Explorar, investigar, interagir na aula de matemática: Elementos fundamentais para a aprendizagem[1 2]

João Pedro da Ponte[3]
Cláudia Canha Nunes[4]
Marisa Quaresma[5]

Resumo. Apresentamos as ideias fundamentais do novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* de Portugal. Numa primeira parte referimos as suas finalidades e objectivos gerais, bem como as capacidades transversais – resolução de problemas, raciocínio matemático e comunicação matemática. Analisamos, também, as principais orientações para os temas matemáticos – promover o desenvolvimento do sentido de número, do sentido espacial, do pensamento algébrico e da literacia estatística. Numa segunda parte, mostramos a forma como o programa pode servir de instrumento de efetiva renovação do ensino da Matemática na sala de aula, com especial atenção à natureza das tarefas e aos processos de comunicação. Concluímos com uma breve análise das condições ao nível das práticas profissionais que são necessárias para que este novo programa possa ser um efetivo instrumento de mudança educativa.

Um novo *Programa de Matemática do ensino básico* (ME, 2007), para vigorar no que corresponde no Brasil da 1.ª à 9.ª série, foi recentemente aprovado em Portugal. A sua generalização nas escolas começou em 2009, em regime de voluntariado. O programa passou a ser obrigatório a partir de 2010, abrangendo sucessivamente todos os alunos até 2013. O programa foi elaborado por uma equipa de educadores matemáticos, professores de Matemática e matemáticos[6], apresentando uma orientação inovadora, mas ao mesmo tempo uma preocupação de equilíbrio, procurando ir ao encontro das necessidades de alunos e professores, a quem coloca igualmente novos desafios. Na primeira parte deste artigo apresentamos as ideias principais do programa, na segunda parte mostramos como este pode ser concretizado na sala de aula e, por fim, discutimos de que modo o programa pode servir de base a um efetivo processo de mudança curricular.

---

[1] Ponte, J. P., Nunes, C. C., & Quaresma, M. (2012). Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática: Elementos fundamentais para a aprendizagem. In A. C. Silva, M. Carvalho & R. G. Rêgo (Eds.), *Ensinar Matemática: Formação, investigação e práticas docentes* (pp. 49-74). Cuiabá: UFMT.

[2] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

[3] Professor catedrático, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

[4] Professora, Agrupamento de Escolas Fernando Pessoa, Lisboa, e investigadora, Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

[5] Professora, Escola Básica José Saramago, Poceirão, Palmela, e investigadora, Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

[6] A equipa de autores do *Programa de Matemática do Ensino Básico* é constituída por: João Pedro da Ponte, Lurdes Serrazina (coordenadores), Henrique Manuel Guimarães, Ana Breda, Fátima Guimarães, Hélia Sousa, Luís Menezes, Maria Eugénia Graça Martins e Paulo Alexandre Oliveira.

Orientações curriculares do novo programa

O novo programa apresenta diversos aspectos inovadores entre os quais as capacidades transversais e as perspectivas para a abordagem dos temas matemáticos, valorizando o sentido de número, o sentido espacial, o pensamento algébrico e a literacia estatística. Seguindo a tradição dos programas portugueses, este documento apresenta, de forma detalhada, as aprendizagens a realizar, ciclo a ciclo[7] e tema a tema. Estas indicações vêm precedidas pelo enunciado de finalidades e objectivos gerais e por um conjunto de orientações metodológicas gerais. Neste primeiro ponto procuramos descrever de forma resumida todos estes aspectos.

Finalidades. As finalidades do ensino da Matemática são enunciadas nos seguintes termos:

- Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados.
- Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.

A redação deste enunciado mereceu um cuidado especial. Em primeiro lugar referem-se os conhecimentos e capacidades de âmbito cognitivo a desenvolver pelo aluno e depois refere-se as atitudes e a capacidade de apreciação. Deste modo, entende-se que só faz sentido falar em atitudes positivas e apreciação da Matemática pelo aluno com base no seu conhecimento da Matemática e na sua capacidade de mobilização desse conhecimento em situações diversas.

Objectivos gerais. Estas finalidades são concretizadas através de nove objectivos gerais do ensino da Matemática, apresentados de forma sintética a seguir. O primeiro objectivo diz respeito aos conhecimentos básicos e o segundo à importância da compreensão na aprendizagem da Matemática. Os cinco objectivos seguintes dizem respeito a capacidades transversais, das quais três têm um lugar destacado no programa (comunicar, raciocinar, resolver problemas). Finalmente, os dois últimos objectivos gerais dizem respeito ao modo como se espera que os alunos se relacionem pessoalmente com a Matemática e apreciem esta disciplina:

[7] Em Portugal, o 1.º ciclo corresponde no Brasil da 1.ª à 4.ª série, o 2.º ciclo corresponde à 5.ª e 6.ª séries, e 3.º ciclo vai da 7.ª à 9.ª série.

- Conhecer factos e procedimentos básicos
- Compreender a Matemática
- Lidar com diversas representações
- Comunicar matematicamente
- Raciocinar matematicamente
- Resolver problemas
- Estabelecer conexões
- Fazer Matemática de modo autónomo
- Apreciar a Matemática

Estas finalidades e objectivos gerais marcam todo o programa. Pretende-se assim evitar que assumam uma função meramente decorativa, como acaba por acontecer em tantos documentos curriculares. Espera-se, pelo contrário que possam ser apreendidas pelos professores e inspiradoras da sua prática profissional.

Capacidades transversais. Como referimos, o programa dá destaque a três capacidades transversais – a Resolução de problemas, o Raciocínio matemático e a Comunicação matemática. A resolução de problemas mantém uma orientação que já vem dos anos 80 e 90 do século passado, sublinhando que os problemas tanto podem servir de terreno de aplicação de conceitos e procedimentos, como ponto de partida para a realização de novas aprendizagens. O raciocínio matemático é uma orientação apontada desde há muito e aceite pelo senso comum, mas nem sempre devidamente valorizada na prática lectiva. O programa associa o raciocínio a duas ideias fundamentais – elaborar conjecturas e generalizações e justificar as afirmações que se fazem, com argumentos informais ou formais. Finalmente, a comunicação matemática aponta a necessidade do aluno não só saber expor as suas ideias oralmente e por escrito, mas também interpretar as ideias dos outros e os enunciados matemáticos, bem como saber participar nas discussões.

Temas matemáticos. Diferenciando-se significativamente dos programas portugueses anteriores (de 1990 e 1991), o novo programa organiza-se segundo quatro grandes temas matemáticos,

- Números e Operações
- Geometria e Medida
- Álgebra
- Organização e Tratamento de Dados (OTD), incluindo Estatística e Probabilidades.

A diferença mais importante está na revalorização da Álgebra, que só existia a partir da 7.ª série, e apenas reduzida ao "cálculo algébrico". Agora, ideias de Álgebra surgem já da 1.ª à 4.ª série (inseridas no tema Números e operações) e, com mais visibilidade, da 5.ª à 9.ª série (como tema autónomo), sendo as Funções consideradas parte da Álgebra e não um tema à parte. Em contraste com os programas anteriores fala-se agora em "Números e operações" e não em "Números e cálculo", procurando assim salientar as ideias verdadeiramente fundamentais deste tema.

Sentido de número. Nos últimos anos, em muitos países, o desenvolvimento do "sentido de número" tem vindo a ser considerado como o objectivo fundamental na aprendizagem dos números e operações. McIntosh, Reys e Reys (1992) deram um contributo decisivo para a divulgação desta ideia, que associam a uma compreensão geral dos números e operações. Na sua perspectiva, o sentido de número envolve a capacidade e a disposição para utilizar o conhecimento dos números e operações de forma flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias eficazes para resolver problemas. O modelo que apresentam é composto por três grandes blocos: (i) o conhecimento e destreza com os números; (ii) o conhecimento e destreza com as operações; e (iii) a aplicação e destreza com os números e operações em situações de cálculo. O NCTM (2007) também destaca num sentido semelhante a noção de sentido de número.

A noção de sentido de número inspira todo o trabalho a realizar neste tema do programa. O que vai variando é o alargamento dos campos numéricos estudados e o aprofundamento dos assuntos a tratar. A noção de sentido de número é associada à capacidade para decompor números, usar como referência números particulares, tais como 5,10,100 ou ½, usar relações entre operações aritméticas para resolver problemas, estimar, compreender que os números podem assumir vários significados (designação, quantidade, localização, ordenação e medida) e reconhecer a grandeza relativa e absoluta dos números. Tendo em vista o desenvolvimento do sentido de número dos alunos, as indicações metodológicas das diversas séries destacam a importância de propor tarefas que envolvam a compreensão de relações numéricas, a compreensão das operações aritméticas, a aprendizagem dos algoritmos com compreensão e a resolução de problemas numéricos. Estas indicações metodológicas valorizam, também, a utilização de processos de cálculo baseados nas propriedades dos números e das operações, o cálculo mental e a estimação. O programa indica, ainda, que a calculadora é um instrumento de cálculo que tem o seu lugar no ensino básico, nomeadamente "por possibilitar a elaboração e análise de estratégias de cálculo mental que auxiliam no desenvolvimento do sentido de número, na consolidação do significado das operações e no reconhecimento e aplicação das suas propriedades" (p. 33).

Sentido espacial. No que se refere à Geometria, a ideia fundamental é o desenvolvimento do "sentido espacial" e, em particular, a visualização. O sentido espacial pode ser caracterizado como um conhecimento intuitivo do meio envolvente e dos objetos que nele existem (NCTM, 1991), incluindo a capacidade para visualizar mentalmente objetos e relações espaciais, por exemplo, rodando objetos na nossa mente (Walle, 2007). Matos e Gordo (1993) referem que a capacidade de visualização engloba a forma como os alunos percepcionam o mundo que os rodeia e a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objetos. As pessoas com sentido espacial apreciam formas geométricas na arte, na natureza e na arquitetura e são capazes de usar ideias geométricas para descrever e analisar o mundo. Para desenvolver o sentido espacial é importante viver experiências incidindo nas relações geométricas; na direção, orientação e perspectivas dos objetos no espaço; nas formas e tamanhos relativos das figuras e objetos; e no modo como uma modificação numa forma se relaciona com uma mudança no tamanho (NCTM, 1991).

O programa valoriza o desenvolvimento do sentido espacial, incluindo a visualização. Por exemplo, da 1.ª à 4.ª série, indica-se que a visualização engloba capacidades relacionadas com a forma como os alunos percepcionam o mundo que os rodeia e envolve observação, manipulação e transformação de objetos e suas representações e a interpretação de relações entre os objetos e entre estes e suas representações. O sentido espacial envolve ainda noções de orientação e movimento, desempenhando um papel importante na percepção das relações espaciais. As indicações metodológicas do programa propõem a indicação de tarefas que proporcionem observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e operar com elas, levando os alunos a explorar, manipular e experimentar. A resolução de problemas e o uso de materiais manipuláveis têm um papel importante no desenvolvimento do sentido espacial, em especial nos primeiros anos de escolaridade. Os instrumentos de desenho, os programas de geometria dinâmica e os *applets* permitem igualmente múltiplas explorações. As possibilidades dos recursos tecnológicos para a manipulação e construção de figuras bi e tridimensionais, favorecendo o papel ativo dos alunos na sua aprendizagem, permitem apoiar o desenvolvimento do sentido espacial e da visualização.

Pensamento algébrico. Esta noção tem vindo a afirmar-se em muitos países, procurando contrariar a noção da Álgebra como um campo de simples manipulação simbólica. Kaput (2008) considera como "aspetos nucleares" (*core aspects*) da Álgebra (i) a generalização e formalização de padrões e restrições e (ii) a manipulação de formalismos guiada sintacticamente, que, na sua perspectiva, se desdobram por três grandes "ramos" (*strands*): (iii) o estudo de estruturas abstratas; (iv) o estudo de funções, relações e variação conjunta de duas variáveis; e (v) a utilização de diversas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos. Na sua perspectiva, o pensamento algébrico manifesta-se quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, que são expressas através de linguagens formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática ou em qualquer outro campo. A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas também o é o "sentido de símbolo" (*symbol sense*) (Arcavi, 1994), que inclui a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos na descrição de situações e na resolução de problemas.

Como indicam Ponte, Branco e Matos (2009), a valorização do pensamento algébrico reforça a ideia de que o trabalho em Álgebra não se reduz à manipulação de simbolismo. Pelo contrário, implica ser capaz de pensar numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação. Um elemento reconhecidamente central no pensamento algébrico é a ideia de generalização: descobrir e comprovar propriedades que se verificam numa dada classe de objetos. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover este pensamento é o estudo de regularidades num dado conjunto de objetos. Estes autores referem que o pensamento algébrico inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas.

É também esta a perspectiva subjacente ao *Programa de Matemática* (ME, 2007), ao apontar que o grande objectivo do ensino da Álgebra é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. O programa associa este pensamento à capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações contextualizadas. Nas orientações metodológicas, o programa dá ênfase ao estudo de sequências, tendo em vista formular generalizações e representá-las simbolicamente. Dá, também, atenção ao desenvolvimento da noção de variável. Propõe o estudo de relações de diversos tipos (equações, inequações e funções) e da variação e o trabalho com tarefas que envolvam simbolização e modelação. Recomenda que sejam proporcionadas aos alunos experiências informais antes da manipulação algébrica formal (por exemplo, na resolução de equações, sistemas de equações e inequações) e valoriza o trabalho com as fórmulas conhecidas dos alunos.

Literacia estatística. O grande objectivo do ensino da Estatística é promover a literacia estatística (Rumsey, 2002), ensinando os alunos a lerem e interpretarem dados. Tal como foi importante para os nossos avós aprenderem a ler e a contar, faz hoje parte da educação para a cidadania saber ler os números, índices e gráficos com que nos deparamos no dia-a-dia. O objectivo da Matemática no ensino básico não é criar especialistas em Estatística, mas sim promover nas pessoas a capacidade de (i) compreenderem os processos elementares da recolha e análise de dados, (ii) entenderem o que está por detrás de uma investigação estatística, e (iii) terem a consciência do que é um fenómeno aleatório, sendo capazes de construir modelos simples da realidade.

Esta perspectiva da literacia estatística distingue-se profundamente da perspectiva que tem informado até aqui o ensino elementar da Estatística, que se reduz na prática à capacidade de realizar tabelas e gráficos de diversos tipos e de calcular médias, medianas e modas. O ensino da Estatística tem privilegiado até aqui destrezas de tipo calculatório (determinação de medidas estatísticas) e processuais (realização de tabelas e gráficos), levando os alunos a aprender um conjunto de habilidades (*skills*) sem muitas vezes desenvolverem a sua capacidade de os usar criticamente, ficando deste modo, seriamente limitados para compreender e analisar criticamente muita da informação que circula no mundo onde estão inseridos.

O programa indica que o trabalho em Estatística e em Probabilidades deve ser realizado em todas as etapas do ensino básico. A aprendizagem da 1.ª à 4.ª série envolve desde logo aspectos ligados à representação dos dados, à formulação de questões e à interpretação de resultados. As indicações metodológicas sugerem que o estudo deste tema deve assumir uma natureza investigativa, levando os alunos a formular questões, que conduzem à necessidade da recolha e análise de dados. Os alunos devem tomar decisões sobre como recolher, organizar e representar a informação e a análise e interpretação de dados pode levá-los a estabelecer novas relações e conjecturas. Os alunos devem, também, realizar experiências aleatórias em que se explora a regularidade a longo termo (isto é, ao fim de muitas realizações da experiência), listando todos os resultados possíveis. Devem, ainda, explorar situações em que o estudo da informação recolhida sobre alguns casos, permita, ou não, generalizar os resultados obtidos, para toda a população.

Orientações metodológicas gerais. O programa apresenta igualmente diversas orientações metodológicas gerais, que dizem respeito a aspectos como a diversidade de tarefas, representações, conexões. Aponta o papel dos recursos, incluindo os recursos tecnológicos e salienta a importância do cálculo mental. Discute, ainda, o lugar no ensino da História da Matemática e a atenção ao papel da Matemática no mundo atual. Finalmente, aborda as diferentes formas de trabalho na sala de aula tece diversas recomendações relativamente à gestão curricular, sublinhando a importância desta ser feita a nível da escola, e à avaliação das aprendizagens dos alunos, recorrendo a instrumentos diversificados. No próximo ponto procuramos mostrar como estas orientações podem ser concretizadas na sala de aula.

Uma abordagem para o trabalho em sala de aula

Uma ideia importante promovida pelo programa é que a aprendizagem dos alunos pode ser promovida através de um trabalho de cunho exploratório e investigativo nos diferentes temas. Isso acontece quando os alunos trabalham em tarefas para as quais não dispõem de métodos de resolução imediata e têm de formular as suas próprias estratégias, mobilizando conhecimentos e capacidades anteriormente desenvolvidas. Ou seja, as tarefas não constituem simples exercícios em que os alunos têm que aplicar conhecimentos previamente aprendidos mas requerem uma resposta original, ainda que baseada em conhecimentos e experiências prévias. O trabalho nestas tarefas constitui o ponto de partida para o desenvolvimento e formalização de novos conceitos e representações, o que deve ser feito, tanto quanto possível, com o contributo dos alunos. Num ou noutro momento, no entanto, há também que propor a realização de exercícios, tendo em vista consolidar conhecimentos, e de problemas, tendo em vista desenvolver também esta capacidade.

Os momentos da aula. A realização de uma tarefa inclui muitas vezes quatro momentos: (i) apresentação, (ii) trabalho autónomo dos alunos, muitas vezes em grupo ou aos pares, (iii) discussão coletiva com toda a turma, (iv) culminando com um síntese visando a institucionalização das novas aprendizagens. A primeira fase corresponde à apresentação da tarefa que se pretende curta e motivadora. O professor pode distribuir o enunciado escrito com a tarefa, salientando oralmente os principais elementos da situação. É muito importante que os alunos compreendam a tarefa proposta e, por isso, se existirem termos que eles não conheçam, estes devem ser desde logo analisados. Neste ponto, o professor dá igualmente indicações acerca do modo de trabalhar bem como do momento em que se iniciará a discussão geral.

De seguida, no segundo momento, os alunos trabalham autonomamente nas questões propostas. O professor circula pela sala, verificando se existem dificuldades na resolução das questões. Os alunos, com frequência, colocam dúvidas ou pedem a validação das suas conjecturas e resultados. Se o professor responder a todas as dúvidas dos alunos, está a resolver a tarefa no lugar deles. Por isso, na maior parte dos casos, há que responder às perguntas dos alunos com outras perguntas, que os obriguem a pensar um pouco mais. Se o professor se apercebe que um número significativo de alunos não consegue compreender a situação ou formular estratégias de resolução, pode ser preferível interromper o seu trabalho e realizar desde logo uma pequena discussão colectiva. Uma vez resolvida a dificuldade, os alunos podem retomar então o seu trabalho.

Num terceiro momento realiza-se uma discussão geral, chamando os alunos a apresentar o seu trabalho. É importante analisar questões matematicamente significativas, evitando a repetição de ideias ou resoluções já anteriormente apresentadas e discutidas. Todos os alunos, de uma forma ou outra, devem ter possibilidade de participar, nomeadamente colocando questões e apresentando argumentos. No entanto, não é necessário que todos os alunos apresentem o seu trabalho em todas as aulas, em especial nos casos em que isso pouco acrescenta ao que já foi anteriormente apresentado pelos colegas. Esta dinâmica de aula propicia a análise das situações matematicamente significativas e promove o desenvolvimento das capacidades de raciocinar e comunicar. Noutras situações, os alunos que não tiverem oportunidade de mostrar o que fizeram, poderão ser os primeiros a mostrar o seu trabalho.

Este momento de discussão colectiva é fundamental. É refletindo sobre o trabalho feito – o seu e o dos colegas –, confrontando as suas ideias com as dos outros, argumentando e analisando argumentos, que os alunos aprofundam e consolidam a sua aprendizagem. Por isso, este momento deve ser claramente valorizado. Note-se que mesmo os alunos que não tenham concluído a resolução de todas as questões propostas podem participar na discussão, quer das questões que chegaram a resolver, quer das outras questões.

Finalmente, a encerrar a discussão, é importante que exista um momento de síntese e sistematização. O professor, se possível solicitando a participação dos alunos, deve promover a sistematização das ideias fundamentais que foram trabalhadas nesta aula, formalizando-as na medida do necessário. Este é um momento de institucionalização de conhecimentos, isto é, em que as aprendizagens são tornadas explícitas e são evidenciadas, passando a constituir parte do património matemático da turma. Esta sistematização ajuda os alunos a compreenderem e registarem quais são as ideias efetivamente trabalhadas e como se ligam com os conceitos e procedimentos já aprendidos. Enquanto no momento anterior predomina o registo interrogativo, questionando ideias e procurando alternativas, neste último momento predomina um registo afirmativo, colectivamente construído sob a direção do professor.

Ao longo de todos os momentos, é importante que a aula tenha ritmo e que se respire um ambiente de trabalho. Por isso, é necessário que os alunos interiorizem que têm um tempo para trabalhar, previamente definido, e depois um tempo para discutir o trabalho feito por todos. Aos professores cabe escolher tarefas que sejam adaptadas às características das suas turmas, apresentá-las de modo sugestivo, gerir a sua realização pelos alunos e conduzir a respectiva discussão e institucionalização.

Exemplos na aprendizagem dos números racionais

Em Portugal, os tempos lectivos estão presentemente organizados por blocos de 90 minutos. Isso permite que os alunos trabalhem cerca de 40/45 minutos nas tarefas e depois, no tempo restante, faz-se a sua discussão. É o que acontece nas aulas da professora Marisa, que procura que as tarefas sejam discutidas no dia em que são feitas, enquanto os alunos ainda têm memória do seu trabalho. O objectivo é que a discussão seja mais rica, já que os alunos ainda não fazem habitualmente registos muito elaborados das suas resoluções. Usualmente, um par apresenta as suas conclusões aos colegas, explicando o que fez e esclarecendo eventuais dúvidas, caso existam e, de seguida, os outros pares apresentam estratégias ou conclusões diferentes que tenham obtido.

Episódio 1. Os alunos estavam a estudar um dos tópicos mais difíceis da 5.ª série, a noção de número racional, que inclui a comparação e ordenação de números racionais e a equivalência de fracções. O episódio refere-se à primeira aula da unidade de ensino, cujo principal objectivo era introduzir a linguagem associada aos números racionais nas suas diferentes representações e significados, surgindo logo na primeira tarefa, num contexto de dobragem de tiras de papel[8]:

[8]Esta tarefa foi retirada de Menezes, Rodrigues, Tavares e Gomes (2008).

Encontra três tiras de papel geometricamente iguais. Dobra-as em partes iguais:

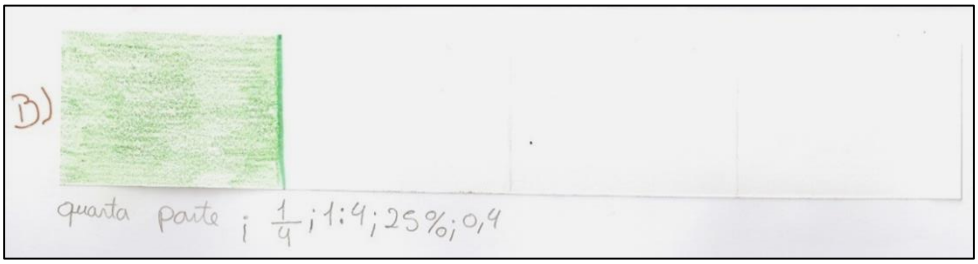
- a primeira em duas;
- a segunda em quatro;
- a terceira em oito.

Depois de dobrares cada uma das tiras, representa de diferentes formas as partes obtidas.

Nesta questão é dado o “todo”, que é a tira de papel, sendo pedido aos alunos que representem três partes diferentes dessa tira. É uma situação contextualizada, utilizando grandezas contínuas, que envolve o significado parte-todo. A informação é dada na representação pictórica, podendo a resposta ser dada nas representações verbal, decimal, fracção ou percentagem.

Inicialmente, os alunos mostram alguma dificuldade na interpretação do enunciado das questões, pelo que a sua realização é antecedida por um momento de interpretação dos termos e conceitos relativos ao que devia ser feito. A professora recorre a um exemplo, optando por realizar a representação da primeira tira em grande grupo. Desenha a tira no quadro, representando pictoricamente também a parte da tira a considerar, e, de seguida, pede aos alunos que digam que parte da tira está pintada. A primeira representação utilizada é a verbal e muitos alunos dizem que está pintada a metade da tira. Depois, a professora continua a insistir noutra forma de representar aquela parte e a partir da representação verbal “metade”, alguns alunos conseguem chegar à representação decimal 0,5. Depois de mais alguma insistência, dois alunos indicam a fracção “um de dois”. Finalmente, como os alunos não se lembram da percentagem, a professora pergunta: “e se eu quisesse representar em percentagem? Também podia?” A maior parte da turma não tem qualquer dificuldade em dizer que é 50%. Depois desta discussão inicial que representa uma negociação colectiva do significado do trabalho a realizar, os alunos continuam o seu trabalho nos grupos com mais entusiasmo e confiança.

No início da discussão colectiva, para apoiar a participação dos alunos, a professora pede-lhes que afixem, no quadro, o trabalho realizado. O primeiro grupo começa a apresentar o seu trabalho à turma:



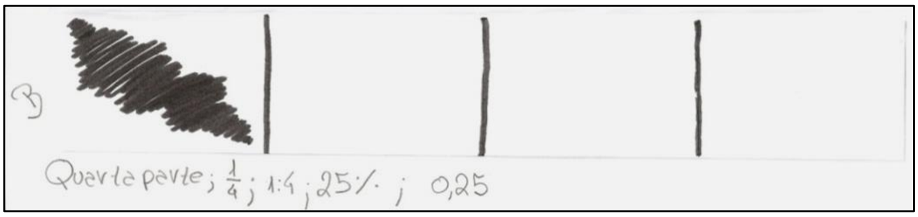
Carolina, Diana e Filipe

Diana: Na figura B escrevemos: quarta-parte; um por quatro ($\frac{1}{4}$); 1 a dividir por 4; 25% e 0,4.

Professora: Estiveram com atenção? Concordam com aquilo que a Diana Disse?

Turma: Sim…

Os alunos não têm as suas resoluções para comparar, pois estão todas no quadro. Como não estão concentrados, nem se apercebem do erro da colega ao referir que o número decimal que representa esta situação é 0,4. Como nenhum aluno repara no erro, a professora prossegue para a apresentação dos outros grupos, pedindo a Tiago que apresente o trabalho desenvolvido pelo seu grupo:



Leonor, Rui, Henrique e Tiago

Tiago: Então nós temos: quarta-parte; um sobre quatro ($\frac{1}{4}$); um a dividir por quatro; 25% e 0,25.

Professora: (…) Concordas Diana?

Diana: Sim…?

Turma: Não! Está mal…

Professora: O que é que está mal?

Rui: É o 0,25 (o aluno refere que o decimal correto é 0,25 e não 0,4)…

Professora: Porquê?

Rui: Porque é a quarta-parte.

Daniel: É 0,25 porque é a metade do primeiro. O primeiro era 50, se fizermos a metade é 25.

André: Ó professora! Eu acho que é o 0,25 porque é a quarta-parte do 100. Porque 25 vezes 4 dá 100.

Nos seis grupos existentes na turma apenas o primeiro comete um erro, representando o denominador da fracção como numeral decimal. Em vez de corrigir de imediato o erro cometido por um grupo, a professora deixou que fossem os próprios alunos a identificá-lo, dando origem a um interessante momento de discussão, em especial a partir do momento em que os alunos procuram justificar por que razão não pode ser 0,4. Nesta discussão intervêm sucessivamente Rui, Daniel e André, apresentando diversos argumentos, sucessivamente mais elaborados.

Este episódio de aprendizagem dos números racionais evidencia um dos aspectos importantes do sentido de número – o sentido das grandezas relativa e absoluta dos números (McIntosh et al., 1992). Destaca-se a importância da negociação inicial de significados, que permitiu que os alunos compreendessem qual era a tarefa proposta e se empenhassem efetivamente na sua realização. Evidencia-se também o modo como a professora promove o desenvolvimento de capacidades transversais como o raciocínio e a comunicação matemática, encorajando os alunos a justificarem as suas respostas, produzindo argumentos em defesa das suas posições (ME, 2007).

Episódio 2. Outra situação interessante surgiu quando se aborda pela primeira vez de forma explícita a equivalência de fracções, a propósito da seguinte questão:

Quatro amigos foram a um restaurante e pediram três pizas. Dividiram igualmente as três pizas. Que parte da piza comeu cada amigo?

Esta questão contextualizada envolve o significado quociente e grandezas contínuas. A informação é dada verbalmente e não são dadas informações sobre a representação a utilizar nas respostas. Os alunos, que trabalharam em pares, mostraram-se muito entusiasmados, e procuraram fazer "explicações" mais completas das suas resoluções. Iniciam a realização desta questão com o desenho das três pizas, mas depois alguns não conseguem repartir as pizas pelos quatro amigos, tendo nessa altura a professora sugerido que atribuíssem nomes às fatias. A maioria dos alunos consegue partilhar as três pizas pelos quatro amigos, utilizando essencialmente a representação pictórica.

Rui, T1.Q1-FT4

Durante a discussão colectiva os alunos mostram-se bastante confiantes na sua resolução explicando com clareza a forma como pensaram:

Leonardo: Então nós fizemos três pizas e dividimos…

Professora: Em quantas partes?

Leonardo: Em quatro.

Professora: E agora?

Leonardo: E depois contámos as "pizas" (partes) que cada um comeu.

A explicação de Leonardo mostra boa compreensão do significado parte-todo. Os restantes alunos da turma usam também a representação pictórica para resolver a tarefa. Contudo, não ficam apenas pela representação pictórica da situação, avançando com a representação em fracção baseada nessa representação pictórica:

Professora: E depois fizeram mais alguma coisa?

Leonardo: Sim, fizemos contas.

Professora: Que contas fizeram?

Leonardo: Fizemos um sobre quatro…

Professora: Um quarto…

Leonardo: Vezes três é igual a três quartos.

Assim, alguns alunos apresentam a parte que cada um come como produto $\frac{1}{4} \times 3$, revelando aqui uma transferência de conhecimentos dos números inteiros, um conhecimento intuitivo já que não trabalharam formalmente a multiplicação entre números racionais e números inteiros. É o caso de Amélia e Leonor que partem diretamente da figura, revelando compreender que cada parte representa $\frac{1}{4}$ da piza e, por consequência, se cada um come três fatias, significa que come $\frac{3}{4}$ da piza:

Leonor: Nós contámos logo. Três do A, três do B… Cada um comia três partes, então comia três quartos.

Professora: Então compreenderam logo que cada fatia correspondia ao tamanho…

Turma: Um quarto.

Amélia: Oh professora, mas se cada um comia três partes era logo três quartos.

Neste episódio é de salientar o modo como os alunos usam a representação pictórica – uma representação informal – para resolver o problema, e também o modo como espontaneamente representam e resolvem o problema usando fracções. É de salientar, também, como o contexto do problema levou os alunos a estender a operação de multiplicação de números naturais já sua conhecida para o campo dos números racionais. Deste modo continuam a estar presentes aspectos fundamentais no sentido de número – nomeadamente a consciencialização da existência de múltiplas estratégias e a apetência para utilizar uma representação ou um método eficiente (McIntosh et al. 1992) – bem como a atenção às capacidades transversais de resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemáticos (ME, 2007).

Episódio 3. Este episódio refere-se ainda ao mesmo contexto, um grupo de amigos que vai comer piza, perguntando em qual dos casos os amigos comeram mais piza:

Em qual dos grupos anteriores, o de quatro amigos ou o de oito amigos, cada amigo comeu mais piza? Explica o teu raciocínio.

Esta questão envolve uma situação de comparação entre fracções com numeradores iguais e com denominadores diferentes. Os alunos não têm dificuldade em indicar que $\frac{3}{8}$ é metade de $\frac{3}{4}$, porque, segundo dizem, cada parte passa a ser metade da anterior.

Professora: Qual a diferença entre aquilo que cada um come no primeiro caso e no segundo caso? O que é que se alterou?

Amélia: Foi que ficou partido em mais partes.

Professora: E o que é que aconteceu a cada parte?

Alunos: Ficou mais pequenino. Ficou a metade.

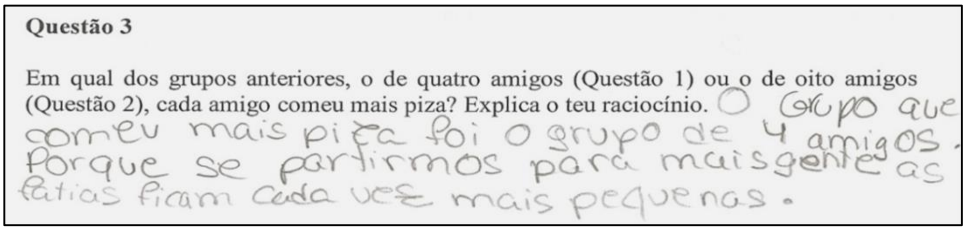
Leonor: Pois é $\frac{3}{8}$ é metade de $\frac{3}{4}$!

Professora: Quer dizer que cada um passou a comer que parte daquilo que comiam no primeiro caso?

Alunos: A metade.

Professora: Pois porque nós duplicámos o número de amigos, logo cada um teve de partilhar cada fatia com outro.

Se se procurasse dizer aos alunos que $\frac{3}{8}$ é metade de $\frac{3}{4}$de modo abstracto seria provável que os alunos tivessem dificuldades. Assim eles próprios tiveram oportunidade para deduzir isso através de uma situação familiar e lógica. Alguns deles já tinham chegado a esta mesma conclusão nas suas respostas como é o caso de Leonor:



Questão 3

Em qual dos grupos anteriores, o de quatro amigos (Questão 1) ou o de oito amigos (Questão 2), cada amigo comeu mais piza? Explica o teu raciocínio. O Grupo que comeu mais piza foi o grupo de 4 amigos. Porque se partirmos para mais gente as fatias ficam cada vez mais pequenas.

Leonor, T1.Q1-FT4

O diálogo seguinte mostra como os alunos vão mostrando cada vez mais desembaraço em intervir espontaneamente na discussão, apresentando o seu raciocínio:

> **Professora:** Em qual dos grupos anteriores, cada amigo comeu mais piza?
>
> **Nuno:** Eu acho que foi na questão 1, porque na 2 tínhamos que dividir as pizas para oito pessoas e na 1 só tínhamos quatro pessoas.
>
> **André:** Pois tínhamos menos pessoas para distribuir.
>
> **Professora:** E a quantidade de piza é sempre a mesma, não é?
>
> **Amélia e Leonor:** Pois nós também pensámos assim, só que dissemos que as fatias assim ficavam cada vez mais pequeninas.
>
> **Amélia:** Podemos concluir que comem o mesmo número de fatias, mas como partimos por menos pessoas (na questão 1) as fatias são maiores.

Verifica-se, mais uma vez, o modo como o contexto conduz naturalmente os alunos a generalizarem o âmbito das operações conhecidas, reconhecendo espontaneamente que $\frac{3}{8}$ é metade de $\frac{3}{4}$. De salientar, também, a forma como os alunos participam ativamente na discussão, apresentando os seus raciocínios e justificando as suas respostas, cabendo à professora o papel de dinamizar e conduzir a discussão. De novo, se salientam aspectos do sentido de número, nomeadamente os que sublinham a relação entre o contexto e os cálculos (McIntosh et al., 1992), bem como o desenvolvimento das capacidades transversais se raciocínio e comunicação.

Condições para a mudança curricular

A grande mudança do processo de ensino-aprendizagem passa por práticas inovadoras na sala de aula. Como é possível perceber nos três episódios acima indicados, o que ocorre na aula influencia a aprendizagem dos alunos, sendo decisiva a ação do professor na criação de um ambiente para a aprendizagem (Franke, Kazemi & Battey, 2007). O modo como o professor conduz o ensino dos diversos tópicos e o desenvolvimento das capacidades transversais dos alunos depende do seu conhecimento profissional e da sua capacidade de o pôr em prática, nomeadamente no que se refere à Matemática, ao currículo e aos materiais didáticos, ao aluno e aos seus processos de aprendizagem e à atividade de ensino (Nunes & Ponte, 2010).

O conhecimento da Matemática é indispensável, a começar pelos tópicos que surgem de novo neste programa (por exemplo, as sequências, os frisos e as rosáceas, as investigações estatísticas e os diagramas de extremos e quartis), mas também nos tópicos e processos onde muda a ênfase da abordagem curricular (por exemplo, o ensino dos algoritmos das operações com números naturais e a ênfase no raciocínio que valoriza a argumentação e as demonstrações). Não se trata, naturalmente, de estudar Matemática pela Matemática, mas sim de estudar a Matemática relevante para o ensino da disciplina.

O conhecimento do currículo envolve as orientações gerais do programa, desenvolvidas e concretizadas em muitos outros documentos. Trata-se de conhecer os objectivos gerais e tudo o que eles envolvem, bem como as orientações específicas para os diversos tópicos descritos neste artigo. Trata-se, ainda, de perceber, de modo mais aprofundado, como se podem utilizar a tecnologia e outros materiais no ensino da Matemática, como estabelecer conexões entre diversos tópicos e conceitos, como trabalhar as representações matemáticas, qual o papel dos processos cognitivos individuais (como o cálculo mental) e das produções escritas individuais e colectivas (como os relatórios), de que modo utilizar situações contextualizadas e as atividades de modelação, bem como, por exemplo, a História da Matemática. São muitas as vias possíveis e é preciso saber fazer escolhas.

Outro aspecto fundamental do conhecimento profissional do professor diz respeito ao conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem. Em particular, é importante reconhecer que este conhecimento não resulta apenas do que lhes é transmitido, mas sobretudo do significado que eles dão ao que estão a aprender, o que depende da forma como os alunos se envolvem na situação e na ação, assim como na forma como o professor desenvolve o processo de ensino-aprendizagem (Ornstein & Hunkins, 2004).

O desenvolvimento do ensino requer uma capacidade de conceber tarefas apropriadas para servirem de ponto de partida à aprendizagem e de conduzir, de modo produtivo a sua realização. Não são tanto as tarefas, individualmente consideradas, que fazem a diferença, mas sim as unidades de ensino bem estruturadas, que sugerem um percurso de aprendizagem do aluno. Igualmente importante é a forma como o professor organiza o processo de ensino-aprendizagem e os papéis que reserva para si próprio e para os alunos. Na realização das tarefas, como vimos nos diversos episódios, a orquestração da discussão com toda a turma, partindo das respostas dos alunos a questões que introduzem conceitos, levando-os a construir o conhecimento e a aprender Matemática, constitui um aspecto fundamental do trabalho do professor (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

Ensinar de acordo com as atuais orientações curriculares é uma tarefa complexa e que requer da parte do professor a tomada de decisões no decorrer da aula. Um apoio importante pode ser dado pelo trabalho de preparação conjunta e de reflexão sobre as aulas feito a nível da escola. O foco desta partilha são as práticas visando o enriquecimento do conhecimento do professor como pessoa que reflete e toma decisões. A chave para a mudança e a inovação curricular, conduzindo à melhoria da qualidade do processo de ensino-aprendizagem, está relacionada com o conhecimento profissional e o compromisso dos professores com a profissão. Isso não se consegue esperando pela improvável convergência de iniciativas individuais, mas requer a organização e o trabalho colaborativo dos professores e um investimento na sua formação e desenvolvimento profissional em Matemática.

Conclusão

O novo programa de Matemática do ensino básico resultou de uma proposta feita nesse sentido ao Ministério da Educação. A principal motivação para esta proposta era atualizar o programa anterior, então com mais de 15 anos, e claramente datado em numerosos aspectos. Não se esperava que o programa despertasse um interesse especial por parte dos professores. No entanto, pelo contrário, ele suscitou uma mobilização dos professores como há muito não se via em Portugal. Possivelmente, reconhecendo que o programa anterior não correspondia em muitos aspectos às necessidades dos alunos e do seu próprio trabalho, e valorizando as orientações gerais deste novo programa, aqui resumidas, foram muitas as escolas que se voluntariaram para o introduzir nas suas aulas, em 2009-10, antes mesmo deste se tornar obrigatório e de existirem livros didáticos para apoiar a sua leccionação.

No processo de introdução do novo programa, nem tudo têm sido facilidades. Para alguns professores, muito agarrados à noção de exercício, ainda faz alguma confusão falar em "tarefas", um termo genérico que inclui problemas, exercícios, explorações, investigações e outros tipos de trabalho. Outros professores ficam um tanto perplexos quando se propõe que não se comece desde logo pelo ensino das regras e dos algoritmos, sendo necessário que os alunos os possam aprender a partir do seu próprio trabalho. Mas, de uma maneira geral, as ideias fundamentais do novo programa estão a fazer o seu caminho nas escolas. Enfim, não esperamos que, daqui por uns anos, a prática profissional seja exatamente como indicada no programa, mas esperamos que essa mesma prática seja influenciada de modo positivo por este programa.

O factor que irá fazer a maior diferença neste processo é o envolvimento dos professores de Matemática, a partir das escolas e das organizações profissionais. É claro que o Ministério da Educação e outras autoridades educativas podem ter uma influência fortíssima – para o bem e para o mal – tal como o podem ter as universidades e outras entidades que formam professores, bem como as editoras de livros didáticos escolares, e muitos outros atores. O processo de elaboração do programa, realizado por uma equipa envolvendo educadores matemáticos, matemáticos e professores dos diversos níveis de ensino, mostra como a colaboração, envolvendo intervenientes diversos, pode abrir caminho à mudança. A verdade é que em Portugal foi possível congregar o conhecimento dos resultados da investigação dos educadores matemáticos com a experiência profissional dos professores que estão no terreno e com o sentido de rigor e a coerência dos matemáticos. É uma dinâmica que se espera ver surgir cada vez mais em todos os países, incluindo, naturalmente, o Brasil.

Referências

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. I, pp. 225-256). Charlotte, NC: Information Age.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.

Matos, J. M., & Gordo, M. F. (1993). Visualização espacial: Algumas actividades, *Educação e Matemática, 26*, 13-17.

McIntosh, A., Reys, B., &Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-8.

Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2008).*Números racionais não negativos: Tarefas para 5.º ano*. Lisboa: DGIDC.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC. (disponível *online*)

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Nunes, C. C., & Ponte, J. P. (2010). O papel do professor e o desenvolvimento curricular: Que desafios? Que mudanças? In GTI (Ed.),*O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 61-88). Lisboa: APM.

Ornstein, A. C., & Hunkins, F. P. (2004). *Curriculum: Foundations, principals and issues*. Boston, MA: Pearson.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms.* London: Routledge.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC. (disponível *online*)

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino (Dissertação de mestrado,* Universidade de Lisboa). Disponível em http://repositorio.ul.pt/.

Rumsey, D. J. (2002).Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. *Journal of Statistics Education, 10*(3).

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10,* 313-340.