Após a experimentação em sala de aula, a análise retrospetiva levou-nos a promover no microciclo seguinte o recurso ao modelo da grelha 10×10, posteriormente adaptada na grelha 10×100 e, embora não seja foco de análise neste artigo, também a grelha 20×50 (ou *decimat*). As tarefas realizadas e os modelos valorizados privilegiaram a interpretação de número racional no significado parte-todo. Foi antecipado que promovessem o reconhecimento da estrutura subjacente ao numeral decimal, dando visibilidade às relações entre as subdivisões das unidades, subjacentes ao sistema de numeração decimal, e à possibilidade de continuar a subdividir as unidades em partes progressivamente menores.

O trabalho realizado informou o terceiro microciclo, em que foram propostas tarefas que levassem à interpretação de números racionais no significado de medida e parte-todo. Foram usados o modelo da barra e retomados os restantes modelos já usados, de modo a promover flexibilidade no uso de diferentes representações de número racional.

Os participantes foram os 25 alunos de uma turma de uma escola em Lisboa, a professora da turma e a investigadora (primeira autora). A intervenção desenvolveu-se no 3.º e 4.º ano, com início no ano letivo de 2013/2014. Foram propostas 18 tarefas que foram resolvidas em aulas de 90 minutos, num total de 16 semanas nos dois anos letivos. As tarefas foram propostas pela investigadora à professora da turma, analisadas e discutidas em reuniões conjuntas e alteradas sempre que necessário. Foi elaborado um guião de exploração de cada tarefa com indicações relativas à organização dos alunos, objetivos da tarefa, sugestões para a sua exploração e antecipação de resoluções dos alunos. As aulas seguiram, na sua maioria, a mesma organização em diferentes momentos: um primeiro momento de abordagem à tarefa, o segundo de resolução da tarefa, realizada em pequenos grupos ou em pares, e o terceiro de discussão coletiva.

Os principais processos de recolha de dados foram as gravações vídeo e áudio das aulas, a recolha dos registos realizados pelos alunos e a realização de notas de campo pela investigadora. Neste artigo analisamos cinco episódios de sala de aula, ilustrativos do uso de modelos em tarefas que sugerem um foco na grandeza de números e/ou densidade do conjunto dos números racionais: os dois primeiros episódios ocorreram no primeiro microciclo, o terceiro ocorreu no segundo microciclo e os dois últimos episódios integraram o terceiro microciclo. Os dados apresentados referem-se a momentos de resolução das tarefas em pares ou individualmente pelos alunos da turma, identificados com nomes fictícios, e a momentos de discussão coletiva.

Os episódios foram analisados tendo em conta o modo como o uso de cada modelo contribuiu para a compreensão da noção de grandeza de um número racional e de densidade do conjunto dos números racionais. A compreensão da grandeza foi analisada considerando: (i) a comparação de números racionais em diferentes representações; (ii) a identificação da unidade de referência; (iii) o uso de números de referência; e (iv) a representação de um mesmo número racional em diferentes representações. Relativamente à densidade, os episódios foram analisados considerando: (i) a identificação de um número racional entre dois números racionais; e (ii) o reconhecimento da possibilidade de realizar partições sucessivas de unidades progressivamente menores.

Resultados

Compreensão da grandeza e densidade apoiada pela reta numérica

A intervenção iniciou-se com a exploração de relações entre diferentes capacidades de garrafas de água, nomeadamente, de 1 *l*, 0,75 *l*, 0,5 *l* e 0,25 *l*. Para tal, os alunos sentiram a necessidade de ir marcando, na garrafa considerada como unidade, até onde chegava a água das outras garrafas quando vertidas naquela. Assim, naquela garrafa foi traçada uma linha vertical onde constavam as marcas relativas às diferentes capacidades das outras garrafas. A tarefa que analisamos seguiu-se a esta exploração, tendo sido a primeira em que a reta numérica foi apresentada com graduação em décimas.

Foi mantido o contexto das garrafas de água e apresentado um garrafão associado à reta numérica. Foram apresentadas várias garrafas com diferentes capacidades representadas em numeral decimal (Figura 1), sendo pedido que os alunos, em pares, assinalassem no garrafão, com o auxílio da reta, até onde chegaria a água contida nas garrafas quando vertidas para o garrafão.

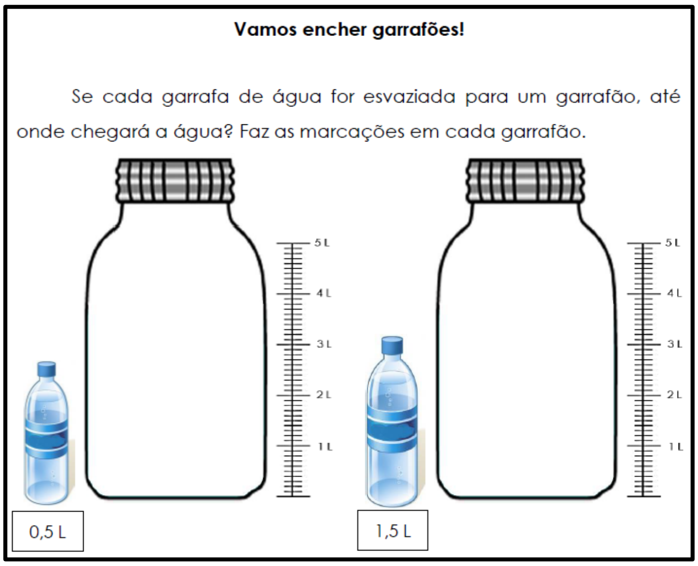


Figura 1. Parte do enunciado da tarefa “Vamos encher garrafões!”

Uma vez que a reta numérica foi apresentada com um intervalo de 0 a 5, entre alguns alunos surgiu uma discussão em torno da unidade de referência a considerar. Rute, que trabalhou com Dinis, procurou relacionar os numerais apresentados com o garrafão, que conceptualizou como unidade de referência:

Rute: Isto é para saber quantas destas [garrafas] é que é para encher esta [garrafão]?

. . .

Rute: Espera Dinis, isto a pergunta é... Olha, se cada garrafa de água for esvaziada para um garrafão até onde subirá a água? Mas o que é que a pergunta? O que é que nós estamos a fazer? Não estou a perceber.

Dinis: É só dizermos quanto é que vale.

Rute: Quanto é que vale? Não é nada quanto é vale... Tu não sabes. . .

Dinis: Começa a fazer as marcações Rute.

. . .

Rute: Fazer marcações de quê?!

Dinis: Então, de quanto é que isto vale. Por exemplo…Quanto é que isto representa.

Perante as diferentes representações apresentadas na tarefa (garrafa, garrafão, reta numérica e representação de número racional em numeral decimal), para Rute não foi imediato o reconhecimento de que teria que representar o mesmo número expresso em numeral decimal na reta numérica. Após esta discussão com o colega, a aluna identifica o garrafão ou 5 litros como unidade de referência. Esta interpretação é evidente quando, de seguida, interpreta 0,25 *l* como "Tem de ser um quarto de cinco".

Já Dinis parece centrar a sua atenção no número representado, dissociando-o da sua representação, referindo "É só dizermos quanto é que vale", tentando ajudar a colega ao pedir-lhe para localizar os números na reta numérica. Dinis identificou 1 *l* como unidade de referência, que se tornou evidente quando reconheceu, por exemplo, que 0,25 teria "de ser abaixo de um litro".

No par constituído por Bárbara e André, ambos consideraram diferentes unidades de referência ao procurar posicionar 0,5 *l*:

Bárbara: Olha, é muito fácil. Olha esta é zero vírgula cinco.

André: Só temos que contar cinco tracinhos!

Bárbara: Não é bem... Pronto, então imagina, zero vírgula cinco, pensa no dez, cinco é metade de dez, não é? Pensa cem por cento, é como se fosse cinquenta por cento, metade!

André: Cinquenta por cento é metade disto! [referindo-se a metade da garrafa] E cinquenta por cento é cinco traços! [referindo-se a cinco décimas]

Bárbara: Não, não é! . . . Olha, isto é como se fosse metade de uma garrafa, então é metade do garrafão André!

Os dois alunos mobilizaram a representação de percentagem para interpretar o numeral decimal, representando como 0,5 ou 50%, considerado ainda como "metade". Contudo, referem-se a unidades de referência diferentes. Bárbara tomou como unidade o garrafão (5 *l*) e André a garrafa (1 *l*). O par acabou por pedir ajuda à investigadora que chamou a atenção para o facto de metade do garrafão corresponder a 2,5 *l* e a garrafa ter a capacidade de 0,5 *l*. Os alunos reconheceram que 2,5 *l* seria superior a 0,5 *l*, assinalando depois a posição de 0,5 corretamente na reta.

Na localização de 0,25 *l* na reta numérica, André contou o correspondente a 25 divisões, ou seja, 25 décimas, assinalando a posição 2,5. Bárbara ajudou o colega recorrendo à relação entre 0,25 e 0,5, apoiada pela transformação entre representações:

André: Mas esta chega até aqui [localização de 2,5 na reta numérica].

Bárbara: Não, não chega André! Isto [0,25] é menos do que isto [0,5]! Isto é metade, isto é um quarto! Olha, cem por cento é o cinquenta e depois o vinte e cinco. A metade e o quarto André!

André: Espera um segundo... Então mas se isto não é, e agora estou a ver que tens toda a razão, tem de ser menos do que isto... Ou seja vai abaixo da unidade. (…) Podemos fazer a metade deste [0,5 *l*]?

Bárbara comparou os números 0,25 e 0,5, recorrendo para isso à representação em percentagem e fração. Deste modo, a aluna associa a uma mesma localização na reta numérica diferentes representações simbólicas de um mesmo número. As transformações entre representações parecem ter auxiliado André a identificar 0,25 como menor que 1 e correspondente a metade do número representado por 0,5. Esta última relação evidencia que os alunos reconhecem a existência de, pelo menos, um número racional situado entre 0 e 0,5, etapa inicial importante para o reconhecimento da densidade dos números racionais. No entanto, ambos consideraram que não era possível marcar 0,25 *l* na reta numérica:

André: Quanto é que é a metade de cinco?

André e Bárbara (em simultâneo): É dois e meio.

André: Só que ali não representamos, fazemos no dois.

Bárbara: OK.

Embora os alunos reconheçam que metade de 0,5 seria "dois e meio", o facto de a reta ser apresentada com a unidade dividida em décimas parece levar ambos a não considerar possível a localização de 0,25, marcando antes uma posição aproximada (0,2). Bárbara e André parecem revelar uma interpretação da reta numérica como um conjunto de pontos discretos, provavelmente consequente da utilização deste modelo com números inteiros.

Já Dinis reconheceu a possibilidade de marcar números nos espaços compreendidos entre as décimas já assinaladas na reta:

Dinis: Deixa-me contar os... Aqui porque se contar ao contrário, então vai noventa, oitenta, setenta, sessenta, cinquenta, depois vou para o quarenta, depois vou para o trinta, mas está no meio do vinte e do trinta. Por isso há de ser vinte e cinco.

Dinis associou dez a cada uma das divisões de uma unidade. É provável que o aluno não estivesse a recorrer a "dez" compreendendo que poderia dividir cada décima em 10 centésimas. Talvez o tenha feito por associar à unidade (1 *l*) a noção de 100, unidade fortemente relacionada com a percentagem. Dinis referiu que 0,25 "está no meio do vinte e do trinta", fazendo a marcação a meio do espaço compreendido entre as décimas.

Uma outra tarefa identificava a posição do número representado por 12,05 na reta numérica com uma seta, sendo apenas visível o traço correspondente à localização do número. Era pedido que os alunos discutissem em pares se o número em questão seria 12,05 ou 12,5 (Figura 2).

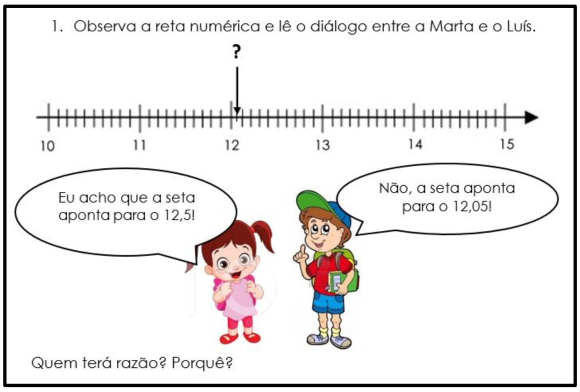


Figura 2. Questão 1 da tarefa "Localização de números na reta numérica" (Tarefa adaptada de Brocardo, Delgado, & Mendes, 2010)

Inicialmente, foram vários os alunos que começaram por considerar que ambos os numerais representavam o mesmo número, interpretando o zero na parte não inteira do numeral 12,05 como um algarismo que não altera o valor do número representado. Frederico referiu mesmo "Porque nós… Para mim e para a Íris (colega com quem trabalhou) o zero não está lá a contar muito".

Contudo, foi ao refletir sobre a representação dos numerais na reta numérica, que começaram a surgir algumas hesitações relativamente à grandeza de cada um dos números. Tal foi evidente quando André partilhou com o colega Dinis a sua hesitação:

André: Não, mas os dois são iguais! Porque nenhum deles... Mas está ali dentro...

Dinis: Pois...

André: Se calhar os dois, são os dois aqui, se calhar nenhum tem razão!

A afirmação de André "Mas está ali dentro…" evidencia que o aluno parece reconhecer a existência de números entre as marcações apresentadas, uma observação fundamental para o início da compreensão de densidade.

Outra aluna, Rute, pareceu interpretar a parte não inteira de 12,05 também como metade de uma unidade, diferente da unidade de referência:

Rute: Isto é o que a Marta diz, que é doze vírgula cinco. Doze unidades e cinco décimas. Só que eu acho que ele é que tem razão, zero vírgula cinco [referindo-se a 12,05] é metade. Então estamos a falar metade de um quadrado, não é da unidade toda. Por isso é que eu acho que é da unidade.

Rute identificou claramente a unidade de referência, ao alertar a colega Bárbara que não estava a considerar a "unidade toda". A aluna interpretou 0,05 como "metade de um quadrado", referindo-se ao espaço compreendido entre 12,1 e 12,2. A aluna parece usar o modelo da reta numérica que enfatiza uma interpretação de número racional no significado de medida, integrando a interpretação parte-todo, considerando a reta numérica como uma barra, dividida em vários espaços que denomina por quadrados.

Rute começou depois a associar dez a cada espaço, referindo "O quadradinho é como se fosse dez", embora não verbalize por que o fez. Talvez o tenha feito para procurar identificar a grandeza relativa a 0,5 (em 12,05). Uma vez que 0,5 significa metade, Rute poderá ter concluído que 0,05 (05) seria a metade de 10 (0,10). É importante notar que esta associação a dez, ainda que pouco sustentada, é fundamental para a compreensão da extensão da estrutura do sistema de numeração decimal ao conjunto dos números racionais na sua representação em numeral decimal.

O uso da reta numérica para localizar números racionais permitiu que os alunos interpretassem representações que se revelavam, inicialmente, incompreensíveis (como 12,05). O espaço correspondente a uma décima não só foi entendido como compreendendo outros números, noção fundamental para a compreensão de densidade, como também foi interpretado por alguns alunos como estando dividido em dez partes iguais, aspeto essencial para a compreensão do sistema de numeração decimal quando estendido aos números racionais.

Compreensão de grandeza e densidade apoiada pelas grelhas 10×10 e 10×100

O modelo da grelha 10×10 foi apresentado como uma "toalha", dividida em cem partes iguais. Após a exploração deste modelo, foi proposta uma tarefa que apelava à comparação de números racionais representados em numeral decimal, recorrendo ao modelo da grelha 10×10.

Uma das questões colocadas foi "Será 0,67 maior que 0,9?". No momento de discussão coletiva, Jorge partilhou como usou o modelo para comparar os dois numerais:

Jorge: Primeiro pensei que zero vírgula sessenta e sete fosse maior que zero vírgula nove porque à primeira vista o sessenta e sete parece maior que o nove. . . Mas depois vi que podia pensar de outra maneira. Então, se nós pensarmos que cada coluna tem dez centésimas nós pintávamos seis colunas destas, sem o sete (em 0,67) ficava só sessenta. E o outro [0,9] ficava noventa centésimas, era maior que pintar sessenta e sete centésimas.

Jorge recorreu ao modelo da grelha 10×10 para representar e comparar os números (ver Figura 3).

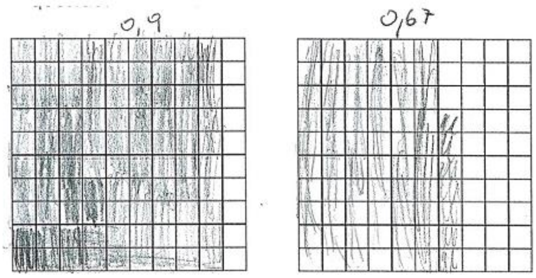


Figura 3. Registo realizado por Jorge na tarefa “Provas e Toalhas”

Já no par constituído por Dinis e André, foi imediato que 0,9 representava um número superior a 0,67. Dinis justificou que “Zero vírgula nove, porque zero nove é igual a zero vírgula noventa!”, sem aparente necessidade de usar um modelo. Já André recorreu ao modelo da grelha para justificar à investigadora a sua resposta:

André: Então porque se nós... Por exemplo, temos aqui unidades divididas em cem partes iguais (referindo-se à grelha 10×10).

. . .

André: Ora, um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove (conta nove colunas na grelha). Até aqui. Até aqui pintámos noventa quadradinhos porque... Uma décima vale dez.

André recorreu ao modelo para mostrar que 0,9 é equivalente a 0,90, identificando nove colunas como 0,9 mas correspondendo a noventa quadrículas, ou seja, 90 centésimas. Deste modo, o aluno mobilizou o modelo para justificar a equivalência entre os numerais. André referiu ainda que “. . . uma décima vale dez”, o que parece indicar que reconhece a décima como sendo uma unidade dez vezes superior à centésima, relação fundamental para a compreensão da estrutura do sistema de numeração decimal, no caso da representação em numeral decimal.

De seguida, foi explorada uma representação que designámos por “barrinha das milésimas” que resultou de uma adaptação da grelha 10×10 a um modelo que permitisse a representação de numerais com partes não inteiras constituídas até às milésimas. Com uma forma retangular, a barra representa a unidade, dividida em dez quadrados, as décimas, cada um dividido em dez colunas, as centésimas, que por sua vez estão divididas em dez partes iguais, as milésimas. Após uma discussão inicial em torno das características da grelha 10×100, foi pedido que os alunos representassem uma décima usando cor amarela, uma centésima a vermelho e uma milésima a verde. Vários alunos identificaram cada parte tal como Mafalda, cujo registo (incorreto) se apresenta na Figura 4.

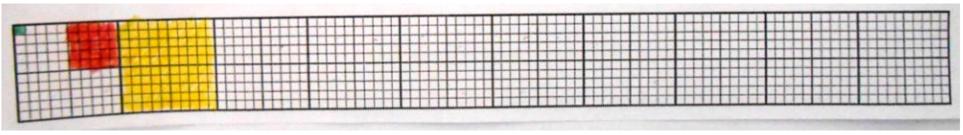


Figura 4. Registo de Mafalda na tarefa “Números em barrinhas”

As características da grelha, constituída por quadrados de diferentes tamanhos, parecem ter induzido os alunos a pensar que a décima corresponderia ao quadrado de maiores dimensões, a milésima ao quadrado menor, e a centésima ao quadrado “médio”. Frederico, que fez um registo semelhante ao da Figura 4, explicou:

Frederico: Eu acho, já que isto está dividido em quatro partes iguais, o quadrado inteiro, eu achei que uma milésima já era um bocadinho e uma centésima já achava que era aquilo…

I: Porque era um bocadinho maior…

Frederico: Porque é um bocadinho maior.

I: A centésima é um bocadinho maior que a milésima. Mas quantas vezes é maior?

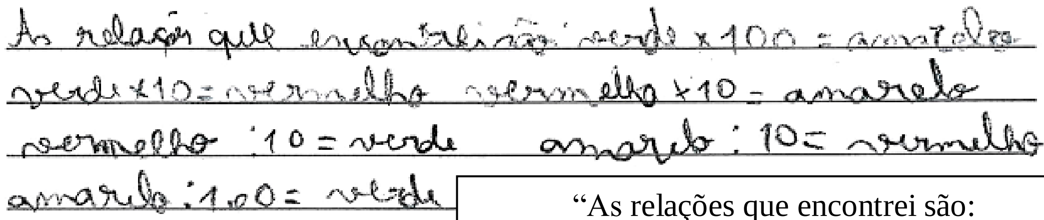
Frederico (de imediato): Dez!

O aluno conseguiu, de seguida, verbalizar que deveria ter pintado dez quadradinhos. As características da barra pareciam levar à identificação de cada parte fortemente influenciada pela forma de quadrado de cada uma das partes. Contudo, esta disposição da barra permitiu também reconhecer a relação existente entre cada uma das partes identificadas. É com base na configuração da barra, que Rute explica como é que ela e o colega André, que também tinham identificado uma centésima tal como se apresenta na Figura 4, alteraram a sua resposta:

> Rute: Mudámos de ideias porque vimos que em cada quadrado (uma décima) tinha dez filas (dez centésimas). Como havia dez quadrados, dez vezes dez é cem. E a palavra centésima vem de cem por isso era uma… (faz um gesto vertical com a mão) era uma barrinha.

Rute e André, identificando a décima parte da barra, contam as dez filas existentes em cada uma. Uma vez que existem dez décimas, existiriam cem filas em toda a barra, logo, cada fila teria que ser uma centésima. Associando o nome da parte não inteira com a parte pretendida no modelo, Rute tornou clara a relação entre décima e centésima.

Após a identificação de 0,1, 0,01 e 0,001 neste modelo foi pedido aos alunos que explicitassem as relações identificadas entre cada uma dessas partes. Um exemplo das relações estabelecidas é apresentado na Figura 5, na resposta de Artur.



"As relações que encontrei são:
verde×100=amarelo, verde×10=vermelho,
vermelho×10=amarelo, vermelho:10=verde,
amarelo:10=vermelho, amarelo:100=verde"

Figura 5. Registo de Artur na tarefa "Números em barrinhas"

Artur, tal como outros colegas, identificou a partição e agrupamento de unidades numa relação de dez vezes menor ou dez vezes maior, estando subjacente a estrutura do sistema de numeração decimal. É importante referir que foi a primeira vez que estas relações foram claramente identificadas pelos alunos.

Compreensão de grandeza e de densidade apoiada pela barra

Esta tarefa (Figura 6), resolvida no 4.º ano, envolvia a reconstrução da unidade dada uma parte e a construção de partes, menores e maiores que a unidade, a partir de diferentes representações simbólicas de número racional (sem o recurso a régua).

A figura seguinte representa 0,75 de uma tira de papel.

a) Como será a tira de papel completa? Desenha-a.

b) Representa agora 50%, $\frac{4}{3}$, 1,125 e 20% dessa mesma tira de papel.

50 %

$\frac{4}{3}$

1,125

20 %

Figura 6. Enunciado da tarefa "À descoberta da tira" (Tarefa adaptada de Menezes, Rodrigues, Tavares, & Gomes, 2008)

Iremos centrar a análise no modo como os alunos representaram 1,125 e 20% da tira. Vários alunos representaram 1,125 tal como se apresenta na Figura 7: traçaram a barra completa, dividindo de seguida uma segunda barra em dez partes iguais, considerando depois 1,1 e, de seguida, considerando mais um pouco da tira, embora sem precisão. Este tipo de representação revela que os alunos têm uma perceção da grandeza do número racional apresentado.

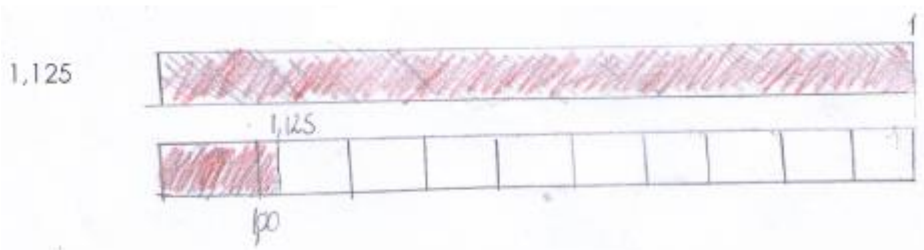


Figura 7. Representação de 1,125 realizada por Matilde, na tarefa "À descoberta da tira"

André também representou 1,125 de modo semelhante ao apresentado na Figura 7. De modo a seguir uma estratégia mais eficiente para a representação do número, a investigadora sugeriu que André visualizasse a que parte da décima correspondiam as vinte e cinco milésimas, recorrendo à barrinha das milésimas. Ao pintar um quadrado correspondente a 0,25, usando a barrinha (tal como a parte assinalada a vermelho na Figura 4), André reconheceu de imediato que se tratava da quarta parte de uma décima, acrescentando: “Então terá que ficar mais ou menos esta unidade (décima) dividida em quatro partes”.

Identificou a décima como unidade, dividindo-a em quatro partes iguais, pintando uma delas de modo a obter vinte e cinco milésimas (Figura 8). André fez uma mudança da unidade, da tira (1) para uma das partes obtidas após a divisão da tira em 10 partes iguais (0,1), reconhecendo a possibilidade de dividir também a nova unidade. Este reconhecimento é importante para a construção da compreensão da densidade no conjunto dos números racionais.

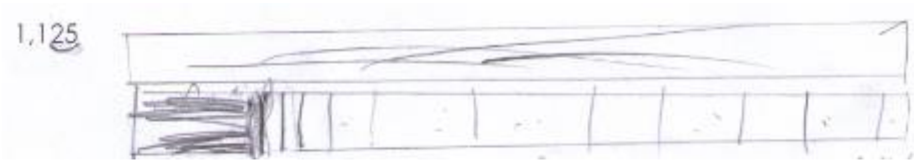


Figura 8. Representação de 1,125 realizada por André, na tarefa “À descoberta da tira”

Relativamente à última parte pedida, Manuel explica como representou 20% (ver Figura 9), evidenciando como usou a barra de modo bastante próximo da reta:

Manuel: Como eu já tinha assinalado os cinquenta por cento pensei que vinte e cinco por cento são metade dos cinquenta por cento. Depois pensei que, como também já tinha assinalado, para uma outra coisa, tinha assinalado uma décima, metade disso seria cinco. Então tirei cinco a esses vinte e cinco por cento e mais ou menos naquela zona fico com os vinte.

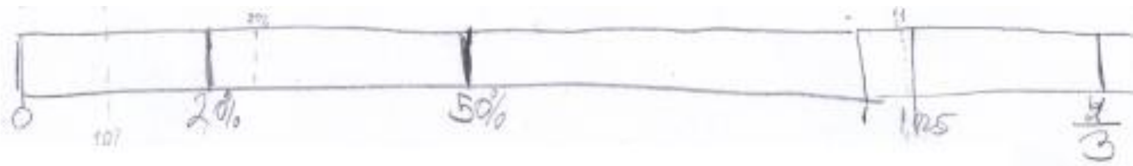


Figura 9. Registo realizado por Manuel, na tarefa “À descoberta da tira”

O uso que Manuel fez da barra evidencia o estabelecimento de múltiplas relações entre diferentes representações. Ao invés de traçar a parte pedida em cada situação, separadamente, o aluno utiliza a barra de modo semelhante a uma reta numérica. Esta integração de elementos da reta no modelo da barra foi consciente, pois referiu que "Primeiro desenhei a régua", referindo-se à reta.

No excerto apresentado, Manuel partilhou o seu processo de aproximação a 20%, usando como referência 50% para obter a sua metade, 25%. De seguida, para ter a noção do que representavam 5% na barra, usou a marcação já feita de uma décima, que havia registado como 10%, para identificar a sua metade, o que evidencia que reconhece que 5% será correspondente à metade de 1 décima.

De destacar que o modelo não foi usado pelos alunos como meio para representar números mas, principalmente, como meio para estabelecer relações entre números, para as quais a perceção da grandeza foi essencial. Essas relações são também evidência de algum reconhecimento de números racionais compreendidos entre dois números racionais já representados na barra, como é exemplo a localização de 1,125 entre 1,1 e $\frac{4}{3}$ realizada por Manuel, importante para a construção da noção de densidade.

Discussão

Através da análise de cinco episódios, procurámos compreender de que modo o uso de modelos contribui para a compreensão da noção de grandeza de um número racional e da densidade no conjunto dos números racionais. Centrámo-nos em episódios que ilustraram o recurso ao modelo da reta numérica, de grelhas 10×10 e 10×100 e da barra. O facto de terem sido analisados vários episódios ao longo da intervenção permitiu identificar uma mudança no modo como os alunos usaram os modelos que se relaciona com a sua própria construção da compreensão da noção de grandeza de um número racional e de densidade do conjunto dos números racionais.

Nos episódios iniciais, a reta numérica foi usada com o propósito de representar números racionais, possibilitando a interpretação de representações ainda pouco familiares aos alunos (como era o caso da representação em numeral decimal). Foi também o uso deste modelo que possibilitou um olhar centrado nos espaços compreendidos entre divisões já assinaladas na reta, nos quais nem sempre os alunos reconheceram a existência de números racionais.

Para a perceção da grandeza de um número, possibilitada através da localização de números racionais na reta numérica, revelou-se essencial o estabelecimento de relações entre diferentes representações simbólicas assim como a identificação da unidade de referência. Assim, um mesmo ponto da reta numérica foi associado a diferentes representações (e.g., 0,25 = $\frac{1}{4}$ = 25%) aspeto fundamental para interpretar um mesmo número racional sob diferentes perspetivas (Tripathi, 2008). O facto de terem sido mobilizadas diferentes representações de números racionais possibilitou ainda o desenvolvimento de um sistema de números de referência.

Também o modelo da grelha 10×10 foi usado, numa fase inicial, como meio para representar números, permitindo a sua comparação. Contudo, na tarefa centrada neste modelo, surgiram evidências de que alguns alunos usaram as características subjacentes ao modelo para explicitar relações entre décima e centésima, e entre estas e a unidade, sem necessidade de usar efetivamente este modelo, que teve assim um papel importante na visualização da estrutura do sistema de numeração decimal, tal como sublinhado por Cramer et al. (2015). As relações estabelecidas são um indicador do reconhecimento, ainda que numa fase bastante inicial, do sistema de numeração decimal estendido ao conjunto dos números racionais, importante para a compreensão da propriedade densidade.

A estrutura do sistema de numeração decimal tornou-se ainda mais visível com o recurso ao modelo da grelha 10×100, ao permitir representar e relacionar unidade, décima, centésima, e milésima, possibilitando as relações de natureza multiplicativa tal como as ilustradas pela resposta de Artur (Figura 5).

Por fim, o modelo da barra foi usado com grande flexibilidade pelos alunos, refletindo as relações por eles estabelecidas entre diferentes representações simbólicas e entre estas e a representação icónica da barra. Tal como salientado por Middleton et al. (1998), este modelo revelou grande potencial para ser mobilizado de diferentes formas pelos alunos, evidenciando diferentes modos de relacionar os números.

O uso deste modelo pelos alunos revelou uma perceção da grandeza de um número racional, evidenciada, por exemplo, na representação de 1,125 ou nas relações entre diferentes números racionais, expressos em diferentes representações, realizadas por Manuel (Figura 9). As relações estabelecidas pelos alunos apontam também para alguma perceção de densidade, evidente quando relacionaram, por exemplo, $\frac{1}{4}$ de 0,1 a 0,025 (no exemplo de André) ou 5% como metade de 0,1 (no exemplo de Manuel). Relacionado com este aspeto está o recurso a um sistema de números de referência que auxiliou os alunos na representação dos números racionais, assim como mudanças na unidade de referência considerada.

Os resultados mostram ainda que, numa fase inicial, os alunos sentiram necessidade de identificar a grandeza de números racionais de forma a compararem ou representarem esses números. Foi após revelarem alguma apropriação da noção de grandeza de número racional, que os alunos evidenciaram uma noção, ainda que preliminar, de densidade do conjunto dos números racionais, que assume por isso uma menor expressão na análise realizada.

Conclusão

O uso dos modelos focados neste artigo contribuiu para a construção da compreensão da noção de grandeza de número racional, evidenciada a nível (i) da identificação da unidade de referência, em particular ao ser apresentada a reta numérica graduada de 0 a 5; (ii) da mudança da unidade de referência, igualmente importante para a compreensão da propriedade densidade; (iii) do uso de diferentes representações para expressar um mesmo número; (iv) do recurso de números de referência, especificamente 100% (unidade), 50%$= 0{,}5 = \frac{1}{2}$, 25%$= 0{,}25 = \frac{1}{4}$ e 0,1; e (v) das relações de ordem estabelecidas entre diferentes números racionais. No que diz respeito ao contributo para a construção da compreensão da propriedade densidade, foi possível identificar que os modelos promoveram o reconhecimento da existência de um número racional entre dois números racionais e o reconhecimento da possibilidade de progressivas divisões das unidades por 10, essenciais no sistema de numeração decimal estendido a este conjunto numérico.

Estas conclusões constituem indicadores da compreensão de número racional, uma vez que, tanto a noção de grandeza de número racional, como a de densidade deste conjunto numérico, estão estreitamente relacionadas com a própria compreensão de número racional. Neste sentido, destacamos a perspetiva de continuidade entre a aprendizagem dos números inteiros e a dos números racionais, enfatizada pela teoria integrada de desenvolvimento numérico (Siegler et al., 2011), baseada no uso de modelos, como promotora de uma abordagem aos números racionais, com compreensão, no 1.º ciclo.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa concedida à primeira autora (SFRH/BD/108341/2015).

Notas

[1] Neste artigo, sempre que nos referimos a "números inteiros" estamos a considerar números inteiros não negativos.

[2] Usamos o termo "numeral decimal" para identificar números racionais não negativos escritos de acordo com o sistema de numeração decimal, utilizando vírgula ou ponto.

[3] No original ". . . to sense the general size (or magnitude) of a given number".

Referências

Brocardo, J., Delgado, C., & Mendes, F. (2010). *Números e operações: 1.º Ano*. Lisboa: DGIDC. Disponível em: http://hdl.handle.net/10400.26/5144.

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics, 72,* 127–138.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A. E. Kelly, R. A. Lesh & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68–95). New York, NY: Routledge.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd edition, pp. 481–503). New York, NY: Routledge.

Cramer, K., Monson, D., Ahrendt, S., Colum, K., Wiley, B., & Wyberg, T. (2015). Five indicators of decimal understandings. *Teaching Children Mathematics, 22*(3), 186–195.

Cramer, K. A., Monson, D. S., Wyberg, T., Leavitt, S., & Whitney, S. B. (2009). Models for initial decimal ideas. *Teaching Children Mathematics, 16*(2), 106–117.

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction, 37,* 21–29.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103–131.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155–177.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 17–51). London: Routledge.

Harnett, P., & Gelman, R. (1998). Early understandings of numbers: Paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and Instruction, 8*(4), 341–374.

Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 170–193.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco, & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics – 2001 Yearbook.* (pp. 146–165). Reston, VA: NCTM.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Reston, VA: NCTM.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2–8.

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M., & Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instruction, 37*, 14–20.

Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2008). *Números racionais não negativos: Tarefas para o 5.º ano.* Lisboa: DGIDC.

Middleton, J. A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Shew, J. A. (1998). Using bar representations as a model for connecting concepts of rational number. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 302–312.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14*(1), 89–108.

Owens, D. T., & Super, D. B. (1993). Teaching and learning decimal fractions. In D.T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 137–158). Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante, 25*(2), 77–98.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico.* Lisboa: Universidade Aberta.

Post, T. R., Cramer, K. A., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications from research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts: Multiple research perspective. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Learning, teaching and assessing rational number concepts: Multiple research perspective.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Prediger, S. (2013). Focussing structural relations in the bar board: A design research study for fostering all students' conceptual understanding of fractions. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society of Research in Mathematics Education* (TWG2, CERME8) (pp. 343–352). Antalya, Turkey: Middle East Technical University and ERME.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14,* 503–518.

Siegler, R. S., & Braithwaite, D. W. (2017). Numerical development. *Annual Review of Psychology, 68,* 187–213.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Scheiner, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*, 273–296.

Swan, M. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. In P. Gates (Ed.), *Issues in mathematics teaching* (pp. 147–165) London: Routledge/Falmer.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438–445.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction, 21,* 676–685.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010) How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction, 28*(2), 181–209.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 9–35.

van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L., & van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences, 61,* 99–108.

Wang, Y., & Siegler, R. S. (2013) Representations of and translation between common fractions and decimal fractions. *Chinese Science Bulletin, 58*(36), 4630–4640.

Anexo 2

Morais, C. & Serrazina, M. L. (2018b). Extensões de conhecimentos na construção da compreensão de numeral decimal. *BOLEMA, 32*(61), 631–652. doi: 10.1590/1980-4415v32n61a16

Artigo II

Versão dos autores

Extensões de Conhecimentos na Construção da Compreensão de Numeral Decimal

Knowledge Extensions in the Construction of Decimal Numbers Understanding

Cristina Morais

Maria de Lurdes Serrazina

Resumo

Numa perspectiva de desenvolvimento numérico em que o conceito de número é ampliado à medida que diferentes conjuntos numéricos são abordados, é natural que os alunos recorram aos conhecimentos que têm e os estendam aos novos conjuntos, o que nem sempre conduz a conclusões corretas. Neste sentido, este artigo tem como objetivo compreender que potencialidades têm situações que sugerem extensões de conhecimentos incorretas como meio para promover a construção da compreensão de numeral decimal. Apresentamos parte de um estudo que segue a modalidade de Investigação Baseada em Design, tendo sido realizada uma experiência de ensino onde participaram 25 alunos e a professora titular, no 3º e 4º ano de escolaridade. Neste texto, são analisadas as discussões entre quatro alunos, organizados em pares, em torno de tarefas centradas em três extensões de conhecimentos incorretas. Os resultados evidenciam que as situações propostas promovem o recurso a justificações e contraexemplos, desenvolvendo assim o raciocínio matemático. Os resultados revelam também potencialidades para a construção da compreensão de numeral decimal, nomeadamente a nível da mobilização de modelos, conceitualização da unidade e da compreensão do valor de posição dos algarismos no numeral decimal, em particular de zero.

Palavras-chave: Números Racionais. Numerais Decimais. Extensões de Conhecimentos.

Abstract

Considering a perspective of numerical development where the concept of number is expanded as different number sets are approached, it's only natural that pupils rely on their knowledge and extend them to the new sets, which does not always lead to correct conclusions. Hence, in this paper we aim to understand the potential of situations that suggest incorrect knowledge extensions as a means to promote the construction of decimal number understanding. Part of a broader study that follows a Design Based Research is reported, within which a teaching experiment was carried out with 25 students and their teacher, in 3rd and 4th grades. In this paper, we analyze the discussions among four students, organized in pairs, regarding tasks that promoted the discussion of three common incorrect knowledge extensions. The results evidence that the proposed situations promote the use of justifications and counterexamples, developing mathematical reasoning. The results also reveal the potential to build decimal number understanding, namely in models use, unit conceptualization, and place value concept, in particular zero.

Keywords: Rational Numbers. Decimal Numbers. Knowledge Extensions.

1 Introdução

Na literatura encontramos vários estudos que identificam dificuldades reveladas pelos alunos ao trabalhar com números racionais[4] na sua representação decimal, muitas vezes associadas à influência de conhecimentos prévios dos números inteiros[5] (e.g., DURKIN; RITTLE-JOHNSON, 2015; RESNICK; NESHER; LEONARD; MAGONE; OMANSON; PELED, 1989; STEINLE; STACEY, 2003) e que podem persistir até à vida adulta (e.g., VAMVAKOUSSI; VAN DOOREN; VERSCHAFFEL, 2012), o que é revelador da importância da compreensão de numeral decimal[6].

Ao invés de considerarmos estas dificuldades como um fim em si mesmas ou resultado entendido como praticamente inevitável da aprendizagem de números racionais na representação decimal, encaramo-las como evidências de um processo de mudança da conceitualização de número. É natural que os alunos comecem por estender os seus conhecimentos, associados aos números inteiros, para lidar com números pertencentes a um conjunto numérico até então desconhecido. O seu entendimento de número transforma-se e amplia-se à medida que se confrontam com novas questões, provocadas pelo novo conjunto numérico (SWAN, 2001). Assumimos neste estudo a perspectiva de que o desenvolvimento da compreensão de número racional ocorre na continuidade do desenvolvimento da compreensão de número inteiro, através do reconhecimento das características que se mantêm e das que se alteram entre os dois conjuntos numéricos (SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011).

Assim, acreditamos que o recurso a situações que podem conduzir a conclusões incorretas, devido ao uso do que neste artigo se designa por extensões de conhecimentos

[1] Números racionais não negativos.

[2] Ao longo deste artigo, sempre que nos referimos a “números inteiros” estaremos a considerar números inteiros não negativos.

[3] O termo “numeral decimal” é aqui utilizado para identificar números racionais não negativos escritos de acordo com o sistema de numeração decimal, utilizando vírgula ou ponto.

incorretas, pode promover o desenvolvimento da compreensão de numeral decimal, uma vez que apela precisamente ao reconhecimento de diferenças e semelhanças entre números inteiros e números racionais. Ao focar-se a discussão em extensões de conhecimentos, habitualmente realizadas pelos alunos e amplamente identificadas na literatura, criam-se também oportunidades para que os alunos confrontem as suas próprias interpretações com as que estão em discussão (SWAN, 2001).

Evidências de estudos realizados com alunos a partir do 6º ano (ADAMS; MCLAREN; DURKIN; MAYER; RITTLE-JOHNSON; ISOTANI; VAN HELSEN, 2014; DURKIN; RITTLE-JOHNSON, 2012; HUANG; LIU; SHIU, 2008; TSOVALTZI; MELIS; MCLAREN; MEYER; DIETRICH; GOGUADZE, 2010) reforçam o contributo que um trabalho em torno da análise de situações que envolvem extensões de conhecimentos incorretas pode ter. Não só apontam evidências de melhoria no desempenho dos alunos no que se refere ao trabalho com frações e com numerais decimais, mas também indicam menor incidência da realização de extensões incorretas pelos alunos (ADAMS et al., 2014). Contudo, para além destas investigações terem sido realizadas com alunos mais velhos, o fato de serem maioritariamente estudos longitudinais, não permite elaborar sobre quais ideias relativas aos números racionais foram, especificamente, desenvolvidas ou para as quais o contributo deste tipo de trabalho foi importante.

Assim, com este artigo procuramos compreender que potencialidades têm situações que sugerem extensões de conhecimentos incorretas como meio para promover a construção da compreensão de numeral decimal.

2 Extensões de conhecimentos na aprendizagem de numerais decimais

Na investigação, as extensões de conhecimentos que podem induzir a conclusões incorretas são habitualmente designadas por *misconceptions* ou, em português, concepções errôneas. Contudo, este termo não nos parece o que melhor define o nosso entendimento do que são estas extensões de conhecimentos. Confrey (1991) refere que ao usar este termo não estamos a considerar a perspectiva do aluno, cuja ideia é efetivamente válida nas situações que lhe são familiares. Para além disso, a palavra *misconception* ou a expressão concepção errônea parece delinear uma barreira entre o certo e o errado, subentendendo-se a noção de que se trata de algo a evitar (SWAN, 2001). Outra expressão também presente na literatura é a de concepções alternativas, mas esta parece surgir em oposição a *concepções normais* ou à concepção que é culturalmente aceite, parecendo de algum modo reduzir a importância do desenvolvimento de determinado conceito por parte do aluno, que não deixa de ser devidamente fundamentado e conectado com várias ideias (CONFREY, 1991; SWAN, 2001).

Neste estudo, entendemos *extensões de conhecimentos* como evidências de generalizações locais feitas pelos alunos, válidas em determinado domínio e que podem não o ser quando aplicadas a domínios mais amplos (SWAN, 2001), podendo, por isso, levar a conclusões incorretas. As extensões refletem assim a mudança gradual que caracteriza a ampliação da conceitualização de número. O conceito de número, anteriormente revestido das características dos números inteiros, é transformado através de um processo de distinção entre o que são as características comuns a qualquer número (pertencente ao conjunto dos números reais) e o que são as características que apenas se verificam em determinado conjunto numérico (SIEGLER et al., 2011).

A perspectiva assumida neste estudo tem subjacente a noção de que um conceito está em constante mudança e evolução (SWAN, 2001). Ao entrar no conjunto dos números racionais, alguns conceitos até então abordados no conjunto dos números inteiros, são agora ampliados e enriquecidos, noção basilar da teoria integrada do desenvolvimento numérico proposta por Siegler et al. (2011). Estes autores defendem que, no cerne do desenvolvimento numérico, está a compreensão de grandeza numérica (SIEGLER; BRAITHWAITE, 2017), salientando assim a continuidade entre o desenvolvimento do conhecimento relativo a números inteiros e a números racionais. Siegler et al. (2011) referem que faz parte do desenvolvimento da compreensão de número tanto o reconhecimento das características que se salientam no conjunto dos números inteiros, como a existência de um único sucessor, a possibilidade da contagem ou o efeito das operações, bem como o reconhecimento das características que são comuns entre diferentes conjuntos numéricos.

Na literatura, encontramos vários estudos que identificam extensões de conhecimentos dos alunos, principalmente as que estão associadas às características que são específicas do conjunto dos números inteiros, mas que são estendidas ao conjunto dos números racionais, induzindo, por isso, a respostas incorretas. Ao invés de se considerar estas extensões de conhecimentos como obstáculos a evitar, estas devem ser intencionalmente chamadas e tornadas explícitas de modo a serem discutidas pelos alunos, promovendo assim uma aprendizagem com compreensão (SWAN, 2001).

Estendendo determinadas formas de perceber a grandeza de um número, comum aos números reais (SIEGLER et al., 2011), através de conjuntos numéricos diferentes, nem sempre resulta em respostas corretas. Neste estudo iremos considerar três extensões de conhecimentos largamente utilizadas por alunos de diferentes faixas etárias (e.g., DESMET; GRÉGOIRE; MUSSOLIN, 2010; RESNICK et al., 1989; STEINLE; STACEY, 1998), designadas aqui por: (i) *mais algarismos, maior grandeza*; (ii) *zero mais à esquerda*; e (iii) *mais algarismos, menor grandeza*.

Ao usar a extensão *mais algarismos, maior grandeza*, os alunos estendem aos numerais decimais a característica específica dos números inteiros de que quanto maior o número de dígitos que compõe o numeral decimal, maior será a grandeza do número representado (DURKIN; RITTLE-JONHSON, 2015; RESNICK et al., 1989; STEINLE; STACEY, 1998; TIAN; SIEGLER, 2017), por exemplo, o número expresso por 0,15 é entendido como superior a 0,3 uma vez que 15 é superior a 3.

A extensão *zero mais à esquerda* diz respeito às situações em que os alunos não atribuem qualquer valor a zero quando ocupa a posição mais à esquerda da parte não inteira do numeral decimal, por exemplo, 0,03 é entendido como igual a 0,3. Esta extensão resulta da mobilização do conhecimento de que, no conjunto dos números inteiros, o zero quando colocado na ordem mais à esquerda não altera a grandeza do número representado, podendo por isso ser retirado sem alterar o valor do número (DURKIN; RITTLE-JOHNSON, 2015; RESNICK et al., 1989).

Por fim, usando a extensão *mais algarismos, menor grandeza*, os alunos consideram que quanto maior for o número de algarismos que constituem o numeral decimal, menor será a grandeza do número representado. Por exemplo, os alunos consideram que 0,586 representa um número menor que 0,4 porque um numeral com milésimas será menor do que um numeral com décimas, pois as milésimas correspondem a partes mais pequenas da unidade do que as décimas.

Esta extensão é por vezes associada aos conhecimentos relativos a frações, uma vez que frações com denominadores maiores representam partes menores do que frações com denominadores menores, e com igual numerador (DURKIN; RITTLE-JOHNSON, 2015; RESNICK et al., 1989). Contudo, neste artigo não a relacionamos exclusivamente a conhecimentos relativos a fração, uma vez que nos parece estar também associada à compreensão da estrutura decimal, subjacente aos números inteiros e agora estendida ao conjunto dos números racionais na sua representação decimal. A associação de menor grandeza a numerais com mais algarismos quando comparados a numerais com menor número de algarismos, parece revelar a compreensão de que cada algarismo representa uma parte menor do que o algarismo posicionado à sua esquerda, ou seja, revela evidências de compreensão do valor de posição.

Deste modo, consideramos que a extensão *mais algarismos, menor grandeza* é de natureza diferente das duas primeiras extensões referidas. Ao utilizarem esta extensão os alunos não estão apenas a aplicar aos numerais decimais o que reconhecem ser válido nos números inteiros, estão a evidenciar que o seu conceito de número está a alterar-se. Deste modo, interpretamo-la como evidência de desenvolvimento da compreensão de numeral decimal (DURKIN; RITTLE-JOHNSON, 2015).

Situações que sugerem extensões de conhecimentos traduzem oportunidades para compreender o olhar dos alunos sobre os números, podendo também ser facilitadoras da aprendizagem. O recurso a este tipo de situações pode promover o envolvimento dos alunos em processos de reflexão e descoberta matemática, levando-os a encarar de modo construtivo a dúvida e o conflito e, igualmente importante, provoca a necessidade de justificarem a sua atividade matemática (BORASI, 1994; CONFREY, 1991). Para além de justificarem as suas próprias ideias, os alunos procuram justificar respostas que não são as suas, identificando os motivos que as tornam corretas ou incorretas (SIEGLER, 2002).

Deste modo, o trabalho em torno de situações que sugerem extensões de conhecimentos reveste-se de grande importância também para o desenvolvimento do raciocínio matemático. O processo de análise e/ou refutação de determinada extensão de conhecimentos, procurando compreender por que motivo não é válida na situação em que se apresenta, pode constituir-se como uma introdução a processos de raciocínio mais complexos e levar ao recurso de contraexemplos (LANNIN; ELLIS; ELLIOTT, 2011; NCTM, 2000). O envolvimento dos alunos nestes processos pode ainda levar ao desenvolvimento de justificações cada vez mais consistentes, promovendo a sua compreensão de determinadas ideias matemáticas, podendo ter potencialidades a nível da construção de novas ideias (WHITENACK; YACKEL, 2008).

3 Metodologia

Neste artigo reportamos parte de um estudo mais amplo que segue a modalidade de Investigação Baseada em Design (IBD) (PONTE; CARVALHO; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2016). Especificamente, segue-se um tipo de IBD que é designado por

Cobb, Jackson e Dunlap (2016) como *classroom design study*, uma vez que é uma investigação centrada nos processos de aprendizagem de um conteúdo específico, no contexto de sala de aula.

Partindo da revisão de literatura, foram elaborados seis princípios de design, que orientaram a conjectura e os recursos da experiência de ensino: 1) usar tarefas cujo contexto apele ao uso de numerais decimais, nomeadamente nos seus significados de medida e parte-todo; 2) promover transformações entre numeral decimal e outras representações, enfatizando as suas relações; 3) promover o uso de representações que possam ser transformadas em modelos para pensar sobre numerais decimais; 4) apoiar o uso de conhecimentos prévios; 5) promover a discussão de extensões de conhecimentos (que norteia as tarefas que serão foco de análise neste texto); e 6) estabelecer um ambiente de sala de aula onde os alunos são encorajados e se sintam confiantes em partilhar e discutir as suas ideias matemáticas.

A experiência de ensino foi realizada no 3º ano[7] (ano letivo de 2013/2014) e 4.º ano, no ano letivo seguinte. Os participantes foram os 25 alunos de uma turma de uma escola, em Lisboa, a professora e a investigadora (primeira autora). Em conjunto com a professora foram selecionados quatro alunos para uma recolha e análise de dados mais detalhadas. Esta seleção teve por base: (i) igual número de meninas e meninos; (ii) resultados medianos no estudo diagnóstico realizado anteriormente; (iii) comunicação oral mediana; e (iv) desempenho acadêmico em Matemática de nível “Médio”. Neste texto, a análise é centrada no trabalho realizado por estes quatro alunos que constituíram o grupo foco, aqui denominados por Bárbara, Rute, André e Dinis.

As tarefas foram resolvidas em aulas de 90 minutos, uma vez por semana, num total de 16 semanas nos dois anos letivos. As principais fontes de dados são as gravações em vídeo e áudio das aulas, os registros realizados pelos alunos e as notas de campo da investigadora.

A análise assume duas dimensões: o modo como os alunos discutiram as questões apresentadas considerando os indicadores do Quadro 1, particularmente centrados no raciocínio matemático (LANNIN et al., 2011; SIEGLER et al., 2011; WHITENACK; YACKEL, 2008); e a identificação das ideias-chave relativas à compreensão de numeral decimal que daí emergiram.

[4] Alunos, em média, com 8 anos de idade.

Quadro 1 – Indicadores para a análise do uso e discussão de extensões de conhecimentos no trabalho com numerais decimais.

Categoria	Indicadores
Extensões de conhecimentos	• Estende conhecimentos: *mais algarismos, maior grandeza*; *mais algarismos, menor grandeza* e/ou *zero mais à esquerda*. • Identifica extensões de conhecimentos válidas ou não válidas de acordo com a situação. • Justifica por que motivo a extensão de conhecimentos é válida ou não de acordo com a situação; • Usa exemplos, contraexemplos e/ou analogias para explicar que a extensão de conhecimentos é válida ou não, de acordo com a situação.

Fonte: Quadro referente à pesquisa, 2017.

Analisamos três episódios de sala de aula relevantes para a discussão das três extensões de conhecimentos identificadas anteriormente: os dois primeiros episódios ocorreram no 3º ano e o último, no 4º ano. Os alunos trabalharam em pares cuja constituição foi mudando.

4 Episódios da sala de aula

Episódio 1 – Localização de números na reta numérica (3.º ano)

Esta foi a primeira tarefa centrada intencionalmente na extensão *zero mais à esquerda.* É identificada a posição do número representado por 12,05 na reta numérica com uma seta, sendo apenas visível o traço correspondente à localização do número. Foi pedido que os alunos discutissem se o número em questão se tratava de 12,05 ou 12,5 (Figura 1).

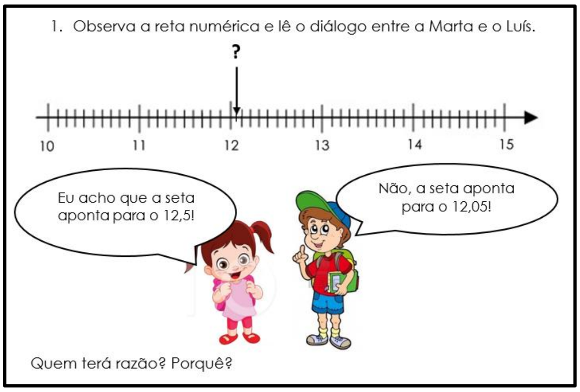


Figura 1 – Questão 1 da tarefa “Localização de números na reta numérica”[8].
Fonte: Tarefa referente à pesquisa, 2014.

Rute e Bárbara começaram por considerar que o algarismo zero, em 12,05, não assumia valor, admitindo que ambos os numerais apresentados representavam o mesmo

---

[5] Tarefa adaptada de BROCARDO, J., DELGADO, C., MENDES, F. (2010). Números e Operações: 1.º Ano”. Lisboa: DGIDC. Disponível em: http://hdl.handle.net/10400.26/5144.

número. Recordaram uma tarefa realizada anteriormente, onde era pedido que assinalassem diferentes numerais decimais numa reta graduada em décimas. Entre estes encontravam-se numerais como 0,75, que tinham que ser marcados no espaço compreendido entre décimas. Ao recordar a tarefa, Rute centrou a atenção na parte não inteira dos numerais:

Rute:	*Isto é o que a Marta diz, que é doze vírgula cinco. Doze unidades e cinco décimas. Só que eu acho que ele é que tem razão, zero vírgula cinco [referindo-se a 12,05] é metade. Então estamos a falar metade de um quadrado, não é da unidade toda. Por isso é que eu acho que é da unidade.*
Bárbara:	*Ah, sim! Pensamos em dez, zero vírgula cinco é metade. Metade de dez é como se fosse cinco, então é metade. E aqui, é metade deste, é metade do doze com metade do doze vírgula um. Então, mas isto também é metade de dez...*

(Fonte: Gravação de áudio referente à pesquisa, 2014)

Rute concluiu que a parte não inteira de 12,05 representava a metade de algo menor que a unidade, que designou por "metade de um quadrado", ou seja, metade do espaço compreendido entre duas décimas. A aluna reforçou que 0,05 em 12,05 representava metade de algo que *"não é da unidade toda"*, evidenciando uma mudança entre considerar a unidade como a medida compreendida entre 12 e 13, para considerar a unidade como a décima.

Bárbara tentou seguir a explicação da colega, contudo, não identificou que a extensão zero mais à esquerda não era válida nesta situação:

Rute:	*Eu acho que ele é que tem razão.*
Investigadora:	*Porquê?*
Rute:	*Zero vírgula cinco e zero vírgula cinco de um quadradinho...*
Bárbara:	*Porque zero vírgula cinco é metade e isto está entre este e este...*
Rute:	*É como se isto fosse dez! O quadradinho é como se fosse dez.*
Bárbara:	*Mas também cinco... também é... o zero não vale nada, então é...*
Rute:	*Espera, espera!*

(Fonte: Gravação de áudio referente à pesquisa, 2014)

Bárbara verbalizou que *"o zero não vale nada"* e ficou confusa, mas registrou o mesmo que a colega. Já Rute referiu que *"o quadradinho é como se fosse dez"*, porém a aluna não elaborou porque considerava que o espaço correspondente a uma décima podia ser igualado a dez, sem elaborar também a qual unidade estava se referindo ao dizer *"dez"*. Provavelmente terá usado 10 porque reconheceu que 0,5 significava metade, logo 0,05 (05) será a metade de 10 (0,10). Na sua resposta escrita (Figura 2), recorreu à transformação de unidades para justificar que o número assinalado era 12,05 (dito por Luís). Seguindo a sua justificação, 0,05 equivalia a meio retângulo, sendo que um retângulo equivalia a 10 (centésimas).

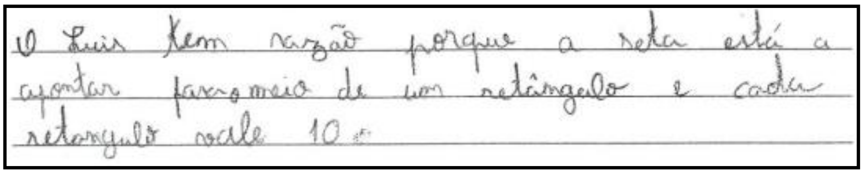

O Luis tem razão porque a reta está a apontar para o meio de um retângulo e cada retângulo vale 10.

Figura 2 – Registro de Rute na Questão 1 da tarefa “Localização de números na reta numérica”.
Fonte: Produção de uma aluna referente à pesquisa, 2014.

Também Dinis e André começaram por concordar que o número assinalado na reta seria 12,5. Ambos pareciam associar a noção de *“metade”* à parte não inteira dos numerais, no entanto, interpretaram essa metade de modo bastante diferente:

Dinis: Então, mas o zero vírgula cinco (em 12,05) não representa um meio?
André: Sim, mas também é um meio de doze.
Dinis: “Na”, “na”. O zero vírgula cinco (em 12,05) é o mesmo que zero vírgula cinquenta (acentua a palavra cinquenta).
André: Sim, isto também... Acho que isto é igual.
. . .
André: Doze vírgula cinco, acho que deve ser doze e meio! Doze e meio não é?
Dinis: Olha, pensa, pensa... Não... Isto está aqui (aponta na direção da seta), se fosse doze e meio, era aqui (aponta para a localização de 12,5), porque isto [12,05] representa zero vírgula cinquenta, é a mesma coisa.
(Fonte: Gravação de áudio/vídeo referente à pesquisa, 2014).

André não pareceu ter reconhecido a diferença entre 12,05 e 12,5, relacionando ambos à posição de 12,5 na reta. Ao referir que *“zero vírgula cinco é metade do número inteiro”*, e tendo em conta como continua o seu discurso, André não lhe estava a associar o significado de operador, mas sim a noção de que ambos os números podiam ser localizados no meio do espaço compreendido entre 12 e 13.

Dinis interpretou os numerais de modo diferente. Pareceu reconhecer diferença entre eles: associou à posição assinalada pela seta (12,05) o número 12,5, interpretando a parte não inteira como um meio, e transformou o número 12,05 no numeral que considerava equivalente, 12,50, referindo que este estaria posicionado na localização de 12,5 na reta. Dinis pareceu distinguir a posição entre 12,5 e 12,50 (número transformado por si), baseando-se na comparação entre 5 e 50, 12,5 como metade de um espaço menor, a décima, e 12,50 como metade de um espaço maior, a unidade. Dinis pareceu considerar que o zero na ordem mais à esquerda da parte não inteira do numeral, não tem qualquer efeito na grandeza do número, mas que, quando colocado mais à direita, aumenta a grandeza do número representado.

O par não chegou a acordo e decidiram avançar para a segunda questão desta tarefa. Quando procuravam registar que número estaria na reta na posição de 10,5, na segunda questão, André estabeleceu uma relação com a primeira questão que retomou rapidamente:

André: *Não! É o Luís que tem razão! (12,05) É o Luís que tem razão! Olha aqui! Olha aqui! Meio, é no meio! Olha, acho que é mesmo o Luís!*
Dinis: *Olha que eu acho que é mesmo o Luís.*
André: *Agora com este exercício é que eu acho que é mesmo o Luís. Bem me parecia que era o Luís... Eu também pensava que eram os dois, estava confuso...*
(Fonte: Gravação de áudio referente à pesquisa, 2014).

O registro de 10,5 parece ter levado André a reconhecer que o zero situado na ordem mais à esquerda da parte não inteira de um número assume também um valor de posição. No entanto, não verbalizou o que considerava ser o papel do zero em 12,05, explicando:

André: *Porque... Sei lá, porque zero vírgula cinco é um meio da unidade.*
Dinis: *Pois, mas é um meio da unidade. Um meio da unidade é aqui. (aponta para a posição de 12,5 na reta)*
André: *Um meio da unidade, ali... (aponta para uma décima)*
Dinis: *Eh pá, vou fazer a minha.*
André: *Eu sei que é o Luís, só que não sei muito bem explicar.*
(Fonte: Gravação de áudio referente à pesquisa, 2014).

Quando André diz *". . . porque zero vírgula cinco é um meio da unidade"* estava a referir-se a zero vírgula *zero* cinco e por *". . . um meio da unidade"* estava a interpretar a décima como unidade de referência. André usou o termo unidade, com um significado distinto de Dinis, que a interpretou como 1 e, por isso, acabaram por apresentar respostas diferentes.

No seu registro escrito, na Figura 3, André parece ignorar o zero e procura explicitar entre parênteses a relação que encontrou.

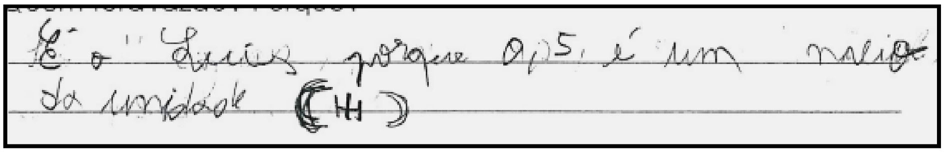


Figura 3 – Registro de André na Questão 1 da tarefa "Localização de números na reta numérica"
Fonte: Produção de um aluno referente à pesquisa, 2014.

O aluno registou 0,5 (modo como interpretou a parte não inteira de 12,05) que entende como um meio de uma décima. Representou, entre parênteses, uma das divisões da reta correspondente a uma décima, marcando com um traço mais carregado o meio desse espaço.

Dinis parece ignorar o papel do zero e registrou que a parte não inteira de 12,05 representava metade, associando-a a metade de uma unidade, ou seja, à posição de 12,5 na reta (que assumiu ser 12,50). Assim, registrou que o numeral assinalado pela reta seria 12,5.

No momento de discussão coletiva e com o objetivo de focar intencionalmente a resposta de Dinis, a investigadora questionou os alunos da turma se 12,05 e 12,50 poderiam considerar-se representações equivalentes de um mesmo número. Vários alunos responderam que não e Jorge explicou o motivo:

Jorge: *Porque doze vírgula zero cinco, o zero representa que não há nenhum tracinho pequenino.*
I: *Exato. E cada tracinho pequenino equivale a quanto?*
Jorge: *Equivale a uma décima.*
. . .
Jorge: *E o cinco representa a metade desse tracinho.*
(Fonte: Gravação de vídeo referente à pesquisa, 2014).

O modelo da reta assumiu um papel central na atribuição de significado a 12,05 e 12,50. Jorge recorreu à reta para indicar que o zero, em 12,05, representava a ausência de décimas, que descreveu como *"tracinho pequenino"*. Referiu ainda que cinco representa *"metade desse tracinho"*, ou seja, metade do espaço compreendido entre duas décimas.

Na análise deste episódio foi possível identificar que os alunos, numa fase inicial, realizaram a extensão de conhecimentos *zero mais à esquerda*, realçando o modelo da reta para dar significado à parte não inteira de ambos os numerais decimais. Ao identificarem a extensão *zero mais à esquerda* como não válida nesta situação e ao justificarem porquê, revelaram uma mudança na conceitualização da unidade, uma vez que esta deixou de ser considerada 1 para passar a ser considerada 0,1; e na compreensão do valor de posição de zero.

Episódio 2 – Provas e toalhas (3.º ano)

Numa das questões da tarefa apresentou-se uma situação de comparação de numerais decimais, que procurava promover a discussão da extensão *mais algarismos, maior grandeza*. Era colocada a seguinte questão "Será 0,67 maior que 0,9? Discute esta questão com o teu colega e registra as vossas ideias."

Esta tarefa surgiu no seguimento de outras duas que envolviam a representação da grelha 10×10 (que surgiu a primeira vez associada ao contexto de toalhas) e que foi bastante valorizada ao longo da experiência de ensino, tendo sido planejadas situações que permitissem aos alunos transformar esta representação num modelo para pensar nos numerais decimais. Por este motivo, era pedido não só que os alunos discutissem cada comparação, mas também que recorressem à grelha 10×10 para complementar as suas respostas.

Dinis, que trabalhou com André, referiu de imediato que 0,9 seria superior dizendo "Zero vírgula nove, porque zero nove é igual a zero vírgula noventa!". Dinis parece fazer uso do conhecimento de que o zero colocado na ordem mais à direita na parte não inteira do numeral não altera o valor do número e acrescenta um zero a 0,9. Deste modo, e estando agora a parte não inteira de ambos os numerais com o mesmo número de algarismos, parece comparar estas partes como números inteiros (90 > 67).

Ao aproximar-se do par, a investigadora perguntou a Dinis por que 0,9 era igual a 0,90, mas foi André quem respondeu:

André: *Então porque se nós... por exemplo, temos aqui unidades divididas em cem partes iguais (referindo-se à grelha 10×10).*

. . .

André: *Ora, um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove (conta nove colunas na grelha). Até aqui. Até aqui pintámos noventa quadradinhos porque... uma décima vale dez.*

(Fonte: Gravação de áudio referente à pesquisa, 2014)

André justificou a equivalência entre os numerais 0,9 e 0,90 mobilizando o modelo 10x10 de modo a mostrar que 0,9 são nove colunas que, por sua vez correspondem, a noventa quadrículas, ou seja, a 90 centésimas. André usou o modelo para mostrar a Dinis e à investigadora a equivalência entre 0,9 e 0,90 e não para perceber se de fato os numerais eram equivalentes. Acrescentou ainda que *"uma décima vale dez"* o que revela que André parecia reconhecer que uma décima é dez vezes superior a uma centésima.

Dinis foi acompanhando o que o colega dizia, contribuindo com exclamações como *"Dez vezes nove!"* para justificar que 9 décimas são 90 centésimas. Na resposta escrita foi esta a justificação que ambos apresentaram, registrando *"É 0,9 porque 0,9 é igual a 0,90 ou seja 0,67 é menor do que 0,9 (0,90)"* (produção de um aluno referente à pesquisa, 2014).

No outro par, Bárbara e Rute referiram que 0,9 seria maior que 0,67:

Rute: *Eu acho que zero vírgula nove é maior do que zero vírgula sessenta e sete porque zero vírgula sessenta e sete ou sessenta e sete centésimas, só tem centésimas. Nove décimas tem nove déci... tem nove décimas.*

Bárbara: *Agora sou eu, eu acho que zero vírgula sessenta e sete é maior... é menor (corrige) do que zero vírgula nove porque zero vírgula nove é o mesmo que nove décimas, e sessenta... e zero vírgula sessenta e sete é o mesmo que zero vírgula... é o mesmo que sessenta e sete centésimas. E nove décimas é maior do que centésimas, pois se está a dividir em partes maiores.*

Rute: . *. . como o número sessenta e sete centésimas só tem centésimas e zero vírgula nove...*
Bárbara: *São décimas! E décima é uma unidade maior do que centésimas! Por isso, este [0,9] é maior.*
(Fonte: Gravação de áudio referente à pesquisa, 2014)

As alunas parecem concordar no modo como justificaram que 0,9 representa um número superior a 0,67. Ambas interpretaram que a décima representava uma parte maior da unidade quando comparada com a centésima, tal como Bárbara referiu *"E décima é uma unidade maior do que centésimas".*

De seguida, quando a Professora se aproximou deste par, Rute referiu:

Rute: *Eu acho que zero vírgula… que nove décimas é maior do que sessenta e sete centésimas porque sessenta e sete centésimas só tem centésimas e não tem décimas como nove décimas.*
(Fonte: Gravação de áudio referente à pesquisa, 2014).

Surgiu aqui uma outra interpretação, que 0,67 não tem décimas, só centésimas, o que reflete que o conhecimento relativo ao valor de posição, no caso dos numerais decimais, estava em evidente desenvolvimento. Ambas recorreram a esta justificação como resposta a esta questão (Figura 4).

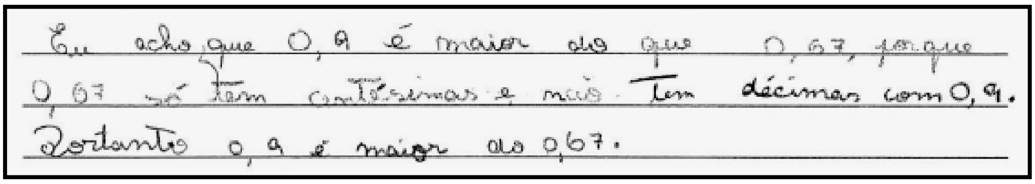


Figura 4 – Registro de Bárbara na Questão 2 da tarefa "Provas e toalhas"
Fonte: Produção de uma aluna referente à pesquisa, 2014.

As alunas revelaram a extensão *mais algarismos, menor grandeza*, associando menor grandeza a numerais com mais algarismos, uma vez que a unidade se encontrava dividida num maior número de partes, logo, menor seria o valor de cada uma dessas partes.

Na discussão em coletivo, propôs-se que os alunos indicassem que numeral representava o maior número: 0,581 ou 0,45. Rute e Bárbara tornaram a apresentar uma justificação semelhante à que tinha surgido durante o trabalho em pares:

Rute: *Eu acho que é quarenta ... quarenta e cinco cen...tésimas, quarenta e cinco centésimas porque... está dividido em menos partes...*
. . .
Bárbara: *Porque quarenta e cinco centésimas está dividido em... menos partes e essas partes são maiores do que... as outras.*
(Fonte: Gravação de áudio referente à pesquisa, 2014).

Outros colegas da turma concordaram com esta justificação. Por exemplo, Jorge acrescentou que *"As quinhentas e oitenta e uma milésimas estão divididas em mais partes, portanto, uma parte daquelas vale menos que uma parte das quarenta e cinco"* (gravação de vídeo referente à pesquisa, 2014). Tendo em conta este tipo de justificação, claramente relacionada com a extensão *mais algarismos, menor grandeza*, a investigadora pediu que recorressem ao modelo da grelha 10×10 para representarem os numerais. De imediato, Jorge corrigiu a sua resposta inicial:

> *Jorge:* *Eu já percebi o meu erro é porque é o quinhentos e oitenta e um que é maior, são menos... as partes valem menos, mas são mais!*
>
> (Fonte: Gravação de vídeo referente à pesquisa, 2014).

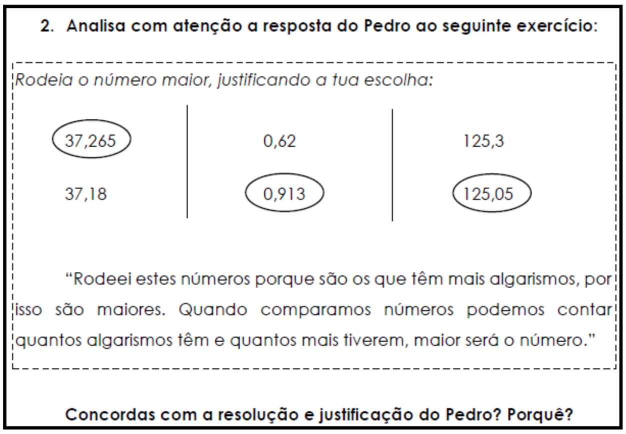
Este aluno reconheceu que uma milésima é menor do que uma centésima ou do que uma décima, e acrescentou *"as partes valem menos, mas são mais"*, justificando que 0,581 teria que ser superior a 0,45. De seguida, Rute e Bárbara que parecem ter compreendido a justificação do colega, alteraram também a sua resposta, usando a mesma justificação.

Destacamos na análise deste episódio a discussão da extensão *mais algarismos, menor grandeza*, que surgiu no par Rute e Bárbara. Ao justificar qual o numeral que representava o número de maior grandeza, as alunas evidenciaram a importante relação que estabeleceram entre a unidade e cada uma das suas partes: quanto maior for o número de partes em que a unidade se encontra dividida, menor será o seu tamanho. Contudo, um olhar centrado apenas no número de algarismos dos numerais não garantiu uma comparação correta. O recurso ao modelo da grelha 10×10 parece ter sido facilitador da compreensão desse aspecto, particularmente considerando um caso que se constituiu como contraexemplo.

Destacamos ainda a mobilização desse modelo, agora como modelo para pensar sobre os numerais, sem ser necessário a sua utilização efetiva, por André e Dinis. Os alunos recorreram ao modelo para justificar a partição de 9 décimas em 90 centésimas.

Episódio 3 – Quem tem razão? (4.º ano)

Analisamos o trabalho dos alunos relativamente à segunda questão da tarefa proposta (ver Figura 5), resolvida no 4º ano. Foi apresentada uma tarefa resolvida por um aluno fictício que consistia em circular o numeral que representava o maior número entre cada par de numerais apresentado. Apresentou-se também uma afirmação, incorreta, centrada na possibilidade de se comparar a grandeza de numerais decimais pelo número de algarismos, estando aqui destacada a extensão *mais algarismos, maior grandeza*. A terceira comparação encontrava-se intencionalmente incorreta e envolvia também a extensão *zero mais à esquerda*. Era pedido que os alunos justificassem se concordavam ou não com a resolução e afirmação apresentadas.



2. Analisa com atenção a resposta do Pedro ao seguinte exercício:

Rodeia o número maior, justificando a tua escolha:

37,265	0,62	125,3
37,18	0,913	125,05

"Rodeei estes números porque são os que têm mais algarismos, por isso são maiores. Quando comparamos números podemos contar quantos algarismos têm e quantos mais tiverem, maior será o número."

Concordas com a resolução e justificação do Pedro? Porquê?

Figura 5 – Questão 2 da tarefa "Quem tem razão?"
Fonte: Tarefa referente à pesquisa, 2015.

André começou por considerar que todas as comparações apresentadas se encontravam incorretas. O seu colega Dinis referiu que a comparação entre 0,62 e 0,913 estava correta e ambos focaram a sua atenção neste par de numerais:

André: *Então olha uma coisa, isto [0,913] são milésimas! Milésimas é menor do que as centésimas!*
Dinis: *Então e se fosse para as milésimas pomos aqui um zero (0,620), não é?*
. . .
André: *Não! Mas... continua, mas ele pensou este [0,913] como é maior do que este [0,62], este [0,913] teria que ser o maior, mas...*
Dinis: *Esse [0,913] é o maior!*
André: *Não, porque este tem três milésimas! Ele deve ter feito assim...*
Dinis: *Então, isso nós podemos pôr este [0,62] em milésimas! Pomos um zero!*
André: *Se eu tapasse o zero ficava este [0,913] o maior, mas como ele não pode tapar o zero, este [0,62] é maior! Porque os sessenta e dois... e novecentos e treze... o novecentos e treze é maior, é verdade, mas sessenta e dois tem centésimas e este tem milésimas, ou seja, que é uma unidade atrás.*

(Fonte: Gravação de áudio referente à pesquisa, 2015)

Dinis justificou que 0,913 era maior que 0,62 transformando este último numa forma equivalente (0,620), usando assim a milésima como unidade. Por outro lado, André pareceu revelar a extensão *mais algarismos, menor grandeza*. Começou por dizer que se tapasse o zero em 0,620, 0,913 seria superior. Embora tenha referido *"tapar o zero"*, André considerou 0,620 e comparou as partes não inteiras como número inteiros (913 > 620). Contudo, de seguida acrescentou *"como ele não pode tapar o zero"*, parecendo considerar que o numeral 0,62 seria diferente de 0,620, e afirmou que 0,62 expressaria um número superior a 0,913 uma vez que este último tem milésimas e *“milésimas é menor que centésimas”*.

Sem chegarem a acordo, André decidiu colocar sobre cada algarismo da parte não inteira dos numerais a primeira letra da ordem a que pertenciam para os comparar e continuou a dizer que 0,62 seria maior. Dinis tentou ajudar o colega usando uma analogia:

Dinis: *Isto é como se tu estivesses a comparar as unidades hum... de metros para hectómetros. Quanto é que é?*
André: *Mas a gente não está a falar em metros nem hectómetros!*
Dinis: *Eu sei, mas é... pensas na mesma coisa.*
André: *Não! Não concordo porque temos o trinta e sete... vírgula duzentos e sessenta e cinco. O último número dele é o cinco e é as milésimas... então... Este [37,18] só tem centésimas e os números com as centésimas são maiores do que os das milésimas. Então...*
Dinis: *Não são, não!*
(Fonte: Gravação de áudio referente à pesquisa, 2015)

Dinis recorreu a unidades de medida de comprimento para ajudar André a perceber que ao mudar a unidade não estava a alterar a grandeza do número. André usou a primeira comparação apresentada (37,265 e 37,18) e voltou a usar a extensão *mais algarismos, menor grandeza,* referindo *“os números com as centésimas são maiores do que os das milésimas”*.

Dinis procurou um contraexemplo para apresentar a André e recordou-se da comparação entre 0,5 e 0,089 feita por um colega num momento anterior de discussão coletiva. Contudo, percebeu que não era adequado e a investigadora, que se encontrava junto do par, propôs a comparação entre 0,3 e 0,489. André referiu *“Mas, mas as décimas… como as décimas é uma unidade maior do que as milésimas, eu penso que este [0,3] é maior”* (gravação áudio referente à pesquisa, 2015).

A investigadora pediu a André que tentasse representar ambos os números na grelha 10×100 (explorada anteriormente). Foi ao mobilizar o modelo para representar os números que André percebeu que 0,489 seria superior a 0,3 (Figura 6).

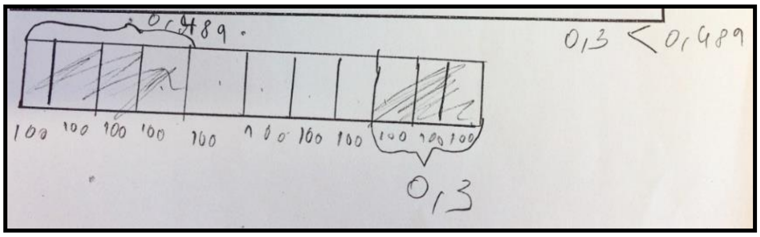


Figura 6 – Representação de 0,3 e 0,489 na grelha 10x100, realizada por André na Questão 2 da tarefa “Quem tem razão?”.
Fonte: Produção de um aluno referente à pesquisa, 2015.

Após este momento, André não utilizou a extensão *mais algarismos, menor valor*, passando a transformar os numerais em formas equivalentes usando uma unidade comum. Por fim, ambos discordaram da afirmação apresentando um contraexemplo. André recorreu ao mesmo dado por um colega anteriormente e depois por Dinis (0,5 e 0,089). Já Dinis recorreu à comparação apresentada no enunciado (125,3 e 125,05) que, por se encontrar incorreta, já se constituiu como um contraexemplo. O aluno justificou a incorreção na comparação transformando as partes não inteiras dos numerais usando a milésima como unidade comum.

Rute e Bárbara concordaram que o numeral circulado na terceira comparação não era o que representava o número de maior grandeza. Rute, que liderou o trabalho no par, fez uma leitura dos últimos numerais apresentados, revelando que usou de imediato uma unidade comum para os comparar:

Rute: *Este está mal... Porque cento e vinte e cinco unidades e cinco centésimas…*
Bárbara: *Sim…*
Rute: *É menor do que cento e vinte e cinco unidades e trinta (acentua a palavra "trinta")...*
(Fonte: Gravação de áudio referente à pesquisa, 2015).

Apesar de não usar a unidade *"centésima"* ao ler 125,3, esta parece estar subjacente à leitura que fez. Rute acrescentou ainda *". . . porque trinta é igual a três colunas"* e elabora:

Rute: *Porque... se pensarmos em três colunas... Imagina agora que são três colunas, está bem? Se tivessem todas dez... imagina que é dez, está bem? (desenha na folha). Imagina, isto é dez, isto já é dez, aqui. Ficava dez. Isto era vinte, isto era trinta.*
Bárbara: *Exatamente.*
(Fonte: Gravação de áudio referente à pesquisa, 2015).

Rute mobilizou a grelha 10×10 como modelo para pensar sobre 125,3 enquanto 125,30. A colega Bárbara pareceu concordar com Rute. Ao discutirem como poderiam escrever a resposta, Rute procurou um contraexemplo para justificar a incorreção da afirmação apresentada no enunciado:

Rute: *Mete zero vírgula cinco.*
Bárbara: *Zero vírgula cinco (registra).*
Rute: *E zero vírgula… setenta e cinco.*
. . .
Bárbara: *Comparando… não, calma…*
Rute: *Não! E zero vírgula zero (acentua) setenta e cinco!*
(Fonte: Gravação de áudio referente à pesquisa, 2015).

De seguida, registrou por escrito a sua resposta que se apresenta na Figura 7:

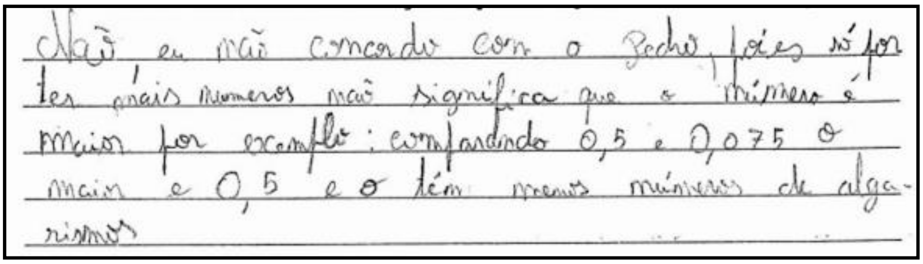

Não eu não concordo com o Pedro, pois só por ter mais numeros não significa que o número é maior por exemplo: comparando 0,5 e 0,075 o maior é 0,5 e o tém menos números de algarismos

Figura 7 – Registro de Rute na Questão 2 da tarefa "Quem tem razão?"
Fonte: Produção de um aluno referente à pesquisa, 2015.

O uso deste contraexemplo em particular evidencia também um domínio do papel do zero, fundamental para o reconhecimento da diferença entre os dois numerais selecionados por Rute como contraexemplo.

A questão analisada neste último episódio parece ter provocado a procura de analogias e contraexemplos por parte dos alunos. Os alunos mobilizaram modelos quer para conseguir representar e comparar numerais, quer como meio de justificar as suas respostas, sem os usarem. O uso de contraexemplos revela não só a capacidade de justificar o motivo da extensão *mais algarismos, maior grandeza* ser incorreta nesta situação, mas também como os próprios numerais selecionados evidenciam o domínio relativamente ao valor de posição assumido por zero na parte não inteira de numerais decimais.

5 Considerações finais

Neste artigo procuramos compreender que potencialidades têm situações que sugerem extensões de conhecimentos incorretas como meio para promover a construção da compreensão de numeral decimal. Através da análise dos três episódios concluímos que, tal como fora antecipado, o uso de situações centradas em extensões de conhecimentos incorretas pode promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. O envolvimento dos alunos na verificação de cada situação de modo a poderem posicionar-se relativamente ao que era apresentado provocou o recurso a justificações, tal como mencionado por Borasi (1994). A procura do motivo pelo qual uma extensão não era válida, quer a que era evidenciada na tarefa proposta, quer a usada por um colega, influenciou também o recurso a contraexemplos (LANNIN et al., 2011), evidente no terceiro episódio.

Salientamos a importância da interação entre professor-aluno e aluno-aluno enquanto geradora de conflitos inter e intrapessoais (SWAN, 2001). A interação professor-aluno foi essencial para, por exemplo, criar o conflito resultante do uso da extensão *mais algarismos, menor grandeza*, mas também para auxiliar a reflexão dos alunos através da sugestão do recurso a modelos que possibilitassem pensar sobre os numerais.

Por se ter valorizado um trabalho em pares, as interações aluno-aluno desencadearam também situações de conflito, evidente nas situações em que os alunos discordaram dos colegas ou procuraram questioná-los sobre as suas ideias, como Dinis tentou fazer no terceiro episódio, ao procurar um contraexemplo da ideia de André. Deste modo, parece-nos importante sublinhar que um dos aspectos que confere grande potencial ao uso deste tipo de situações para a aprendizagem dos alunos é a interação entre os elementos da turma, que vai além da simples validação das respostas dos alunos (DURKIN; RITTLE-JOHNSON, 2012; TSOVALTZI et al., 2010).

Através da análise das justificações apresentadas pelos alunos, bem como dos contraexemplos usados, identificamos potencialidades do uso deste tipo de situações para o desenvolvimento de ideias relativas aos números racionais na representação decimal, em particular a nível da (i) mobilização de modelos para pensar sobre numerais decimais; (ii) conceitualização da unidade relativamente à unidade de referência considerada, à transformação de unidades (em especial partição de unidades, ou seja, divisão de uma unidade em unidades mais pequenas) e ainda à relação entre a unidade e as partes; e (iii) compreensão do valor de posição dos algarismos constituintes da parte não inteira de decimais, em particular do algarismo zero, situado em diferentes posições.

Considerando as três extensões aqui focadas, os resultados confirmam que o uso deste tipo de situações promove a ampliação do conceito de número, tal como entendida por Siegler et al. (2011), uma vez que a discussão das diferentes situações pelos alunos promoveu o reconhecimento de características que são (i) salientes nos números inteiros, como a percepção da grandeza através do número de algarismos e papel do zero quando posicionado mais à esquerda; (ii) salientes nos numerais decimais, como a identificação da unidade de referência; e (iii) comuns a ambos os conjuntos, como a estrutura decimal e o papel que o zero assume no sistema de numeração decimal, ou ainda a possibilidade de ordenar e representar os números em modelos como a reta ou as grelhas 10×10 e 10×100.

Concluímos reforçando a perspectiva de que as extensões de conhecimentos incorretas são parte integrante da aprendizagem e reveladoras do processo de transformação do próprio conceito de número dos alunos e, por isso, a sua discussão tem um papel central na construção da compreensão de numeral decimal.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa concedida à primeira autora (SFRH/BD/108341/2015).

Referências

ADAMS, D. et al. Using erroneous examples to improve mathematics learning with a web-based tutoring system. **Computers in Human Behavior**, United Kingdom, v. 36, p. 401 - 411, jul. 2014.

BORASI, R. Capitalizing on errors as “springboards for inquiry”: a teaching experiment. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston,VA, v. 25, n. 2, p. 166 - 208, mar. 1994.

COBB, P.; JACKSON, K.; DUNLAP, C. Design research: an analysis and critique. In: ENGLISH, L. D.; KIRSHNER, D. (Ed.). **Handbook of International Research in Mathematics Education**. New York: Ed. Routledge, 2016. p. 481 - 503.

CONFREY, J. Learning to listen: a student’s understanding of powers of ten. In: E. VON GLASERSFELD (Ed.). **Radical constructivism in mathematics education**. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1991. p. 111 - 138.

DESMET, L.; GRÉGOIRE, J.; MUSSOLIN, C. Developmental changes in the comparison of decimal fractions. **Learning and Instruction**, United Kingdom, v. 20, p. 521 - 532, 2010.

DURKIN, K.; RITTLE-JOHNSON, B. The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. **Learning and Instruction**, United Kingdom, v. 22, p. 206 - 214, nov. 2012.

DURKIN, K.; RITTLE-JOHNSON, B. Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. **Learning and Instruction**, United Kingdom, v. 37, p. 21 - 29, set. 2015.

HUANG, T., H ; LIU, Y. C.; SHIU, C., Y. Construction of an online learning system for decimal numbers through the use of cognitive conflict strategy. **Computers & Education**, United Kingdom, v. 50, n. 1, p. 61 - 76, jan. 2008.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOTT, R. **Developing essential understanding of mathematical reasoning**: Pre-K-Grade 8. 1. ed. Reston, VA: NCTM, 2011.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and standards for school mathematics**. 1. ed. Reston, VA: NCTM, 2000. 466 p.

PONTE, J. P. et al. Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**, Lisboa: APM, v. 25, n. 2, p. 77 - 98, dez. 2016.

RESNICK, L. B. et al. Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, v. 20, n. 1, p. 8 - 27, jan. 1989.

SIEGLER, R., S. Microgenetic studies of self-explanation. In: GARNOTT, N.; PARZIALE, J. (Ed.). **Microdevelopment**: A process-oriented perspective for studying development and learning. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 2002. p. 31 - 58.

SIEGLER, R. S.; THOMPSON, C. A.; SCHNEIDER, M. An integrated theory of whole number and fractions development. **Cognitive Psychology**, USA, v. 62, n. 4, p. 273-296, jun. 2011.

SIEGLER, R., S.; BRAITHWAITE, D., W. Numerical development. **Annual Review of Psychology**, USA, v. 68, p. 187 - 213. 2017.

STEINLE, V.; STACEY, K. The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in Grades 5 to 10. In: CONFERENCE OF THE MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH GROUP OF AUSTRALASIA, 21., 1998, Brisbane. **Proceedings of the 21st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Brisbane: MERGA, 1998. p. 548 - 555.

STEINLE, V.; STACEY, K. Grade-related trends in the prevalence and persistence of decimal misconceptions. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 27., 2003, Honolulu. **Proceedings of the 2003 joint meeting of PME and PME-NA**, v. 4. Honolulu: PME, 2003, p. 259 - 266.

SWAN, M. Dealing with misconceptions in mathematics. In: Gates, P. (Ed.). **Issues in Mathematics Teaching**. London: Routledge/Falmer, 2001. p. 147 - 165.

TIAN, J.; SIEGLER, R., S. Which type of rational numbers should students learn first?. **Educational Psychology Review**, USA, p. 1 - 22, jul. 2017.

TSOVALTZI, D. et al. Learning from erroneous examples: when and how do students benefit from them? In: CONFERENCE ON TECHNOLOGY ENHANCED LEARNING, SUSTAINING TEL: FROM INNOVATION TO LEARNING AND PRACTICE, 5., 2010, Barcelona. **Proceedings of the 5th European Conference on Technology Enhanced Learning, Sustaining TEL**: From Innovation to Learning and Practice. Barcelona, 2010. p. 357 - 373.

VAMVAKOUSSI, X.; VAN DOOREN, W.; VERSCHAFFEL, L. Naturally biased? In: search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. **The Journal of Mathematical Behavior**, USA, v. 31, n. 3, p. 344 - 355, set. 2012.

WHITENACK, J.; YACKEL, E. Construindo argumentações matemáticas nos primeiros anos: A importância de explicar e justificar ideias. **Educação e Matemática**, Lisboa: APM, v. 100, p. 85 - 88. nov./dez. 2008.

Anexo 3

Morais, C., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018a). Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. *Acta Scientiae. 20*(4), 552–570. doi: 10.17648/acta.scientiae.v20iss4id3892

Artigo III

Versão dos autores

Mathematical Reasoning fostered by (fostering) Transformations of Rational Number Representations

Cristina Morais

Lurdes Serrazina

João Pedro da Ponte

ABSTRACT

In this article we aim to understand the transformations of rational number representations carried out by students and their mathematical reasoning processes. We report part of a Design Based Research, within which an intervention was carried out in a class with 25 students and their teacher, in grades 3 and 4. We analyze six classroom episodes in three main moments concerning the construction of understanding of rational numbers. The results indicate that both transformations and mathematical reasoning processes have an intricate and bidirectional relation, one fostering the other. Students carried out treatments and conversions, including conversions between representations and also conversions by compositions of different representations. Regarding mathematical reasoning processes, students formulated solving strategies, conjectures and justifications. We also conclude that the social interactions within the class were crucial for the students both doing the transformations and engaging in mathematical reasoning processes.

Keywords: Rational Numbers. Transformations. Mathematical Reasoning. Representations. Elementary School.

Raciocínio Matemático promovido por (promovendo) Transformações de Representações de Números Racionais

RESUMO

Neste artigo temos por objetivo compreender as transformações de representações de números racionais realizadas por alunos e os seus processos de raciocínio. Relatamos parte de uma Investigação Baseada em Design, que inclui uma intervenção onde participaram 25 alunos de uma turma e respetiva professora, no 3.º e 4.º ano de escolaridade. Analisamos seis episódios em três momentos relativos à construção da compreensão dos números racionais. Os resultados mostram que as transformações de representações e os processos de raciocínio têm uma relação intrincada e bidirecional. Os alunos realizam tratamentos e conversões, realizando conversões entre representações e também conversões envolvendo composições de diferentes representações. Relativamente aos processos de raciocínio, os alunos formulam estratégias de resolução, conjeturas e justificações. As conclusões apontam ainda a importância das interações sociais para os alunos realizarem transformações e para se envolverem em processos de raciocínio matemáticos.

Palavras-chave: Números racionais. Transformações. Raciocínio Matemático. Representações. Ensino Básico.

INTRODUCTION

To be able to understand rational numbers one has to move flexibly around a world of contexts, meanings, operations, and representations (Lamon, 2001). When learning rational numbers[9], students realize that the same rational number can be expressed in different symbolic representations, such as decimal number[10], percentage or fraction. Moving across different representations of a concept provides the recognition that each representation presents a different perspective of the concept, and our insight develops as we increase the perspectives that we take (Tripathi, 2008). Post, Cramer, Behr, Lesh, and Harel (1993) highlight the role of representations in understanding rational numbers, relating this to flexibility with transformations between and within rational number representations. Thus, students' flexibility in making transformations involving different representations can show their understanding of the rational numbers involved (Post, Wachsmuth, Lesh, & Behr, 1985). The transformations among the representations of rational numbers are central in the mathematical activity (Duval, 2006), and its analysis provides a lens to access students' mathematical reasoning processes.

Mathematical reasoning is crucial in learning mathematics at all school levels (NCTM, 2007). Starting from the early school years, students should engage in mathematical experiences that entail different mathematical reasoning processes, which should be conceptualized according to the different school years (Stylianides, 2007a). For instance, the study carried out by Stylianides (2007b) provides evidence that students from grade 3 engage in conjecturing, stating that numerical expressions that equal 10 are infinite because one can always add and then subtract the same number, then adding 10. These students, with the teacher's help, were also able to rewrite the statement using symbols (such as $x - x + 10 = 10$), which could also be interpreted as a proof of the initial conjecture. Similarly, Komatsu (2010) analyzed grade 5 students' conjectures and

[9] In this paper, we use the term "rational numbers" to designate positive rational numbers.

[10] We use the term "decimal numbers" to identify positive rational numbers written according to the decimal system notation, using the decimal point.

justifications, which the author identified as proofs, stressing that students starting from even earlier ages, can conjecture and improve their conjectures and justifications, highlighting the role of counterexamples to trigger that refinement.

Considering the crucial role of transformations among different representations for understanding rational numbers and also of engaging in mathematical reasoning processes for mathematical activity, in this paper we aim to understand the transformations of representations of rational numbers carried out by students and the mathematical reasoning processes that they show.

THEORETICAL BACKGROUND

Representations and transformations

In a broader sense, representation can be understood as ". . . a configuration of signs, characters, icons, or objects that can somehow stand for, or 'represent' something else" (Goldin, 2003, p. 276). This "something else" refers to an idea that goes beyond the representation, which means that without knowing the meaning of what is represented, the representation is unintelligible (Ponte & Serrazina, 2000). A representation describes aspects of the structure of the mathematical object that is represented and also connections between the object and other ideas (Tripathi, 2008). Thus, a representation cannot be understood as self-contained, because its interpretation implies a connection between the representation and the mathematical object, knowing the circumstances in which the representation can be used, and knowing how the representation can be used to reach particular goals (Ponte & Serrazina, 2000).

In this article, we particularly focus on symbolic representations of rational numbers: decimal number, percentage, and fraction. Each of these representations is embedded with particular rules and assumptions that enable the transition among representations (Goldin, 2003). Duval (2006) states that mathematical activity consists of two types of transformations among representations: treatments and conversions. Treatments are transformations carried out within the same kind of representation, e.g., when $\frac{1}{4}$ is transformed into $\frac{2}{8}$. Baturo (2000) offers a categorization of transformations involving decimal numbers that helps to understand treatments within this representation. The author describes three types of transformations that entail the ability to change the perception of the measurement unit, which she names as reunitising strategies: partitioning to make smaller units (6 tenths=60 hundredths); grouping to make larger units

(60 hundredths=6 tenths); and regrouping (6 tenths=5 tenths+10 hundredths).

Even though Baturo (2000) relates these transformations to decimal numbers, this categorization can be extended to percentage and fraction, which can lead to conversions, the second type of transformations identified by Duval (2006). For instance, 40% can be transformed into 4×10%, in which the 10% becomes the measurement unit (partitioning), or $\frac{1}{2}$ ×80% if one takes 80% as the measurement unit (grouping). The same 40% can also be regrouped as 50%–10%. In the same way, $\frac{2}{4}$ can be partitioned into $\frac{4}{8}$, with the unit of measurement of $\frac{1}{4}$ in the former being partitioned into $\frac{1}{8}$ in the latter. On the other hand, $\frac{2}{4}$ can be transformed into $\frac{1}{2}$, in which the measurement unit is now $\frac{1}{2}$. And $\frac{2}{4}$ can also be regrouped as, for example, $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}$.

Conversions are transformations more complex than treatments. In a conversion one has to perceive the same mathematical object in two representations that can greatly differ in their notation characteristics or representation content (Duval, 2006). As we indicated, conversions are highly important in mathematical activity, because it is with the approach to the same object through different perspectives, each reflecting a different aspect of what is represented, that one can fully understand it (Duval, 2006; Tripathi, 2008). Therefore, using several representations of the same object supports students' in integrating them as part of the same number domain (Owen & Super, 1993; Wang & Siegler, 2013).

The non-congruence among decimal, percentage and fraction symbolic representations of rational numbers adds cognitive complexity to the conversions (Duval, 2006). For example, transforming 0,75 into $\frac{3}{4}$ or 75% implies the recognition of the same rational number expressed in different representations that are written according to different rules and even have different representation notation: the decimal point, the fraction bar, and the percentage symbol.

Duval (2006) states that "Mathematical comprehension begins when coordination of registers starts up" (p. 126). Recognizing the same mathematical construct across different representations is not an occasional occurrence, but the outcome of a global coordination of representations, which in turn empowers mathematical reasoning (Duval, 2006).

Mathematical reasoning

Mathematical reasoning, accessible through representations used by students, is at the core of mathematical learning (Russell, 1999; NCTM, 2007). It is prompted by the search to understand "why something works" and the drive to discover mathematical connections, which are crucial to develop a deeper understanding of mathematics (Lannin, Ellis, & Elliot, 2011; NCTM, 2007).

Oliveira (2008) describes mathematical reasoning as a set of processes through which new knowledge is drawn from previous knowledge. These processes include formulating questions and solving strategies, conjecturing, generalizing and testing generalizations and justifying them (Lannin et al., 2011; Mata-Pereira & Ponte, 2017).

Conjecturing is a process that involves reasoning about mathematical relationships, developing statements, named as conjectures, which require further exploration to ascertain if they are true or not true (Lannin et al., 2011). These conjectures, either spoken or unspoken (Lannin et al., 2011), can refer to particular cases as in the example "$\frac{1}{7}$ is smaller than $\frac{1}{5}$ because the first has a larger denominator". Such statement requires that students seek to understand if it is always true or not. In fact, striving to understand if a specific conjecture is true, implies an important transition from considering individual mathematical objects (such as "this fraction") to consider a class of objects (as in "all rational numbers in fraction representation") (NCTM, 2007). Thus, to show if a conjecture is true or not, students move away from looking at the singularity of the involved objects, to seek commonalities among different cases. By doing so, students develop general conjectures, that is, generalizations, that lead them to call upon and further develop concepts, symbols, and representations (Mata-Pereira & Ponte, 2012).

The generalizations can take different forms, other than algebraic, such as natural oral language, and are not always valid (Lannin et al., 2011). For example, students often generalize the role of zero when used to write decimal numbers, such as used to write whole numbers, disregarding its place value when placed in the leftmost place in the non-whole part of decimal numbers (e.g., 0,08 represents the same number as 0,8).

Ellis (2011) emphasizes that the process of generalizing evolves through collaboration. The author describes generalizing as an activity where people, that share a specific sociomathematical context, are involved in at least one of three actions: (i) identifying commonalities across cases; (ii) extending one's reasoning beyond the initial case; or (iii) drawing broader results from particular cases.

Conjecturing can thus be an entry point into mathematical reasoning (Lannin et al., 2011) leading to generalizations that, in turn, lead to justification. A justification is understood by Kilpatrick, Swafford and Findel (2001) as “sufficient reason for” (p. 130), and is intended to both convince oneself and others (Lannin et al., 2011). The justification not only shows that a statement is true but also provides reasons why it is true or valid in every possible case. It is desirable that students become progressively aware of the need to justify and of what makes a justification valid, rejecting statements based on authority (of a teacher, a colleague or a textbook), perception or examples of particular cases (Lannin et al., 2001). By engaging in justification processes, students revisit their mathematical ideas, leading not only to a solid understanding of those ideas but also to the development of new ideas (Whitenack & Yackel, 2008). Thus, by engaging in justification processes students not only develop their reasoning skills but also their conceptual understanding (Kilpatrik et al., 2001). Through students’ justifications, one can access, on one hand, how broad they see their own generalizations and, on the other hand, what is students’ understanding of what is socially accepted as a justification (Lannin, 2005).

Students from different school years can engage in mathematical reasoning processes. This means that conjectures, generalizations, and how these conjectures are tested and justified will assume different forms throughout the school years. Stylianides (2007a), focusing on the notion of proof in school mathematics, conceptualizes it considering two principles that apply not only to proof but also to other concepts, (i) the intellectual-honesty principle; and (ii) the continuum principle.

The intellectual-honesty principle states that a concept should be conceptualized as it is honest to mathematics as a discipline but also honest to students as learners. This means that we have to consider, on one hand, the formal aspect of that particular concept in the mathematics field and, on the other hand, the conceptual understanding of students or that is accessible to them (Stylianides, 2007a). The continuum principle refers to the continuity of the notion of the concept throughout the school years, assuring that the experience that students have when working with that particular concept is cohesive throughout the years, yet at different levels (Stylianides, 2007a).

These two guiding principles are particularly useful when we are considering mathematical reasoning processes at elementary school level, helping to conceptualize the notion of conjecture, generalization and justification in ways not restricted to its formal forms. With these principles in mind, and in the specific case of justifying process, the justifications of elementary school students can rely on examples or can be explanations of how they solve a problem. Even though these do not constitute valid forms of justification in mathematics, in the sense that they do not show how a particular mathematical relationship is valid in every possible case (Lannin et al., 2011), they provide “sufficient reason for” (Kilpatrik et al., 2001) in the early school years.

METHODOLOGY

In this paper, we report part of a broader study that follows a design research methodology, specifically a classroom design study (Cobb, Jackson, & Dunlap, 2016). The participants were 25 students in a school in Lisbon, their teacher and the researcher (first author). Among the principles that guided the intervention, we highlight (i) frequent work with transformations among representations of rational numbers, (ii) attention to planned and unplanned situations that suggested the use of whole number knowledge leading to invalid generalizations; and (iii) establishment of a learning environment where students were encouraged and felt confident to share and discuss their mathematical ideas. The intervention was carried out in grade 3[11] (February to June 2014), and the last tasks were carried out at grade 4. It, generally, took place once a week in a 90 minutes lesson involving a total of 16 weeks over two school years.

The tasks were proposed by the researcher and were discussed and changed whenever necessary in meetings with the teacher. Lesson plans were elaborated by the researcher and included suggestions to support teacher inquiry, possible students’ answers and solutions, and possible difficulties. Most of the lessons followed a common organization, having an initial moment to launch the task, a second moment to solve the task in small groups, and a third moment of whole-class discussion. The researcher participated in these moments, closely following the teacher and the students, participating in the lesson when pertinent.

The main data sources were records of all the students’ written work, along with participant observation by the researcher supported by audio/video recordings and field notes. In the data presented, the students will be referred to with fictitious names. For the data analysis, the audio recordings were fully transcribed, complemented with information gathered from the video recordings, students’ records and researcher notes. The transcriptions were coded according to the type of transformations carried out by the students. We followed the two types of transformations as described by Duval (2006),

[11] With 8-year-old students.

and within which we distinguished two subtypes, that arose from our reinterpretation of Baturo (2000) reunitising strategies (presented in Table 1).

TABLE 1 – Categories of Transformations used in the Analysis Process.

Categories	Sub-categories	Example
Treatments	Within the same representation	$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$
	Composition within the same representation	0,52=0,5+0,02
Conversions	Between different representations	40% = 0,4
	Composition of different representations	Through additive relations: $0{,}52 = \frac{1}{2} + 0{,}02$
		Through multiplicative relations: $0{,}01 = \frac{1}{10} \times 0{,}1$

Source: This research.

Regarding students' mathematical reasoning, we considered formulating solving strategies, conjecturing, generalizing, testing generalizations and justifying (Ellis, 2011; Lannin et al., 2011; Mata-Pereira & Ponte, 2012, 2017). We organized the episodes in three main sections, trying to reflect three different moments of students' understanding of rational numbers.

RESULTS

Starting…

In the first task carried out in the intervention, in grade 3, three water bottles with different capacities were given to each group of students. The bottles had the label covered: the 1 *l* bottle had a blue label, the 0,5 *l* had a pink label and the 0,25 *l* bottle had a red label. Students were asked to establish connections among the different bottle capacities, before and after they tried to fill in each bottle with the water contained in the other bottles. Finally, the students were asked to attach each tag to its bottle. All groups had the same tags "0,25 *l*" and "1 *l*", half of the groups had a tag with the representation "0,5 *l*" and the other half "0,50 *l*".

After establishing relations among the different bottles capacities, this excerpt shows how students, in one of the groups, tried to relate the symbolic representation "0,5 *l*" to one of the bottles:

Dinis: Red [referring to the red label bottle – 0,25 *l*] equal to five liters…

. . .

Rute: Liters… Five liters??

Dinis: No, no...

Bárbara: A quarter of the liter.

Rute: No, this is not even a liter!

André: That’s right!

Bárbara: One quarter of a liter.

Rute: I don’t know how to say, but it’s not a liter, it’s…

André: Zero comma five “millilimiters”… (confusion between millimeters and milliliters)

Rute: It’s half!

The students seemed to recognize that the representation “0,5 *l*” relates to a number smaller than the unit, 1 *l*. In this initial stage, the students focused their attention on the specificities of the representation. This was evident when Bárbara related “one quarter of a liter” to the red bottle, because the group had concluded that four red label bottles would fill completely the 1 *l* bottle, but she did not establish any relation between “one quarter of a liter” and “0,25 *l*”. Rute made a conversion from the symbolic representation (0,5) to oral language (“half”), however, this notion of half seemed to be disconnected of the context of the bottles, since she did not relate it with the 0,5 *l* capacity bottle.

The students of this group related the tags with the bottles by interpreting the non-whole part of decimal numbers as whole numbers:

Researcher (R): Why do you think that [0,5 *l* tag] is there [red label bottle – 0,25 *l*]?

Rute: It’s because this [bottle] is the smallest and that is the smallest number.

. . .

Dinis: [both] The pink bottle (0,5 *l*) as the tag [0,25 *l*] they are both in the middle.

. . .

Rute: Because this bottle (1 *l*) it’s the biggest and this [1 *l*] it’s the largest number here.

The students related “0,25 *l*” to the medium bottle and “0,5 *l*” to the smaller bottle because 25 represents a higher number than 5. Based on the particular cases of the tags provided to the group, the students seemed to generalize that the non-whole part of the decimal representation of rational numbers could be interpreted and ordered, as if they were whole numbers. It was based on this generalization that students justified how they organized the tags.

In the whole-class discussion, the students from another group that had the tag "0,50 *l*" justified how they related it to "0,25 *l*":

António: Because one liter is one hundred… It's one hundred percent.

R: OK, good. So half…

António: It's fifty percent.

Fábio: Then half of those fifty percent will be twenty five percent.

Considering the unit as 100%, the students' justification was based in a conversion of 0,50 to 50%, probably due to the similarity among the decimal number system used in the writing both representations. This conversion supported the conversion of 0,25 as 25%, half of 50%. Thus, the student concluded that 0,25 would be half of 0,50.

After, Rute shared that she realized that her group did not organize the tags correctly:

Rute: We did it wrong, but now we understood.

. . .

Rute: Because after what that group said, I thought that five was half, and in the other work [filling the bottles]… We thought that this one [0,5 *l* bottle] was half of this one [1 *l* bottle] so I realized that this one [0,5 *l* bottle] was the one that was zero comma five.

. . .

Rute: The red [bottle] we conclude one quarter in the other [question], so twenty five, plus twenty five, plus twenty five, plus twenty five equals one hundred.

Teacher (T): Well done, good.

Bárbara: Which is the one hundred percent that António was talking about.

By converting decimal representation to percentage, as shared by António and Fábio, Rute as well as the other members of the group were able to relate the connections made previously among the different bottles with the 0,25 *l* and 0,5 *l* tags. These conversions helped her group to abandon their previous generalization.

Then, the discussion focused on the meaning of 0,5 and 0,50. Even though the students had use these numerals to identify the capacity of the pink label bottle, it was not clear that both represented the same number. Rute and Tomás shared with their colleagues why they considered both numbers equivalent:

Rute: Because zero comma five represents half, as well as zero comma fifty.

R: How do you know that?

Rute: Because fifty is half of one hundred.

Tomás: Because fifty is half of one hundred and five is half of ten.

Mobilizing whole number knowledge, the students considered the non-whole part of decimal numerals as whole numbers and justified the equivalence of representations by establishing the ratio between 5 and 10, and 50 and 100, identifying the proportion between the ratios as half.

Still in grade 3, in another task, the students were asked to discuss the question "Is 0,67 bigger than 0,9?" The students worked in pairs and, after discussing the question, they needed to justify their answer. Bárbara and Rute, that worked together, considered that 0,9 would be bigger than 0,67:

> Rute: I think that zero comma nine is bigger than zero comma sixty seven because zero comma sixty seven or sixty seven hundredths, only has hundredths. Nine tenths has nine… has nine tenths.
>
> Bárbara: Now me, I think that zero comma sixty seven is bigger… Is smaller (corrects) than zero comma nine because zero comma nine is the same as nine tenths, and sixty… and zero comma sixty seven is the same as zero comma… It's the same as sixty seven hundredths. And nine tenths is bigger than the hundredths, because it is divided into larger parts.
>
> . . .
>
> Bárbara: It's tenths! [in 0,9] And a tenth is a bigger unit than a hundredth! So, this [0,9] is bigger.
>
> . . .
>
> Rute: I think that zero comma… That nine tenths are higher than sixty seven hundredths because sixty seven hundredths only has hundredths and doesn't have tenths, like nine tenths.

Both students agreed that 0,9 represents the number with greater magnitude, and their justifications, even though expressed in different ways, are based in the same implicit conjecture. Both seem to conjecture that numerals with more digits in the non-whole part represent smaller magnitudes than numerals with fewer digits. This conjecture, although invalid, results from understanding the relation between the unit and its parts. The further the unit is divided, the smaller are the parts that result from that division. In this particular case, with the numerals 0,9 and 0,67, it led students to a correct answer, however, with different numerals it could lead to errors.

In the whole-class discussion, the research and the teacher instigated students to consider more cases. The comparison between 0,581 and 0,45 was proposed to the class. Rute and Bárbara identified 0,45 as the larger of the two numerals and justified it in the same manner:

Rute: I think that it's forty… Forty five hundredths, forty five hundredths because… It is divided into fewer parts.

. . .

Bárbara: Because forty five hundredths is divided into… Fewer parts and those parts are bigger than… The others [the thousandths].

Another student, Jorge, added "The five hundred and eighty one thousandths are divided into more parts, each part is worth less than one part of the forty five". This justification seemed to be convincing for their colleagues. As no one presented other justification or a counterexample, the researcher asked students to use the 10×10 grid (a model that was already known by students) to represent both numerals in order to test if 0,45 was larger than 0,581. Jorge immediately corrected his initial statement:

Jorge: Now I realized my mistake, it's because five hundredth and eighty one, that is greater, are less… the part are worth less but they are more!

By converting the symbolic representations of the numerals to the iconic representation of the 10×10 grid, Jorge realized that even though it is true that one thousandth is a smaller unit than one hundredth, or one tenth, this was not sufficient to state that 0,45 is larger than 0,581, as this last number corresponded to more of the smaller units. This conversion between representations, together with Jorge's justification, seemed to have convinced the students in the class, including Rute and Bárbara.

Heading to a shared meaning

In a different task, also solved in grade 3, a discussion took place about the result of 5,7 plus 0,003. Frederico answered that the result would be 5,703 reading it as "five thousand, seven hundred and three thousandths". Probably he did a treatment of the representation in order to be easier to reach the result, but when asked to explain how he could be sure of such a transformation, he did not present a valid justification:

Frederico: If we read the number like a whole number, without comma, without anything, it would be, at least for me, five thousand, seven hundred and three thousandths.

Several students agreed with him, and the justifications presented were similar to the one that Mário shared:

Mário: If we want to read the number without comma we… because we are going to read the number we say the last position of the number, I think…

Still, the teacher and researcher continued to ask how students could be sure that it was the same, in order for students to present what could be considered, by all, as a justification. Catarina then said she could justify why:

Catarina: I think I can explain it with towels (referring to the 10×10 grid). First we painted five towels, because it was five units. . . Then, on another towel we would paint seven columns, because it is seven tenths . . . and then we painted the [three] thousandths and it was the same . . .

R: How many thousandths have five units?

Catarina: Five thousand!

To justify, Catarina did the conversion between the symbolic representation of 5,703 and the iconic representation using the 10×10 grid. Also, by doing so, she presented a justification that convinced her colleagues why 5,703 could be read and understood as 5703 thousandths.

The following task was solved in grade 4. It included comparisons already made by students in previous tasks (including some from grade 3), along with statements made by students as they solved the tasks. The goal of this task was for students, in pairs, to analyze the statements and evaluate their validity as justifications.

Most students begun by focusing the decimal numbers' comparisons, identifying the larger or smaller number and justifying why, without, in fact, analyzing the statements presented. The first statement presented referred to a situation that was already addressed on this analysis: "0,67 is smaller than 0,9 – Sixty seven hundredths only has hundredths and zero comma nine are tenths. And a tenth is a bigger unit than a hundredth because it is divided into bigger parts, so 0,9 is bigger."

In the whole-class discussion, Tomás and Manuel shared with their colleagues their analysis of this statement:

Tomás: We think that their strategy is wrong… Because if we were to think that, the sixty seven… We gave an example: sixty seven hundredths and six tenths. If we think like that the sixty seven hundredths had hundredths so the six tenths is bigger, but it's not…

Manuel: To them it would be, with this strategy. But it doesn't work in all cases.

The students used a counterexample to refute the validity of the justification, clearly stating that the justification would not held in all possible cases. The counterexample was very useful to other students understand that even though the statement did not seem to be incorrect, if they tested it with other cases, they would realize that it was not valid.

Another statement presented in the task was "2,005 < 2,7 – If we transform this [2,005] it can also be the same as 2,5". Most of the students disagreed with the statement based on the treatment of 5 tenths to 500 thousandths, as Fábio referred:

Fábio: . . . If we now hide the two, there is no two, I can transform five tenths in five hundred thousandths and five hundred is bigger than five. So, two thousand and five hundred thousandths is bigger than two thousand and five thousandths.

The teacher challenged the students to explain this idea in a different way, to prevent them to think about adding zeros to the numeral in order to compare only digits, instead of understanding the relations between the different units in the numbers:

T: Why do you have the need to put two zeros here [2,5]? To have the same number of orders than this [2,005]? Is that why? Can't you compare them in another way?

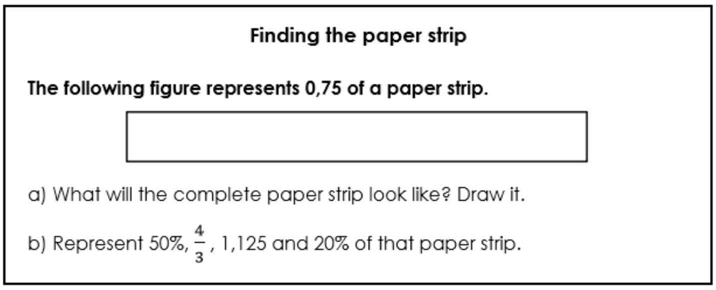
Manuel: We can compare because is… is simple. We only have to do, for example, 2,5 minus 2,005 that is… If it is zero it's because it is the same [number]…

To refute the statement presented in the task, Manuel generalized that if the numbers were equal, the difference between them is zero. He started by considering the particular case of 2,5 and 2,005, but he ended the statement saying "if it is zero it's because it is the same", drawing this broader conclusion from the particular case of the initial pair of numbers, that he knew that were not equal.

Moving towards a flexible understanding…

The paper strip task (see Figure 1), also solved by students in grade 4, implied the reconstruction of the unit and the constructions of parts bigger and smaller than the unit, considering symbolic representations of rational numbers and the iconic representation of the bar, without using the ruler.

FIGURE 1 – Prompt given in the task "Finding the paper strip".



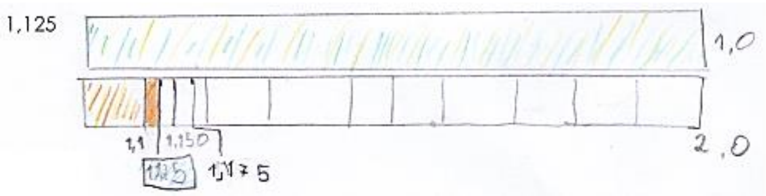
Source: Research task (adapted from Menezes, Rodrigues, Tavares and Gomes, 2008).

We focus our analysis on the construction of the parts represented by 1,125 and 20%. In the whole-class discussion, Jorge shared the solving strategy that he followed, which allowed him to accurately represent 1,125:

Jorge: . . . I did one unit, then I painted eleven tenths, then divided the second tenth in half. After I divided the part that was divided in half and did it again on the other side [of the initial mark] as well . . . And I saw that because what we wanted was one thousand, one hundred and twenty five thousandths, I did here a thing to show that it was the one thousand, one hundred and twenty five thousandths.

Jorge's justification, along with his register (Figure 2), shows that he started by carrying out a treatment of 1,1 into eleven tenths. The student seemed to recognize that one tenth can be transformed into 100 thousandths, thus dividing in half the second tenth of the second unit, and writing down 1,150. Then, he divided each of the tenth's half again in half, resulting into parts that represented 25 thousandths. Finally, he identified 1,125 through a treatment of this representation into 1125 thousandths. Following this systematic strategy, Jorge was confident that he had done a rigorous representation of 1,125.

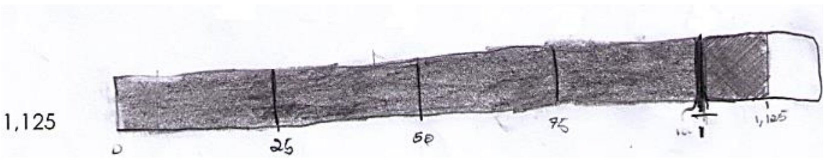
FIGURE 2 – Representation of 1,125 by Jorge.



Source: Research data.

Another student, Hugo, traced a complete bar that he then divided into quarters (Figure 3). The student marked the bar with 0, 25, 50, 75 and 100. He erased the latter and wrote 1 instead. Even though he did not use the percentage symbol, he seemed to be using this representation. To mark 0,125, he drew one more quarter, from which he painted half. By doing this, Hugo showed that he recognized 0,125 as half of one quarter, that is, one eight of the unit, and because he seemed to call upon percentage, it was also possible that he related 0,125 with half of 25%, that is, 12,5%.

FIGURE 3 – Representation of 1,125 by Hugo.

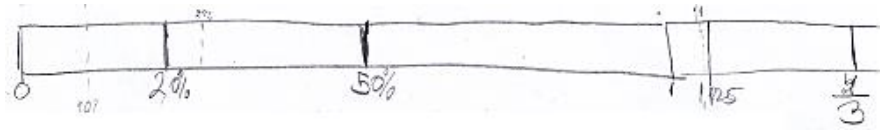


Source: Research data.

Manuel justified how he represented 20% (Figure 4), showing flexibility in using and transforming representations:

> Manuel: Because I had already marked fifty percent, I thought that twenty five percent are half of the fifty percent. Then, I thought that, because I had also already used it to mark something else, I had already marked one tenth, half of that would be five [percent]. So I took five to those twenty five percent and more or less in that area I will get the twenty.

FIGURE 4 – Manuel's written record.



Source: Research data.

Instead of drawing the requested parts, separately, Manuel used the bar model in a similar way as the number line. He justified how he located 20% using 50% as a reference. He then marked half of 50%, 25%, to which he needed to take off 5%. To have the perception of what would be 5% in the bar, he called upon one tenth already marked in the bar, doing a conversion between 10% that he had written and decimal representation, showing that he recognized 5% as half of one tenth. The latter relation ($5\%=\frac{1}{2}\times 0{,}1$) shows a conversion of 5% as a composition of fraction and decimal representation.

Finally, the following task was solved at the end of grade 4. Five tags were placed in the table with different representations of rational numbers: $\frac{1}{4}$; 0,025; 0,205; 20% and 0,002. We will focus on how Dinis ordered the numbers. He handled and moved the tags as he wished and was asked to sort the numbers represented by descending order of magnitudes. The researcher gave time for him to solve the task and then asked to justify how he compared the numbers.

Dinis readily organized the tags correctly, in silence, after which the researcher asked him to explain how he organized the numbers:

R: You were fast, how did you immediately see that one quarter was the larger?

Dinis: Because it is the same as two hundred and fifty thousandths.

R: OK. Then you have placed this… [0,205]

Dinis: That one was, sort of twenty and a half percent...

R: OK. Then this… [20%]

Dinis: Yes, twenty percent.

R: And how did you relate that percentage with this one? [$\frac{1}{4}$]

Dinis: That is twenty-five percent.

Dinis started by converting the fraction representation ($\frac{1}{4}$) into decimal (0,250), but then he recurred to percentage to make sense of 0,205. He converted the number as a composition showing multiplicative relations, as "twenty and a half percent", in the sense that it is 20% + 0,5%. This conversion seems to show that, at one hand, Dinis understood

0,2; 0,20 or 0,200 as 20% and 0,005 as half of 1%. This latter transformation implies understanding 1% as 0,01 and consider it as the unit to which he relates 0,005 as the half.

Then, Dinis justified how he compared the decimal numbers that represented the smaller magnitudes (0,025 and 0,002):

> Dinis: This [0,025] is higher because is more… It had two percent and a half and this [0,002] had two tenths of one percent.

The justification of Dinis relied in conversions as compositions, in which he considered 1% as the reference unit. He composed 0,02 (in 0,025) as 2% and a half, again flexibly changing the unit into 1% or 0,01 and considered the remaining 0,005 has half of that unit. He did a similar composition for 0,002. He composed the number as "two tenths of the percent" (0,2×1%), implying the understanding that 1% can also be represented as 0.01, and then he perceived 0,002 as two tenths of one hundredth or 1% (0,002=0,2×0,01 or 0,002=0,2×1%). These conversions show a significant understanding of both the rational numbers expressed in these symbolic representations, and of the specificities of the three notations. By changing the unit to 1%, Dinis could organize in a systematic way each number as representing progressively smaller parts of the unit that he was considering.

DISCUSSION AND CONCLUSIONS

In this article, we aim to understand the transformations of rational number representations carried out by students and their mathematical reasoning processes, which were conceptualized according to Stylianides's guiding principles (2007a).

The conjectures identified in the episodes were implicit in the students' discussions. Since the conjectures emerged from the mathematical relationships established by the students (Lannin et al., 2011), they showed their knowledge about rational numbers. In the first episode, the conjecture that non-whole part of decimal numbers could be interpreted as whole numbers, derived from the fact that the students were just beginning to tackle the meaning of rational numbers in decimal representation. The conversions between rational numbers represented as percentage and fraction were used to refute that statement. In the second episode, the conjecture that decimal numbers that had more digits in their non-whole part would represent smaller magnitudes than the ones with fewer digits, showed an initial understanding of the relation between the unit and its parts, which is essential in interpreting rational numbers. Once again, conversions between representations, specifically between decimal numbers and the 10×10 grid iconic representation, was essential to demonstrate that the conjecture was false.

The third and fourth episodes illustrate the importance of discussing the validity of the statements that constitute a justification. As the students developed rational number understanding and engaged in mathematical reasoning processes, they became more aware of the statements that can validate a justification, identifying that they need to hold in all possible cases and recognizing that a counterexample is sufficient to invalidate a statement (Lannin et al., 2011). To do so, the students got involved in testing those statements, carrying mostly treatments. Also, the analysis of statements can lead students to other mathematical reasoning processes, such as generalizations, like the one that Manuel did regarding how to verify if two numbers are equal.

The final episodes illustrate how students were able to formulate solving strategies, which involved conversions between different representations but also as composition of different representations. The last one was also identified in Dinis' justification, in the final episode, in which he showed a flexible conceptualization of the unit. At this point, the students seemed to flexibly transform representations, showing that they consider all different representations as part of the rational number domain (Wang & Siegler, 2013). Additionally, and as Duval (2006) emphasizes, the relations established by students cannot be seen as occasional, but as an outgrowth of a global coordination of representations, rooted in a sound understanding of rational numbers.

We emphasize the role of the class activity throughout the episodes in both the transformations of representations and in the mathematical reasoning processes. The conversions done by some students helped others to also establish connections among different rational number representations. Regarding mathematical reasoning processes, when some students conjectured they did not further examine their statements, however together with their colleagues, they further developed justifications, testing and evaluating the statements, which underlines the fundamental role of social interactions (Ellis, 2011).

In conclusion, we identified treatments and conversions made by students and, within the conversions, we could also identify conversions between representations and conversions involving a composition of different representations, which showed a strong conceptualization of the unit and coordination of different representations. The transformations identified were closely related to the different mathematical reasoning processes showed by the students, namely formulating solving strategies, conjecturing and justifying. In fact, the transformations among rational numbers representations and the mathematical reasoning processes showed by the students are intimately related. Transformations of representations, on one hand, led students to engage in mathematical reasoning processes and, on the other hand, were called upon to support the students' mathematical reasoning processes. Thus, one fostered the other, being both crucial for the development of a sound rational number understanding.

ACKNOWLEDGEMENT

This work is supported by national funds through FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia by a grant to the first author (SFRH/BD/108341/2015).

REFERENCES

Baturo, A. (2000). Construction of a numeration model: A theoretical analysis. In J. Bana & A. Chapman (Eds.) *Proceedings 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 95–103). Fremantle, WA.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education* (3rd edition, pp. 481–503). New York, NY: Routledge.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1), 103–131.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(4), 308–345.

Goldin, G. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, M.G. Martin & S. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-286). Reston, VA: NCTM.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping students learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Komatsu, K. (2010). Counter-examples for refinement of conjectures and proofs in primary school mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 29,* 1–10.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics – 2001 Yearbook* (pp. 146–165). Reston, VA: NCTM.

Lannin, J. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231–258.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante, 21*(2), 81–110.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 169–186.

Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2008). *Números racionais não negativos: Tarefas para o 5.º ano*. Lisboa: DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*, *100*, 3–9.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts* (pp. 327–362). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Post, T. R., Wachsmuth, I., Lesh, R., & Behr, M. J. (1985). Order and equivalence of rational numbers: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 18–36.

Russel, S. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 1–12). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stylianides, A. J. (2007a). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1–20.

Stylianides, A. J. (2007b). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289–321.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438–445.

Wang, Y., & Siegler, R. S. (2013). Representations of and translation between common fractions and decimal fractions. *Chinese Science Bulletin, 58*(36), 4630–4640.

Whitenack, J., & Yackel, E. (2008). Construindo argumentações matemáticas nos primeiros anos: A importância de explicar e justificar ideias. *Educação e Matemática*, 100, 85–88.

Anexo 4

Morais, C. & Serrazina, M. L. (2018a). A compreensão da estrutura da representação decimal de número racional por alunos do 3.º e 4.º ano. *Boletim GEPEM.* (aceite em 27 de setembro de 2018)

Artigo IV

Versão dos autores

A compreensão da estrutura da representação decimal de número racional por alunos do 3.º e 4.º ano

Cristina Morais

Externato da Luz; UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
cristina.morais@campus.ul.pt

Maria de Lurdes Serrazina

Escola Superior de Educação de Lisboa; UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal
lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo

Este artigo tem como objetivo analisar como alunos do 1.º ciclo compreendem a estrutura subjacente à representação de número racional em numeral decimal e sua relação com outras representações. O estudo decorre de uma Investigação Baseada em Design em que foi realizada uma intervenção numa turma do 1.º ciclo do ensino básico com 25 alunos, iniciada no 3.º ano de escolaridade e continuada no 4.º ano, de uma escola situada em Lisboa. Os processos de recolha de dados foram gravação vídeo e áudio das aulas, recolha do trabalho escrito dos alunos e notas de campo. É analisado o trabalho realizado pelos alunos em diferentes momentos da intervenção ao longo dos dois anos de escolaridade e numa entrevista individual realizada no final da intervenção. Os resultados mostram a importância das representações icónicas no apoio aos processos de reunitização explicitando a relação entre as unidades de modo a promover o prolongamento da estrutura decimal aos números racionais. Também o uso das representações simbólicas, em particular a percentagem, foi fundamental. Revelam ainda que, numa fase posterior, os alunos usam a estrutura decimal para realizarem transformações entre diferentes representações de número racional. Esta relação constante entre representações contribuiu não apenas para dar significado ao numeral decimal, mas também para uma compreensão global de número racional.

Palavras-chave: Números racionais. Numerais decimais. Estrutura decimal. Representações.

The understanding of the structure of the decimal number representation of rational number of grade 3 and grade 4 students

Abstract

This paper aims to analyze how elementary school students understand the underlying structure of the decimal number representation of rational numbers and its relation with other representations. This study stems from a Design Based Research, within which an intervention was carried out in an elementary school class of 25 students and their teacher, that started in grade 3 and was continued in grade 4, in a school located in Lisboa. The processes of data collection were video and audio recording of the lessons, collection of students' written work and field notes. The analysis centers on different episodes of students' work during the intervention along the two school years and in an individual interview carried out at the end of the intervention. The results show the importance of iconic representations in supporting reunitization processes, making explicit the relation between the units, and thus promoting the extension of the decimal structure to the rational numbers. Also, the use of symbolic representations, in particular, the percentage, was crucial. The results also show that, at a later stage, the students use the decimal structure to make transformations among different representations of rational numbers. This constant relation among representations contributed not only to give meaning to decimal numbers, but also to a global understanding of rational numbers.

Keywords: Rational numbers. Decimal numbers. Decimal structure. Representations.

Introdução

Os desafios que emergem da aprendizagem inicial dos números racionais não negativos[12] contribuem para a ampliação do conceito de número dos alunos (SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011) que envolve, entre outros aspetos, a interpretação de novas configurações simbólicas usadas para representar os números pertencentes a um conjunto numérico até então desconhecido. Nesta fase inicial, é particularmente importante atender ao facto de as representações de número racional não traduzirem de forma transparente o número representado (MOSS; CASE, 1999), o que significa que é necessário um entendimento da estrutura inerente à representação para esta se tornar inteligível para os alunos (PONTE; SERRAZINA, 2000).

[12] Ao longo do artigo, referimo-nos a "números racionais" considerando números racionais não negativos.

A representação de números racionais de acordo com o sistema de numeração decimal, utilizando vírgula ou ponto, designada por numeral decimal[13], segue as convenções do sistema de numeração usado com números inteiros[14]. Contudo, e apesar da familiaridade com a estrutura decimal subjacente a esta representação, a compreensão de numeral decimal não é imediata nem evidente para os alunos (HIEBERT, 1992). As dificuldades que alunos de várias faixas etárias mostram no trabalho com numerais decimais, identificadas em diversas investigações, são reveladoras da complexidade inerente à compreensão de número racional nesta representação (DURKIN; RITTLE-JONHSON, 2015; STEINLE, STACEY, 1998; RESNICK; NESHER; LEONARD; MAGONE; OMANSON; PELED, 1989; VAMVAKOUSSI; VAN DOOREN; VERSCHAFFEL, 2012). O facto de os alunos considerarem que 0,27 representa um número de grandeza superior a 0,4 porque 27 é superior a 4, ou igualarem 6,02 a 6,2 por considerarem que zero não assume qualquer valor, evidencia não só fragilidades no entendimento da estrutura decimal subjacente ao numeral decimal, como na própria compreensão dos números representados.

Acreditamos que para compreender numeral decimal, não só é essencial o entendimento da estrutura subjacente, como também é necessário estabelecer relações entre numeral decimal e outras representações (LACHANCE; CONFREY, 2002). Assim, neste artigo, procuramos perceber como alunos do 1.º ciclo (6-10 anos) compreendem a estrutura subjacente à representação de número racional em numeral decimal e sua relação com outras representações.

Compreender numeral decimal

O sistema de numeração decimal subjacente à representação em numeral decimal é um sistema poderoso, permitindo escrever de forma elegante o que seria uma expressão matemática complexa (PONTE; SERRAZINA, 2000). Por exemplo, a expressão $8\times10^1+4\times10^0+1\times10^{-1}+5\times10^{-2}$, simplificada na representação 84,15, evidencia a noção de base 10, nas diferentes unidades criadas a partir de agrupamentos constituídos por 10 elementos, bem como de valor de posição assumido pelos algarismos que representam cada um dos agrupamentos de base 10, ligados por relações multiplicativas e aditivas. Para melhor se perceber o desafio que o entendimento desta estrutura coloca aos alunos,

[13] No artigo, usamos a expressão “numeral decimal” para designar esta representação.
[14] Ao longo do artigo, referimo-nos a “números inteiros” considerando números inteiros não negativos.

centramo-nos na conceptualização da unidade, essencial na própria compreensão de número racional (BEHR; HAREL; POST; LESH, 1992; MONTEIRO; PINTO, 2005).

O desenvolvimento da conceptualização da unidade implica processos de partição, unitização e reunitização[15]. Para salientar a importância destes processos, comecemos por considerar um todo, a unidade, que pretendemos dividir em cem partes. A partição, capacidade essencial para ancorar a compreensão de número racional (LAMON, 1996; STREEFLAND, 1991), é convocada para dividir a unidade em cem partes que têm que ser iguais.

Gerada uma quantidade através do processo de partição, neste caso cem partes iguais correspondentes a cem centésimas, podemos agora pensá-la de modo diferente, dependendo da unidade de medida escolhida, compondo ou recompondo as partes obtidas de modo a obter o todo inicial, isto é, unitizando ou reunitizando (BATURO, 2004). A mesma quantidade pode ser unitizada como 1 (o todo), como 10 se tomarmos como unidade de medida um grupo de 10 das cem partes iniciais (10×10), como 2 tomando como unidade de medida um grupo de 50 (2×50), entre outras possibilidades. A capacidade de formar e trabalhar com unidades de medida progressivamente mais complexas pode levar a raciocínios cada vez mais sofisticados e poderosos (LAMON, 1996), uma vez que a capacidade de considerar unidades de medida diferentes para um mesmo todo implica um entendimento da relação entre estas duas entidades.

A reunitização envolve a mudança de unidade a par da noção de conservação do número, sendo por isso um processo bastante exigente no trabalho com números racionais (BATURO, 2000). É um processo particularmente importante para a compreensão do sistema de numeração decimal. Neste sentido, assinalamos três tipos de estratégias de reunitização identificadas por Baturo (2000): partição, agrupamento e reagrupamento.

A partição, tal como referido anteriormente, envolve a divisão da unidade considerada, e é agora mobilizada para gerar unidades menores. Por exemplo, 8 décimas podem ser reunitizadas em 80 centésimas. É este tipo de reunitização que fazemos quando transformamos as unidades da esquerda para a direita do numeral, sendo cada uma das unidades transformadas 10× menor que a unidade posicionada imediatamente à sua esquerda.

Inversamente, através da estratégia de agrupamento são formados grupos de unidades maiores, gerando-se unidades maiores. Este tipo de estratégia é usado, por

[15] Em inglês *partitioning*, *unitizing* e *reunitizing* respetivamente.

exemplo, na reunitização de 50 centésimas em 5 décimas, ou seja, é o processo subjacente a uma leitura da direita para a esquerda de um numeral, em que cada unidade resulta da divisão por 10 da unidade imediatamente à sua direita.

O reconhecimento de que podem ser criadas unidades que resultam do agrupamento de 10 elementos ou originar 10 unidades menores que resultam da partição de uma unidade maior envolve a noção de base bem como a noção de valor de posição (HIEBERT, 1992; PONTE; SERRAZINA, 2000). Ambas são fundamentais no terceiro tipo de estratégia de reunitização que diz respeito ao reagrupamento através de composições de unidades, considerado o tipo de estratégia mais complexo (BATURO; COOPER, 2000). Baturo (2000) identifica reagrupamentos envolvendo relações aditivas, como por exemplo a reunitização de 6 décimas como 5 décimas+10 centésimas, que pode tornar-se bastante vantajosa em determinados contextos, nomeadamente em situações de cálculo.

Neste tipo de estratégia incluímos também as que envolvem relações multiplicativas, como pensar em 25 centésimas como um quarto de uma décima $(0{,}25 = \frac{1}{4} \times 0{,}1)$. Neste tipo de composição, a quantidade associada ao número é reagrupada como parte de uma unidade também ela reconceptualizada, implicando a possibilidade de serem criadas unidades progressivamente menores e, consequentemente, a construção da propriedade densidade. O reconhecimento desta propriedade do conjunto dos números racionais, não partilhada pelo conjunto dos números inteiros, representa uma mudança significativa no conceito de número (SIEGLER et al., 2011).

Lachance e Confrey (2002) sublinham que para "compreender verdadeiramente numerais decimais" (p. 506) é necessário compreender as relações entre numeral decimal, fração e percentagem e que, sem este entendimento, apenas se desenvolvem ideias superficiais sobre cada uma das representações. Só com a compreensão do que está a ser representado é que a representação tem sentido para quem a usa e se transforma em ferramenta para pensar (NCTM, 2007; PONTE; SERRAZINA, 2000). A estrutura decimal pode constituir-se como ponte entre representações, possibilitando a representação de número racional em numeral decimal, em fração com denominador correspondente a potências de base 10, como também em percentagem (BROCARDO, 2010). O uso de diferentes representações é considerado basilar para a compreensão de número racional (e.g., POST; CRAMER; BEHR; LESH; HAREL, 1993), uma vez que promove um entendimento integrado de número racional (MOSS; CASE, 1999;

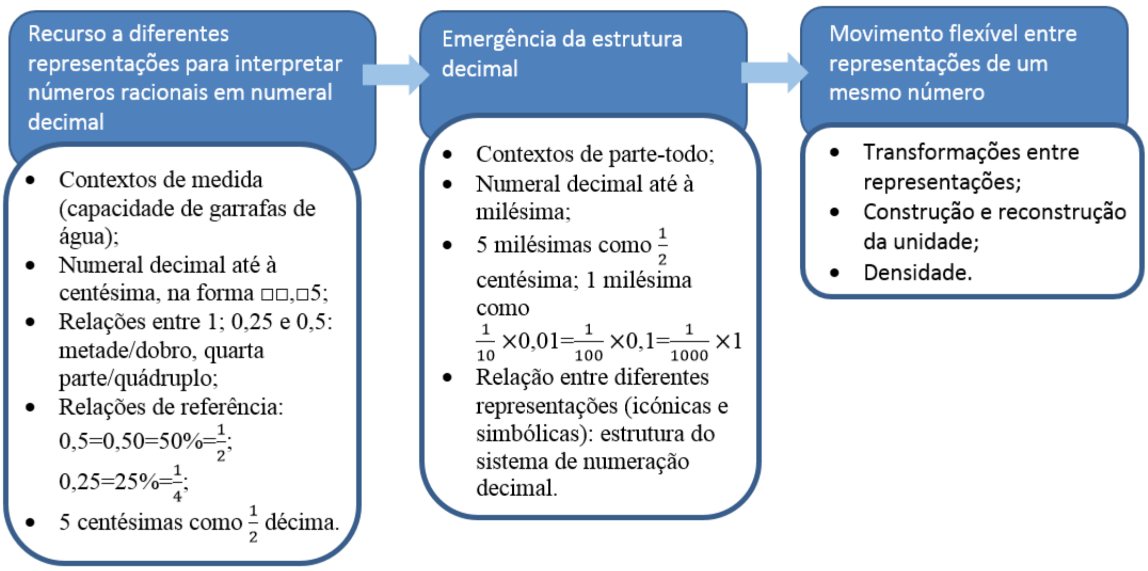
TRIPATHI, 2008), podendo ser desenvolvido a partir do momento em que os alunos começam a explorar este conjunto numérico (MOSS; CASE, 1999).

Metodologia

Neste texto reportamos parte de um estudo mais alargado que seguiu a modalidade de Investigação Baseada em Design (PONTE; CARVALHO; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2016) tendo sido realizado o que Cobb, Jackson e Dunlap (2016) designam por *classroom design study*, uma vez que se trata de uma investigação realizada em sala de aula e centrada em processos de aprendizagem.

Foi delineada uma intervenção para a construção da compreensão de número racional, enfatizando a representação em numeral decimal, considerando que os alunos tinham trabalhado anteriormente com números racionais em fração, maioritariamente frações unitárias, com um significado parte-todo. Neste percurso identificamos três grandes etapas, cujas ideias-chave destacamos na Figura 1.

Figura 1 – Percurso de aprendizagem delineado



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Os participantes foram 25 alunos de uma escola de Lisboa (Portugal), a professora da turma bem como a investigadora (primeira autora). A intervenção teve lugar no 3.º ano[16] e 4.º ano. As tarefas foram resolvidas em aulas de 90 minutos, uma vez por semana, perfazendo um total de 16 semanas nos dois anos letivos. A maior parte das aulas foi organizada em três momentos distintos: lançamento da tarefa, resolução em pequenos

[16] Alunos com idade média de 8 anos.

grupos e discussão coletiva (PONTE, 2005). A investigadora interveio nestes momentos sempre que considerou pertinente. No final da intervenção, foi realizada pela primeira autora uma entrevista individual a alguns alunos da turma, que contemplou tarefas de de representação, comparação e ordenação de números racionais, focando a representação em numeral decimal.

A recolha de dados foi feita por gravação vídeo e áudio das aulas e da entrevista, recolha do trabalho escrito dos alunos, bem como registo de notas de campo da investigadora. Nos dados apresentados neste artigo, os alunos são identificados com nomes fictícios, garantindo o seu anonimato. No processo de análise de dados, as gravações áudio foram transcritas e complementadas com informação recolhida com o visionamento das gravações vídeo, registos dos alunos e notas da investigadora. Os dados foram analisados considerando os processos envolvidos na conceptualização de unidade, em particular os tipos de estratégias de reunitização usadas pelos alunos; e as representações convocadas no trabalho com numerais decimais.

Resultados

Analisamos episódios ocorridos em momentos de resolução de tarefas em pequenos grupos ou em momentos de discussão coletiva. São organizados em três secções: na primeira apresentamos um episódio que ilustra como os alunos procuraram atribuir significado ao numeral decimal recorrendo a outras representações; os episódios da segunda secção procuram evidenciar a emergência da estrutura decimal; e, por fim, a última secção reúne episódios que ilustram um trabalho flexível com numeral decimal, envolvendo outras representações de número racional.

Atribuindo significado ao numeral decimal

Na primeira tarefa da intervenção, realizada no 3.º ano, foi pedido aos alunos que estabelecessem relações entre as capacidades de três garrafas de água, de 1 *l*, 0,5 *l* e 0,25 *l*, que se encontravam com o rótulo tapado. Para o fazer, podiam encher e vazar as garrafas, e usar um marcador para traçar o nível da água em cada garrafa se necessário. Após esta primeira fase da tarefa, foi pedido que associassem uma etiqueta a cada garrafa de água, identificando a sua capacidade. Os alunos estavam organizados em grupos e a todos foram distribuídas as etiquetas “0,25 *l*” e “1 *l*”, a metade dos grupos uma etiqueta com a representação “0,5 *l*” e a outra metade tinha “0,50 *l*”.

Os grupos com a etiqueta "0,5 *l*" interpretaram os numerais decimais como números inteiros, associando "1 *l*" à garrafa de maior capacidade, "0,25 *l*" à garrafa média e "0,5 *l*" à garrafa de menor capacidade, considerando que 25 seria superior a 5. No momento de discussão coletiva, alunos que tinham a etiqueta "0,50 *l*" partilharam como a tinham relacionado com "0,25 *l*" recorrendo de forma espontânea à representação em percentagem:

António: Porque um litro é 100 . . . É 100 por cento.

Investigadora (I): OK, boa. Então metade...

António: Dá cinquenta por cento.

Fábio: Depois metade dos cinquenta por cento será vinte e cinco por cento.

Os alunos recorreram à percentagem para interpretar os números expressos em numeral decimal. Estabeleceram a unidade como 100 (%), interpretando 0,50 como 50 (%), logo, como metade de 100. De seguida, transformaram 0,25 em 25 (%), o que possibilitou a sua interpretação como metade de 50. Assim, com base em relações estabelecidas entre percentagens, fortemente apoiadas nas relações entre os números inteiros que constituem as componentes numéricas da representação em percentagem, os alunos concluíram que 0,25 seria metade de 0,50.

Para vários alunos 0,5 e 0,50 eram representações de números diferentes. Contudo, Rute e Tomás consideraram ambos equivalentes:

Rute: Porque cinquenta é metade de cem.

Tomás: Porque cinquenta é metade de cem e o cinco é metade de dez.

Recorrendo de novo a números inteiros, os alunos estabeleceram a razão entre 5 e 10, e entre 50 e 100, identificando a proporção entre as razões como metade. Para evidenciar a relação entre estas afirmações e a partição da unidade dividida em 10 ou em 100 partes iguais, a investigadora fez a leitura dos numerais:

I: . . . Vou dizer outra vez uma coisa que tu disseste: porque cinco é metade de dez e cinquenta é metade de cem. Eu vou repetir o nome que eu dei, como eu li: cinco décimas e tu disseste que cinco é metade de dez, e este eu li cinquenta centésimas.

Rute: Ah! Décimas é de dez e centésimas é de...

Rute e Bárbara: De cem!

. . .

Vários alunos: E a décima vem de dez.

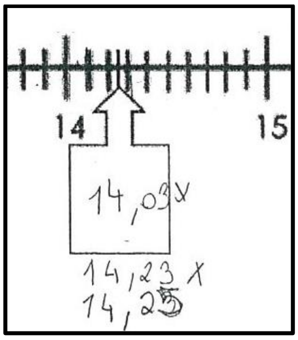
Para os alunos não foi evidente a relação entre unidade e o número de partes em que esta se encontrava dividida. Contudo, a sua associação à leitura dos numerais e à representação em percentagem permitiu começar a suscitar a reunitização de 1 como 10 décimas e 100 centésimas.

Estendendo a estrutura decimal

Após a exploração em torno do modelo da reta numérica, graduada em décimas, foi realizada uma tarefa que incluía a representação de números localizados na reta. Centramos a análise na representação do número 14,25 na reta numérica.

Matilde representou o número como 14,03 e, de seguida, como 14,23 (Figura 2).

Figura 2 – Registo de Matilde na Questão 2 da tarefa "Localização de números na reta numérica"



Fonte: Dados da pesquisa, 2014.

A aluna explicou que representou inicialmente 14,03 porque contou três traços na reta numérica, após as 14 unidades. Esta representação inicial mostra que reconhece a parte inteira do numeral à qual procura acrescentar a parte não inteira, mas, não evidencia nem o reconhecimento das unidades que constituem essa parte não inteira nem a relação existente entre as unidades. Contudo, alterou depois o registo para 14,23, explicando:

Matilde: . . . porque aqui estava do lado do dois, vinte e três porque está entre o dois e o três.

Pareceu ter reconhecido alguma diferença entre as unidades que compõem a parte não inteira do numeral. Identificou 2 como unidade menor que 1 posicionando o algarismo dois na unidade das décimas. Uma vez que o número se encontrava localizado entre duas e três décimas, compôs o número como 14,23. Não é claro se a aluna identificou o valor de posição de 2 enquanto duas décimas, contudo, parece evidente que não reunitizou por partição 1 décima em 10 centésimas. Contudo, o registo que fez mostra que Matilde reconhece que as unidades que compõem o numeral tornam-se menores à medida que o lê da esquerda para a direita.

Outros alunos, como André e Dinis, evidenciaram um reconhecimento do número a representar, contudo, a dúvida no seu registo estava associado às convenções do sistema de numeração decimal:

> André: Cristina, nós tivemos aqui uma pequena dúvida. Eu mais ou menos tinha aqui uma pequena dúvida. Como catorze... Ele estava ali no meio . . . e então eu fiquei com a pergunta se era dois zero cinco ou era dois cinco, porque estão aqui duas décimas...
>
> Dinis: É por isso que é dois zero cinco.
>
> André: E depois como está ali no meio... Então e o dois? Que são as duas décimas?
>
> I: O dois são as duas décimas, tens razão. Há duas décimas completas.
>
> André: E então é assim, não é? (Escreve 14,25) Eu estava um bocado confuso com o zero cinco...

Apoiando-se na reta numérica, André pareceu ter reunitizado o número por reagrupamento como 14 unidades + 2 décimas + "metade do espaço" compreendido entre duas décimas. Ao compor o número, identificou claramente 14 unidades e 2 décimas, contudo, pareceu associar 0,5 à parte situada entre décimas, ficando indeciso entre as representações 14,25 e 14,205, o que evidencia a emergência da noção de valor de posição.

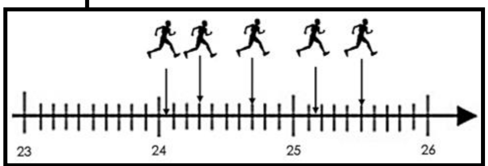
À tarefa anterior, seguiu-se "A maratona" (Figura 3), em que era pedido que os alunos comparassem números em numeral decimal, identificando o maior e o menor (correspondentes à maior e menor distância percorrida pelos atletas) e ordenando os números na reta numérica.

Figura 3 – Parte do enunciado da tarefa "A maratona"

A maratona

Na tabela seguinte apresentam-se as distâncias até agora percorridas por cinco atletas, numa corrida com 42 quilómetros. Observa-a com atenção:

Atleta	Distância até agora percorrida
Pedro	24,05 km
João	24,3 km
Mário	25,5 km
Luís	25,15 km
Manuel	24,7 km



Fonte: Materiais da pesquisa, 2014.

No momento de discussão coletiva, grande parte dos alunos identificou que 25,5 era superior a 25,15 através da reunitização por partição de 5 décimas em 50 centésimas:

Guilherme: É o Mário [quem vai à frente - 25,5] porque cinco é igual a cinquenta ou metade, que é mais que quinze.

Alguns alunos justificaram a reunitização recorrendo à tarefa inicial das garrafas, onde a garrafa média tinha 0,5 *l* ou 0,50 *l* de capacidade, que era superior à capacidade de 0,25 *l* da garrafa mais pequena. Outros alunos, como Jorge e Luísa recorreram ao modelo da reta numérica graduada em décimas, tal como André, evidente na explicação de Jorge relativamente à comparação entre 24,05 e 24,3:

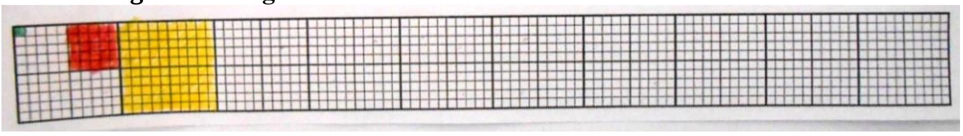
Jorge: Nós pensámos que o Pedro (24,05) era o último porque (…) se vinte e cinco vírgula quinze, quinze era um tracinho mais meio. E agora como é vinte e quatro vírgula zero cinco não tinha nenhum um a dizer que era um tracinho. E nós pensámos como o cinco é metade de dez, eu considerei dez este tracinho aqui [apontando para o espaço compreendido entre décimas na reta numérica] e então era metade deste tracinho.

O aluno relacionou cada unidade do numeral à sua localização na reta numérica. Ao considerar uma décima como dez, Jorge fez uma reunitização por partição de 1 décima em 10 centésimas. Não o faz por reconhecer que cada décima representa um grupo de dez centésimas, mas antes por estabelecer a relação entre 5 e 10 enquanto números inteiros. Por fim, reunitizou por reagrupamento 5 centésimas como "metade deste tracinho", isto é, metade de 1 décima.

Nesta fase, os alunos começaram a mostrar algum entendimento do sistema de numeração decimal estendido à direita da vírgula. Compreendem que as unidades se vão tornando progressivamente menores à medida que se movem da esquerda para a direita ao longo do numeral, embora não pareça ainda ser evidente que reconheçam que cada unidade é 10× menor que a unidade imediatamente à esquerda.

Após a realização de tarefas com numerais até às milésimas, sentiu-se a necessidade de trabalhar com um modelo que possibilitasse a sua representação e tornasse clara a relação entre unidades decimais. Esta tarefa foi a primeira em que o modelo 10×100 foi explorado. Foi pedido que os alunos representassem numa barra uma décima a amarelo, uma centésima a vermelho e uma milésima a verde. Foram vários os alunos que identificaram cada parte pedida, incorretamente, como Mafalda representou (Figura 4).

Figura 4 – Registo de Mafalda na tarefa “Números em barrinhas”



Fonte: Dados da pesquisa, 2014.

O facto de a barra apresentar quadrados de dimensão maior (as décimas) e dimensão menor (as milésimas), pode ter induzido os alunos a considerar que uma centésima iria corresponder a um quadrado de dimensão média, sem atender à relação de 10× maior ou menor entre as unidades, tal como Frederico verbalizou:

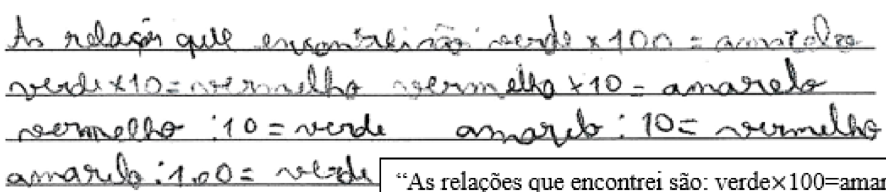
> Frederico: Eu acho, já que isto está dividido em quatro partes iguais, o quadrado inteiro, eu achei que uma milésima já era um bocadinho e uma centésima já achava que era aquilo…
>
> I: Porque era um bocadinho maior…
>
> Frederico: Porque é um bocadinho maior.

No entanto, quando foi pedido a Frederico que centrasse a atenção na relação entre as diferentes unidades, o aluno alterou a sua resposta:

> I: A centésima é um bocadinho maior que a milésima. Mas quantas vezes é maior?
>
> Frederico (de imediato): Dez!

Rapidamente, o aluno reunitiza por partição a centésima em dez milésimas, corrigindo a sua representação da centésima. Apesar das características desta representação ter induzido esta identificação de cada uma das partes, o facto de se encontrarem visíveis a unidade, décima, centésima e milésima num mesmo modelo, promoveu a reunitização de cada uma das partes identificadas. Tal foi evidente quando foi pedido aos alunos que identificassem relações possíveis entre cada uma das partes pintadas. Tal como outros colegas, Artur realizou reunitizações por partição e por agrupamento (Figura 5).

Figura 5 – Registo de Artur na tarefa “Números em barrinhas”



“As relações que encontrei são: verde×100=amarelo, verde×10=vermelho, vermelho×10=amarelo, vermelho:10=verde, amarelo:10=vermelho, amarelo:100=verde”

Fonte: Dados da pesquisa, 2014.

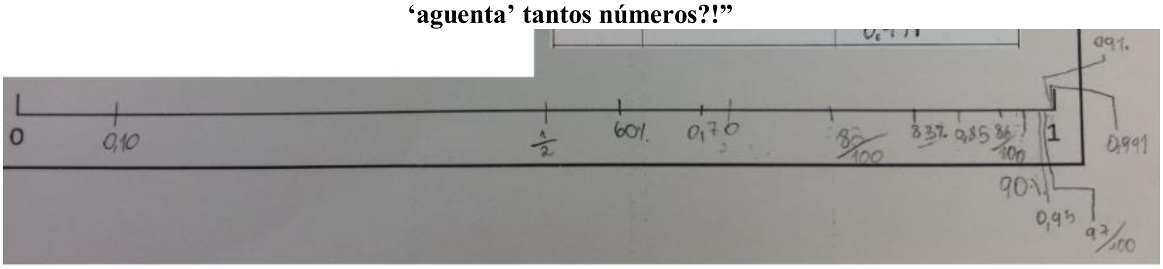
Foi nesta tarefa que, pela primeira vez, foram explicitadas pelos alunos este tipo de relações entre unidade, décima, centésima e milésima, emergindo assim a relação entre unidades enquanto 10× maiores ou 10× menores, noção fundamental na estrutura decimal.

Movendo-se entre representações

Uma das últimas tarefas da intervenção, realizada no 4.º ano, implicava a transformação de números racionais em numeral decimal, fração e percentagem, associada ao modelo da reta numérica. Era pedido que os alunos posicionassem números na reta numérica, variando a sua representação simbólica, e com a condição de colocarem um número entre o último dito pelo par e 1. Foi dado tempo para realizarem o máximo de jogadas possíveis.

Na Figura 6 apresentamos o registo realizado por Jorge, com o par Afonso.

Figura 6 – Registo das jogadas realizadas pelo par Jorge e Afonso na tarefa "Será que a reta 'aguenta' tantos números?!"



Fonte: Dados da pesquisa, 2015.

Jorge e Afonso, à semelhança de vários colegas, fizeram uso da estrutura decimal para apoiar as transformações entre representações de número racional. Inicialmente, reconheceram a centésima como unidade facilitadora da transformação entre numeral decimal, fração e percentagem, evidente, por exemplo, na sequência de números selecionados a partir de 60%: 0,70; 80/100; 83%; 0,85; 86/100…

No momento de discussão coletiva foi discutida a possibilidade de identificar um número situado entre o último número 0,991, selecionado por Jorge e Afonso, e 1:

Jorge: Nós não temos a certeza, mas achamos que sim. Nós estávamos já no zero vírgula nove nove um e depois calhou-nos fração e já não conseguimos mais… Agora acho que estou a ver que há uma fração. Ah, sim, há!

I: Qual?

Jorge: Novecentos e noventa e um sobre mil.

I: Mas isso é isto [0,991]

Jorge: Sim. Ah! Então é… Novecentos e noventa e dois sobre mil.

Foi na partilha ao grupo que Jorge identificou que poderia registar $\frac{992}{1000}$. Contudo, Rute reagiu de imediato referindo “Mas em percentagem já não havia [um número maior que o anterior]”. Foi então pedido o contributo dos colegas e Tomás sugeriu:

Tomás: Eu acho que isso pode ser noventa e nove por cento vírgula três.

Vários alunos: Ah! (surpresos)

A representação em numeral decimal foi mobilizada por Tomás para representar o número em percentagem. Os colegas reagiram à representação 99,3% com surpresa, precisamente pelo uso de um numeral decimal enquanto componente numérica da representação em percentagem uma vez que, até ao momento, esta surgiu sempre associada a números inteiros, contudo, aceitaram de imediato esta representação. Tomás acrescentou ainda que 99,9% tinha sido o último número que havia conseguido marcar na reta.

De novo, foi pedido que os colegas indicassem um número que pudesse ser localizado entre 99,9% e 1:

Jorge: Acho que pode ser este: zero vírgula nove nove nove um.

Guilherme: Existem formas infinitas.

Catarina: Como é que nós fazíamos a seguir a esse número (0,9991), em fração?

I: Não é a seguir. [Há] um possível [número] maior?

Rute: Nove mil novecentos e noventa e nove sobre dez mil. Podemos escrever infinito[17] em baixo! (referindo-se ao denominador, gesticulando o símbolo do infinito no ar).

A milésima pareceu ter sido considerada por grande parte dos alunos como a menor unidade de divisão possível. Por este motivo, não foi imediata a identificação de um número maior que 99,9%. Com o número sugerido por Jorge, 0,9991, surgiu também a possibilidade de considerar a unidade dividida em partes progressivamente menores, mantendo a relação de cada uma ser 10 vezes menor do que a anterior. O entendimento de progressivas divisões da unidade levou os alunos a considerar infinitas possibilidades, o que é um forte contributo para a construção da propriedade densidade do conjunto dos números racionais.

A última tarefa em análise foi resolvida na entrevista realizada no final da intervenção e envolvia a ordenação dos números $\frac{1}{4}$; 0,025; 0,205; 20% e 0,002. Focamos como Rute

[17] O símbolo de infinito (∞) era conhecido por alguns alunos por curiosidade.

organizou os números por ordem decrescente, da seguinte forma: $\frac{1}{4} > 20\% > 0{,}205 > 0{,}025 > 0{,}002$. A investigadora pediu-lhe que explicasse como tinha organizado os números:

> Rute: Um quarto vale vinte e cinco, por exemplo. Vinte por cento... Hum... É vinte por cento, é um quinto. Zero vírgula duzentos e cinco é como se fosse também um quinto só que com mais cinco milésimas. E este [0,025] também seria um quarto de... Um quarto de uma décima? E este [0,002] seria... Um quinto de uma centésima (encolhe os ombros e sorri).

Rute revelou grande destreza em transformar as representações, movimentando-se entre percentagem, fração e numeral decimal conforme lhe pareceu mais eficiente. Após explicitar como comparou os números, apercebeu-se da troca entre as etiquetas relativas a 20% e 0,205 e apresentou a ordenação correta.

A aluna transformou $\frac{1}{4}$ como "vinte e cinco", que parece estar associado a uma representação em percentagem dado que a seguir refere "Vinte por cento… Hum… É vinte por cento", como se estivesse a usar a percentagem como representação comum. Relacionou 0,205 com 20%, referindo "é como se fosse também um quinto", parecendo reconhecer 20% (ou 0,20) em 0,205 que reunitiza por reagrupamento como $\frac{1}{5}$+0,005.

Rute reunitizou 0,025 e 0,002 usando o tipo de estratégia por reagrupamento através de relações multiplicativas. Reunitizou 0,025 como $\frac{1}{4}$ de uma décima e 0,002 como $\frac{1}{5}$ de 0,01, conceptualizando unidades progressivamente menores para pensar sobre os números como partes também progressivamente menores dessas unidades.

Discussão

Na primeira secção dos resultados, *Atribuindo significado ao numeral decimal*, e tal como seria expectável, mostrou-se que os alunos começaram por interpretar numerais decimais como se de números inteiros se tratassem (e.g., DURKIN; RITTLE-JONHSON, 2015). Contudo, destacamos o modo como a percentagem foi particularmente facilitadora da interpretação de numeral decimal numa fase em que esta representação era ainda pouco familiar aos alunos. O recurso à percentagem permitiu reunitizar a unidade de referência como 100%, o que levou ao estabelecimento de relações entre 0,50 e 0,25, interpretados como 50% e 25%. A componente numérica da representação em percentagem, na qual foram usados números inteiros, parece ter facilitado estas relações. Estes resultados realçam como o uso da percentagem pode ser importante na aprendizagem inicial de número racional, possibilitando transformações entre representações, tal como destacam Moss e Case (1999) no seu estudo.

Na secção *Estendendo a estrutura decimal*, foram apresentadas evidências do reconhecimento do prolongamento da estrutura decimal à direita da vírgula. Os alunos foram revelando progressiva facilidade na identificação de que no numeral, da esquerda para a direita, as unidades se iam tornando progressivamente menores. A reunitização por partição das unidades por 10 (BATURO, 2000), da esquerda para a direita no numeral, emergiu depois com o recurso a representações icónicas como a reta numérica ou a barra 10×100. Foi desta compreensão das relações entre as unidades que pareceu ter surgido o reconhecimento da noção de valor de posição prolongado às unidades situadas à direita da vírgula.

Na última secção, *Movendo-se entre representações*, os resultados destacam como o numeral decimal pode constituir-se como ponte entre representações (BROCARDO, 2010). A partição da unidade em cem partes iguais, representada em numeral decimal até à unidade das centésimas, facilitou a transformação em frações com denominador 100 e percentagem. A compreensão da estrutura decimal revelada pelos alunos permitiu ainda a dedução de que novas partições da unidade das milésimas poderiam ser realizadas, implicando a sua divisão em partes 10× menores. Esta noção é essencial para a compreensão da propriedade densidade que, por ser característica do conjunto dos números racionais, representa um avanço significativo no desenvolvimento da compreensão de número (SIEGLER et al., 2011).

Para além de potenciar uma ponte entre diferentes representações, a compreensão da estrutura subjacente ao numeral decimal possibilitou também a realização de reunitizações por reagrupamento bastante complexas que implicaram ainda relações entre diferentes representações (evidentes no último episódio analisado). Estes resultados enfatizam que, tal como Lachance e Confrey (2002) referem, a compreensão de número racional em numeral decimal envolve necessariamente o estabelecimento de conexões entre esta representação, fração e percentagem.

Entre os diferentes tipos de reunitização realizados pelos alunos, as reunitizações por agrupamento tiveram menor expressão que por partição ou reagrupamento. Estes dois tipos de reunitização podem ter sido considerados mais eficientes para pensar nos numerais uma vez que podem ser suportados por relações estabelecidas com números inteiros. Por exemplo, pensar 25,15 e 25,5 como 25 unidades e 15 centésimas e 25 unidades e 50 centésimas, respetivamente, parece facilitar a comparação entre os números, sendo comparados os números 15 e 50 que se reconhecem associados a unidades menores que 1 (as centésimas). Desta forma, e tal como Moss e Case (1999) referem, a mobilização de conhecimento associado a números inteiros pode contribuir para a construção da compreensão de número racional.

Conclusão

Neste artigo procurámos analisar como alunos do 1.º ciclo do ensino básico compreendem a estrutura subjacente à representação de número racional em numeral decimal e sua relação com outras representações. Os resultados deste estudo mostram que a compreensão da estrutura decimal é bastante complexa e não é imediatamente evidente para os alunos.

As representações icónicas foram um importante suporte de processos de reunitização que tornaram explícita a relação entre unidades do numeral, promovendo o reconhecimento do prolongamento da estrutura decimal aos números racionais. O uso de representrações simbólicas, em particular a percentagem, fortemente associadas às garrafas de água, foi fundamental. Numa etapa inicial, as representações simbólicas foram usadas de modo a atribuir significado à representação em numeral decimal ainda pouco familiar para os alunos e, numa etapa posterior, foi a estrutura subjacente ao numeral decimal que apoiou o uso flexível de diferentes representações. O numeral decimal não só foi o elo de ligação entre representações como a estrutura que lhe é inerente se revelou uma lente poderosa para compreender número racional. O facto de se constituírem unidades de base 10, progressivamente maiores ou menores, permitiu transformar o número da forma considerada mais eficiente, podendo ser representado não só em numeral decimal, como em percentagem ou fração, ou até combinando diferentes representações simbólicas.

Assim, um trabalho em torno de numeral decimal implica, primeiro e necessariamente, uma atenção particular à estrutura decimal, envolvendo processos de reunitização progressivamente mais complexos, fundamentais na conceptualização da unidade. Implica ainda uma constante relação com outras representações promovendo não só uma progressiva significação de numeral decimal, como também uma compreensão global de número racional.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa concedida à primeira autora (SFRH/BD/108341/2015).

Referências

BATURO, A. R. Construction of a numeration model: A theoretical analysis. In J., Bana & A., Chapman (Eds.), **Proceedings 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Fremantle, WA: MERGA, 2000, p. 95-103.

BATURO, A., R. Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. In M., J., Hoines & A., B., Fuglestad (Eds.), **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** Bergen University College: PME, 2004, v. 2, p. 95-102.

BATURO, A., R.; COOPER, T., J. Year 6 students' idiosyncratic notions of unitising, reunitising, and regrouping decimal number places. In T., Nakahara, K., Masataka (Eds.), **Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Japan: PME, 2000, v. 2, p. 57-64.

BEHR, M.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R Rational number, ratio and proportion. (1992). In GROUWS, D. (Ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** New York: Macmillan Publishing, 1992. p. 296-333.

BROCARDO, J. Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número. **Educação e Matemática**, Lisboa: APM, n. 109, p. 15-23, set. out. 2010.

COBB, P.; JACKSON, K.; DUNLAP, C. Design research: an analysis and critique. In: ENGLISH, L. D.; KIRSHNER, D. (Ed.). **Handbook of International Research in Mathematics Education**. New York: Ed. Routledge, 2016, p. 481-503.

DURKIN, K.; RITTLE-JOHNSON, B. Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. **Learning and Instruction**, United Kingdom, v. 37, p. 21-29, set. 2015.

HIEBERT, J. Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fractions. In G., Leinhardt, R., Putnam & R., A., Hattrup (Eds.), **Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching**, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1992, p. 283-322.

LACHANCE, A.; CONFREY, J. Helping students build a path of understanding from ratio and proportion to decimal notation. **Journal of Mathematical Behavior**, United Kingdom, v. 20, n. 4, p. 503-526. 2002.

LAMON, S., J. The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. **Journal for Research in Mathematics Education**, United States, v. 27, n. 2, p. 170-193, mar. 1996.

MONTEIRO, C.; PINTO, H. A aprendizagem dos números racionais. **Quadrante**, Lisboa: APM, v. 14, n. 1, p. 89-107, 2005.

MOSS, J.; CASE, R. Developing children's understanding of rational numbers: A new model and an experimental curriculum. **Journal for Research in Mathematics Education**, United States, v. 30, n. 2, p. 122-147, mar. 1999.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar.** Lisboa: APM, 2007.

PONTE, J., P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: APM, p. 11-34, 2005.

PONTE, J. P.; CARVALHO, R.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**, Lisboa: APM, v. 25, n. 2, p. 77-98, dez. 2012.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, M. L. **Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo.** Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

POST, T.; CRAMER, K.; BEHR, M.; LESH, R.; HAREL, G. Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), **Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts**, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates, 1993, p. 327-362.

RESNICK, L., B.; NESHER, P; LEONARD, F.; MAGONE, M.; OMANSON, S.; PELED, I. Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. **Journal for Research in Mathematics Education**, United States, v. 20, n. 1, p. 8-27, jan. 1989.

SIEGLER, R. S., THOMPSON, C. A., & SCHEINER, M. An integrated theory of whole number and fractions development. **Cognitive Psychology**, USA, v. 62, n. 4, p. 273-296, jun. 2011.

STEINLE, V.; STACEY, K. The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in Grades 5 to 10. **Proceedings of the 21st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.** Brisbane: MERGA, 1998. p. 548-555.

STREEFLAND, L. **Fractions in Realistic Mathematics Education, a Paradigm of Developmental Research.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

TRIPATHI, P., N. Developing mathematical understanding through multiple representations. **Mathematics Teaching in the Middle School**, United States, v. 13, n. 8, p. 438-445, abr. 2008.

VAMVAKOUSSI, X.; VAN DOOREN, W.; VERSCHAFFEL, L. Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. **Journal of Mathematical Behavior**, United Kingdom, v. 31, n. 3, p. 344-355, set. 2012.