UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM: Economia Monetária e Financeira

Crescimento Económico e Infraestruturas num Modelo de Crescimento Endógeno

LUÍS MIGUEL FREIRE LOPES

Orientação: Prof. Doutor Paulo Meneses Brasil de Brito

Júri:
Presidente: Prof. Doutor Paulo Meneses Brasil de Brito
Vogais: Prof. Doutor Álvaro Pinto Coelho Aguiar
Prof. Doutor João Carlos Ferreira Lopes

Julho/1999

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM: Economia Monetária e Financeira

Crescimento Económico e Infraestruturas num Modelo de Crescimento Endógeno

LUÍS MIGUEL FREIRE LOPES

Orientação: Prof. Doutor Paulo Meneses Brasil de Brito

Júri:
Presidente: Prof. Doutor Paulo Meneses Brasil de Brito
Vogais: Prof. Doutor Álvaro Pinto Coelho Aguiar
Prof. Doutor João Carlos Ferreira Lopes

Julho/1999

CRESCIMENTO ECONÓMICO E INFRAESTRUTURAS NUM MODELO DE CRESCIMENTO ENDÓGENO

RESUMO:
Com o objectivo de verificar qual o efeito no crescimento de longo prazo pelo facto de se afectar o capital público em infraestruturas ao sector educativo ou ao sector produtivo, é construído um modelo de optimização intertemporal, no qual as famílias com vida infinita, escolhem os níveis de consumo e de poupança que maximizam a sua utilidade dinástica, sujeito a uma restrição orçamental intertemporal. É apresentado um modelo geral com dois sectores, no qual, o capital público é usado simultaneamente nos dois sectores de actividade e são apresentadas duas versões desse modelo, numa das quais o capital público é aplicado exclusivamente no sector produtivo, noutra o capital público é aplicado exclusivamente no sector educativo. Finalmente faz-se a comparação das duas versões do modelo, através de simulação numérica, em termos de taxas de crescimento de longo prazo e na caracterização do estado de equilíbrio.

PALAVRAS CHAVE: Crescimento económico; Capital público; infraestruturas; modelos de crescimento; Política do Governo ; Modelos de Crescimento Bi-Sectoriais

JEL: H540; O410;O380

ECONOMIC GROWTH AND INFRASTRUCTURE IN ENDOGENOUS GROWTH MODEL

ABSTRACT:
In order to verify how public capital in infrastructures to educational or productive sector will affect long term increase, is built an inter-temporal optimisation model, where infinitely-lived households choose consumption and saving to maximize their dynastic utility, subject to an inter-temporal budget constraint. It is created a general model where the public capital is used in both productive and educational sector. Second, we develop a model with a separate in one we use public capital exclusively in productive sector and in the other we use public capital exclusively in educational sector.
At last we compare both versions by numerical simulation in long term growth and in steady-state.

KEY WORDS: Economic growth ; Growth models; Two-Sector Growth Model ; Government Policy; Infrastructure; Public capital.

JEL: H540; O410;O380

ÍNDICE

FIGURAS E QUADROS

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Doutor Paulo Brito, pela orientação, paciência, apoio e compreensão com que acompanhou a realização deste trabalho.

Á Dra. Isabel Clímaco e ao Dr. Guilherme Gonçalves pelas sugestões e pelo incentivo.

Aos meus colegas do Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Coimbra pelo incentivo e apoio.

Ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Coimbra pelas facilidades concedidas para a reprodução deste texto.

À minha família, pelo apoio, estímulo e ânimo indispensáveis à sua realização.

1. INTRODUÇÃO

As disparidades existentes nas taxas de crescimento económico de longo prazo, entre países e entre regiões, têm levado muitos economistas a interrogarem-se sobre as suas causas. O contributo dado pelas modernas teorias de crescimento económico para explicar este fenómeno, alicerça-se nas teorias de alguns economistas clássicos como Adam Smith, David Ricardo, Thomas Malthus, Frank Ramsey e Joseph Schumpeter entre outros. Sendo de particular relevo para a sua análise os conceitos de dinâmica de equilíbrio, de comportamento competitivo, a existência de rendimentos decrescentes e a sua relação com a acumulação de capital físico e humano assim como o efeito do progresso tecnológico e dos métodos de produção no crescimento económico.

O avanço das modernas teorias de crescimento económico, baseia-se no trabalho percursor de Solow (1956). Este autor explica o crescimento do produto como o resultado da acção de um conjunto de factores, dos quais se destaca o capital físico. Daí se conclui que o crescimento económico é determinado, fundamentalmente, pela capacidade de investimento privado em capital físico (as máquinas e os equipamentos).

O desenvolvimento do modelo de Solow deu origem a subsequentes desenvolvimentos da teoria do crescimento que se designou por teoria de crescimento neoclássica, utilizando funções de produção com propriedades neoclássicas, nomeadamente, os rendimentos marginais decrescentes do factor capital e os rendimentos constantes à escala. O autor considera, igualmente, que a taxa de crescimento de longo prazo da economia converge para uma situação de crescimento *per capita* nulo.

Os modelos de crescimento neoclássicos, não obstante o seu carácter inovador, apresentam algumas insuficiências, uma vez que alguns dos conceitos chave como a verificação de rendimentos marginais decrescentes dos factores produtivos, a crença na convergência e a consideração da tecnologia como variável exógena e disponível para todos os países, se afastam da realidade. Na tentativa de ultrapassar tais insuficiências a recente teoria do crescimento endógeno, de que se destacam os trabalhos de Romer e Lucas, pressupõem que as acções individuais na economia podem gerar crescimento económico de longo prazo.

Para os teóricos do crescimento endógeno a evolução das variáveis que condicionam o crescimento (como o conhecimento e a tecnologia) são sempre determinadas no interior do modelo. O crescimento é sustentável, porque as variáveis endógenas possibilitam uma taxa de crescimento do produto que é positiva com o aumento da dotação de factores.

Nos últimos anos, alguns autores, procuraram, igualmente, explicar o crescimento económico através da intervenção do Estado na economia. Para tal, introduziram nos seus modelos os gastos públicos, procurando de seguida avaliar a influência que estes podem ter sobre as decisões de consumo e sobre as decisões de poupança. A influência dos gastos públicos no crescimento de longo prazo e no bem estar das populações tem sido testada em modelos dinâmicos de equilíbrio geral.

A consideração do Estado na teoria do crescimento endógeno revela-se da maior importância pela possibilidade de se considerar a investigação e desenvolvimento como uma variável endógena do crescimento económico (veja-se Romer (1987 e 1990)).

Nesta análise dos efeitos dos gastos públicos sobre o crescimento económico, tem-se dado particular destaque à produtividade. Distinguindo as várias análises o caracter produtivo ou improdutivo que os gastos públicos desempenham na actividade económica.

Sabendo que política fiscal que não é neutra do ponto de vista económico, alguns autores advertem nesse sentido para a possibilidade da fiscalidade comprometer, no longo prazo, uma evolução positiva das taxas de crescimento. Parece, no entanto, não haver consenso sobre esta questão, uma vez que alguma evidência empírica revela não haver uma correlação negativa entre gastos públicos e as taxas de crescimento de longo prazo. Este impasse poderá dever-se em parte à diversidade encontrada nos gastos públicos, dado que alguns apesar de serem improdutivos, podem indirectamente ser produtivos, e assim, afectar a produtividade da economia. Apesar de ser reconhecida a possibilidade da fiscalidade provocar efeitos negativos sobre o crescimento, alguns autores como Barro (1990) salientam contudo, que a utilização da tributação como forma de financiamento dos gastos públicos não deixa de ter algum efeito positivo sobre o crescimento. Neste contexto surgem alguns estudos empíricos como o de Easterly e Rebelo (1993), que concluem sobre a existência de uma correlação positiva entre gastos em investimento público e crescimento de longo prazo.

A análise normativa da política fiscal e dos gastos públicos, pressupondo (partindo da hipótese) o orçamento de Estado equilibrado em cada período de tempo, é encontrada em trabalhos como o de Barro (1990) e Barro e Sala-i-Martin (1992, 1995); onde se admite que os gastos públicos são financiados por uma taxa de imposto sobre o rendimento.

Estes trabalhos têm-se revelado de particular importância, uma vez que abrem novas perspectivas teóricas possibilitando posteriores desenvolvimentos em que se admite já o endividamento do Estado e se procura uma política óptima analisando os problemas da fiscalidade num horizonte intertemporal. Ai se destaca o trabalho de Corsetti e Roubini (1996) que apresentam um modelo com três sectores de actividade e procuram analisar o efeito que os gastos públicos têm sobre a produtividade do sector educativo e do sector produtor de bens finais. À semelhança da maior parte dos estudos sobre a tributação óptima, os autores pretendem delinear uma política fiscal que seja eficiente, restringindo, contudo, a sua análise ao fluxo de gastos públicos produtivos.

O estudo de Corsetti e Roubini (1996), apresenta-se como uma síntese de estudos anteriores como os de Barro (1990), Zhu (1992), Jones, Manuelli e Rossi (1993), Barro e Sala-i-Martin (1992, 1995), Glomm e Ravikumar (1994, 1997), dependendo das várias especificações assumidas no modelo de Corsetti e Roubini (1996), nomeadamente: a possibilidade do governo se endividar nos mercados financeiros, as restrições dos instrumentos políticos, o efeito dos gastos públicos no aumento da produtividade do capital físico e humano e o efeito dos gastos públicos no aumento da produção.

A maior parte da literatura sobre este tema, restringe a sua análise, ao investimento em gastos públicos produtivos, desprezando o papel do capital público, o stock das infraestruturas públicas, no crescimento económico. As excepções dignas de nota, a esta primazia, do fluxo de gastos públicos produtivos, são os trabalhos de Glomm e Ravikumar (1994, 1997). Nestes trabalhos, o nível de infraestruturas públicas da economia é um *input* para a produção de bens finais e sendo este financiado por um imposto sobre o rendimento, respectivamente, sobre o capital e os salários.

No que diz respeito às infraestruturas, não sendo possível montar um sistema de exclusão, estas podem apresentar vários graus de rivalidade no seu consumo. As infraestruturas, como variáveis de *stock*, nos modelos referidos acima, são considerados *input* objecto de provisão publica de que são exemplos as estradas, as auto-estradas, as redes de saneamento básico, os aeroportos, as escolas, etc.

No trabalho de Glomm e Ravikumar (1997), supõe-se que o Estado recorre a impostos sobre o rendimento, para financiar os diferentes tipos de gastos públicos, privilegiando-se ai dois tipos de gastos: 1) gastos em infraestruturas e 2) gastos em educação. No primeiro caso, considera-se que o capital público entra como *input* na produção de bens finais, considerando apenas a provisão pública de infraestruturas, em estradas, aeroportos, etc. No segundo caso, consideram-se os gastos, apenas, em educação.

É neste contexto que o nosso trabalho se enquadra. Vamos considerar, por um lado, o capital público em infraestruturas como input do sector produtivo, por outro lado, o capital público investido em educação.

A nossa opção em considerar no modelo os gastos públicos em infraestruturas, está de encontro, com alguma evidência empírica, que aponta, para a influência significativa que os investimentos públicos em infraestruturas, têm no aumento da produtividade e no crescimento económico de longo prazo.

Dos primeiros estudos, sobre a influência do capital público no crescimento económico de longo prazo, destaca-se o trabalho de Aschauer (1989), que veio impulsionar a investigação sobre o impacte do capital público na economia. A inclusão do capital público, na função de produção agregada, veio mostrar a grande importância do capital público, para o aumento da produtividade no sector privado. Resultados menos conclusivos, mas qualitativamente semelhantes aos trabalhos de Aschauer (1989), foram encontrados por Munnell (1990), Eberts (1990), Berndt e Hansson (1992) e Morrison e Schwartz(1996).

Os resultados obtidos por Aschauer (1989), foram fortemente criticados, principalmente por Aaron (1990) e Taton (1991)[1]. Estes autores puseram em causa, os métodos econométricos utilizados em que se considerava o capital público como variável endógena, utilizando séries não estacionárias e muito especialmente pela ausência de variáveis com preços. Por último, Hulten e Schwab (1991) ao fazerem as primeiras diferenças aos dados (para estacionar as séries), vieram mostrar que o capital público não era do ponto de vista estatístico significante.

---

[1] Como refere Turnovsky e Fisher (1995).

Já noutro tipo de análise, Morrison e Schwartz (1992), estimaram "funções custo", sugerindo que as infraestruturas públicas, são um input "poupança custo" para a indústria. Na mesma linha, Nadiri e Mamuneas (1994), ao analisarem os efeitos do financiamento público, em infraestruturas e em investigação e desenvolvimento chegaram à conclusão que estes dois tipos de capital público, reduzem os custos industriais.

Gomes (1996-a), num trabalho para a economia portuguesa, considera que existe uma complementaridade entre o capital público e o capital privado.

Posição contrária é assumida por outros autores como: Holtz-Eakin (1994), Hulten e Schwab (1991), Garcia-Milà e McGuire (1992), Holtz-Eakin e Schwartz(1995). Estes consideram que o impacte do capital público, no aumento da produtividade, do sector privado é negligenciável, ou pelo menos não é detectável, pela tradicional função de produção agregada.

De la Fuente (1997), num outro estudo empírico nos países da OCDE, relativo à política fiscal e ao crescimento, estuda a influência que os gastos públicos e a tributação possam ter sobre o investimento privado e sobre o crescimento de longo prazo. Neste estudo, sugere-se que a política fiscal influencia o crescimento económico. O autor particularizando o seu estudo para a União Europeia, conclui que uma redução dos gastos públicos totais, acompanhado de um investimento público constante, poderá incrementar a taxa de crescimento de longo prazo deste espaço económico.

Estes resultados sugerem ainda que uma possível redução do sector público pode criar ganhos de produção, tendo esta redução um efeito positivo no investimento privado e no crescimento de longo prazo.

Barro (1991) numa análise semelhante, considera, também, que o efeito dos gastos públicos no crescimento económico é positivo, verifica-se contudo após algumas especificações do modelo, que a variável investimento público perde significância. Resultados mais conclusivos, foram obtidos por Easterly e Rebelo (1993), que ao usar dados desagregados do investimento público, encontraram uma correlação positiva, significante e robusta, entre o crescimento e o investimento privado e o investimento público. Com a desagregação dos dados, o investimento público em transportes e comunicações apresenta-se correlacionado com o crescimento, não o estando contudo, com o investimento privado. Apesar do investimento em educação e infraestruturas urbanas apresentarem coeficientes positivos, perdem, no entanto, significância com a adição de regressores adicionais no investimento em educação.

Outro aspecto, ao qual, a investigação económica tem dado alguma atenção, centra-se na forma como a alteração na composição dos gastos públicos pode aumentar a taxa de crescimento da economia. Destaca-se neste campo, o trabalho de Devarjan, Swarrop e Zou (1996). Este estudo empírico, conclui, que o aumento dos gastos correntes, tem um efeito positivo sobre o crescimento. Já o aumento da componente capital dos gastos públicos parece, pelo contrário, ter um efeito negativo sobre o crescimento *per capita*. O que leva a concluir que os gastos públicos produtivos, quando usados em excesso, se tornam improdutivos, devendo usar-se uma combinação óptima de gastos públicos em despesas de capital e em despesas correntes.

O nosso trabalho pretende ser um contributo, para a análise do papel do Estado no crescimento económico de longo prazo. Optámos por desenvolver um modelo de crescimento endógeno que reflectisse a forma como a afectação de capital público em infraestruturas influencia o crescimento económico de longo prazo numa economia fechada.

Dos várias tipos possíveis de gastos públicos realizados numa economia, vamos considerar no nosso estudo, à semelhança do que é feito por Glomm e Ravikumar (1997), dois tipos particulares de gastos públicos: 1) o investimento em capital público como *input* na função de produção de produtos finais (a provisão pública de infraestruturas, como estradas, redes de saneamento básico, pontes, etc.) 2) o investimento em capital público, em educação e investigação e desenvolvimento, como *input* do sector educativo.

Tal como, Glomm e Ravikumar (1997), não iremos considerar a influência que os gastos públicos têm na escolha das famílias entre trabalho e lazer.

Os gastos públicos, que vamos considerar no nosso modelo, serão financiados por um imposto sobre o rendimento, admitindo que o orçamento de Estado está equilibrado a cada momento, à semelhança do trabalho de Barro (1990) e Barro e Sala-i-Martin (1995). Vamos excluir da nossa análise a hipótese de endividamento do Estado, a da procura de uma política óptima e a dos problemas da fiscalidade num horizonte intertemporal.

Vamos, desta forma, construir um modelo de optimização intertemporal, no qual as famílias, com vida infinita, escolhem níveis de consumo e de poupança que maximizam a sua utilidade dinástica sujeita a uma restrição orçamental intertemporal isto é, um modelo tipo Ramsey. É pois, apresentado um modelo bi-sectorial, com um sector educativo (o sector produtor de capital humano) e um sector produtivo (o sector produtor de bens de consumo e de capital físico). Os agentes económicos do sector produtivo, estão sujeitos neste modelo a um imposto sobre o rendimento, imposto este que se admite financiar os gastos públicos. Admite-se que o orçamento de Estado está sempre equilibrado, o que elimina qualquer possibilidade de endividamento. Neste modelo bi-sectorial, o capital público é utilizado em ambos ao sectores como factor de produção. Este modelo geral é apresentado na secção 2, onde se faz uma breve apresentação das suas características.

Nas secções 3 e 4, são apresentadas duas versões simplificadas do modelo geral. Ai se admite serem os gastos públicos aplicados exclusivamente num único sector de actividade—ou no sector educativo, ou no sector produtivo.

Os gastos públicos produtivos, a utilizar no sector produtivo, correspondem, no nosso modelo de crescimento económico de longo prazo, à criação de capital público (nestes gastos englobam-se, entre outros, estradas, pontes, auto-estradas, a manutenção da lei e da ordem, as redes de saneamento básico, o sistema de saúde pública, por outras palavras, o capital público). Por outro lado, os gastos públicos, a utilizar no sector educativo, correspondem a todo o tipo de gastos que o Estado realiza na educação (onde se inclui os gastos com professores e pessoal auxiliar, edifícios escolares, livros e outros equipamentos, como computadores).

O nosso objectivo é verificar, as implicações, que a composição dos gastos públicos possa ter no crescimento económico de longo prazo. O facto de usar gastos públicos em infraestruturas, a aplicar no sector produtivo, ou em gastos com a educação, a usar no sector educativo.

A resolução destas versões simplificadas, do modelo geral, conduz a um sistema de equações canónicas, as quais, vão permitir construir um sistema linearizado; a partir do qual, é analisada a estabilidade do nosso modelo, o que é conseguido através da dinâmica comparativa local, devendo este apresentar características semelhantes a qualquer modelo de crescimento endógeno.

A dinâmica comparativa local do sistema na proximidade do estado estacionário, é determinada pelos sinais dos valores próprios da matriz Jacobiana do sistema. Na resolução do modelo vamos recorrer à simulação numérica, não ignorando que este método tem a desvantagem de não permitir a generalização das conclusões, ele tem, contudo, o mérito de permitir maior clareza e rigor nos resultados obtidos.

Para além disso, vamos utilizar, nas duas versões simplificadas do modelo geral, a mesma percentagem de capital humano a afectar a cada sector de actividade. Podemos desta forma, comparar o efeito na taxa de crescimento de longo prazo da economia, pelo facto de se aplicarem os gastos públicos no sector produtivo ou no sector educativo. Na secção 5, vamos comparar o efeito dos gastos públicos, na taxa de crescimento de longo prazo da economia, pelo facto de se afectar o capital público ao sector produtivo ou ao sector educativo. Por último, na secção 6, são apresentadas as conclusões do nosso trabalho.

2. CARACTERIZAÇÃO DO MODELO NA FORMA GERAL

Estuda-se um modelo de crescimento económico, em que se pressupõe a optimização do comportamento do consumidor, em que as famílias com vida infinita escolhem os níveis de consumo e poupança que maximizam a sua utilidade dinástica. O consumidor está sujeito a uma restrição orçamental intertemporal.

A taxa de poupança é determinada, em mercados competitivos, pelo comportamento optimizador das famílias e das empresas. Seguimos nesta análise um modelo tipo Ramsey. O papel do governo é o fornecimento de capital público, complementar ao capital privado, e que será aplicado nos dois sectores de actividade: no sector educativo e no sector produtivo.

2.1. AS FAMÍLIAS

2.1.1. Formalização do modelo

As famílias fornecem às empresas os factores produtivos—o trabalho, pelo qual recebem salários, e o capital, pelo qual recebem juros. Vamos considerar uma economia fechada, em que a remuneração do capital, feita pelas empresas, vai remunerar os factores produtivos, colocados à disposição dos agentes económicos, gerando os rendimentos das famílias.

A presença do Estado no nosso modelo leva-nos a ter em conta a tributação do rendimento dos agentes privados. Este tributa simultaneamente o rendimento dos agentes privados e fornece bens de capital público ao sector privado. Os rendimentos das famílias, após terem sido tributados, permite-lhes adquirir bens de consumo, sendo o que é poupado aplicado na formação do capital ou dos activos das famílias.

O modelo em estudo é caracterizado pela existência de gerações dinásticas, ou seja, aquelas em que as famílias num horizonte temporal infinito, procuram maximizar no presente o bem estar para si e para os seus descendentes, sujeitando essa maximização à sua restrição orçamental intertemporal.

Vamos admitir por simplificação, que a população é constante, ou seja, eliminando da nossa análise, possíveis efeitos que variações na mortalidade, na natalidade e nos surtos migratórios possam ter no crescimento económico. Para tal considerou-se que os indivíduos tem uma vida finita mas que os agregados familiares terão um caracter duradouro (vida infinita).

Vamos considerar uma economia fechada, em que as famílias escolhem, entre o consumo presente e o consumo futuro. Por esta razão, vamos assumir uma família representativa de horizonte infinito, que maximiza a sua utilidade intertemporal, sendo a utilidade no momento presente representada por:

$$U_0 = \int_0^{\infty} U(C)e^{-\rho t}dt \qquad (2.1)$$

em que (C)[2] representa o nível de consumo e $\rho \geq 0$ representa a taxa de preferência intertemporal.

Tendo presente o conceito de geração dinástica, o indivíduo que representa a família baseia a sua utilidade no consumo presente, que é no entanto afectado pela consideração do bem estar dos seus descendentes num horizonte infinito, e que se designa por utilidade dinástica.

Quanto maior for o valor assumido pela taxa ρ, maior é a utilidade que se atribui ao consumo actual em detrimento do consumo futuro. Em casos limite ($\rho=1$) o consumidor dá preferência máxima ao seu consumo no presente; quando ($\rho=0$) é indiferente para o indivíduo consumir no presente ou no futuro distante, não havendo neste último caso lugar para a distinção entre a sua própria utilidade e a utilidade dos seus descendentes.

Tomando daqui para a frente que ρ é sempre positivo, surge por parte do consumidor um comportamento egoísta que o leva a valorizar mais a sua utilidade, que a dos seus descendentes.

A função utilidade, é uma função continua no seu domínio, tendo derivada de segunda ordem, igualmente continua; a função resultante é necessariamente côncava, por forma a ter um máximo tal que: $U'(C)>0$ e $U''(C)<0$,$\forall$ $C>0$. A função deve também verificar as condições de Inada[3]. A função deve ser homogénea de grau $1-\theta$.

---

[2] Todas as variáveis do nosso modelo dependem do factor temporal, por simplicidade, iremos omitir a variável "tempo" (t) para aliviar as notações.

[3] Estas condições indicam-nos que $\lim_{c \to 0} U'(C) = \infty$ e $\lim_{c \to \infty} U'(C) = 0$.

Para finalizar, a função de utilidade, U(C), terá de mostrar uma elasticidade de substituição intertemporal positiva e constante: $\theta^{-1}>0$[4]. Atendendo a este conjunto de propriedades, a função utilidade, U (C), assumirá a seguinte forma funcional:

$$U(C) = \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta} \tag{2.2}$$

As famílias têm a sua riqueza materializada sob a forma de títulos de capital, títulos que podem ser transaccionados no mercado doméstico, podendo assumir um valor negativo, representando dívidas da família para com os outros agentes económicos.

Como estamos perante uma economia fechada, as dívidas e os créditos, não podem ser transaccionados internacionalmente. Estes activos são perfeitamente substituíveis, tendo uma taxa de rentabilidade (ou taxa de juro) com o valor de $r(t)$. A família no final do período em análise, tem um património positivo.

Consideramos que cada família representa, em termos de força laboral, uma unidade de trabalho por unidade de tempo o que nos permite normalizar o modelo considerando o total de horas de trabalho igual à unidade. A remuneração por unidade de tempo (seja qual for a unidade t) é dada por um salário de $w(t)$.

Partindo da hipótese que o sector educativo não é transaccionado no mercado[5], vamos considerar que o orçamento familiar é aplicado em consumo e poupança. Admitindo apenas como fonte de rendimento do capital humano, os salários, obtidos no sector produtor de bens transaccionáveis, no sector produtivo. Note-se que o rendimento disponível das famílias é aquele que resulta após o pagamento do imposto sobre o rendimento τ.

Estamos, assim, em condições de representar o fluxo de rendimentos (líquidos de impostos) disponíveis da nossa família representativa :

$$\left(w.u.H + r.K_h\right)(1-\tau) \tag{2.3}$$

donde podemos deduzir a restrição orçamental, que é representada pela função poupança da família e esta assume a forma de:

---

[4] Assume-se, de acordo com a evidência empírica, que o inverso desta elasticidade, θ, é sempre superior à unidade.

[5] Corsetti e Roubini (1996), partindo da mesma hipótese, consideram na sua restrição orçamental de consumo, apenas o capital humano aplicado no sector produtivo.

$$\dot{K}_h = \left(w.u.H + r.K_h\right).(1-\tau) - C \tag{2.4}$$

Como se disse, o objectivo das famílias é maximizar a sua função utilidade intertemporal (2.1), sujeito à restrição orçamental (2.4), de tal forma que:

$$\text{Max} \int_0^{+\infty} \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta} e^{-\rho t} dt, \tag{P.2.1}$$

s.a. $\dot{K}_h = \left(w.u.H + r.K_h\right).(1-\tau) - C$

sendo as condições iniciais , $K_h(0)=K_{h0}$.

2.1.2. Condições de primeira ordem

Se considerarmos como P_{K_h}, o preço sombra da nossa restrição de recursos das famílias, restrição essa que representa a riqueza das famílias avaliada no momento *t*, $P_{k_h} = \lambda_{K_h}.e^{-\rho.t}$. Sendo λ_{k_h}, o preço sombra da mesma restrição, quando avaliado no momento zero.

O Hamiltoniano corrente, do nosso problema que é dado por:

$$\aleph = \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta} + P_{K_h}.\left[(w.u.H + r.K_h).(1-\tau) - C\right] \tag{2.5}$$

podemos assim concluir que o nível óptimo de consumo da nossa família representativa é dado por:

$$\aleph_c = 0 \Leftrightarrow C^{-\theta} - P_{k_h} = 0 \Leftrightarrow \hat{C} = P_{k_h}^{-\frac{1}{\theta}} \tag{2.6}$$

e concluir ainda que a equação canónica correspondente ao preço sombra do nível óptimo do fluxo de consumo, será:

$$\dot{P}_{K_h} = \rho.P_{K_h} - \aleph_{K_h} \Leftrightarrow \dot{P}_{K_h} = \left[\rho - r\right].P_{K_h} \tag{2.7}$$

Tendo em atenção que a condição de transversalidade é dada por $\lim_{t\to\infty} e^{-rt} P_{K_h}(t).K_h(t) = 0$, para cada trajectória admissível, do stock de capital das famílias. Esta condição revela-nos, que a quantidade de activos da família multiplicado pelo preço sombra a que são valorizados, aproxima-se de zero quando t tende para o infinito. A equação (2.7) é conhecida por equação de Euler ou regra de poupança óptima de Ramsey.

Equação de Euler

Se diferenciar-mos a equação (1.7) em ordem ao tempo obtemos:

$$-\theta.C^{-\theta-1}.\dot{C} = \dot{P}_{K_h} \qquad (2.8)$$

e substituindo nesta equação os valores correspondentes ao preço sombra P_{K_h}, e o correspondente diferencial em ordem ao tempo $\dot{P}_{K_h}$, resultantes das equações (2.7) e (2.8), encontramos assim, a condição básica de escolha de consumo ao longo do tempo.

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}.\left[r - \rho\right] \qquad (2.9)$$

Esta condição, indica-nos, que as famílias escolhem o consumo óptimo, igualando a taxa de rendimento dos títulos, da sua riqueza (r), à taxa de preferência intertemporal (ρ). A taxa de crescimento do consumo tem uma relação linear com a elasticidade de substituição intertemporal. A taxa de juro (r), é a taxa de rentabilidade da poupança. Como vimos, os agentes económicos preferem consumir no presente em vez de consumirem no futuro, o que é explicado pela taxa de preferência intertemporal (ρ). Esta taxa é aquela a que as famílias descontam a utilidade do seu consumo futuro. Sendo esta, em última análise, a que explica a forma como as famílias distribuem o seu consumo ao longo do tempo.

2.2. AS EMPRESAS

As empresas ao produzir bens transaccionáveis, utilizam como factores produtivos: 1)o capital físico (K) pertencente às famílias, e que tem uma taxa de rentabilidade (*r*); 2) uma parcela de capital humano (H) que é produzido pelo sector educativo; 3) por uma parcela do investimento em capital público (em infraestruturas).

O objectivo fundamental do nosso estudo é a analise do papel dos gastos públicos, quando realizados no sector produtivo ou no sector produtor de capital humano, no crescimento económico de longo prazo.

Relativamente às funções de produção, vamos assumir que temos dois sectores distintos, o sector produtor de bens físicos, transaccionáveis no mercado, e o sector produtor de capital humano. Admite-se para cada sector funções de produção distintas, com tecnologias diferenciadas, assim, estamos perante um modelo de crescimento económico bi-sectorial.

A função de produção do sector produtor de bens/ capital físico, assume a seguinte forma funcional:

$$Y = A_K.\left[K^{\alpha}.(u.H)^{1-\alpha}\right]^{\theta_1}.(v.G)^{1-\theta_1} \qquad (2.10)$$

A produção (Y), tem numa economia fechada, dois fins possíveis: consumo e investimento.

A função de produção, *Y =F(K, u H ,v G)*, sendo uma função continua, com derivadas parciais de segunda ordem, também contínuas (C^2), deve ser uma função linearmente homogénea e monótona crescente. A função deverá evidenciar a presença de rendimentos marginais positivos e decrescentes em relação a cada factor produtivo[6].

Assume-se, de igual modo, que todos os factores produtivos são indispensáveis à produção, nomeadamente, o capital físico, o capital humano e o investimento, em infraestruturas colocadas à disposição do sector produtivo pelo Estado, de forma que $F(K,0,v.G)=F(K,u.H,0)=F(0,u.H,v.G)=0$. A forma funcional adoptada pela função de produção de bens físicos é

$$Y = A_K.\left[K^{\alpha}.(u.H)^{1-\alpha}\right]^{\theta_1}.(v.G)^{1-\theta_1} \qquad (2.10)$$

e obedece às propriedades referidas.

[6] $\forall\ K>0,\ H>0\ e\ G>0$:

$$F_K = \frac{\partial F}{\partial K} > 0\ ,\ F_{KK} = \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0,$$

$$F_H = \frac{\partial F}{\partial H} > 0\ ,\ F_{HH} = \frac{\partial^2 F}{\partial H^2} < 0,$$

$$F_G = \frac{\partial F}{\partial G} > 0\ ,\ F_{GG} = \frac{\partial^2 F}{\partial G^2} < 0;$$

devendo também verificar-se as seguintes condições de Inada:

$$\lim_{K\to 0} F_K = \lim_{H\to 0} F_H = \lim_{G\to 0} F_G = \infty;$$

$$\lim_{K\to \infty} F_K = \lim_{H\to \infty} F_H = \lim_{G\to \infty} F_G = 0;$$

No nosso modelo, os parâmetros *u* e *v*, representam respectivamente, a parcela do capital humano existente na economia, a afectar ao sector produtor de bens físicos[7], e a parcela do capital público em infraestruturas, utilizada na produção de bens físicos[8]. O elemento A_K representa o nível de tecnologia do sector produtivo, o parâmetro $0 \leq 1-\theta_1 \leq 1$ o *share* do capital público em infraestruturas na produção do sector produtor de bens físicos, o parâmetro $0 \leq \alpha \leq 1$ o *share* do capital físico na produção do sector produtor de bens físicos e $0 \leq 1-\alpha \leq 1$ o *share* do capital humano na produção do sector produtor de capital físico[9].

A função de produção de capital humano, assume a seguinte expressão:

$$Y_H = A_H\left[(1-u)H\right]^{\theta_2}\left[(1-v)G\right]^{1-\theta_2} \tag{2.11}$$

Tal como para a função de produção de bens físicos/capital físico, esta função deve ser C^2, isto é, deve ser uma função contínua, com derivadas parciais de segunda ordem também continuas, devendo ser ainda, uma função monótona crescente e linearmente homogénea. Esta função exigirá evidenciar a presença de rendimentos marginais positivos e decrescentes em relação a cada factor produtivo. O parâmetro A_H traduz o nível de tecnologia do sector educativo, $0 \leq 1-\theta_2 \leq 1$ o *share* dos gastos públicos realizados no sector produtor de capital humano e $0 \leq \theta_2 \leq 1$ o *share* do capital humano no sector produtor de capital humano.

A existência de dois sectores produtivos, com duas funções de produção distintas, faz com que o sector educativo tenha como particularidade a utilização intensiva de capital humano[10]. Esta intensidade em capital humano no sector educativo, se aceite pela generalidade dos autores, é reformulada por outros autores, como

---

[7] Representando o restante (1-u), o capital humano utilizado na produção de capital humano, no sector educativo.

[8] Representando, tal como para o capital humano (1-v), os gastos públicos a usar no sector educativo.

[9] A importância destes parâmetros de produtividade, α e θ_1, reside no facto de definir se a tecnologia da função de produção tem rendimentos constantes à escala e rendimentos marginais constantes na totalidade do capital empregue na produção.

[10] No Modelo estudado por Uzawa(1965) e Lucas(1988), chega-se ao limite de não considerar capital físico para a produção de capital humano, assumindo a função de produção a seguinte forma:

$$\dot{H} + \delta H = B.(1-u).H$$

Rebelo(1991) que assumem a presença igualmente importante da variável capital físico na função produção de capital humano[11].

Contrariando em parte análises anteriores, o modelo em estudo, procura explicar a função de produção através das variáveis capital humano (H) e investimento em capital público (G). Neste contexto considera-se que cabe ao Estado um papel fundamental na promoção e na criação de condições de existência de um bom sistema educativo, o qual permitirá uma acumulação de capital humano.

Apesar da educação não ser um bem público puro, sabemos que é um bem que provoca externalidades exigindo assim alguma forma de intervenção do Estado[12]. A inclusão no modelo da variável que representa a intervenção do Estado (gastos públicos em educação) na função de produção, é igualmente defendida por Glomm e Ravikumar(1997)[13]. Corsetti e Roubini(1996) vão ainda mais longe, considerado uma função de produção de capital humano, que exige a presença, para além do capital humano, de bens públicos e capital físico[14].

A função de produção do sector produtor de capital físico, ou de bens finais, tem uma estrutura semelhante aos modelos tipo Uzawa-Lucas, de crescimento endógeno, cujo elemento inovador, reside na introdução de capital público[15].

---

[11] Rebelo(1991), usa como função de produção de capital humano, uma função Cobb-Douglas do tipo:

$$\dot{H} + \delta H = B.\left[(1-v).K\right]^{\eta}.\left[(1-u).H\right]^{1-\eta}$$

Barro e Sala-i-Martin (1995) também usa esta função de produção.

[12] Sobre este aspecto, pode consultar-se Stiglitz (1988).

[13] A função de produção do sector educativo assume a seguinte forma funcional:

$$H = Bh^{\mu}E^{1-\mu}$$

Representando o elemento E, o nível de despesas públicas em educação.

[14] O modelo tem a seguinte função de produção de capital humano:

$$\dot{H} + \delta H = B.[x.K]^{\beta\omega}.[z.H]^{1-\beta}(G)^{\beta(1-\omega)}$$

[15] Rebelo(1991), usou como função de produção do sector produtor de bens físicos uma função como a seguinte forma:

$$Y = A.(vK)^{\alpha}.(uH)^{1-\alpha},$$

Esta especificação é semelhante ao modelo tipo Uzawa-Lucas, contudo estes autores, consideram que a totalidade do capital fisico devia ser empregue neste sector de actividade.

Refira-se a consideração do Estado nas funções de produção, do trabalho de Barro(1990)[16], com um papel impulsionador na moderna teoria do crescimento; este autor, introduziu nas funções de produção, os gastos públicos. Já outros autores, como Baxter e King (1993), particularizam na sua função de produção de bens transaccionáveis, o stock de capital provisionado publicamente[17].

Saliente-se contudo que a introdução do capital público no modelo, de forma mais explicita por Holtz-Eakin e Schwartz (1995), diferenciando o seu modelo do de Barro(1990) pela consideração do capital público, ao invés de considerar apenas o nível de gastos públicos[18]. Hulten (1996) vai mais longe, ao introduzir o nível de infraestruturas na função de produção[19]. O primeiro modelo teórico com a introdução do Estado, com mais do que um sector de actividade, onde aparece o Estado de forma explicita, é o modelo de Corsetti e Roubini (1996). Refira-se que os autores consideram a existência de bens públicos nas funções de produção dos dois sectores; na função de produção de capital humano e na função de produção de bens finais[20].

O nosso modelo afasta-se do modelo de Corsetti e Roubini ao considerar na função de produção de bens finais, que todo o capital físico é empregue na produção de bens físicos.

---

[16] Este autor usou uma função de produção para as empresas do tipo:

$$Y = AL^{1-\alpha}.K^{\alpha}.G^{1-\alpha}$$

Nesta função de produção G representa a totalidade dos gastos públicos, as compras do governo. Sendo uma medida de bens públicos, com as características enunciadas por Samuelson(1954), de serem não rivais e não exclusivos. Posteriormente, Barro e Sala-i-Martin(1991), considerou uma função de produção, na qual não considerava o trabalho empregue.

[17] A função de produção assume a forma:

$$Y = AK^{\theta_k} N^{\theta_n} (K^g)^{\theta_g}$$

[18] A forma a adoptado para a função de produção :

$$Y = (\psi L)^{1-\alpha-\beta}.K^{\alpha}.G^{\beta}$$

[19] A forma funcional adoptada é dada por:

$$Y = AK^{\alpha}H^{\beta}(\theta G)^{\gamma}$$

[20] A forma da função adoptada é do tipo:

$$Y = A(vK)^{\alpha\varepsilon}(uH)^{1-\alpha}(G)^{\alpha(1-\varepsilon)}$$

A empresa ao utilizar o capital humano, está de igual modo, a contribuir para a qualificação de capital humano, pelas actividades educativas que desenvolve e pelas actividades de formação profissional. Cada empresa tem um número finito de títulos, sendo o valor desses títulos no momento inicial, determinado no mercado de títulos pelo valor de *V(0)*[21]. *V(0)* é igual ao valor presente do *cash flow* entre o momento zero e o momento infinito, descontado à taxa de juro de mercado de *r(t)*. A empresa toma as suas decisões, procurando maximizar o seu valor presente *V(0)*. O problema intertemporal da empresa representativa, consiste em maximizar o valor presente de *V(0)* ou o fluxo intertemporal de *cash flow*, escolhendo para tal os níveis óptimos de investimento e de produção em cada período[22]. O *cash flow* instantâneo das empresas, é representado pelo produto do sector produtivo, ao qual, são subtraídos os gastos de investimento, em bens produzidos pelo sector produtivo, *I*.

O nosso modelo terá a seguinte forma:

$$\underset{CF}{Max} \int_0^{+\infty} (Y - I).e^{-r.t}.dt \qquad \text{(P.2.2)}$$

Partindo do princípio, que não existem custos de ajustamento[23], não existem elementos intertemporais no problema de maximização da receita da empresa. O que leva a que o problema de maximização do valor presente das receitas da empresa, se reduza a um problema de maximização da receita em cada período (independentemente do resultado noutros períodos). A formação profissional e a aprendizagem nas empresas (o *training)*, consideradas no nosso modelo, com dois sectores produtivos distintos introduz um elemento intertemporal no problema e conduz a que o problema de maximização do valor presente da empresa, se transforme num problema de maximização intertemporal.

As equações de fluxo de capital, que serão as restrições do problema, assumem a seguinte forma:

---

[21] Se o numero de títulos for normalizado para a unidade, V(0) é o preço do titulo no momento 0.

[22] Um modelo semelhante foi estudado por Brito e Pereira (1998).

[23] Barro e Sala-i-Martin(1995) consideram que cada empresa pelo facto de fazer investimentos tem custos de ajustamento. Contudo, estes custos tendem a diminuir quando a economia converge para o estado de equilíbrio. Estes custos são custos associados à instalação do capital, como a instalação de máquinas.

$$\dot{K}_f = I - \delta_k \tag{2.12}$$

$$\dot{H} = A_K.\left[(1-u).H\right]^{\theta_2}.\left[(1-v).G\right]^{1-\theta_2} \tag{2.13}$$

Sendo

$K(0)=K_0$ dado;

$H(0)=H_0$ dado;

$K>0$, $G>0$, $H>0$ e $C>0$;

u e $v \in [0,1]$

O aumento do stock de capital humano, da nossa economia fictícia, resulta da própria produção desse mesmo capital, isto é, toda a produção de capital humano irá ser acrescentada à quantidade existente .

Se considerarmos que $P_{k_f} = \lambda_{k_f}.e^{-r.t}$, em que $P_{kf}=1$ corresponde ao preço sombra do capital físico, avaliado no momento t, e como admitimos que não temos custos de ajustamento no capital físico, o preço dual é constante e unitário. De igual modo, $P_h = \lambda_h.e^{-r.t}$, em que P_h representa o preço sombra do capital humano, avaliado no momento t. Sendo λ_{k_f} e λ_h, respectivamente os preços sombra do capital físico e do capital humano, quando avaliados no momento zero.

Deduzimos desta forma o Hamiltoniano corrente do nosso problema da empresa:

$$\aleph = A_K.\left[K^{\alpha}.(u.H)^{1-\alpha}\right]^{\theta_1}.(v.G)^{1-\theta_1} - I + P_{K_f}.I + P_h.Y_h \tag{2.14}$$

Do Hamiltoniano corrente do nosso problema das empresas, podemos retirar as condições de equilíbrio para as empresas.

Aplicando o princípio de Pontryagin, obtemos as condições de primeira ordem ou condições necessárias de óptimo do problema, das quais temos:

$$\aleph_u = 0 \Leftrightarrow Y.\theta_1.\frac{(1-\alpha)}{u} = P_h Y_h.\frac{\theta_2}{1-u} \tag{2.15}$$

$$\dot{K}_f = I - \delta_k \tag{2.12}$$

$$\dot{H} = A_K.\left[(1-u).H\right]^{\theta_2}.\left[(1-v).G\right]^{1-\theta_2} \tag{2.13}$$

$$\dot{P}_{K_f} = 0 \tag{2.16}$$

$$\dot{P}_h = r.P_h - \aleph_h \Leftrightarrow \dot{P}_h = \left[r - Y_h.\frac{\theta_2}{H}\right].P_h - Y.\frac{\theta_1.(1-\alpha)}{H} \tag{2.17}$$

A equação (2.15) garante-nos que a produtividade marginal do trabalho nos dois sectores de actividade, o de bens físicos e o de capital humano, deve ser igual em ambos os sectores. Esta condição, dá-nos a garantia que os agentes económicos procuram maximizar a sua produtividade do trabalho, procurando as actividades que lhes dão melhor remuneração.

A existência de equilíbrio, evitando a fuga de trabalhadores para actividades mais rentáveis, exige a igualdade da produtividade marginal do trabalho, nos dois sectores de actividade de tal forma que esta seja igual ao nível salarial (w), de tal modo que:

$$w = \frac{Y_h}{H}.\theta_2 = \frac{Y}{H}.\theta_1.(1-\alpha) \tag{2.18}$$

A produtividade marginal do capital, deve assegurar a remuneração do capital a uma taxa de rentabilidade do capital (r), e assegurar a sua substituição através da sua taxa de depreciação, de forma que

$$r = A_K.\left[K^{\alpha}.(u.H)^{1-\alpha}\right]^{\theta_1}.(v.G)^{1-\theta_1}\theta_1.\frac{\alpha}{K} - \delta_k \tag{2.19}$$

Com esta condição, está-se a garantir, que o capital seja remunerado pelo sector que o utiliza como factor produtivo, e de acordo com a contribuição deste para o processo produtivo.

2.3. O ESTADO

Vamos de seguida analisar a influência do Estado na economia. Para tal, vamos à semelhança de Barro e Sala-i-Martin (1995), considerar as várias formas de intervenção do Estado na economia: a provisão de serviços e de infraestruturas, a protecção de direitos de propriedade e a tributação da actividade económica. Vamos assumir que o governo adquire uma parte da produção privada, para provisionar bens de forma gratuita. Servindo como factor de produção, quer no sector produtivo quer no sector produtor de capital humano. A utilização deste investimento público será feita alternativamente no modelo, no sector produtor de bens físicos/ capital físico ou no sector educativo, o sector produtor de capital humano, a estudar nas secções 3 e 4 deste trabalho.

O modelo de crescimento, desenvolvido por Barro (1990), inclui os serviços públicos, como um factor produtivo, para as empresas do sector privado, e com base nesse trabalho, Barro e Sala-i-Martin (1992), desenvolveram três versões desse modelo, nas quais existe: 1) provisão pública de bens privados, bens estes que eram rivais no seu consumo, e tinham a possibilidade de exclusão do seu consumo; 2) provisão pública de bens públicos que não eram rivais no seu consumo, nem era possível a sua exclusão; 3) provisão de bens públicos que eram sujeitos a congestionamento, e rivais no seu consumo, mas não se podia excluir o seu consumo. É nesta 3ª categoria de bens que poderíamos incluir bens como estradas, redes de saneamento básico, em suma a maioria das infraestruturas. Nos dois primeiros modelos poderíamos incluir as despesas em educação e saúde.

Por simplicidade, vamos assumir no nosso modelo, que a variável G representa o total das compras do governo, sejam elas qual forem, como é apresentado por Barro e Sala-i-Martin (1995). Os autores adoptam o conceito clássico de bens públicos, dado por Samuelson(1954), em que se definem bens públicos, como aqueles bens em que não existe rivalidade no consumo e possibilidade de exclusão. Apesar da maior parte do capital público como estradas, auto-estradas, aeroportos, pontes, escolas, etc. não serem consideradas um bem público puro, como é referido em Stiglitz(1988), estes bens estão sujeitos a congestão, existindo a possibilidade de exclusão do seu consumo ao impor-se um sistema de exclusão. Nós, contudo, por simplicidade, vamos assumir que as nossas infraestruturas não estão sujeitas a congestão, nem existe a possibilidade de montar um sistema de exclusão[24]. As nossas infraestruturas são um bem público puro.

O factor de acumulação do capital público em infraestruturas, ou os gastos públicos em educação, depende do nível de impostos sobre o rendimento, assumindo-se que esse nível de impostos tem uma taxa de τ, que incide sobre o sector produtivo, representa uma parcela do produto que é arrecadado sob a forma de impostos, que são subtraídos ao rendimento das famílias.

Cabe ao governo provisionar a compra do capital público em infraestruturas. Admite-se no nosso modelo que o capital público em infraestruturas tem uma taxa de

[24] Estamos a admitir como no modelo apresentado por Glomm e Ravikumar(1997) que $\rho=\phi=0$.

depreciação de δ_g. Admite-se, de igual modo, que o orçamento de Estado está equilibrado em cada momento do tempo, tal como no modelo de Barro(1990)[25], e eliminamos do nosso modelo os problemas da fiscalidade intertemporal. O nosso factor de acumulação de capital público apresenta a seguinte forma:

$$\dot{G} = \tau . Y - \delta_g \tag{2.20}$$

Vamos assumir, por simplicidade, como no modelo de Glomm e Ravikumar (1997), que a taxa de depreciação do capital público é de δ_g=1 (o que significa que o capital público tem uma taxa de depreciação de 100%). Tal, implica que o investimento público em infraestruturas, só influencia o produto se este for aplicado no próprio período, e que o investimento público passe a ser considerado como o próprio capital público.

O investimento público representa uma percentagem do produto do sector produtivo (considerando-se apenas o fluxo de investimento público em infraestruturas):

$$G = \tau . Y \tag{2.21}$$

Ao admitirmos o fluxo anterior, ficamos com um modelo semelhante ao modelo de Barro e Sala-i-Martin(1995). Tal como estes autores, vamos assumir que a taxa de imposto τ, é constante ao longo do tempo, mantendo-se igualmente constante o rácio gastos públicos/ produto, G/Y.

O objectivo do nosso modelo, é avaliar os efeitos de longo prazo sobre as variáveis económicas tais como: o crescimento (γ), o consumo (C) e os factores produtivos que entram na produção da nossa economia, devido ao facto de estarmos a afectar, o capital público em infraestruturas[26], ao sector produtor de bens e serviços ou ao sector produtor de capital humano, isto é, mediante variações em (ν).

2.4. EQUILÍBRIO GERAL

O equilíbrio geral desta economia que admitimos descentralizada é definido, à semelhança do que fazem Brito e Pereira (1998), pelas seguintes condições:

---

[25]No seu modelo Barro(1990) assume que o orçamento está equilibrado e é financiado por uma taxa de imposto sobre o rendimento de τ.

[26] Devido às nossas simplificações, neste caso o investimento em infraestruturas.

– As famílias e as empresas têm equações de comportamento óptimo;

– Existe consistência entre as variáveis de decisão individuais e as correspondentes variáveis agregadas;

– Existe correspondência entre os preços sombra individuais e a valorização de mercado em termos agregados do capital humano e do capital físico;

– O mercado de bens e serviços encontra-se equilibrado;

– As entidades contabilísticas agregadas encontram-se consolidadas.

O equilíbrio é garantido através da consistência entre as decisões micro e macro. Supondo para as famílias $C = \hat{C}$ e para as empresas $I = \hat{I}$, $v = \hat{v}$, $u = \hat{u}$.

Estamos a considerar que não temos custos de ajustamento, ao nível das empresas, o preço dual do capital é sempre constante e igual à unidade. Como estamos a considerar, um modelo de economia fechada, o stock de capital das empresas é igual à riqueza das famílias. Riqueza esta, detida sobre a forma de uma carteira de títulos de capital privados, que permite que o stock de capital agregado esteja equilibrado em termos contabilisticos, $K = K_h = K_f$.

De igual modo, o preço sombra do capital detido pela família é igual ao preço de valorização de mercado, de tal forma que $P_{K_h} = P_K$. O capital humano que é empregue exclusivamente pelas empresas é valorizado por estas ao mesmo preço que é valorizado pelo mercado, de forma que $P_{h_f} = P_h$.

Como estamos, num modelo simples com Estado, tem de se garantir a condição de equilíbrio macro-económico. A valorização do produto pela óptica do rendimento é igual á valorização pela óptica da despesa, de forma que:

$$Y = \left(w.H + r.K_h\right) = C + I + \dot{G} \tag{2.22}$$

Para a economia se encontrar em equilíbrio, tem de haver consistência entre as decisões micro-económicas e as decisões macro-económicas. De tal forma que o consumo das famílias seja o de estado de equilíbrio $C = \hat{C}$. As decisões das empresas devem fazer com que $u = \hat{u}$ e $I = \hat{I}$. Quanto ao governo, para que as decisões sejam as óptimas tem de se verificar $G = \hat{G}$. O produto considerado na nossa economia é sempre o produto de equilíbrio, de tal modo que $Y_k = \hat{Y}_k$ e $Y_h = \hat{Y}_h$. O preço sombra do capital físico é sempre constante e igual à unidade, o que se deve à inexistência de custos de ajustamento do capital físico.

A valorização do produto realizada na óptica do rendimento é igual á valorização pela óptica da despesa, de forma que:

$$Y = A_K.\left[K^{\alpha}.(u.H)^{1-\alpha}\right]^{\theta_1}.(v.G)^{1-\theta_1} = (w.u.H + r.K_h) \tag{2.23}$$

O equilíbrio geral deste modelo simplificado é definido pelas seguintes equações:

$$\dot{P}_{K_h} = \rho.P_{K_h} - \aleph_{K_h} \Leftrightarrow \dot{P}_{K_h} = [\rho - r].P_{K_h} \tag{2.24}$$

$$\dot{P}_h = r.P_h - \aleph_h \Leftrightarrow \dot{P}_h = \left[r - Y_h.\frac{\theta_2}{H}\right].P_h - Y.\frac{\theta_1.(1-\alpha)}{H} \tag{2.25}$$

$$\dot{G} = \tau.Y - \delta_g \tag{2.20}$$

$$\dot{H} = A_K.[(1-u).H]^{\theta_2}.[(1-v).G]^{1-\theta_2} \tag{2.27}$$

$$\dot{K} = Y.(1-\tau) - C - \delta_k.K \tag{2.28}$$

O parâmetro δ_k, na restrição de recursos de capital físico (equação (2.28)) representa a sua taxa de depreciação.

Estamos a admitir no nosso modelo que a taxa de poupança não é constante, de acordo com os modelos tipo Ramsey, dependendo do comportamento optimizante do consumo das famílias[27].

A taxa de crescimento do consumo das famílias é dada da por:

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}.[r - \rho] \tag{2.9}$$

Se usarmos a taxa de juro de mercado, é obtida a partir da produtividade marginal do capital, da equação (2.19):

$$r = A_K.\left[K^{\alpha}.(u.H)^{1-\alpha}\right]^{\theta_1}.(v.G)^{1-\theta_1}\theta_1.\frac{\alpha}{K} - \delta_k \tag{2.19}$$

obtemos a taxa de crescimento do consumo, que optimiza, o comportamento dos agentes económicos:

[27] Já outros autores, como no modelo de Solow-Swan, consideram que é constante.

$$\frac{\dot{\overline{C}}}{\overline{C}} = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}\left[A_K.\left[K^{\alpha}.(u.H)^{1-\alpha}\right]^{\theta_1}.(v.G)^{1-\theta_1}\theta_1.\frac{\alpha}{K} - \delta_k - \rho\right] \tag{2.29}$$

Esta taxa de crescimento do consumo (2.29) depende da produtividade marginal do capital, a qual deverá ser, necessáriamente, superior à taxa de preferência intertemporal.

2.5. TRAJECTÓRIA DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO

Como sabemos na situação de "steady state" as diversas variáveis endógenas crescem a taxas constantes $\left(\overline{C}, \overline{K}, \overline{H}, \overline{G}, \overline{u}\right)$. Note-se contudo que as taxas crescem de forma diferenciada, se $\overline{u}$ é constante e cresce a uma taxa nula, já $\overline{C}$, $\overline{K}$, $\overline{H}$ e $\overline{G}$ apresentam taxas de crescimento não nulas[28].

O modelo composto pelas equações diferenciais apresentado anteriormente (2.24) a (2.28), apresenta um equilíbrio não estacionário, isto é, variáveis do modelo crescem a taxas não nulas.

Recorde-se que o modelo em análise é um modelo de crescimento endógeno. Considera-se um modelo de crescimento endógeno aquele, em que pelo menos uma das taxas de crescimento de equilíbrio enunciadas tem de ser não nula, desta forma:

$$\frac{\dot{\overline{K}}}{\overline{K}} = \frac{\dot{\overline{H}}}{\overline{H}} = \frac{\dot{\overline{G}}}{\overline{G}} \neq 0 \tag{2.30}$$

Verificando-se esta condição, enunciada em (2.30), as taxas de crescimento dos vários tipos de capital são constantes e iguais, mas diferentes de zero. Assegura-se desta forma um modelo de crescimento endógeno. Assim todas as taxas de crescimento do nosso modelo crescem, a taxas que são constantes:

$$\frac{\dot{\overline{K}}}{\overline{K}} = \frac{\dot{\overline{H}}}{\overline{H}} = \frac{\dot{\overline{G}}}{\overline{G}} = \frac{\dot{\overline{Y}}}{\overline{Y}} = \frac{\dot{\overline{Y}}_h}{\overline{Y}_h} = \frac{\dot{\overline{C}}}{\overline{C}} = \frac{\dot{\overline{P}}_h}{\overline{P}_h} = \frac{\dot{\overline{P}}_{k_h}}{\overline{P}_{k_h}} = \gamma \tag{2.31}$$

---

[28] Para uma análise mais detalhada, das características do "steady state", pode consultar-se entre outros King, Plosser e Rebelo (1988), Mulligan e Sala-i-Martin (1993) Caballé e Santos (1993) e Brito e Pereira (1998).

O modelo em estudo, apresenta uma taxa de crescimento positiva. Para nós procedermos ao estudo da dinâmica comparativa local do modelo (à análise da dinâmica de ajustamento das variáveis endógenas, para o seu estado de equilíbrio) é necessário que no modelo as variáveis não cresçam, na proximidade do estado de equilíbrio. Para tal é necessário modificar o nosso problema, de forma a que as variáveis C, K, Y_h. Y, H e G tenham uma taxa de crescimento de equilíbrio nulo; isto é, um modelo em que as variáveis não tenham tendência de longo prazo (*trend*) o que exige a normalização destas variáveis[29].

A metodologia utilizada para o estudo da dinâmica local do modelo não pode ser utilizada nos modelos de crescimento endógeno. Já que a metodologia usada, o cálculo de trajectórias de equilíbrio, com base nos vectores próprios correspondentes aos valores próprios negativos, associados à matriz Jacobiana, só é válida para os modelos em que, no estado de equilíbrio, as variáveis endógenas tenham crescimento nulo.

Uma vez que já verificámos, serem as taxas de crescimento de equilíbrio, γ, constantes e iguais para todos os agregados, mas diferentes de zero, de forma que:

$$\frac{\dot{\overline{K}}}{\overline{K}} = \frac{\dot{\overline{H}}}{\overline{H}} = \frac{\dot{\overline{G}}}{\overline{G}} = \frac{\dot{\overline{Y}}}{\overline{Y}} = \frac{\dot{\overline{Y}}_h}{\overline{Y}_h} = \frac{\dot{\overline{C}}}{\overline{C}} = \frac{\dot{\overline{P}}_h}{\overline{P}_h} = \frac{\dot{\overline{P}}_{k_h}}{\overline{P}_{k_h}} = \gamma \tag{2.31}$$

Estas variáveis podem ser transformadas, por um processo de normalização, em variáveis de crescimento nulo no equilíbrio, de tal forma a que as novas variáveis, k, h, g, y, y_h e c, p_h, p_{kh}, cresçam a taxas nulas. O crescimento destas deverá permitir que as novas variáveis tenham as mesmas propriedades encontradas nos modelos de cariz neoclássico, modelos de crescimento nulo.

O sistema dinâmico com variáveis sem tendência, obtido após o processo de normalização, será dado por:

$$\dot{p}_{k_h} = \left[\left[\rho + \theta.\gamma\right] - r\right].p_{k_h} \tag{2.32}$$

$$\dot{p}_h = (r-\gamma).p_h - \aleph_h \Leftrightarrow \dot{p}_h = \left(r - A_h.\left((1-u).h\right)^{\theta_2}.\frac{\theta_2}{h}.g^{(1-\theta_2)}\right)p_h - (1-\tau).y.\frac{(1-\alpha)}{h} \tag{2.33}$$

$$\dot{k} = \left[y(1-\tau) - c - (\gamma+\delta_k).k\right] \tag{2.34}$$

[29] A normalização do modelo será realizada em anexo.

$$\dot{h} = A_h . \left[(1-u).h \right]^{\theta_2} . g^{1-\theta_2} - \gamma.h \tag{2.35}$$

Nestas equações, r e c, representam, respectivamente, a taxa de juro de mercado e o nível de consumo (apresentadas atrás pelas equações (2.19) e (2.6)). O nível de produto de bens físico, e de capital humano, com variáveis normalizadas é dado por:

$$y = A_K . \left[k^{\alpha} . (u.h)^{1-\alpha} \right]^{\theta_1} . (v.g)^{1-\theta_1} \tag{2.36}$$

e

$$y_h = A_h \left[(1-u)h \right]^{\theta_2} \left[(1-v)g \right]^{1-\theta_2} \tag{2.37}$$

A taxa de crescimento de longo prazo (γ) na trajectória de crescimento equilibrado, é definida por:

$$\gamma = \frac{r - \rho}{\theta} \tag{2.38}$$

esta característica (2.38) é semelhante a todos os modelos de crescimento endógeno do tipo Uzawa-Lucas em que se considera a existência de externalidades[30].

Nas secções seguintes iremos analisar o estudo da dinâmica local do modelo, com base nas equações (2.32) a (2.35), depois de transformadas, de acordo com as hipóteses assumidas por cada uma das versões do modelo.

Para este estudo seguiremos de perto Brito (1997), Gomes (1996-b), Brito e Pereira (1998) e Belbute(1998), cuja análise se baseia no uso do Jacobiano J resultante da linearização em torno do estado estacionário do sistema dinâmico de dimensão 4 constituído pelas equações diferenciais (2.32) a (2.35)[31].

O cálculo do Jacobiano **J**, conclui-se que o ponto de equilíbrio de longo prazo da nossa economia é localmente estável—designado por um ponto sela. Este é um ponto para o qual tende o nosso sistema desde que o ponto de partida seja um ponto situado sobre o "braço estável".

Verifica-se neste modelo de crescimento endógeno de tipo Uzawa-Lucas, que o determinante da matriz é nulo e a dinâmica do sistema é dada pelo valores próprios da

---

[30] As restantes variáveis do modelo, na situação de "steady state", serão determinadas, nas secções seguintes para cada uma das versões do modelo.

[31] Refire-se mais uma vez que na situação de "steady state" do nosso modelo, as variáveis depois de normalizadas, devem evidenciar uma taxa de crescimento de longo prazo nula.

matriz **J**: Estes têm um valor nulo, um negativo e dois positivos. Esta situação corresponde uma situação de bifurcação local, em que o braço estável é unidimensional e a trajectória de equilíbrio é uma recta. O sistema deve evidenciar, como a generalidade dos modelos de crescimento endógeno considerados na literatura, um equilíbrio ponto sela, com uma trajectória estável de dimensão unitária,.

3. MODELO COM USO DE CAPITAL PÚBLICO EXCLUSIVAMENTE NO SECTOR EDUCATIVO

3.1. CARACTERIZAÇÃO DO MODELO

Esta versão do modelo, corresponde ao caso limite, na qual, o capital público é aplicado exclusivamente no sector educativo. A influência do Estado na economia está limitada, à criação de condições que permitam aumentar o capital humano, o qual tem um papel decisivo no sector produtivo. A influência do Estado no sector produtivo é realizada indirectamente; via capital humano. Os gastos públicos devem ser aplicados no sector educativo, dos quais se destacam os gastos aplicados na formação de professores e funcionários auxiliares; em escolas, equipamentos informáticos, livros, formação profissional e centros tecnológicos, entre outros. Estamos a admitir, que as despesas com a educação são realizadas fundamentalmente pelo Estado.

Neste modelo, por simplicidade, iremos admitir que o capital físico não se deprecia, a sua taxa de depreciação é nula, $\delta_k=0$.

Para a situação em que $v=0$, na qual o capital público é aplicado exclusivamente no sector educativo, as alterações em relação ao modelo original são feitas nas funções de produção, estas assumem a seguinte forma funcional:

$$y = A_k.\left[k^{\alpha}.(u.h)^{1-\alpha}\right] \tag{3.1}$$

$$y_h = A_h\left[(1-u)h\right]^{\theta_2}\left[g\right]^{1-\theta_2} \tag{3.2}$$

O Hamiltoniano corrente, do nosso primeiro problema das empresas, terá a seguinte forma funcional, após o processo de normalização, isto é, o modelo sem tendência de longo prazo, com variáveis normalizadas:

$$\aleph = A_K.(k)^{\alpha}.(u.h)^{1-\alpha}(1-\tau) - i + p_{k_f}.(i-\gamma.k) + p_h.\left[A_h.\left[(1-u).h\right]^{\theta_2}.g^{1-\theta_2} - \gamma.h\right] \tag{3.3}$$

Aplicando o princípio de Pontryagin, obtemos as condições de primeira ordem ou condições necessárias de óptimo do problema das quais temos:

$$\aleph_u = 0 \Leftrightarrow A_k.k^{\alpha}.(u.h)^{(1-\alpha)}.\frac{(1-\alpha)}{u}.(1-\tau) = A_h.g^{(1-\theta_2)}.\left((1-u).h\right)^{\theta_2}.\frac{\theta_2}{(1-u)}.p_h \tag{3.4}$$

$$\dot{k}_f = i - \gamma.k \tag{3.5}$$

$$\dot{h} = A_h.\left[(1-u).h\right]^{\theta_2}.g^{1-\theta_2} - \gamma.h \tag{3.6}$$

$$\dot{p}_{k_f} = r\left(p_{k_f} - 1\right) = 0,\ \forall t \tag{3.7}$$

$$\dot{p}_h = (r-\gamma).p_h - \aleph_h \Leftrightarrow \dot{p}_h = \left(r - A_h.\left((1-u).h\right)^{\theta_2}.\frac{\theta_2}{h}.g^{(1-\theta_2)}\right)p_h - (1-\tau).A_k.k^{\alpha}.(u\,h)^{(1-\alpha)}.\frac{(1-\alpha)}{h} \tag{3.8}$$

Como não existem custos de ajustamento, o preço dual do capital, para as empresas é constante:

$$p_{K_f} = 1 \tag{3.9}$$

3.2. EQUILÍBRIO GERAL

Estamos em condições de apresentar, desde já, o sistema de equações diferenciais que garante o equilíbrio, para os três agentes económicos da nossa economia simplificada, as famílias, as empresas e o Governo. O sistema que vamos estudar é constituído pelas seguintes equações:

$$\aleph_c = 0 \Leftrightarrow c^{-\theta} - p_{k_h} = 0 \Leftrightarrow \hat{c} = p_{k_h}^{-\frac{1}{\theta}} \tag{3.10}$$

$$\aleph_u = 0 \Leftrightarrow A_k.k^{\alpha}.(u.h)^{(1-\alpha)}.\frac{(1-\alpha)}{u}.(1-\tau) = A_h.g^{(1-\theta_2)}.\left((1-u).h\right)^{\theta_2}.\frac{\theta_2}{(1-u)}.p_h \tag{3.4}$$

$$\dot{p}_{k_h} = \left[\left[\rho + \theta.\gamma\right] - r\right].p_{k_h} \tag{3.11}$$

$$\dot{p}_h = (r-\gamma).p_h - \aleph_h \Leftrightarrow \dot{p}_h = \left(r - A_h.\left((1-u).h\right)^{\theta_2}.\frac{\theta_2}{h}.g^{(1-\theta_2)}\right)p_h - (1-\tau).A_k.k^{\alpha}.(u\,h)^{(1-\alpha)}.\frac{(1-\alpha)}{h} \tag{3.8}$$

$$\dot{k} = \left[A_k.\left[k^{\alpha}.(u.h)^{(1-\alpha)}\right]^{\theta_1}.g^{(1-\theta_1)}.(1-\tau) - c - \gamma.k\right] \tag{3.12}$$

$$\dot{h} = A_h.\left[(1-u).h\right]^{\theta_2}.g^{1-\theta_2} - \gamma.h \tag{3.6}$$

onde c, representa o nível de consumo das nossas famílias, o qual foi obtido a partir da equação (2.6). A equação (3.11) é obtida a partir da equação (2.32). A taxa de juro de mercado, r , é igual à produtividade marginal do capital no sector produtivo, líquido de impostos, uma vez que estamos a admitir que o capital físico não se deprecia e a produtividade marginal do capital não necessita de remunerar essa depreciação. A taxa de juro de mercado é dada por:

$$r = (1-\tau).A_k.k^{\alpha}.(u\,h)^{(1-\alpha)}.\frac{\alpha}{k} \tag{3.13}$$

Os gastos públicos, a aplicar no sector educativo, representam uma percentagem do produto do sector produtivo, uma vez que os gastos públicos são financiados por uma taxa de imposto sobre o rendimento, com o orçamento equilibrado a cada momento do tempo. O nível de gastos públicos a aplicar na educação é de:

$$g = \tau . y = \tau . A_k . k^{\alpha} . (u.h)^{(1-\alpha)} \tag{3.14}$$

o que permite obter a nova restrição do capital humano. Esta é obtida, como no modelo desenvolvido por Glomm e Ravikumar (1997), substituindo (3.14) em (3.6), obtendo-se assim a nova restrição do capital humano, dada por:

$$\dot{h} = A_h . \left[(1-u).h\right]^{\theta_2} . \left[\tau . A_k . k^{\alpha} . (u.h)^{(1-\alpha)}\right]^{1-\theta_2} - \gamma . h \tag{3.15}$$

A equação (3.10) indica, que as famílias valorizam a cada momento do tempo, o resultado da produção, nos seus possíveis usos, o consumo e o investimento. De igual modo, a equação (3.4) indica-nos que em cada momento do tempo, o capital humano deve ser valorizado nos seus usos possíveis: a produção de bens físicos e a produção de capital humano. As equações (3.12) e (3.15) representam as restrições de recursos respectivamente capital físico e capital humano. Finalmente as equações (3.11) e (3.8) dão-nos as taxas de crescimento dos preços sombra dos dois tipos de capital, o capital físico e o capital humano.

A taxa de crescimento de longo prazo, é definida por:

$$\gamma = \frac{r - \rho}{\theta} \tag{3.16}$$

em que a taxa de desconto do capital físico (*r*), ou taxa de juro de mercado, é obtida endógenamente no modelo, como havíamos referido anteriormente. Esta taxa de crescimento de longo prazo é semelhante, à encontrada, nos modelos do tipo Uzawa-Lucas.

As equações sobre as quais irá incidir o estudo da dinâmica comparativa local do nosso modelo, depois de transformadas, para permitir endogenizar no modelo, a variável que representa o nível de gastos públicos a aplicar na função de produção de capital humano, obtemos as equações diferenciais definidas por:

$$\dot{p}_{k_h} = \left\{\left[\rho + \theta . \gamma\right] - r\right\} . p_{k_h} \tag{3.11}$$

$$\dot{p}_h = \left(r - A_h . \left((1-u).h\right)^{\theta_2} . \frac{\theta_2}{h} . \left(\tau . A_k . k^{\alpha} . (u.h)^{(1-\alpha)}\right)^{(1-\theta_2)}\right) p_h - (1-\tau) . A_k . k^{\alpha} . (u.h)^{(1-\alpha)} . \frac{(1-\alpha)}{h} \tag{3.8}$$

$$\dot{k} = A_K.(k)^{\alpha}.(u.h)^{1-\alpha}(1-\tau) - c - \gamma.k \tag{3.12}$$

$$\dot{h} = A_h.\left[(1-u).h\right]^{\theta_2}.\left[\tau.A_k.k^{\alpha}.(u.h)^{(1-\alpha)}\right]^{1-\theta_2} - \gamma.h \tag{3.15}$$

É com base neste sistema de equações diferenciais, que irá incidir o estudo da dinâmica comparativa do modelo. Neste sistema canónico, as 4 equações diferenciais descrevem a evolução ao longo do tempo das duas variáveis de estado, o capital físico e o capital humano, assim como os respectivos preços sombra. É com base neste sistema, que podemos determinar os valores, das nossas variáveis endógenas, na situação de "steady state" , o que será realizado em seguida.

3.3. TRAJECTÓRIA DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO

Como fizemos anteriormente a normalização do nosso modelo, tal facto, permite assegurar, que na situação de "steady state", as variáveis endógenas do nosso modelo, crescem a taxas nulas, de forma que :

$$\dot{\bar{c}} = \dot{\bar{u}} = \dot{\bar{k}} = \dot{\bar{g}} = \dot{\bar{h}} = \dot{\bar{p}}_h = \dot{\bar{p}}_{k_h} = 0 \tag{3.17}$$

Ao impormos a condição (3.17), o sistema de equações canónicas do nosso modelo, ficamos com um conjunto de relações válidas no estado de equilíbrio:

$$\dot{k} = 0 \Rightarrow A_K.(\bar{k})^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{1-\alpha}(1-\tau) = \bar{c} + \gamma.\bar{k} \tag{3.18}$$

$$\dot{h} = 0 \Rightarrow A_h.\left[(1-\bar{u}).\bar{h}\right]^{\theta_2}.\left[\tau.A_k.\bar{k}^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{(1-\alpha)}\right]^{1-\theta_2} = \gamma.\bar{h} \tag{3.19}$$

$$\dot{p}_{k_h} = 0 \Rightarrow \left[\rho + \theta.\gamma\right] = \bar{r} \tag{3.20}$$

$$\dot{p}_h = 0 \Rightarrow \left(\bar{r} - A_h.\left((1-\bar{u}).\bar{h}\right)^{\theta_2}.\frac{\theta_2}{\bar{h}}.(\tau.A_k.\bar{k}^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{(1-\alpha)})^{(1-\theta_2)}\right)\bar{p}_h = (1-\tau).A_k.\bar{k}^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{(1-\alpha)}.\frac{(1-\alpha)}{\bar{h}} \tag{3.8}$$

Com base neste sistema e após algumas simplificações, podemos encontrar a relação entre as variáveis endógenas, em função de parâmetros exógenos. Como temos cinco variáveis endógenas e quatro equações, o nosso sistema é indeterminado, o que nos obriga a considerar uma variável predeterminada, por opção tomamos $\bar{h}$, como variável predeterminada e a assumir o valor unitário. Após algumas substituições, a resolução do sistema permite obter uma equação, que nos dá a taxa de crescimento de longo prazo em função de parâmetros exógenos ao modelo, nesta versão do modelo, a parcela do capital humano a afectar aos dois sectores de actividade, irá ser dada exógenamente, como forma de assumir o mesmo valor encontrado na versão do modelo, na qual o capital público é aplicado no sector produtivo:

$$\gamma = \left[\frac{A_h.(1-\bar{u})^{\theta_2 - 1}.\theta_2.\left(\tau.A_k.\bar{u}^{1-\alpha}\right)^{-\theta_2}}{(1-\tau).\alpha} \right]^{\frac{(1-\theta_2).\alpha}{\theta_2.\alpha-1}} .A_h.(1-\bar{u})^{\theta_2}.\left(\tau.A_k.\bar{u}^{1-\alpha}\right)^{1-\theta_2} \tag{3.21}$$

O nível de capital físico na situação de "steady state" é dado por:

$$\bar{k} = \left[\frac{\gamma}{A_h.(1-\bar{u})^{\theta_2}.\left(\tau.A_k.\bar{u}^{(1-\alpha)}\right)^{(1-\theta_2)}} \right]^{\frac{1}{(1-\theta_2).\alpha}} .\bar{h} \tag{3.22}$$

Os gastos públicos a aplicar na educação, correspondem a uma percentagem do produto de equilíbrio, dado que são financiados por uma taxa de imposto sobre o rendimento do sector Produtivo:

$$\bar{g} = \tau.\bar{y} = \tau.A_k.\bar{k}^{\alpha}.\left(\bar{u}.\bar{h}\right)^{(1-\alpha)} \tag{3.23}$$

A produtividade marginal do capital que corresponde à taxa de juro de mercado, uma vez que estamos a admitir que não existe depreciação do capital físico. A taxa de juro de mercado é dada por:

$$\bar{r} = (1-\tau).A_k.\bar{k}^{\alpha}.\left(\bar{u}.\bar{h}\right)^{(1-\alpha)}.\frac{\alpha}{\bar{k}} = A_h.\left[\frac{\tau.A_k.\bar{k}^{\alpha}.\left(\bar{u}.\bar{h}\right)^{(1-\alpha)}}{(1-\bar{u}).\bar{h}} \right]^{1-\theta_2} .\theta_2 \tag{3.24}$$

O produto de equilíbrio, do sector educativo, após termos endogenizado o valor dos gastos públicos a aplicar na educação, de forma a representarem uma parcela do produto do sector produtivo, fazendo uma substituição semelhante a Glomm e Ravikumar(1997), obtemos:

$$\bar{y}_h = A_h.\left[(1-\bar{u}).\bar{h}\right]^{\theta_2}.\left[\tau.A_k.\bar{k}^{\alpha}.\left(\bar{u}.\bar{h}\right)^{(1-\alpha)}\right]^{1-\theta_2} \tag{3.25}$$

Como o produto do sector produtor de bens físicos é dado por:

$$\bar{y} = A_K.\left(\bar{k}\right)^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{1-\alpha} \tag{3.26}$$

Após retirar impostos e descontar a tendência de longo prazo, obtemos o nível de consumo na situação de "steady state":

$$\bar{c} = A_K.\left(\bar{k}\right)^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{1-\alpha}(1-\tau)-\gamma.\bar{k} \tag{3.27}$$

finalmente, temos as expressões que nos dão os preços duais no estado estacionário, quer do capital humano, quer do capital físico:

$$\bar{p}_h = \frac{(1-\tau).A_k.\bar{k}^{\alpha}.\left(\bar{u}.\bar{h}\right)^{(1-\alpha)}.\frac{(1-\alpha)}{\bar{h}}}{\bar{r} - A_h.\left((1-\bar{u}).\bar{h}\right)^{\theta_2}.\frac{\theta_2}{\bar{h}}.(\tau.A_k.\bar{k}^{\alpha}.\left(\bar{u}.\bar{h}\right)^{(1-\alpha)})^{(1-\theta_2)}} \tag{3.28}$$

$$\bar{p}_{k_h} = \bar{c}^{-\theta} \tag{3.29}$$

O preço sombra do capital físico foi obtido a partir do nível de consumo, no estado estacionário, descontado pelo inverso da elasticidade de substituição intertemporal.

3.4. DINÂMICA ASSOCIADA AO MODELO

O objectivo desta secção é descrever o tipo de dinâmica associada ao nosso problema de controlo óptimo. Depois de devidamente normalizado, de forma a evidenciar uma tendência de longo prazo nula, permite-nos fazer a análise da dinâmica local do modelo, como nos modelos de cariz neoclássico. Para tal, vamos tomar por base os valores próprios associados ao sistema, este é linearizado na proximidade do ponto de equilíbrio.

Para proceder ao estudo da dinâmica local do modelo, na proximidade do estado de equilíbrio. Seguindo Brito(1997), Belbute(1998) e Gomes(1996-b), vamos tomar por base, o sistema canónico composto pelas equações diferenciais correspondentes à evolução temporal das duas variáveis de estado, respectivamente as equações (3.12) e (3.15) e das duas variáveis de controlo, os preços sombra das variáveis de estado, respectivamente as equações (3.8) e (3.11).

O primeiro passo a tomar, para o estudo da dinâmica local do modelo, passa pela linearização do sistema apresentado, na proximidade do estado de equilíbrio. Na linearização, vamos desde logo, separar as variáveis do nosso modelo em variáveis endógenas e em variáveis exógenas, para tal, vamos usar um sistema matricial com uma forma do tipo:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{k_h} \\ \dot{p}_h \\ \hdashline \dot{k} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = J. \begin{bmatrix} p_{k_h} - \overline{p}_{k_h} \\ p_h - \overline{p}_h \\ \hdashline k - \overline{k} \\ h - \overline{h} \end{bmatrix} + \Phi. \begin{bmatrix} dA_k \\ dA_h \\ d\tau \\ d\rho \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

Em que a matriz $J = \left[j_{j_1,j_2}\right]$, com j_1=1..4 e j_2=1..4, é o Jacobiano do sistema, e a matriz $\Phi = \left[\wp_{f_1,f_2}\right]$, com f_1=1..4 e f_2=1..4, é a matriz dos coeficientes das variáveis exógenas. Os vectores apresentados surgem com uma partição de forma de separar as variáveis, em variáveis de controlo e em variáveis de estado.

Para proceder ao cálculo do Jacobiano da matriz J, esta resulta da linearização em torno do estado estacionário do sistema diferencial de dimensão 4, como foi referido anteriormente. De seguida, como se pretende fazer a analise da estabilidade local, na proximidade do estado de equilíbrio, simplifica-se a matriz tendo em conta as diversas relações que se estabelecem na proximidade do estado de equilíbrio.

O Jacobiano **J**, que resulta da linearização em torno do estado estacionário do sistema dinâmico de dimensão 4, é dado por:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (1-\tau).\overline{y}.\frac{(1-\alpha)}{\overline{k}}.\alpha.\overline{p}_k & -(1-\tau).\overline{y}.\frac{(1-\alpha)}{\overline{k}}.\frac{\alpha}{\overline{h}}.\overline{p}_k \\ 0 & (1-\tau).\overline{y}.\frac{\alpha}{\overline{k}} - \overline{y}_h.\frac{\theta_2}{\overline{h}} & \frac{\partial\overline{p}_h}{\partial\overline{k}} & \frac{\partial\overline{p}_h}{\partial\overline{h}} \\ \frac{\overline{p}_k^{\left(\frac{-1-\theta}{\theta}\right)}}{\theta} & 0 & (1-\tau).\overline{y}.\frac{\alpha}{\overline{k}} - \gamma & (1-\tau).\overline{y}.\frac{(1-\alpha)}{\overline{h}} \\ 0 & 0 & \overline{y}_h.\frac{\theta_2}{\overline{h}} + \overline{y}_h.\frac{(1-\theta_2).(1-\alpha)}{\overline{h}} & \overline{y}_h.\frac{(1-\theta_2).\alpha}{\overline{h}} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

onde

$$\frac{\partial\overline{p}_h}{\partial\overline{k}} = \left[(1-\tau).\overline{y}.\alpha.\frac{\alpha-1}{\overline{k}} - y_h.\frac{\theta_2.\alpha}{\overline{k}}.(1-\theta_2)\right].\overline{p}_h - (1-\tau).\overline{y}.\frac{\alpha}{\overline{k}}.\frac{1-\alpha}{\overline{h}}$$

e

$$\frac{\partial\overline{p}_h}{\partial\overline{h}} = \left[(1-\tau).\overline{y}.\frac{\alpha}{\overline{h}}.\frac{1-\alpha}{\overline{k}} - y_h.\left[\frac{\theta_2^2}{\overline{h}^2} +.\frac{(1-\theta_2).\theta_2.(1-\alpha)}{\overline{h}^2} - \frac{\theta_2}{\overline{h}^2}\right]\right].\overline{p}_h - \alpha.(1-\tau).\overline{y}.\frac{1-\alpha}{\overline{h}^2}$$

Seguidamente, para determinar os valores próprios da matriz J, é necessário calcular previamente o respectivo traço e determinante[32]. O estudo da estabilidade local do modelo, envolve cálculos muito volumosos, pelo que iremos trabalhar com valores concretos para os diversos parâmetros.

O facto de se efectuar o estudo de dinâmica comparativa local por simulação numérica, apesar de se perder algum grau de generalidade nas conclusões a retirar, esta simulação numérica possibilita maior clareza nos resultados a obter, por esta razão vamos seguir este método.

A dinâmica local do sistema na proximidade do "steady state", é determinada pelos sinais dos valores próprios dessa matriz[33]. Em modelos de crescimento endógeno, modelos do tipo Uzawa-Lucas, em que pelo menos um dos valores próprios é nulo, o equilíbrio do modelo reflecte uma situação de bifurcação local e o nosso modelo deve apresentar características semelhantes.

Para realizar esta simulação, é necessário designar os valores a atribuir aos parâmetros do modelo. Vamos seguir de perto Caballé e Santos (1993). Estes autores consideram uma economia, próxima da evidencia empírica, onde os níveis de tecnologia no sector produtivo e no sector educativo são respectivamente $A_K=1$ e $A_h=0{,}05$, mas como o nosso modelo tem algumas simplificações, como a inexistência de taxa de depreciação do capital físico e taxa de crescimento da população nula , vamos optar por considerar $A_K=1{,}5$ e $A_h=0{,}10$, níveis de tecnologia um pouco superiores. Para a taxa de desconto da utilidade do consumo, vamos assumir o mesmo valor que esses autores: $\rho = 0{,}05$. Optámos por considerar, que a população se mantém estável, isto é, a taxa de

[32] O traço do jacobiano, nos problemas de controle óptimo descontado, de horizonte infinito e com duas restrições de recursos, corresponde ao dobro do factor de desconto.

[33] O cálculo dos valores próprios da matriz Jacobiana, pode ser realizado com recurso à técnica apresentada em Brito(1995), segundo a qual os quatro valores próprios, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, são obtidos pela seguinte fórmula: $\lambda_i = \frac{Tr(J)}{4} \pm \left\{ \left[\frac{Tr(J)}{4}\right]^2 - \frac{Z}{2} \pm \left[\left(\frac{Z}{2}\right)^2 - |J|\right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$

sendo $Z=M(2)-\rho^2$, onde M(2) representa o somatório de todos os menores principais de ordem (2) de J.

crescimento da população é nula. Iremos assumir, para o parâmetro que representa o inverso da elasticidade de substituição intertemporal da utilidade do consumo: $\theta = 2$[34].

O valor do *share* do capital público, para a produção do sector educativo, que consideramos, tem o valor de $(1-\theta_2) = 0{,}25$, valor que deverá ser igual à taxa de imposto $\tau = 0{,}25$. A igualdade entre o *share* do capital público e da taxa de imposto, corresponde à natural condição de eficiência, a qual maximiza a utilidade e a taxa de crescimento de equilíbrio da economia. Como é demonstrado em Barro e Sala-i-Martin(1995) e em Glomm e Ravikumar (1997). O correspondente *share* do capital humano no sector educativo será $\theta_2 = 0{,}75$. Para o sector produtivo, optámos por um *share* do capital físico de $\alpha = 0{,}3$, como a generalidade dos autores.

A fim de realizar o estudo da dinâmica comparativa local, na proximidade do "steady state" é necessário, utilizar os valores admitidos, para o conjunto de parâmetros do modelo, com o objectivo de determinar os valores de equilíbrio das variáveis endógenas. Seguidamente calcular o Jacobiano **J**, com os valores concretos do nosso modelo. Por fim, calcular os valores próprios. A partir da matriz dos vectores próprios, obtêm-se as inclinações das trajectórias de equilíbrio entre as diferentes variáveis endógenas.

Para a resolução do sistema, como temos mais variáveis endógenas do que equações, necessitamos de atribuir um valor arbitrário à variável $\overline{h} = 1$. Como forma de podermos comparar os modelos, o capital humano a aplicar nos dois sectores terá a mesma percentagem em ambos os modelos ($\overline{u} = 0{,}75$). Este valor foi encontrado na versão do modelo, em que o capital público foi aplicado no sector educativo. Da resolução do modelo, encontramos uma taxa de crescimento de longo prazo dos diversos agregados económicos de:

$$\gamma = 0{,}026$$

Os valores encontrados para o capital físico, capital público e consumo, no estado estacionário do modelo, são respectivamente:

$$\overline{k} = 0{,}8406$$

$$\overline{g} = 0{,}2910$$

$$\overline{c} = 0{,}5602$$

[34] Caballé e Santos (1993) , consideram que θ=1,5 .

como encontrámos os valores das variáveis endógenas, é possível determinar os valores de equilíbrio, para o produto e para os preços sombra.

Os valores de equilíbrio, são determinados a partir do conjunto de variáveis normalizadas que encontrámos anteriormente, de tal forma que:

$$\bar{y} = 1{,}1641$$

$$\overline{P}_k = 3{,}1860$$

$$\bar{y}_h = 0{,}0260$$

$$\overline{P}_h = 2{,}0920$$

Substituindo os valores encontrados em (3.31), obtemos a matriz Jacobiana com os valores concretos do nosso modelo:

$$J=\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 0{,}8268 & -0{,}6950 \\ 0 & 0{,}2921 & -0{,}7756 & -0{,}5796 \\ \hdashline 0{,}0879 & 0 & 0{,}2856 & 0{,}6112 \\ 0 & 0 & 0{,}0023 & -0{,}0019 \end{array}\right]$$

O determinante da matriz **J** é nulo, o que seria de esperar num modelo com características de crescimento endógeno. A partir da matriz Jacobiana, obtemos os valores próprios do nosso modelo, que são determinados numericamente e têm os seguintes valores:

$$\lambda_1 = 0{,}2921$$

$$\lambda_2 = 0{,}4497$$

$$\lambda_3 = -0{,}166$$

$$\lambda_4 = 0$$

Confirma-se a existência de apenas um valor próprio negativo, um nulo e dois positivos, o que corresponde a uma situação de bifurcação local, na qual, o braço estável é unidimensional e a trajectória de equilíbrio é uma recta. O sistema define um equilíbrio ponto sela, com a trajectória estável de dimensão unitária. Característica comum, a qualquer modelo de crescimento endógeno.

A cada valor próprio está associado um vector próprio e para a sua determinação tem de se resolver o sistema:

$$\left[J - \lambda_i . I\right] P_i = \overline{0} \qquad (3.32)$$

com $i = 1,\ldots,4$, I uma matriz identidade, $\overline{0}$ é um vector nulo e $P_i = \left[P_{1i}\, P_{2i}\, P_{3i}\, P_{4i}\right]$ é o vector próprio associado ao valor próprio λ_i. Pela resolução do sistema resulta a seguinte matriz: $P = \left[P_{ij}\right]$. É com base nesta matriz que se determina a forma como as variáveis endógenas evoluem para o equilíbrio de longo prazo. Resolvendo o sistema, obtemos a seguinte matriz ***P*** :

$$P = \left[P_{ij}\right] = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0{,}3413 & 0{,}9326 & -0{,}9099 \\ 1 & -0{,}9213 & -0{,}3100 & 0{,}3962 \\ \hdashline 0 & 0{,}1865 & -0{,}1851 & 0{,}0790 \\ 0 & 0{,}0010 & 0{,}0026 & 0{,}0940 \end{array}\right]$$

Em situações de crescimento endógeno, a trajectória de equilíbrio é unidimensional, como tal existe apenas um valor próprio negativo. O vector próprio associado a esse valor próprio, é dado por $P_3 = \left[P_{13} \quad P_{23} \quad P_{33} \quad P_{43}\right]^T$. É com base no vector $\boldsymbol{P_3}$, que vamos determinar as inclinações das diversas trajectórias estáveis entre cada par de variáveis endógenas do modelo. Para determinar a trajectória estável do modelo unidimensional, temos de supor que uma das variáveis endógenas é predeterminada. Como considera Gomes(1996-b), vamos assumir como variável predeterminada, a variável de estado capital humano. É esta variável que se ajusta gradualmente ao longo do tempo.

Ao admitirmos o capital humano, como variável predeterminada do modelo, as inclinações das trajectórias de equilíbrio, entre esta e as restantes variáveis endógenas, são dadas por :

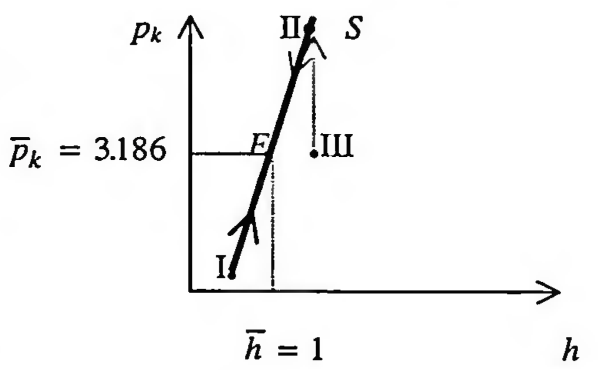
$$\begin{bmatrix} i_{hp_k} \\ i_{hp_h} \\ i_{hk} \end{bmatrix} = \frac{1}{P_{43}} \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{bmatrix}. \tag{3.33}$$

Sendo i_{hp_k}, a inclinação da trajectória estável entre as variáveis capital humano e o preço sombra do capital físico; sendo i_{hp_h}, a inclinação da trajectória estável entre as variáveis capital humano e o respectivo preço sombra e por fim i_{hk}, representa a inclinação da trajectória estável entre as variáveis capital humano e capital físico. Estas trajectórias são dadas por:

$$i_{hp_k} = 356{,}8371 \Rightarrow \dot{p}_k = 356{,}8371.\dot{h}$$
$$i_{hp_h} = -118{,}6067 \Rightarrow \dot{p}_h = -118{,}6067.\dot{h}$$
$$i_{hk} = -70{,}8132 \Rightarrow \dot{k} = -70{,}8132.\dot{h}$$

É com base nestes valores, que representam os declives encontrados para as separatrizes estáveis, que vamos representar as inclinações da trajectória sela. No que diz respeito às relações entre as variáveis capital humano e o preço sombra do capital fixo; entre as variáveis capital humano e o preço sombra do capital humano e entre os dois tipos de capital (o capital humano e o capital fixo). Essas relações estão representadas respectivamente na figura 1, na figura 2 e na figura 3.

FIGURA 1-Trajectória estável entre as variáveis h e p_k



Como se pode observar pela Figura 1, existe uma relação positiva entre o capital humano e o preço sombra do capital físico. Ambas as variáveis , na convergência para o estado de equilíbrio, crescem de forma qualitativamente semelhante.

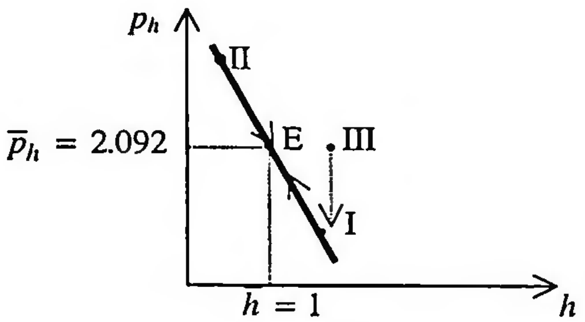
A figura 1, representa a trajectória estável (S) entre as variáveis (h) e (p_k). Esta trajectória estável, tem um declive de 356,8371. O ponto E representa o ponto de equilíbrio, para o qual tende a nossa economia.

Se o ponto de partida da nossa economia, não estiver no estado de equilíbrio, e situar-se no ponto I, o aumento da acumulação de capital humano é acompanhado por uma subida no preço dual do capital humano, isto é, quanto mais se investe neste tipo de capital, mais elevado será o preço do capital físico. Em termos quantitativos, se investirmos uma unidade em capital humano, o preço do capital físico aumenta 356 vezes.

Se o ponto inicial da nossa economia for o ponto II verifica-se o efeito oposto, assiste-se a um processo de desinvestimento do capital humano, acompanhado por uma descida nos preços sombra do capital físico.

Finalmente, se o ponto de partida desta economia for o ponto III, este é um ponto, no qual, a economia se encontra afastada da trajectória de equilíbrio, o que não se verifica nos pontos I e II que pertencem à trajectória estável e neste caso, a variável (p_k), é transposta automáticamente para a trajectória de equilíbrio, sem se alterar o valor da variável predeterminada (h), até atingir a trajectória estável, comportando-se a economia como no caso II.

FIGURA 2-Trajectória estável entre as variáveis h e p_h



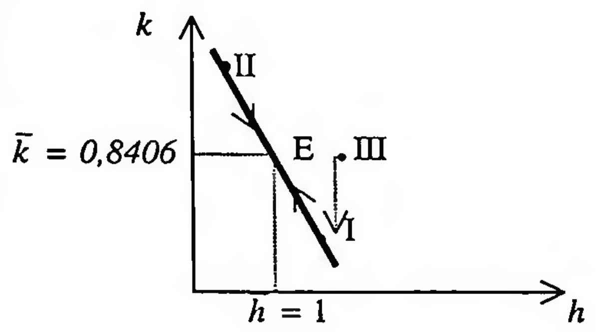
A Figura 2, representa a trajectória estável (S) entre as variáveis (h) e (p_h).Como se verifica, existe uma relação negativa, entre o capital humano e o preço sombra do capital humano. Estas na convergência para o equilíbrio, crescem de forma qualitativamente oposta. O ponto *E* representa o ponto de equilíbrio, para o qual tende a nossa economia. Esta trajectória estável (S) tem um declive de –118,6067.

Se a economia no ponto de partida não estiver no estado de equilíbrio, e situar-se no ponto I, a redução da acumulação de capital humano é acompanhada por uma subida no preço dual do capital humano e quanto menos se investe neste tipo de capital, mais elevado será seu o preço. Em termos quantitativos, se desinvestirmos uma unidade em capital humano o seu preço 118 vezes.

Se o ponto inicial da nossa economia for o ponto II, verifica-se o efeito oposto, assiste-se a um processo de investimento do capital humano acompanhado por uma descida nos preços sombra.

Finalmente, se o ponto de partida desta economia for o ponto III, ponto este afastado da trajectória de equilíbrio, neste caso a variável (p_h) é transposta automaticamente para a trajectória de equilíbrio sem se alterar o valor da variável predeterminada (*h*), até atingir a trajectória estável, comportando-se a economia como no caso I.

FIGURA 3-Trajectória estável entre as variáveis *h* e k



A Figura 3, representa a trajectória estável (S) entre o capital humano (*h*), e o capital físico (*k*). Como se pode observar, existe uma relação negativa entre o capital humano e o capital físico, convergência para o equilíbrio as variáveis crescem de forma qualitativamente oposta. O ponto *E* representa o ponto de equilíbrio para o qual tende a nossa economia. A trajectória estável (S) tem um declive de –70,8132.

Se a economia no ponto de partida não estiver no estado de equilíbrio, e situar-se no ponto I, a redução da acumulação de capital humano é acompanhada por um aumento da acumulação de capital físico, menos se investe no capital físico e mais se investe em capital humano; a redução da quantidade de capital humano a usar no processo produtivo é acompanhada por um aumento da quantidade de capital físico a usar neste processo. Em termos quantitativos, se desinvestirmos uma unidade de capital humano, temos de aumentar 70 vezes a quantidade de capital físico.

Se o ponto inicial da nossa economia for o ponto II verifica-se o efeito oposto, assistindo-se a um processo de investimento do capital humano acompanhado por um desinvestimento em capital físico.

Finalmente, se o ponto de partida desta economia for o ponto III, neste ponto a economia encontra-se afastada da trajectória de equilíbrio e a variável capital físico é transposta automaticamente para a trajectória de equilíbrio, sem se alterar o valor da variável predeterminada (*h*), até atingir a trajectória estável, comportando-se a economia como no caso I.

4. MODELO COM USO DE CAPITAL PÚBLICO EXCLUSIVAMENTE NO SECTOR PRODUTIVO

4.1. CARACTERIZAÇÃO DO MODELO

Para a situação em que $v=1$, situação na qual, o capital público é aplicado exclusivamente no sector produtivo, deixando de contribuir para a formação de capital humano; estamos a assumir que os gastos públicos, são factores produtivos, do sector produtor de bens transaccionáveis.

Os gastos públicos, nesta versão do modelo, contribuem para o aumento da produtividade dos factores privados. Por outro lado, o sector educativo, tem como único factor produtivo o capital humano. Ao Estado cabe o papel de provisionar bens de capital público produtivos, tal como estradas, pontes, auto-estradas, saneamento básico, hospitais e a manutenção da lei e da ordem.

Com estas transformações, iremos ter novas funções de produção, assumindo-se a seguinte forma funcional:

$$y = A_k.\left[k^{\alpha}.(u.h)^{1-\alpha}\right]^{\theta_1}.\left(g\right)^{1-\theta_1} \tag{4.1}$$

$$y_h = A_h\left[(1-u)h\right] \tag{4.2}$$

A função de produção de capital humano neste modelo é uma função onde o único factor produtivo é o próprio capital humano. Esta é a função de produção de capital humano típica do modelo Uzawa(1965) e Lucas(1988)[35].

Nesta versão do modelo, como na versão anterior, por simplicidade, iremos admitir uma taxa de depreciação do capital físico nula ($\delta_k=0$).

Após o processo de normalização (com variáveis sem tendência de longo prazo), o Hamiltoniano corrente do nosso problema das empresas, terá a seguinte forma funcional:

$$\aleph = A_K.\left[(k)^{\alpha}.(u.h)^{1-\alpha}\right]^{\theta_1}.g^{1-\theta_1}.(1-\tau)-i+p_{k_f}.(i-\gamma.k)+p_h.\left[A_h\left[(1-u).h\right]-\gamma.h\right] \tag{4.3}$$

[35] Para a caracterização mais completa do modelo consulte-se Barro e Sala-i-Martin (1995).

Aplicando o princípio de Pontryagin, obtemos condições necessárias de óptimo, ou seja, as condições de primeira ordem, das quais temos:

$$\aleph_u = 0 \Leftrightarrow A_k\left[k^{\alpha}.h^{1-\alpha}\right]^{\theta_1}.g^{1-\theta_1}.(1-\alpha)\theta_1.u^{(1-\alpha)\theta_1-1}.(1-\tau) = P_h.A_h.h \quad (4.4)$$

$$\dot{k}_f = i - \gamma.k \quad (4.5)$$

$$\dot{h} = A_h.\left[(1-u).h\right] - \gamma.h \quad (4.6)$$

$$\dot{p}_{K_f} = r\left(p_{K_f} - 1\right) = 0,\ \forall t \quad (4.7)$$

$$\dot{p}_h = (r - \gamma).p_h - \aleph_h \Leftrightarrow \dot{p}_h = \left[r - A_h.(1-u)\right].P_h - y.\frac{\theta_1.(1-\alpha)}{h} \quad (4.8)$$

Como não existem custos de ajustamento, o preço dual do capital, para as empresas é uma constante e tem o valor unitário:

$$p_{K_f} = 1 \quad (4.9)$$

4.2. EQUILÍBRIO GERAL

Estamos agora, em condições de apresentar, o sistema de equações diferenciais que garante o equilíbrio, para os três agentes económicos da nossa economia simplificada, as famílias, as empresas e o governo. O sistema que vamos estudar é constituído pelas seguintes equações:

$$\aleph_c = 0 \Leftrightarrow c^{-\theta} - p_{k_h} = 0 \Leftrightarrow \hat{c} = p_{k_h}^{-\frac{1}{\theta}} \quad (4.10)$$

$$\aleph_u = 0 \Leftrightarrow A_k\left[k^{\alpha}.h^{1-\alpha}\right]^{\theta_1}.g^{1-\theta_1}.(1-\alpha)\theta_1.u^{(1-\alpha)\theta_1-1}.(1-\tau) = P_h.A_h.h \quad (4.4)$$

$$\dot{p}_{k_h} = \left[\left[\rho + \theta.\gamma\right] - r\right].p_{k_h} \quad (4.11)$$

$$\dot{p}_h = r.p_h - \aleph_h \Leftrightarrow \dot{p}_h = \left[r - A_h.(1-u)\right].P_h - A_k.\left[k^{\alpha}.(u.h)^{(1-\alpha)}\right]^{(1-\theta_1)}.g^{\theta_1}.(1-\tau).\frac{\theta_1.(1-\alpha)}{h} \quad (4.8)$$

$$\dot{k} = \left[A_k.\left[k^{\alpha}.(u.h)^{(1-\alpha)}\right]^{\theta_1}.g^{(1-\theta_1)}.(1-\tau) - c - \gamma.k\right] \quad (4.12)$$

$$\dot{h} = A_h.\left[(1-u).h\right] - \gamma.h \quad (4.6)$$

onde c representa o nível de consumo das famílias, tendo sido obtido o partir da equação (2.6). A equação (4.11) é obtida a partir da equação (2.32). A taxa de juro de mercado *(r)* é igual à produtividade marginal do capital no sector produtivo, uma vez que estamos a admitir por hipótese que o capital físico não se deprecia[36]. A produtividade marginal do capital no sector produtivo é dada pela equação:

$$r = A_k.\left[k^{\alpha}.(u.h)^{(1-\alpha)}\right]^{\theta_1}.g^{(1-\theta_1)}.(1-\tau).\frac{\theta_1.\alpha}{k} \tag{4.13}$$

Os gastos públicos, em infraestruturas, a aplicar no sector produtivo, representam uma percentagem do produto desse mesmo sector de actividade, correspondendo essa percentagem à taxa de imposto sobre o rendimento. Os gastos públicos são financiados por uma taxa de imposto sobre o rendimento, encontrando-se o orçamento equilibrado em cada momento do tempo. O nível de gastos públicos a aplicar em infraestruturas é:

$$g = \tau.y \tag{4.14}$$

Substituindo (4.14) em (4.1) e simplificando, obtemos o nível de investimento público a aplicar no sector produtivo, em função do capital físico e humano[37], obtendo-se desta forma:

$$g = \left[\tau.A_k\right]^{\frac{1}{\theta_1}}.k^{\alpha}.(u.h)^{1-\alpha} \tag{4.15}$$

substituindo (4.15) na nossa função de produção obtemos, o nível de produto em função do capital físico e humano e após algumas simplificações:

$$y = A_k.\left[\tau.A_k\right]^{\frac{1-\theta_1}{\theta_1}}.k^{\alpha}.(u.h)^{1-\alpha} \tag{4.16}$$

O que permite obter a nova restrição do capital físico, substituindo (4.16) em (4.12)[38], que é dada por:

$$\dot{k} = A_k.\left[\tau.A_k\right]^{\frac{1-\theta_1}{\theta_1}}.k^{\alpha}.(u.h)^{1-\alpha}.(1-\tau) - c - \gamma.k \tag{4.17}$$

A equação (4.10) indica, que as famílias valorizam em cada momento do tempo, o resultado da produção, aplicado em consumo e em investimento. De igual modo, a equação (4.4) indica-nos que em cada momento do tempo, o capital humano deve ser

---

[36] Se a taxa de depreciação do capital físico fosse diferente de zero, a produtividade marginal do capital iria remunerar também essa depreciação.

[37] Uma simplificação semelhante pode ser encontrada em Barro e Sala-i-Martin (1995).

[38] Uma substituição semelhante é realizada em Barro e Sala-i-Martin (1995).

valorizado nos seus usos possíveis: a produção de bens físicos e a produção de capital humano. As equações (4.17) e (4.6) representam as restrições de recursos, respectivamente do capital físico e do capital humano. Finalmente as equações (4.11) e (4.8) dão-nos as taxas de crescimento dos preços sombra, dos dois tipos de capital (o capital físico e o capital humano).

De igual modo, a taxa de juro de longo prazo vem modificada e passa a ser dada por:

$$r = \xi.k^{\alpha}.(u.h)^{(1-\alpha)}.\frac{\theta_1.\alpha}{k} \tag{4.18}$$

A taxa de crescimento de longo prazo, é definida por:

$$\gamma = \frac{r-\rho}{\theta} \tag{4.19}$$

A taxa de desconto do capital físico (r), ou taxa de juro de mercado, é obtida endógenamente no modelo, como havíamos referido anteriormente, sendo esta taxa de crescimento de longo prazo semelhante à encontrada, nos modelos tipo Uzawa-Lucas.

Finalmente, obtemos as equações diferenciais, sobre as quais irá incidir o estudo da dinâmica comparativa local do modelo, eliminando a variável que representa o nível de gastos públicos. Estas são definidas por:

$$\dot{p}_{k_h} = \big[[\rho + \theta.\gamma] - r\big].p_{k_h} \tag{4.11}$$

$$\dot{p}_h = r.p_h - \aleph_h \Leftrightarrow \dot{p}_h = \big[r - A_h.(1-u)\big].P_h - \xi.k^{\alpha}.(u.h)^{(1-\alpha)}.\frac{\theta_1.(1-\alpha)}{h} \tag{4.8}$$

$$\dot{k} = A_k.\left[\tau.A_k\right]^{\frac{1-\theta_1}{\theta_1}}.k^{\alpha}.(u.h)^{1-\alpha}.(1-\tau) - c - \gamma.k \tag{4.17}$$

$$\dot{h} = A_h.\big[(1-u).h\big] - \gamma.h \tag{4.6}$$

onde, o parâmetro

$$\xi = A_k.\left[\tau.A_k\right]^{\frac{1-\theta_1}{\theta_1}}.(1-\tau) \tag{4.20}$$

é composto por variáveis exógenas ao modelo.

É com base no sistema de equações anterior, que ficamos com as equações sobre as quais, deve incidir o estudo da dinâmica comparativa local do modelo. Neste sistema canónico, as 4 equações diferenciais descrevem a evolução ao longo do tempo, das duas variáveis de estado, o capital físico e o capital humano e as respectivas variáveis de controlo, os preços sombra. É com base neste sistema, que iremos achar os valores que assumem as variáveis endógenas, na situação de "steady state" .

4.3. TRAJECTÓRIA DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO

Como o modelo é constituído por variáveis sem tendência, o que garante que na situação de "steady state", ou de crescimento equilibrado, as variáveis endógenas do modelo, cresçam a taxas nulas de tal forma que:

$$\dot{\bar{c}} = \dot{\bar{u}} = \dot{\bar{k}} = \dot{\bar{g}} = \dot{\bar{h}} = \dot{\bar{p}}_h = \dot{\bar{p}}_{k_h} = 0 \tag{4.21}$$

Ao impormos a condição (4.21), ao sistema de equações canónicas do modelo, ficamos com um conjunto de relações vàlidas no estado de equilíbrio:

$$\dot{p}_{k_h} = 0 \Rightarrow [\rho + \theta.\gamma] = \bar{r} \tag{4.11}$$

$$\dot{p}_h = 0 \Rightarrow [\bar{r} - A_h.(1-\bar{u})].\bar{P}_h = \xi.\bar{k}^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{(1-\alpha)}.\frac{\theta_1.(1-\alpha)}{\bar{h}} \tag{4.8}$$

$$\dot{k} = 0 \Rightarrow \xi.\bar{k}^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{1-\alpha} = \bar{c} + \gamma.\bar{k} \tag{4.17}$$

$$\dot{h} = 0 \Rightarrow A_h.[(1-\bar{u}).\bar{h}] = \gamma.\bar{h} \tag{4.6}$$

É com base neste sistema, após algumas simplificações, que podemos encontrar a relação entre as variáveis endógenas em função de parâmetros exógenos. Como temos cinco variáveis endógenas e quatro equações, o sistema é indeterminado e como tal, temos de considerar uma variável predeterminada, por opção $\bar{h}$ e que assume o valor unitário. Após algumas substituições obtemos o valor das variáveis endógenas do modelo no estado estacionário.

Após algumas simplificações, obtemos a taxa de juro de mercado, que é dada em função de parâmetros exógenos[39] :

$$\bar{r} = A_h \tag{4.21}$$

[39] A única diferença em relação à taxa de juro do modelo Uzawa-Lucas, apresentado por Barro e Sala-i-Martin(1995) , reside na consideração, por parte destes autores de uma taxa de depreciação do capital físico diferente de zero.

A taxa de crescimento da economia, é obtida em função de parâmetros exógenos, que é dada por:

$$\gamma = \frac{\bar{r} - \rho}{\theta} \tag{4.22}$$

A parcela do capital humano a aplicar no sector produtivo, é determinada em função de parâmetros exógenos:

$$\bar{u} = \frac{A_h - \gamma}{A_h} \tag{4.23}$$

Finalmente, obtemos, o capital físico, o nível de consumo, e os preços sombra do capital físico e humano, de equilíbrio no estado estacionário, dados por:

$$\bar{k} = \left[\frac{\rho + \theta.\gamma}{\xi.\bar{u}^{(1-\alpha)}.\theta_1.\alpha} \right]^{\frac{-1}{1-\alpha}}.\bar{h} \tag{4.24}$$

$$\bar{c} = \xi.\bar{k}^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{1-\alpha} - \gamma.\bar{k} \tag{4.25}$$

$$\bar{P}_h = \frac{\xi.\bar{k}^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{-\alpha}.\theta_1.(1-\alpha)}{A_h} \tag{4.26}$$

$$\bar{p}_{kh} = \bar{c}^{-\theta} \tag{4.27}$$

O preço sombra do capital físico, foi obtido, como na versão do modelo da secção anterior, a partir do nível de consumo, no estado estacionário, descontado pelo inverso da elasticidade de substituição intertemporal.

4.4. DINÂMICA ASSOCIADA AO MODELO

Tal como no modelo anterior, o objectivo desta secção é descrever o tipo de dinâmica associada ao problema de controlo óptimo, permitindo fazer a análise da dinâmica local do modelo.

Para proceder ao estudo da dinâmica local do modelo, na proximidade do estado de equilíbrio, vamos tomar por base, o sistema canónico composto pelas equações diferenciais. Estas correspondem à evolução temporal das duas variáveis de estado, respectivamente as equações (4.6) e (4.17) e das duas variáveis de controlo (os preços sombra das variáveis de estado) respectivamente as equações (4.8) e (4.11).

O primeiro passo a dar, para o estudo da dinâmica local do modelo, passa pela linearização do sistema apresentado, na proximidade do estado de equilíbrio, como fizemos para o modelo onde o capital público foi aplicado no sector educativo.

O Jacobiano **J**, que resulta da linearização, em torno do estado estacionário do sistema dinâmico de dimensão 4, é dado por:

$$J=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi\bar{k}^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{(1-\alpha)}\frac{(1-\alpha)}{\bar{k}^2}.\theta_1.\alpha\,\bar{p}_k & -\xi\bar{k}^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{(1-\alpha)}\frac{(1-\alpha)}{\bar{k}.\bar{h}}.\theta_1.\alpha \\ 0 & \xi\bar{k}^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{(1-\alpha)}\frac{\theta_1.\alpha}{\bar{k}}-A_h.(1-\bar{u}) & \frac{\partial\bar{p}_h}{\partial\bar{k}} & \frac{\partial\bar{p}_h}{\partial\bar{h}} \\ \frac{\bar{p}_k}{\theta}^{\left(\frac{-1-\theta}{\theta}\right)} & 0 & \xi\bar{k}^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{(1-\alpha)}.\frac{\alpha}{\bar{k}}-\gamma & \xi\bar{k}^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{(1-\alpha)}.\frac{(1-\alpha)}{\bar{h}} \\ 0 & 0 & 0 & A_h.(1-\bar{u})-\gamma \end{bmatrix}$$

(4.28)

onde

$$\frac{\partial\bar{p}_h}{\partial\bar{h}}=\left[\xi.\bar{k}^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{1-\alpha}\alpha.\theta_1.\frac{1-\alpha}{\bar{k}.\bar{h}}\right].\bar{p}_h+\xi.\bar{k}^{\alpha}.\bar{u}^{1-\alpha}.\bar{h}^{-\alpha}.\theta_1.\alpha.\frac{1-\alpha}{\bar{h}}$$

e

$$\frac{\partial\bar{p}_h}{\partial\bar{h}}=\left[-\xi.\bar{k}^{\alpha}.(\bar{u}.\bar{h})^{1-\alpha}\alpha.\theta_1.\frac{1-\alpha}{\bar{k}^2}\right].\bar{p}_h-\xi.\bar{k}^{\alpha}.\bar{u}^{1-\alpha}.\bar{h}^{-\alpha}.\theta_1.\frac{1-\alpha}{\bar{k}}$$

Em seguida, para determinar os valores próprios da matriz J, é necessário calcular, previamente o respectivo traço e determinante, como na versão anterior do modelo. O estudo da estabilidade local do modelo, envolve cálculos muito volumosos, pelo que, iremos trabalhar com valores concretos para os diversos parâmetros e vamos efectuar o estudo de dinâmica comparativa local do modelo por simulação numérica.

A dinâmica local do sistema na proximidade do "steady state", é determinada pelos sinais dos valores próprios da matriz. Tal como o modelo apresentado anteriormente, em que pelo menos um dos valores próprios é nulo, o equilíbrio do modelo reflecte uma situação de bifurcação local, devendo o modelo apresentar características semelhantes.

Para realizar esta simulação, vamos usar os mesmos valores a atribuir aos parâmetros do modelo, que usámos na versão do modelo, que usa o capital público exclusivamente no sector educativo. As alterações aos valores dos parâmetros do modelo, limitam-se a considerar que o *share* do capital humano, no sector educativo é unitário, uma vez que não aplicamos capital público neste sector de actividade. Optámos por considerar um valor para o *share* do capital público na a produção do sector produtivo, o valor de $(1-\theta_1) = 0{,}25$, valor que deverá ser igual à taxa de imposto $\tau = 0{,}25$.

A igualdade entre o *share* do capital público e da taxa de imposto corresponde à natural condição de eficiência, que maximiza a utilidade e a taxa de crescimento, como é demonstrado em Barro e Sala-i-Martin(1995) e em Glomm e Ravikumar(1997).

Para a resolução do sistema como temos mais variáveis endógenas que equações temos de atribuir um valor arbitrário à variável $\overline{h} = 1$. Da resolução do modelo, encontramos a taxa de crescimento de equilibrio dos diversos agregados económicos, de tal forma que:

$$\gamma = 0{,}025$$

A parcela de capital humano a aplicar no sector produtivo, dada endógenamente pelo modelo, representa 75% do capital humano:

$$\overline{u} = 0{,}75$$

Os valores encontrados para o capital fisico, capital público e consumo, no estado estacionário do modelo, são respectivamente:

$$\overline{k} = 1{,}7718$$

$$\overline{g} = 0{,}2625$$

$$\overline{c} = 0{,}7432$$

como encontrámos os valores de equilíbrio das variáveis endógenas, é possivel determinar os valores de equilibrio para o produto e para os preços sombra:

$$\overline{y} = 1{,}0499$$

$$P_k = 1{,}8106$$

$$y_h = 0{,}025$$

$$P_h = 5{,}5122$$

Substituindo os valores encontrados, em (4.28), obtemos a matriz Jacobiana com os valores concretos do nosso modelo:

$$J=\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 0{,}0715 & 0{,}1267 \\ 0 & 0{,}075 & -0{,}2878 & 0{,}5099 \\ \hdashline 0{,}2052 & 0 & 0{,}1083 & 0{,}5512 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O determinante da matriz **J** é nulo, como seria de esperar num modelo com características dos modelos de crescimento endógeno.

Os valores próprios são determinados numéricamente de tal forma que:

$\lambda_1 = 0{,}075$

$\lambda_2 = -0{,}0786$

$\lambda_3 = 0{,}1869$

$\lambda_4 = 0$

Estes valores confirmam a existência de apenas um valor próprio negativo, um nulo e dois positivos, pelo que, no estado estacionário, o modelo possui um equilibrio ponto-sela, com a trajectória estável de dimensão unitária. A que corresponde uma situação de bifurcação local, na qual, o braço estável é uni-dimensional e a trajectória de equilíbrio é uma recta. Esta caracteristica é comum aos modelos de crescimento endógeno tipo Uzawa-Lucas.

A cada valor próprio está associado um vector próprio e para a sua determinação tem que resolver-se o sistema: $\left[J - \lambda_i I\right]P_i = \overline{0}$, com $i = 1,\ldots,4$, I uma matriz identidade, $\overline{0}$ é um vector nulo e $P_i = \left[P_{1i}\, P_{2i}\, P_{3i}\, P_{4i}\right]$que é o vector próprio associado ao valor próprio λ_i.

Pela resolução do sistema resulta a seguinte matriz: $P = \left[P_{ij}\right]$ é com base nesta que se determina a forma, como as variáveis endógenas evoluem para o equilíbrio de longo prazo.

Resolvendo o sistema, obtemos a seguinte matriz $\boldsymbol{P}$:

$$P = \left[P_{ij}\right] = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & -0{,}3940 & -0{,}1374 & -0{,}1263 \\ 1 & 0{,}8109 & 0{,}9232 & -0{,}9811 \\ \hdashline 0 & 0{,}4327 & -0{,}3589 & -0{,}1278 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}0722 \end{array}\right]$$

Em situações de crescimento endógeno, a trajectória de equilibrio é uni-dimensional e assim existe apenas um valor próprio negativo. Só uma trajectória estável o é claramente. Sendo a trajectória estável do modelo uni-dimensional, temos de supor que uma das variáveis endógenas é prédeterminada. Admitindo que a variável capital humano é a variável prédeterminada do modelo, podemos calcular as inclinações das trajectórias de equilíbrio entre esta e as restantes variáveis endógenas. As inclinações das trajectórias de equilíibrio, são dadas por:

$$\begin{bmatrix} i_{hp_k} \\ i_{hp_h} \\ i_{hk} \end{bmatrix} = \frac{1}{P_{42}} \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ P_{32} \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Sendo i_{hp_k}, a inclinação da trajectória estável entre as variáveis capital humano e o preço sombra do capital fisico; sendo i_{hp_h}, a inclinação da trajectória estável entre as variáveis capital humano e o preço sombra do capital humano e por fim i_{hk} a inclinação da trajectória estável entre as variáveis capital humano e capital fisico. Estas trajectórias são dadas por:

$$i_{hp_k} = -\infty \Rightarrow \dot{p}_k = -\infty.\dot{h}$$

$$i_{hp_h} = \infty \Rightarrow \dot{p}_h = \infty.\dot{h}$$

$$i_{hk} = \infty \Rightarrow \dot{k} = \infty.\dot{h}$$

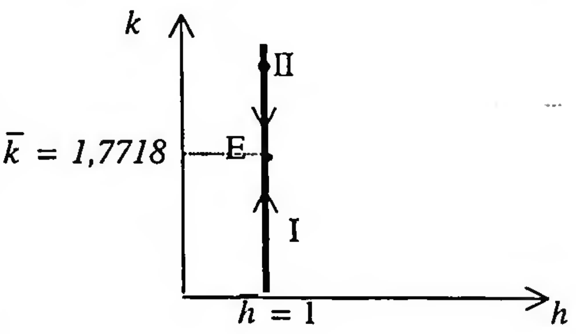
É com base nestes valores, que representam, os declives encontrados para as separatrizes estáveis, que vamos representar as inclinações da trajectória sela.

A inclinação da trajectória sela que relaciona as variáveis capital humano e o preço sombra do capital fixo está representada na figura 4.

De igual modo, a inclinação da trajectória sela que relaciona as variáveis capital humano e o respectivo preço sombra está representada na figura 5.

A inclinação da trajectória sela que relaciona as variáveis capital humano e o capital fixo está representada na figura 6.

FIGURA 4-Trajectória estável entre as variáveis *h* e k

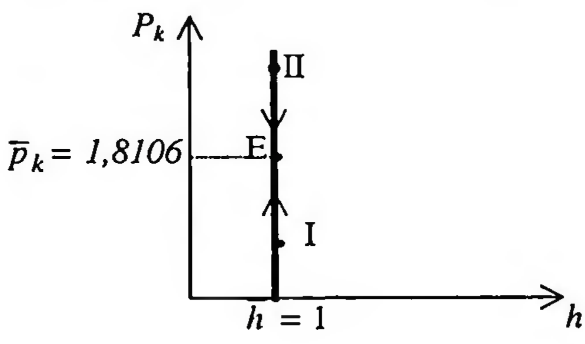


A Figura 4, representa a trajectória estável (S) entre o capital humano *h,* e o capital físico k. O ponto *E* representa o ponto de equilíbrio, para o qual tende a nossa economia. Esta trajectória estável (S) tem uma inclinação de infinito, o que significa que a trajectória estável passa sempre pelo capital humano de equilíbrio, nunca se alterando o valor da variável predeterminada, ***h***. A trajectória estável encontra-se, sempre no ponto em que a variável capital humano está na situação de equilíbrio da economia.

Se o ponto de partida não estiver no estado de equilíbrio, e situando-se no ponto I, tem de se verificar um aumento da acumulação de capital físico. Mantendo-se estável e fixo o nível de capital humano, tem de verificar-se um aumento da quantidade de capital físico a usar no processo produtivo.

Se o ponto inicial da nossa economia for o ponto II verifica-se o efeito oposto e assiste-se a um processo de desinvestimento em capital fixo.

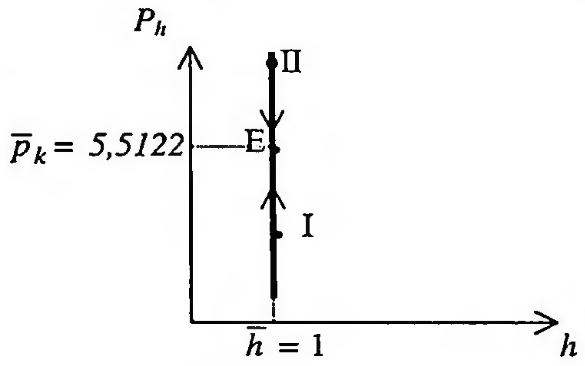
FIGURA 5-Trajectória estável entre as variáveis *h* e p_k



A Figura 5, representa a trajectória estável (S) entre o capital humano h, e o preço sombra do capital físico P_k. O ponto E representa o ponto de equilíbrio, para o qual tende a nossa economia. Esta trajectória estável (S) tem uma inclinação de infinito, o que significa que a trajectória estável passa sempre pelo capital humano de equilíbrio, nunca se alterando o valor da variável predeterminada, h. A trajectória estável encontra-se quando a variável capital humano está na situação de equilíbrio da economia, tal como para as variáveis anteriores.

Se o ponto de partida não estiver no estado de equilíbrio e se situar no ponto I, tem de verificar-se um aumento no preço sombra do capital físico P_k, mantendo-se estável e fixo o nível de capital humano. Se o ponto inicial da nossa economia for o ponto II verifica-se o efeito oposto.

FIGURA 6-Trajectória estável entre as variáveis h e p_h



Finalmente, a Figura 6, representa a trajectória estável (S) entre o capital humano h, e o preço sombra do capital humano P_h. O ponto E representa o ponto de equilíbrio para o qual tende a nossa economia. Esta trajectória estável (S) tem uma inclinação de infinito, o que significa que a trajectória estável passa sempre pelo capital humano de equilíbrio, nunca se alterando o valor da variável predeterminada, h.

5. COMPARAÇÃO DOS MODELOS

A resolução do modelo, com duas versões alternativas, procurou evidenciar como a afectação de capital público, a cada sector de actividade (ao sector produtivo ou ao sector educativo) poderia ou não, ter influência na taxa de crescimento de longo prazo, desta economia simplificada. Na resolução dos modelos, para realizarmos o estudo da dinâmica comparativa local do modelo, na proximidade do estado estacionário, recorremos a simulação numérica, embora este método envolva a perda de algum grau de generalidade, permite maior clareza nos resultados.

Para podermos comparar os modelos, quando fizemos a simulação numérica procurámos manter valores semelhantes para os parâmetros do modelo. As excepções resultaram da impossibilidade de se manterem esses parâmetros, nomeadamente o "*share*" do capital público que foi usado na versão do modelo, com uso de capital público exclusivamente no sector educativo. Nesta versão, com o capital público exclusivamente no sector educativo, tivemos de considerar o "*share*" do capital público a usar neste sector.

Na versão do modelo com uso de capital público exclusivamente no sector produtivo, tivemos de considerar o "*share*" do capital público a usar nesse sector.

Pela resolução dos modelos, verificámos, no estudo da dinâmica local do modelo, que ambos apresentavam as características típicas dos modelos de crescimento endógeno, tipo Uzawa-Lucas. Nomeadamente, a matriz Jacobiana, apresentava nas duas versões do modelo, determinante nulo. A dinâmica comparativa local, que foi realizada com recurso aos valores próprios dessa matriz, apresentava em ambas as versões, um valor próprio nulo, um valor próprio negativo e dois valores próprios positivos.

A existência de apenas um valor próprio negativo, um nulo, e dois positivos, vem confirmar que os modelos tem as características típicas dos modelos de crescimento endógeno, aos quais corresponde uma situação de bifurcação local, na qual, o braço estável é unidimensional, a que corresponde uma trajectória de equilíbrio com a configuração de uma recta.

Os sistemas definem um equilíbrio ponto sela[40] , com uma trajectória estável de dimensão unitária.

Como no modelo desenvolvido por Glomm e Ravikumar(1995), com características semelhantes às do nosso modelo, nomeadamente a aplicação de capital público nos dois sectores apresentados, os quais também apresentam características similares com os modelos de crescimento endógeno.

Relativamente à inclinação das trajectórias estáveis dos modelos, verifica-se no modelo em que o capital público é usado no sector educativo, que existe uma inclinação positiva, entre o capital humano e o preço sombra do capital físico. Constata-se existir uma inclinação negativa nas relações entre capital humano e capital físico, assim como entre capital humano e preço sombra do capital humano.

No modelo em que o capital público é aplicado no sector produtivo as trajectórias estáveis tem uma inclinação infinita. A trajectória estável coincide com o valor de equilíbrio do capital humano.

Pela simulação numérica do nosso modelo, obtivemos os valores de equilíbrio para as diversas variáveis, na situação de crescimento equilibrado, as quais são apresentadas no quadro seguinte:

[40] A interpretação de equilíbrio ponto sela que seguimos, é a interpretação usada por Gomes(1996-b) .Esta é apresentada em Barro e Sala-i-Martin(1995) no seu apêndice matemático. Segundo esta interpretação, o equilíbrio ponto sela corresponde a qualquer situação, na qual o sistema não é globalmente estável, com valores próprios todos negativos, ou globalmente instável com valores próprios todos positivos.

Quadro1- Valores de equilíbrio na situação de "steady state"

VARIÁVEIS	Modelo com aplicação do capital público no sector educativo	Modelo com aplicação do capital público no sector produtivo
γ	0,026	0,025
$\bar{k}$	0,8406	1,7718
$\bar{g}$	0,291	0,2625
$\bar{c}$	0,5602	0,7432
$\bar{y}$	1,1641	1,0499
$\bar{y}_h$	0,026	0,025
$\bar{p}_k$	3,186	1,8106
$\bar{p}_h$	2,092	5,5122

As taxas de crescimento de longo prazo das nossas variáveis, apresentam valores muito próximos, para ambas as versões. Estes valores poderão indicar, que a aplicação do capital público directamente no sector produtivo, ou no sector educativo, conduzem a resultados semelhantes em termos de crescimento económico.

Apesar do capital público, aplicado na educação, não criar condições para o aumento da produção de bens físicos no curto prazo, cria condições para o aumento do capital humano. Isto é a qualificação da mão de obra, uma variável fundamental para o desenvolvimento económico, que eventualmente poderá permitir um crescimento económico sustentado. Por outro lado, não podemos desprezar o papel das infraestruturas, que desempenham um função impar, na criação de condições para a instalação e crescimento das nossas empresas.

Não podemos contudo, esquecer que o uso do capital público no sector educativo eleva a produtividade em ambos os sectores, embora a aplicação de capital público no sector produtor de capital físico, eleve apenas a produtividade desse sector, os modelos não são simétricos.

6. CONCLUSÃO

Procurámos neste trabalho avaliar a forma como a escolha da aplicação dos recursos públicos, na formação de capital público nos pode conduzir a diferentes resultados. Para avaliar o papel do Estado no crescimento económico, escolhemos um modelo de crescimento endógeno numa economia fechada.

Para tentar explicar a forma como a afectação dos gastos públicos, realizados nos diferentes sectores de actividade da economia, pode contribuir de forma diferenciada para o crescimento económico, foi construído um modelo de optimização intertemporal, em que as famílias, escolhem os níveis de consumo e de poupança que maximizam a sua utilidade dinástica, sujeito a uma restrição orçamental intertemporal.

Ao considerámos uma economia com dois sectores diferenciados, o sector educativo e o sector produtivo, admitindo tecnologias diferentes e assim funções de produção funcionalmente diferenciadas. Introduzindo-se nessas funções de produção um novo *input* de produção, o nível de investimento em infraestruturas públicas.

Com o objectivo de testar o efeito que as diferentes políticas económicas possam ter no crescimento económico de longo prazo, socorremo-nos de um modelo de crescimento bi-sectorial: o sector produtor de capital humano, e o sector produtor de bens físicos. O capital público é utilizado indiscriminadamente nos dois sectores de actividade e contribui desse modo directamente para a produção de ambos os sectores.

Foram apresentadas duas versões simplificadas do modelo geral, em que se admitiu a realização de investimento em capital público, quer no sector educativo, quer no sector produtivo. A sua resolução conduziu a um sistema de equações canónicas, que permitiu construir um sistema linearizado, a partir do qual se analisou a taxa de crescimento de longo prazo, e a caracterização do estado de equilíbrio. Para tal recorremos a uma simulação numérica, atribuindo diferentes valores para os parâmetros exógenos.

Os resultados conseguidos por esta simulação numérica, deverão ser interpretados com algum cuidado uma vez que os valores atribuídos aos parâmetros do modelo dificultam a sua generalização. Saliente-se, contudo, que o estudo da dinâmica comparativa local por simulação numérica possibilita uma maior clareza nos resultados obtidos.

Verificou-se que as taxas de crescimento de longo prazo, das variáveis do nosso modelo, apresentam valores semelhantes em ambas as versões do modelo, o que poderá indicar, que a aplicação do capital público directamente no sector produtivo, ou no sector educativo conduzem a resultados semelhantes. Apesar, do capital público aplicado na educação não ser um factor produtivo do sector produtor de bens transaccionáveis, ele cria condições para o aumento do capital humano, que é uma variável fundamental para qualquer sector económico.

No que diz respeito à dinâmica local dos modelos, verificámos que apresentavam as características típicas dos modelos de crescimento endógeno. Aponta nesse sentido os resultados dos valores próprios do sistema. Este define um equilíbrio ponto sela, com apenas um valor próprio negativo, um nulo e dois positivos. O que corresponde a uma situação de bifurcação local, em que o braço estável é unidimensional e que corresponde a uma trajectória de equilíbrio com a configuração de uma recta.

Este trabalho não procurou esgotar todo o tipo de análises sobre o papel do Estado no crescimento económico de longo prazo. Pelo contrario, deixa em aberto um conjunto de especificações que estudos posteriores possam assumir, nomeadamente, a possibilidade do governo se endividar nos mercados financeiros, as restrições dos instrumentos políticos, o efeito de variações na população e a consideração de uma economia aberta ao exterior com coordenação de políticas económicas.

ANEXO I

Normalização do modelo original

O modelo por nós apresentado na secção 2, apresenta uma taxa de crescimento positiva. Para nós procedermos ao estudo da dinâmica comparativa local do modelo, é necessário que n as variáveis não cresçam. Como no modelo já verificámos que as variáveis crescem a uma taxa constante e positiva, estamos na presença de um modelo de crescimento endógeno e é necessário modificar o nosso problema, de forma a que as variáveis C, K, Y, H e G tenham uma taxa de crescimento de equilíbrio nulo. Ou seja um modelo em que as variáveis não tenham tendência, *trend* e é necessário normalizar estas variáveis.

Na situação de crescimento endógeno, a dinâmica local do modelo não pode ser analisada, uma vez que a metodologia a usar para o estudo da dinâmica local (o cálculo de trajectórias de equilíbrio, com base nos vectores próprios correspondentes aos valores próprios negativos associados à matriz Jacobiana) é apenas válida para a situação em que, no estado de equilíbrio, as variáveis endógenas do modelo têm um crescimento nulo.

Uma vez que já verificámos que as taxas de crescimento de equilíbrio, γ, são constantes e iguais para todos os agregados, de forma que:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{H}}{H} = \frac{\dot{G}}{G} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{Y}_h}{Y_h} = \frac{\dot{C}}{C} = \gamma \tag{A.1}$$

Conclui-se que estas variáveis podem ser transformadas, por um processo de normalização, em variáveis de crescimento nulo, no equilíbrio, de forma que as novas variáveis, k, h, g, y, y_h e c, cresçam a taxas nulas, de tal modo que:

$$k = K.e^{-\gamma.t} \Rightarrow K = k.e^{\gamma.t} \tag{A.2}$$

$$h = H.e^{-\gamma.t} \Rightarrow H = h.e^{\gamma.t} \tag{A.3}$$

$$g = G.e^{-\gamma.t} \Rightarrow G = g.e^{\gamma.t} \tag{A.4}$$

$$y = Y.e^{-\gamma.t} \Rightarrow Y = y.e^{\gamma.t} \tag{A.5}$$

$$y_h = Y_h.e^{-\gamma.t} \Rightarrow Y_h = y_h.e^{\gamma.t} \tag{A.6}$$

$$c = C.e^{-\gamma.t} \Rightarrow C = c.e^{\gamma.t} \tag{A.7}$$

Facilmente se conclui que estas novas variáveis tem as mesmas propriedades que os modelos de crescimento nulo, como acontece nos modelos de cariz neoclássico.

Todas as variáveis do nosso modelo crescem a uma taxa de crescimento de longo prazo, γ, taxa esta que deverá ser positiva para uma situação de crescimento endógeno. Contudo, um modelo de crescimento endógeno que utilize as variáveis normalizadas, em alternativa às variáveis originais, isto é, as variáveis estacionárias, pode ser objecto de estudo como acontece nos modelo de cariz neoclássico.

Para proceder à normalização do problema, vamos substituir as variáveis C, K, Y, Y_h, H e G pelas respectivas variáveis normalizadas c, k, y, y_h, h, e g. Para proceder á normalização é necessário averiguar se a função de utilidade e as funções de produção apresentadas são homogéneas e qual o seu grau de homogeneidade.

A função utilidade é homogénea de grau (1-θ) de forma que:

$$U(C) = U(c.e^{\gamma.t}) = U(c).e^{\gamma.t}.e^{(1-\theta)} = U(c).e^{\gamma.(1-\theta).t} \tag{A.8}$$

e as funções de produção são homogéneas de grau um.

Após a identificação das variáveis normalizadas, é necessário substituí-las no problema de óptimo que estamos a estudar, originando um modelo reformulado, modelo esse que corresponde a um estado de equilíbrio $\left(\bar{c}, \bar{u}, \bar{k}, \bar{g}, \bar{h}, \bar{y}, \bar{y}_h\right)$ em que as taxas de crescimento das variáveis são nulas, tal que:

$$\frac{\dot{\bar{c}}}{\bar{c}} = \frac{\dot{\bar{u}}}{\bar{u}} = \frac{\dot{\bar{k}}}{\bar{k}} = \frac{\dot{\bar{g}}}{\bar{g}} = \frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}} = \frac{\dot{\bar{y}}}{\bar{y}} = \frac{\dot{\bar{y}}_h}{\bar{y}_h} = 0 \tag{A.9}$$

E vamos começar por substituir as variáveis normalizadas na função utilidade. Da expressão (1.1), e substituindo c nessa função, temos:

$$U(C) = \frac{(c.e^{\gamma.t})^{1-\theta}}{1-\theta} = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}.e^{(1-\theta).\gamma.t} \tag{A.10}$$

como pretendemos maximizar U_0, substituindo nessa expressão a função utilidade já normalizada, de modo que:

$$U_0 = \int_0^{\infty} \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}.e^{-[\rho-(1-\theta).\gamma].t}\,dt \tag{A.11}$$

Como se verifica facilmente, na nova expressão para a utilidade total, deu-se uma alteração significativa no factor de desconto.

O mesmo se passa para o problema da firma, o problema intertemporal da firma representativa consiste em maximizar o valor presente do fluxo intertemporal de *cash flows*, escolhendo os níveis óptimos de investimento e de produção. O nosso modelo terá de ser normalizado de forma a que o fluxo intertemporal de *cash flow* tenha uma taxa de crescimento nula.

$$CF = cf.e^{\gamma.t} \tag{A.12}$$

Substituindo no problema que pretendemos optimizar, temos assim

$$CF_0 = \int_0^{+\infty} cf.e^{\gamma.t}.e^{-r.t}.dt = \int_0^{+\infty} cf.e^{-(r-\gamma).t}.dt \tag{P.2}$$

sendo $CF=Y\text{-}I$ de forma que as mesmas variáveis depois de normalizadas assumem a forma $cf=y\text{-}i$

Normalização das restrições dos recursos

A restrição de recursos correspondente ao capital físico é dada no modelo a optimizar por :

$$\dot{K} = A_K.\left[K^{\alpha}.(u.H)^{1-\alpha}\right]^{\theta_1}.(v.G)^{1-\theta_1}.(1-\tau) - C \tag{A.13}$$

Pelas relações estabelecidas entre as variáveis K, H, G e C e as correspondentes variáveis normalizadas, k, h,, y, g e c, que estão patentes nas expressões (A.2) a (A.7), a restrição dos recursos será equivalente a:

$$\dot{\left(k.e^{\gamma.t}\right)} = A_K.\left[\left(k.e^{\gamma.t}\right)^{\alpha}.(u.h.e^{\gamma.t})^{1-\alpha}\right]^{\theta_1}.\left(v.g.e^{\gamma.t}\right)^{1-\theta_1}.\left(1-\tau\right) - c.e^{\gamma.t} \tag{A.14}$$

O primeiro membro da equação diferencial anterior pode ser desenvolvido do seguinte modo:

$$\dot{\left(k.e^{\gamma.t}\right)} = \dot{k}.e^{\gamma.t} + \gamma.k.e^{\gamma.t} = \left(\dot{k} + k.\gamma\right).e^{\gamma.t} \tag{A.15}$$

O primeiro termo do segundo membro, da equação (A.14), após algumas pequenas substituições algébricas, vem:

$$A_K.\left[\left(k.e^{\gamma.t}\right)^{\alpha}.(u.h.e^{\gamma.t})^{1-\alpha}\right]^{\theta_1}.\left(v.g.e^{\gamma.t}\right)^{1-\theta_1}.(1-\tau) = \left[(k)^{\alpha}.(u.h)^{1-\alpha}\right]^{\theta_1}.\left(v.g\right)^{1-\theta_1}.e^{\gamma.t}.(1-\tau)$$

(A.16)

substituindo os resultados encontrados em (A.16) e em (A.15) na expressão dos recursos normalizada, a equação (A.14) e simplificando, obtemos desta forma:

$$\dot{k} + \gamma . k = A_K . \left[(k)^{\alpha} . (u . h)^{1-\alpha} \right]^{\theta_1} . \left(v . g \right)^{1-\theta_1} . (1 - \tau) - c \qquad \text{(A.17)}$$

daqui se retira directamente a nova restrição de recursos referente ao factor capital físico

$$\dot{k} = A_K . \left[(k)^{\alpha} . (u . h)^{1-\alpha} \right]^{\theta_1} . \left(v . g \right)^{1-\theta_1} . (1 - \tau) - c - \gamma . k \qquad \text{(A.18)}$$

Relativamente à segunda restrição de recursos, respeitante ao capital humano é dada por

$$\dot{H} = A_h . \left[(1-u) . H \right]^{\theta_2} . \left[(1-v) . G \right]^{1-\theta_2} \qquad \text{(A.19)}$$

substituindo pelas variáveis normalizadas, h e g, que estão representadas pelas equações , após as substituições a restrição de recursos com variáveis normalizadas assume a forma de:

$$\dot{\left(h . e^{\gamma . t} \right)} = A_K . \left[(1-u) . h . e^{\gamma . t} \right]^{\theta_2} . \left[(1-v) . g . e^{\gamma . t} \right]^{1-\theta_2} \qquad \text{(A.20)}$$

Diferenciando o primeiro membro da equação anterior em ordem ao tempo, verifica-se que esta assume a forma:

$$\dot{\left(h . e^{\gamma . t} \right)} = \dot{h} . e^{\gamma . t} + h . g . e^{\gamma . t} \qquad \text{(A.21)}$$

Substituindo este resultado na equação A.20 e simplificando a expressão, temos assim o novo valor para a restrição do recurso capital humano, após a normalização:

$$\dot{h} + \gamma . h = A_K . \left[(1-u) . h \right]^{\theta_2} . \left[(1-v) . g \right]^{1-\theta_2} \qquad \text{(A.21)}$$

ordenando a expressão temos a nova restrição do capital humano após a normalização, que assume a seguinte forma:

$$\dot{h} = A_K . \left[(1-u) . h \right]^{\theta_2} . \left[(1-v) . g \right]^{1-\theta_2} - \gamma . h \qquad \text{(A.22)}$$

BIBLIOGRAFIA

Aschauer, D. (1989), "Is Public Expenditure Productive?", *Journal of Monetary Economics* , 23, pp.177-200.

Aschauer, D. (1992), "Infrastructure, Competitiveness, and the Global Economy", in:D.Gibson, G. Kozmetsky e R. Smilor (ed.), *The Technopolis Phenomenon, Smart Cities, Fast Systems, Global Networks* , Rowman & Littlefield Publishers,inc.

Barro, Robert (1990), "Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth", *Journal of Political Economy,* 98(5), pp. 103-125.

Barro, Robert (1991), "Economic Growth in a cross section of countries", The *Quarterly Journal of Economics,* May, pp.407-443.

Barro, Robert (1993), *Economic Growth and Convergence,* Occasional papers (International Center for Economic Growth), 46, ICS Press, San Francisco, California.

Barro, Robert (1996), "Determinants of Economic Growth - a Cross - Country Empirical Study", *NBER Working Paper Series,* n° 5698.

Barro, Robert e Sala-i-Martin, Xavier (1991), "Convergence across states and regions", *Brookings papers on economic activity,* 1, pp.107-158.

Barro, Robert e Sala-i-Martin, Xavier (1992), "Public Finance in Models of Economic Growth", *Review of Economic Studies,* 59, pp.645-661.

Barro, Robert e Sala-i-Martin, Xavier (1995), "Technological diffusion, convergence and Growth", *NBER Working Paper Series,* n°5151.

Barro, Robert e Sala-i-Martin, Xavier (1995), *Economic Growth,* McGraw-Hill, New York.

Baxter, M. e King, R. (1993), "Fiscal Policy in General Equilibrium", *The American Economic Review,* 83 (3), pp.315-334.

Belbute, José (1998), "Acumulação de Capital num Contexto de Interacções entre Economia e Ambiente", *Estudos de Economia,* Vol. XVIII, n°4, Outubro.

Berndt, E. e Hansson, B. (1992), "Measuring the Contribution of Public Infrastructure Capital in Sweden." *Scandinavian Journal of Economics,* Supplement , 94, pp. S.151-72.

Benabou, R. (1994), "Education, income distribution and growth: the local connection", *NBER Working Paper Series,* n° 4798 .

Biehl, D. (1991), "The Role of Infrastructure in Regional Development", in: R. W. Vickerman (ed.), *Infrastructure and Regional Development.*

Bleaney, Michael F. (1996), "Macroeconomic stability, investment and growth in developing countries", *Journal of Development Economics*, 48, pp.461-477.

Brito, Paulo (1997), "Local Dynamics for Planar Optimal Control Problems: a Complete Characterization", Documento de Trabalho nº7 do Departamento de Economia do *Instituto Superior de Economia e Gestão*, Outubro.

Brito, Paulo e Pereira, A. (1998) , "Endogenous growth and fluctuations in an economy with a housing sector", Paper presented at the *53rd Econometric Society European Meeting,* Berlin, 29 August-2 September.

Caballé, J. e Santos, M. (1993), "On Endogenous Growth with Physical and Human Capital", *Journal of Political Economy*, 101(6),pp. 1042-1067.

Carlino, G., Mills, L. (1996), "Convergence and the U.S. STATES: A Time-Series Analysis", *Journal of Regional Science*, Vol.36, Nº4, pp. 597-616.

Carlino, G., Mills, L. (1996), "Testing neoclassical convergence in regional incomes and earnings", *Regional Science and Urban Economics*, 26, pp.565-590.

Cazzavillan, G. (1996), "Public Spending, Endogenous Growth, and Endogenous Fluctuations", *Journal of Economic Theory,* 71, pp.394-415.

Corsetti, G. e Roubini, N.(1996), "Optimal Government Spending and Taxation in Endogenous Growth Models", *NBER Working Paper Series*, nº 5851.

Crafts, N. (1996), "Endogenous Growth: lessons for and economic History", *CEPR Discussion paper series,* Nº1333.

Crihfield,J. e MCGuire T.(1997) , "Infrastructure, economic development, and public policy", *Regional Science and Urban Economics*, 27, pp.113-116.

Cullison, William (1993), "Public Investment and Economic Growth", Federal Reserve Bank of Richmond *Economic Quarterly*, Volume 79/4 Fall, pp.19-33.

de la Fuente, Angel (1997), "Fiscal Policy and Growth in the OECD", *CEPR Discussion Paper* nº 1755.

de la Fuente, Angel (1997), "The empirics of growth and convergence: A selective review", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21,pp. 23-73.

De Long, J., Summers, L. (1993), "How strongly do developing economies benefit from equipment investment?, *Journal of Monetary Economics*, 32, pp. 395-415.

Devarajan, S., Swaroop, V. e Zou, H. (1996), "The composition of public expenditude and economic growth", *Journal of Monetary Economics*, 37, 313-344.

Easterly, W., King, R., Levine, R., Rebelo, S. (1993), "Policy, Technology Adoption and Growth", in: R. Solow, L. Pasinetti(ed.), *Economic Growth and the Structure of Long Term Development*, International Economic Association Conference.

Easterly, William e Rebelo, Sérgio (1993), "Fiscal Policy and Economic Growth: An Empirical Investigation", *Journal of Monetary Economics*, 32, pp. 417-458.

Eberts, R.W. (1990), "Public Infrastructure and Regional Economic Development", *Economic Review*, nº 26, pp.15-27, Federal Reserve bank of Cleveland (Quarter 1).

Fischer, S.(1993) , "The role of macroeconomic factors in growth", *Journal of Monetary Economics*, 32, pp.485-512.

Futagami, K. , Morita, Y. e Shibata, A. (1993), "Dynamic Analysis of an Endogenous Growth Model with Public Capital", *Scandinavian Journal of Economics*, 93(4),pp. 607-625.

Garcia-Milá, T., Mcguire, T. (1992), "The Contribution of Publicly Provided Inputs to States' Economies" , *Regional Science and Urban Economics*, 22(2), pp.229-42.

Garcia-Milá, T., Mcguire, T. (1993), "Industrial mix as a factor in the growth and variability of states economies", *Regional Science and Urban Economics*, 23, pp.731-748.

Glomm, G. e Ravikumar, B. (1994), "Public investment in infrastructure in a simple growth model", ", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, pp.1173-1187.

Glomm, G. e Ravikumar, B. (1997), "Productive government expenditures and long-run growth ", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, pp.183-204.

Gomes, José (1996), "O Impacto do Investimento Público sobre a Taxa de Câmbio Real, o Investimento Privado, o Produto e o Emprego: Uma Abordagem Empírica do Caso Português", Dissertação apresentada no *Instituto Superior de Economia e Gestão*, Lisboa.

Gomes, Orlando (1996), "O Debate Crescimento Neo-Clássico, Crescimento Endógeno num Modelo de Crescimento Bi-Sectorial", Dissertação apresentada no *Instituto Superior de Economia e Gestão*, Lisboa.

Gomes, Orlando (1997), "O Debate Crescimento Neoclássico/ Crescimento Endógeno- uma generalização do Modelo Uzawa-Lucas", *Estudos de Economia*, vol. XVI-XVII, N.º 2, pp.137-155.

Gramlich, E. (1994), "Infrastructure Investment: A Review Essay", *Journal of Economic Literature*, Vol XXXII, September, pp.1176-1196.

Greenstein, S., Lizardo, M. e Spiller, P (1997), "The Evolution of Advanced Large Scale Information Infrastructure in the United States", *NBER Working Paper Series*, nº 5929.

Greenwood, J., Hercowitz, Z. e Krusell, Per, (1997), "Long –Run Implications of Investment-Specific Technological Change", *The American Economic Review*, 87(3), pp.342-362.

Hadjimichael, M., Ghura, D. (1995), " Public Policies and Private Savings and Investment in Sub-Saharan Africa- An empirical investigation", *IMF Working paper*, Nº19.

Hawtrey, K. M., (1995), "Fiscal Settings and the Steady State Growth Path", *The Economic Record*, Vol.71, Nº215, December, pp.354-366.

Holtz-Eakin, D. (1993), "Solow and the States: Capital Accumulation, Productivity, and Economic Growth", *National Tax Journal XLVI*, 425-439.

Holtz-Eakin, D. (1994), "Public Sector Capital and the Productivity Puzzle", *Review of economics and Statistics*, February, 76(1), pp.12-21.

Holtz-Eakin, D., Schwartz, A. E. (1995), "Infrastructure in a structural model of economic growth", *Regional Science and Urban Economics*, 25, pp.131-151.

Holtz-Eakin, D., Schwartz, A. E. (1995), "Spatial productivity spillovers from public infrastructure: evidence from state highways", *NBER Working paper* ,5004.

Hulten, Charles (1996), "Infrastructure capital and economic growth: how hell you use it may be more important than how much you have", *NBER Working paper* ,5847.

Hulten,C. e Schwab, R. (1991), "Public Capital Formation and the Growth of Regional Manufacturing Industries", *National Tax Journal*, December,44(4), pp. 121-34.

Hulten,C. e Schwab, R. (1997), "A fiscal federalism approach to infrastructure policy", *Regional Science and Urban Economics*, 27, pp.139-159.

Jones, L. Manuelli, R. (1997), "Endogenous growth theory: An introduction", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, pp.1-22.

Jones, L. e Manuelli, R. (1997), "The sources of growth", *Journal of Economic Dynamics and Control,* 21, pp.75-114.

Jones, L., Manuelli, R. e Rossi, P. (1993), "Optimal Taxation in Models of Endogenous Growth", *Journal of Political Economy,* 101, June, 485-517.

King, R . , Plosser, C. e Rebelo, S. (1988), "Production, Growth and Business Cycles: I. The Basic Neoclassical Model", *Journal of Monetary Economics,* 21, 2/3, pp.195-232.

Ladrón-de-Guevara, A., Ortigueira, S. e Santos, M. (1997), "Equilibrium dynamics in two-sector models of endogenous growth", *Journal of Economic Dynamics and Control,* 21, pp.115-143.

Lopes, João C. F. (1995), Crescimento Económico e Convergência: Questões Teóricas, Métodos Empíricos e Uma Abordagem ao Caso Português, Dissertação apresentada no *Instituto Superior de Economia e Gestão,* Lisboa.

Lucas, Robert E. (1988), "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics* , 22, pp.1-43;

Lynde, C. e Richmond, J.(1993), "Public Capital and Total Factor Productivity", *International Economic Review,*Vol.34, N°2, May,pp.401-414.

Mankiw, N., Romer, D., Weil, D. (1992), "A contribution to the empirics of economic growth ", *Quarterly Journal of Economics,* May, pp.407-437.

Mayeres, I. e Proost, S. (1997), "Optimal Tax and Public Investment Rules for Congestion Type of Externalities", *Scandinavian Journal of Economics,* 99(2),pp. 261-279.

McCallum, Bennett (1996), "Neoclassical vs endogenous growth analysis an overview", *NBER Working Paper* ,N°5844.

Mohtadi, H. (1996), "Environment, growth, and optimal policy design", *Journal of Public Economics,* 63, pp.119-140.

Montiel, P. (1995), "Financial Policies and economic growth: Theory evidence and country specific experience from sub-Saharan Africa", in *AERC Special Paper,* 18, April.

Morrison, C. e Schwartz, A. (1992), "State Infrastructure and Productive Performance" , *NBER Working Paper,* n° 3981.

Morrison, C. e Schwartz, A. (1996), "State Infrastructure and Productive Performance", *The American Economic Review*,86 (5), pp.1095-1111.

Mulligan, Casey B., Sala-i- Martin, Xavier (1993), "Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth", *The Quarterly Journal of Economics*, August, 739-773.

Munnell, A. (1990), "Why has productivity growth declined? Productivity and public investment", *New England Economic Review*, Jan/Fev, 3-22 .

Naridi, M. e Mamuneas, T. (1994), "Infrastructure and Public R&D Investments, and the Growth of Factor Productivity in US Manufacturing Industries", *NBER Working Paper Series*, nº 4845.

Palivos, T. e Wang, P. (1996), "Spatial Agglomeration and endogenous growth", *Regional Science and Urban Economics*, 26, pp.645-669.

Pecorino, P. (1993), "Tax structure and growth in a model with human capital", *Journal of Public Economics*, 52,pp. 251-271.

Rama, M. (1993), "Rent seeking and economic growth -A theoretical model and some empirical evidence", *Journal of Development Economics*, 42, pp.35-50.

Ramey, Garey, Ramey, Valerie A. (1995), "Cross -Country Evidence on the Link Between Volatility and growth", *NBER Working Paper*, Nº4959.

Rauch, J. (1994), "Bureaucracy, Infrastructure, and Economic Growth: Evidence From U.S. Cities During the Progressive Era", *NBER Working Paper*, Nº4973.

Rebelo, Sérgio (1991),"Long-run policy analysis and Long-run Growth", *Journal of Political Economy*, vol 99, pp. 500-521.

Rebelo, Sérgio(1992), "Growth in Open Economics", *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 36, pp.6-46.

Romer, D. (1996), *Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill, New York.

Romer, Paul (1986), "Increasing Returns and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, vol 94, Nº 5, pp.1002-1037.

Romer, Paul (1987), "Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization", *American Economic Rview*, 77, 2 (May), pp. 56-62

Roubini, N. e Milesi-Ferretti, G. (1994), "Optimal Taxation of Human and Physical Capital in Endogenous Growth Models", *NBER Working Paper Series*, nº 4882.

Sachs, J. e Warner, A. (1995), "Economic convergence and economic policies", *NBER Working Paper Series*, nº 5039.

Sala-i-Martin, Xavier (1996), "Regional cohesion: Evidence and theories of regional growth and convergence", *European Economic Review*, 40, pp.1325-1352.

Samuelson, Paul (1954), "The Pure Theory of Public Expenditure", *Review of Economics and Statistics*, 36(November),387-389

Solow, Robert (1956), "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics,*70, 1(February), pp.65-94.

Solow, Robert (1991), "Growth Theory", in: D. Greenaway, M. Bleaney and I. Stewart (ed.), *Companion to Contemporary Economic Thought.*

Stern, N. (1991), "The Determinants of Growth", *The Economic Journal*, 101, January, pp. 122-133.

Stiglitz, Joseph (1988), *Economics of the Public Sector*, Second Edition, W.W. Norton & Company, New York.

Turnovsky, S. (1996), "Fiscal Policy, Adjustment Costs, and Endogenous Growth" *Oxford Economic Papers*, 48, 361-381.

Turnovsky, S. e Fisher, W. (1995), "The composition of government expenditure and its consequences for macroeconomic performance", *Journal of Economic Dynamics and Control,* 19, pp.747-786.

Uzawa, Hirofumi (1964), "Optimal Growth in a Two-Sector Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies*, 31(January), pp.1-24.

Uzawa, Hirofumi (1965), "Optimal Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth", International Economic Review, 6 (January), 18-31.

Vanoli, André (1995), "Reflections on Environmental Accounting Issues", *Review of Income and Wealth,* Series 41, Number 2, June, pp.113-137.

Villanueva, D. (1993), "Openness, human development, and fiscal policies: effects on Economic Growth and the Speed of Adjustment", *IMF Working Paper*, 59.

Zhu, Xiandong (1992), "Optimal Fiscal Policy in a Stochastic Growth Model", *Journal of Economic Theory*,58, December, 250-289.